

氏名（本籍地）	佐々木 優
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第 9776 号
学位授与年月日	令和 3年 3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	A study on maximal antipodal sets of compact symmetric spaces (コンパクト対称空間の極大対蹠集合に関する研究)

主査	筑波大学 准教授 理学博士 田崎博之
副査	筑波大学 教授 博士(理学) 井ノ口順一
副査	筑波大学 教授 博士(理学) 竹山美宏
副査	筑波大学 准教授 博士(理学) 丹下基生

論 文 の 要 旨

本論文は、コンパクト対称空間の極大対蹠集合の等質性の判定を行うために対蹠集合の連結性の概念を導入し、連結性による等質性の判定法を定式化している。また例外型コンパクト Lie 群 G_2 に関連したコンパクト対称空間において完全 Morse 関数を構成し、その臨界点集合が大対蹠集合になることを示している。

本論文のテーマであるコンパクト対称空間の対蹠集合の概念は、1988年に Chen-Nagano によって導入され、基本的な性質が調べられた。その後、コンパクト対称空間の中でも特によい性質を持っている対称 R 空間の場合に対蹠集合の濃度と位相不変量を結びつける竹内の研究成果があったが、それ以降はコンパクト Lie 群の場合に対応した概念になる基本 Abel 2 部分群の研究成果がいくつか発表される程度だった。ところが約10年前から多くの対蹠集合に関する研究成果が発表されるようになってきている。現在も対蹠集合に関する研究は発展途上である。

これまでにあまり注目を集めていなかった対蹠集合の等質性に佐々木氏は注目している。詳しく調べられている極大対蹠集合のうちで、いくつかは等質になっていることがわかっているものもあったが、一般的な等質性の判定法に関する研究は行われていなかった。その判定法を定式化するために、本論文では対蹠集合の連結性の概念を新たに導入している。これは、二点を通る最短閉測地線が存在するときその二点を連結であると定め、対蹠集合内の任意の二点が連結な点列で結ばれるときに連結と定める概念である。対蹠集合内の連結な二点を含む全測地的球面およびそこでの特別な位置にある大円、大円上の対蹠点の間の中点をとり、それらの中点の点対称から対蹠集合に作用する等長変換を構成している。さらにこの手法を適用することにより、極大対蹠集合が連結ならば等質であることを証明している。これは本論文の主定理の一つである。

本論文では主定理の適用例として、いくつかの対称空間のクラスの極大対蹠集合の連結性および等質性を判定している。まだ極大対蹠集合の全貌がわかっていない有向実 Grassmann 多様体への適用は、

すでに知られている限られた形の極大対蹠集合のみではあるが新しい知見が得られている。自明な極を除くと極地が一つだけのコンパクト対称空間の極大対蹠集合については、簡単な考察から極大対蹠集合の連結性さらに等質性を示している。対称 R 空間の極大対蹠集合は等質であることはすでに知られているが、連結性を示して等質性を再確認している。

本論文の例外型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ の部分では、例外型コンパクト Lie 群 G_2 から定まる $G_2/SO(4)$ を Euclid 空間に埋め込み、高さ関数を利用して完全 Morse 関数を構成している。さらにこの Morse 関数の顕著な性質は臨界点集合が極大対蹠集合になっているということである。これらの成果はこの対称空間の位相幾何学的性質と極大対蹠集合を直接結び付けるものである。この場合、極大対蹠集合は合同を除いて一意的であることが知られているので、大対蹠集合になる。手法は $G_2/SO(4)$ の八元数による具体的構成に基づいて、臨界点集合がわかるだけでなく各臨界点の指数も計算している。対称 R 空間がこのような Morse 関数に関する性質を持っていることはすでにわかっていたが、それ以外のコンパクト対称空間については現在でも全貌はわかっていない。

審 査 の 要 旨

[批評]

佐々木氏の導入した概念のうち、対蹠集合の二点の連結性は Riemann 幾何学的な概念であり、対蹠集合全体の連結性はグラフ理論と結びつく位相幾何学的・組合せ論的概念である。対蹠集合内の連結な二点を含む全測地的球面およびそこでの特別な位置にある大円、大円上の対蹠点の間の中点をとり、その点対称から対蹠集合に作用する等長変換を構成する手法は、対蹠集合の対称性の高さを利用した巧妙な手法であると評価できる。連結な二点という Riemann 幾何学的な概念と連結な点列を考えグラフを導入して対蹠集合の連結性を定める組合せ論的な概念が融合し、推移的に作用する変換群を構成して連結性から等質性を導く手法は今までにない新しい手法であり興味深い。これまであまり注目を集めていなかった極大対蹠集合の等質性は、極大対蹠集合の内在的な対称性と対称空間における外在的な対称性の高さを表していると考えることができ、今後の関連した研究の発展にも期待でき、さらにその発展の基礎にこの研究の成果はなると推測される。たとえば、いくつかの極大対蹠集合の系列がわかっているコンパクト対称空間に等質性の判定を適用することにより得られた結果や、自明な極を除くと極地が一つだけのコンパクト対称空間への適用結果などは今後も発展の余地が大いにある成果だと思われる。これらの観点から研究テーマとして極大対蹠集合の等質性を選んだことも評価できる。

佐々木氏は修士課程の頃から具体的なコンパクト対称空間の Morse 関数の構成を手掛けていて、対称 R 空間以外でも Morse 関数の臨界点集合が極大対蹠集合になる例を扱っている。今回の例外型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ の完全 Morse 関数の構成において、臨界点集合だけではなく各臨界点の指数も決定している点は、新しい成果であり評価できる。

[最終試験結果]

令和 3年 2月 16日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。