氏名(本籍地) 学 位 の種 類

学 位 記 番 学位授与年月日 学位授与の要件

審查研究科 学位論文題目 伊敷 喜斗

博士(理学)

博甲第 9775

令和 3年 3月25日

学位規則第4条第1項該当

数理物質科学研究科

On metric geometry of convergences and topological distributions of metric structures (距離構造の収束と位相的分布に関する距離空間の幾何学について)

主 査 副 査 副 査 筑波大学 教授 筑波大学 講師

博士 (理学) 博士(数理学) 井ノロ 順一 永野 幸一

筑波大学 教授 理学博士

川村 一宏 小野

副 杳

筑波大学 教授 博士(理学)

旨 論 文 \mathcal{O} 要

審査対象論文は、距離構造の収束と位相的分布に関する距離空間の幾何学について研究している。 本論文は、筆者が発表した四編の研究論文の内容を纏めた包括的な総合論文として執筆されている。 本論文における研究目的は、二つの主題に大別される。一つ目の主題はアソー次元と距離空間の収束 に関する研究である。一つ目の主題では、幾何学的次元の一つであるアソー次元と距離空間列の極限 空間として定式化される錐との関係が研究されている。二つ目の主題は距離関数の空間の中での幾何 学的性質の位相的分布の研究である。二つ目の主題では、距離化可能空間上の距離関数で元の位相 と同じ位相を生成するもの全体からなる距離空間において、二倍性質や一様不連結性などの幾何学的 性質を満たさない距離関数全体の位相的分布の様子がベールの範疇理論の視点から研究されている。

本論文における研究背景について述べる。一つ目の主題であるアソー次元と距離空間の収束に関する 研究背景は次の通りである。1980年代初頭に Assouad は距離空間のユークリッド空間への双リプシッツ 埋め込み可能性の一つの指標として、今日ではアソー次元と呼ばれる幾何学的次元を導入した。アソー 次元の概念は、フラクタル幾何学や距離空間の大域幾何学の観点から注目されており、それらの分野に おいて非自明な応用を提供し続けている。例えば、Mackay-Tyson(2010年)は、共形次元論の枠組み において距離空間のアソー次元を接錐のアソー次元を用いて下から評価した。さらに、その評価をもとに Fraser-Yu(2018年)は、ユークリッド空間の部分集合に対して全体空間と同じアソー次元を持つための 必要十分条件を記述した。この Fraser-Yu の研究は数論における Erdös-Turán 予想と関連している。

二つ目の主題である幾何学的性質の位相的分布に関する研究背景について述べる。現代の距離空間 の幾何学において重要な二倍性質や一様不連結性などの距離に関する幾何学的性質が、距離関数の 空間の中でどのような位相的分布を持つかという問いは、根源的で自然な問題である。例えば、Banach によれば、微分不可能な連続関数全体が関数空間の中で稠密で第一類集合の補集合になる。本論文 内のベールの範疇理論の視点による距離関数の族に対する位相的分布の研究は普遍的な主題である。 本論文における主な研究成果を紹介する。一つ目の主題であるアソー次元と距離空間の収束に関する研究として、次の二つの定理が述べられている。

- (1) Mackav-Tyson による接錐を用いたアソー次元の下からの評価の一般化定理。
- (2) Fraser-Yu による全体空間と同じアソー次元を持つ部分距離空間の特徴付けの一般化定理。

筆者は定理(1)の一般化において、距離空間に対して擬錐の概念を導入して、距離空間のアソー次元を擬錐のアソー次元を用いて下から評価した。また定理(2)の一般化において、タイリング空間の概念を導入して、タイリング空間に対して、全体空間と同じアソー次元を持つ部分距離空間の特徴付けを行った。

なお、三進カントール集合などの反復関数系によって構成されるフラクタル図形はタイリング空間になる。 二つ目の主題である距離関数の空間の中での幾何学的性質の位相的分布に関する研究として、まず 一般の距離化可能空間に対する次の三つの定理が述べられている。

- (3) 距離化可能空間上の距離関数の族に対する補間定理。
- (4) 距離化可能空間上の距離からなる距離空間における特異的な距離関数の族に対する稠密定理。
- (5) 定理(4) の局所版定理。

筆者が証明した補間定理(3)は Hausdorff による距離関数の拡張定理(1930年)の一般化としての側面を持っている。これらの三つの定理に加えて筆者は稠密定理(4)の系として、アソー次元が無限大である距離関数の族、すべてのコンパクト距離空間を擬錐に持つ距離関数の族、超距離関数でない距離関数の族、トレミー性を持たない距離関数の族、Gromov のサイクル条件を満たさない距離関数の族などが、距離からなる距離空間において稠密 G デルタ集合であることを示している。さらに、二つ目の主題として、超距離化可能空間に対する以下の五つの定理が述べられている。

- (6) 超距離空間の超ノルム付き加群への Arens-Eells 型等長埋め込み定理。
- (7) 超距離関数の Hausdorff 型拡張定理。
- (8) 超距離化可能空間上の距離関数の族に対する補間定理。
- (9)筆者の特異的な距離関数の族に対する稠密定理(4)の超距離空間版定理。
- (10) 定理(9) の局所版定理。

筆者が示した定理(6)は Arens-Eells の等長埋め込み定理(1956年)の超距離空間版である。定理(7)は Hausdorff の距離関数の拡張定理(1930年)の超距離空間版として定理(6)を用いて証明されている。 また定理(8)、定理(9)、定理(10)は、それぞれ定理(3)、定理(4)、定理(5)の超距離空間版である。

本論文の構成は次の通りである。第一章では、研究の背景とともに、本論文の主な定理と研究の要点が述べられている。第二章では本論文に必要な基礎的概念が説明されており、第三章では距離と超距離に関する性質が研究されている。第四章と第五章において、一つ目の主題が研究されており、第四章で定理(1)、第五章で定理(2)が証明されている。第六章と第七章において、二つ目の主題が研究されており、第六章で定理(3)、定理(4)、定理(5)、第七章で定理(6)から定理(10)までが証明されている。

審査の要旨

〔批評〕

審査対象論文は、距離構造の収束と位相的分布に関する距離空間の幾何学について研究している。

一つ目の主題であるアソー次元と距離空間の収束に関する研究として、Mackay-Tyson や Fraser-Yu による従来の研究を一般化する定理を証明している。続いて、二つ目の主題である幾何学的性質の位相的分布に関する研究として、距離化可能空間上の距離関数の族に対する補間定理や、距離からなる距離空間における特異的な距離関数の族に対する稠密定理、さらにその局所版を証明している。加えて、超距離空間の超ノルム付き加群への等長埋め込み定理や超距離関数の拡張定理を示した上で、直前に述べた補間定理、稠密定理、その局所版を超距離化可能空間の理論の枠組みで確立している。

本論文中の研究内容は数学的にすべて正しい。本論文中の研究の動機付けとして、一つ目の主題は Mackay-Tyson や Fraser-Yu による従来の研究の一般化であり、有意義な試みであるといえる。また二つ目の主題は、距離空間の幾何学的性質が、距離関数の空間の中でどのような位相的分布を持つか記述 する取り組みであり、普遍的な価値を有している。本論文中の定理は、距離空間の幾何学において独自の視点から新たな研究の方向性を示唆する成果であり、将来的にさらなる発展が期待できる。本論文は、高い水準にあり、数理物質科学研究科博士学位論文の基準に質量ともに十分達するものと判断する。

本論文中の研究内容が高く評価される理由として、以下の二つの根拠を挙げることができる。

第一の根拠は、既存の理論を効果的に演繹して、新たな概念を創出している卓越した洞察力である。一つ目の主題である Fraser-Yu によるユークリッド空間に対する研究の一般化を行う過程において、筆者は彼らの理論を演繹して擬錐やタイリング空間の概念を創出した。これらの概念によって、反復関数系によって構成されるフラクタル図形のアソー次元の理論の発展に本質的に貢献している。さらに、二つ目の主題である幾何学的性質の位相的分布に関する研究では、距離からなる距離空間における距離関数の族に対して伝播性質と呼ばれる独創的な概念を導入した。伝播性質の概念を用いて距離関数の様々な幾何学的性質を包括的に捉えることにより稠密定理を導くことに成功している。

第二の根拠は、いわゆる温故知新の研究姿勢に基づき、伝統ある一般位相空間論と距離空間の現代 幾何学を融合させることによって、新たな研究の方向性を示唆している点である。二つ目の主題において 得られた距離関数の補間定理は、Hausdorff の距離関数の拡張定理(1930年)の一般化としての側面を 持つ。筆者の補間定理の証明の要点の一つは Michael の連続選択子定理(1956年)を効果的に用いる 点である。また筆者の研究では、Toruńczyk(1972年)による Arens-Eells の等長埋め込み定理(1956年) を用いた Hausdorff の距離関数の拡張定理の証明の着想が鍵を握っている。従来の一般位相空間論の 発展を踏まえ、距離空間の現代幾何学に新たな研究の方向性を示唆している研究は高く評価できる。

本論文は、著者がこれまで発表した五編の研究論文のうち、二編目から五編目までの研究論文を纏め上げた包括的な総合論文である。二編目の研究論文は学術誌「Kodai Mathematical Journal」に掲載済みである。三編目の研究論文は学術誌「Journal of Fractal Geometry」に掲載決定済みである。四編目と五編目の研究論文は、各々相応しい学術誌に投稿中である。本論文中の定理(1)は二編目の研究論文、定理(2)は三編目の研究論文、定理(3)、定理(4)、定理(5)は四編目の研究論文、定理(6)から定理(10)までは五編目の研究論文に相当する。なお、本論文の参考論文である一編目の研究論文は学術誌「Annales de L'Institut Fourier」に掲載済みである。

なお、本論文で述べられている研究内容は、筆者が日本学術振興会特別研究員(DC1)として研究を 遂行して得られた研究成果である。

〔最終試験結果〕

令和3年2月16日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、 著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

[結論]

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。