Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit, III (Schluss).

Von Takeo NAKASAWA

(Eingegangen am 20 Juli, 1936)

§ 1. Einleitung.

In meinen früheren Arbeiten[1] habe ich eine Methode hergestellt und gezeigt, dass sich dieselbe für die Untersuchungen der linearen Abhängigkeit im projektiven Raumes mit Erfolg verwenden lässt. Die betrachtete Methode gehört zu einer algebraischen Symbolenrechnung, bei welcher sogar die einzige Relation d. h. "*gelten*" (natürlich auch die Verneinung "*nicht gelten*") für gewisse Reihen der Elementen aufgeprägt wird. Diese Rechnung habe ich deshalb nach G. Thomsen einen *Zyklenkalkül*[2] genannt.

In der vorliegenden Schrift handelt es sich

1. um den vollständigen Aufbau der projektiven Geometrie, indem die am Anfang meiner Arbeit aufgezählten Rechnungsprinzipien[3] als räumliche Axiome eines geometrischen Raumes gedeutet werden, und
2. um einige Anwendungen zum allgemeinen linearen Raum sowie Vergleichungen mit den verwandten Arbeiten von Herren G. Birkhoff und H. Whitney, und
3. um einen Unabhängigkeitsbeweis der dort angenommenen Axiomengruppe.

---

(1) T. Nakasawa, "*Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. I*", Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Sec. A, Vol. **2**, No. 43, (235-255); *II*, ibid., Sec. A, Vol. **3**, No. 51, (45-69). Wegen der Bequemlichkeit bezeichnen wir diese zwei Arbeiten bzw. kurz mit A1 und A2.

(2) Das Wort und die Idee des Zyklenkalküls geht wohl zum G. Thomsenschen Buch, "*Grundlagen der Elementargeometrie*", (Leipzig 1933) zurück. Unter Einfluss seiner Idee habe ich meine axiomatische Untersuchung der linearen Abhängigkeit angefangen.

(3) Vgl. S. 236 in A1, sowie S. 46 in A2!

Schreibt man nun für s Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_s$ des klassischen n-dimensionalen projektiven Raumes[4] $a_1 \cdots a_s = 0$ (gewöhnlich in kurzen Zeichen $a_1 \cdots a_s$), bzw. $a_1 \cdots a_s \neq 0$, je nachdem sie linear abhängig oder linear unabhängig sind, so gelten bekanntlich die folgenden Relationen[5];

1° $a \neq 0$, aa.

2° $a_1 \cdots a_s \rightarrow a_1 \cdots a_s x$, $(s \geqq 2)$.

3° $a_1 \cdots a_i \cdots a_s \rightarrow a_i \cdots a_1 \cdots a_s$, $(s \geqq i \geqq 2)$.

4° $xa_1 \cdots a_s$, $a_1 \cdots a_s y \rightarrow a_1 \cdots a_s$ oder $xa_1 \cdots a_{s-1} y$, $(s \geqq 1)$.

5° $a_1 \cdots a_s xy \rightarrow Ez$, $a_1 \cdots a_s z$, xyz, $(s \geqq 2)$.

Umgekehrt, wenn man diese fünf Sätze allein als Rechnungsprinzipien eines logischen Kalküls für den Elementen $a_1, a_2, \cdots, a_s, \cdots$ einer abstrakten Menge $\mathfrak{B}$ aufnimmt, dann lassen sich auf Grund der Axiome 1° bis 4° fast alle Eigenschaften der linearen Abhängigkeit herleiten, welche keine Existenzaussage enthalten. Wenn man ferner das letzte Axiom 5° dazu adjungiert, dann lässt sich der *Dualitätssatz* des linearen Raumes

$$\text{Rang}\,(A \frown B) + \text{Rang}\,(A \smile B) = \text{Rang}\,A + \text{Rang}\,B$$ [6]

beweisen, und sodann werden fast alle Sätze des projektiven Raumes beweisbar. Die Einzelheiten darüber habe ich bereits in meiner Arbeiten A1, A2 ausführlich betrachtet.

In der vorliegenden Schrift will ich die Unterschied klar herzustellen versuchen, welche Sätze der projektiven Geometrie aus den Axiomen 1°–5° herleitbar sind und welche nicht. Dafür scheint es mir zweckmässig das betrachtete 1°–5° Axiomensystem mit dem Veblen-Youngschen[7] zu vergleichen, da ich das letztere für eines der vollständigen und vorbildlichen Systeme halte.

---

(4) Vgl. z. B. Eugenio Bertini, "*Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume*", Wien, 1906, (1–23)!

(5) Betreffs der hier benutzten Bezeichnungen vergleiche S. 235 in A1 oder S. 45 in A2!

(6) Satz 29 auf S. 48 in A2.

(7) O. Veblen and J. W. Young, "*Projective geometry, I*", Boston, 1910, (1–30).

§ 2. Die Vergleichung mit dem Veblen, Youngschen System.

Definition: Es sei $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n linear unabhängige Elemente d. h. $a_1 \cdots a_n \neq 0$. Die Menge der allen Elementen x von $\mathfrak{B}$ derart, dass $a_1 \cdots a_n x = 0$ sind, nennen wir den von $a_1, a_2, \cdots, a_n$ erzeugten *linearen Raum* in $\mathfrak{B}$ vom Range n, in Zeichen $\mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n)$, und den Zyklus $a_1 \cdots a_n$ nennen wir die Basis des $\mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n)$. Insbesondere nennen wir den linearen Raum vom Range 1 bzw. 2 den *Punkt* bzw. die *Gerade*.

Dann bestehen die folgenden Sätze.

(i) Zwei Punkte $\mathfrak{R}(a)$, $\mathfrak{R}(b)$ stimmen dann und nur dann ein, wenn $ab = 0$.

(ii) Drei Punkte $\mathfrak{R}(a)$, $\mathfrak{R}(b)$, $\mathfrak{R}(c)$ liegen dann und nur dann auf einer einzigen Gerade, wenn $abc = 0$.

(iii) Zwei disjunkte Punkte $\mathfrak{R}(a)$, $\mathfrak{R}(b)$ bestimmen eine einzige Gerade $\mathfrak{R}(ab)$.

(iv) Zwei auf einer Gerade $\mathfrak{R}(ab)$ liegende disjunkte Punkte $\mathfrak{R}(x)$, $\mathfrak{R}(y)$ bestimmen dieselbe Gerade, d. h. $\mathfrak{R}(ab) = \mathfrak{R}(xy)$.

Die Beweise derselben finden sich im noch erweiterten Sinne bereits in A1.

(v) Wenn $\mathfrak{R}(a)$, $\mathfrak{R}(b)$, $\mathfrak{R}(c)$ nicht auf einer Gerade liegen, und $\mathfrak{R}(d)$ auf der Gerade $\mathfrak{R}(bc)$ liegt, und $\mathfrak{R}(e)$ auf der Gerade $\mathfrak{R}(ac)$ liegt, und noch $\mathfrak{R}(d) \neq \mathfrak{R}(e)$ ist, so existiert mindestens ein Durchschnittpunkt $\mathfrak{R}(f)$ von $\mathfrak{R}(ab)$ und $\mathfrak{R}(de)$.

Beweis: Nach der Voraussetzung und nach (i), (ii) folgt, dass $abc \neq 0$, $bcd = 0$, $ace = 0$, und $de \neq 0$.

$$\therefore \left.\begin{array}{ll} abc \neq 0 , \\ bcd & , \\ ace \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} abc \neq 0 , \\ abcd , \\ abce \end{array}\right\} \rightarrow abde \rightarrow Ef , \quad abf , \quad def.$$

Da $ab \neq 0$, $de \neq 0$, $abf = 0$, und $def = 0$ sind, so ist der Punkt $\mathfrak{R}(f)$ der Durchschnitt der Geraden $\mathfrak{R}(ab)$ und $\mathfrak{R}(de)$, w. z. b. w.

(vi) Es seien $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_k)$ ein linearer Raum vom Range k und $\mathfrak{R}(a_{k+1})$ ein nicht darin liegender Punkt. So stimmen der linearen Raum $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_{k+1})$ vom Range $k+1$ ein mit der Menge $\sum_x \mathfrak{R}(a_{k+1}x)$, welche aus allen durch Verbindung des festen Punktes $\mathfrak{R}(a_{k+1})$ mit irgendeinem Punkt $\mathfrak{R}(x)$ von $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_k)$ entstehenden Geraden $\mathfrak{R}(a_{k+}x)$ besteht.

Bewes: Sei $\mathfrak{R}(y)$ ein beliebiger in $\sum_x \mathfrak{R}(a_{k+1}x)$ liegender Punkt, so folgt, $a_1 \cdots a_k x$, $x a_{k+1} y \rightarrow^{(8)} a_1 \cdots a_{k+1} y \rightarrow \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_{k+1}) \ni \mathfrak{R}(y)$.

$\therefore$ $\sum\limits_x \mathfrak{R}(a_{k+1}x) \leqq \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_{k+1})$.

Sei $\mathfrak{R}(y)$ ein beliebiger in $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_{k+1})$ liegender Punkt, so folgt,

$a_1 \cdots a_{k+1} y \rightarrow Ex$, $a_1 \cdots a_k x$, $a_{k+1} y x$.

$\therefore$ Ex, $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_k) \ni \mathfrak{R}(x)$, $\mathfrak{R}(a_{k+1}x) \ni \mathfrak{R}(y)$.

$\therefore$ $\sum\limits_x \mathfrak{R}(a_{k+1}x) \geqq \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_{k+1})$.

Durch Vergleichung der beiden ergibt sich sodann

$$\sum_x \mathfrak{R}(a_{k+1}x) = \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_{k+1}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

(vii) Bezeichnet man drei auf einer Gerade liegende Punkte als eine Klasse von Punkten, so zerfällt $\mathfrak{B}$ in eine Anzahl von Klassen von Elementen[9], die untereinander keine gemeinsame Elemente besitzen Sei $\mathfrak{P}_\nu$ eine solche Klasse von Elementen, so ist $\mathfrak{P}_\nu$ auch ein $\mathfrak{B}_2$-Raum[10] und $\mathfrak{B}$ zerfällt in die direkte Summe von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\cdots$[11]. Dann existieren mindestens drei Punkte auf jeder Gerade von $\mathfrak{P}_\nu$[12].

Der wesentliche Inhalt dieses Satzes findet sich bereits in A2, § 5, SS. 63–69.

Das Veblen-Youngsche Axiom ist folgendes[13]:

By a projective geometry is meant a set of elements which, for suggestiveness, are called points subject to the following four conditions:

I. If A and B are distinct points, there is one and only one line that contains A and B.

II. If A, B, C are non-collinear points and if a line l contains a point D of the line (BC) and a point E of the line (AC), where D and E are distinct points, then the line l contains a point F of the line (AB).

III. There are at least three points on every line.

IV. A k-space is defined by the following inductive definition. A point is a 1-space. If A_1, A_2, $\cdots$, A_{k+1} are points not all in the same k-space, the set of all points collinear with the point A_{k+1} and any point of the k-space $(A_1A_2 \cdots A_k)$ is the $(k+1)$-space $(A_1A_2 \cdots A_{k+1})$. Thus a line is a 2-space, and a plane is a 3-specе, and so on.

---

(8) Zusatz 2 zum Satz 24 auf S. 252 in A1.

(9) Satz 63 sowie Zusatz auf S. 63 in A2.

(10) Definition VI auf S. 47, sowie Satz 73 auf S. 69 in A2.

(11) Satz 71, Zusatz, Satz 72, und Zusatz 1 auf SS. 67–68 in A2.

(12) $\mathfrak{P}_\nu$ heisst der $\mathfrak{P}$-Raum. Vgl. Definition XII auf S. 63 in A2!

(13) O. Veblen and W. H. Bussy, "*Finite projective geometries*", Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **7**, 1906, (241–242).

Durch Vergleichung dieses Axiomensystems mit den oben bewiesenen Sätzen sehen wir offenbar, dass unsere Sätze (iii), (iv) zu I, (v) zu II, und (vi) zu IV inhaltlich entsprechen. Das Axiom III gilt aber nicht immer im $\mathfrak{V}_2$-Raum, da ein n-Simplex[14] sich als ein $\mathfrak{V}_2$-Raum auffassen lässt. Jedoch besteht dasselbe eben im $\mathfrak{P}$-Raum, folglich auch im linearen Primraum[15].

Also nach (vii) kann man folgendermassen behaupten.

Satz 74. *Jeder $\mathfrak{V}_2$-Raum lässt sich bis auf die Anordnung der Faktoren auf die einzige Weise in die direkte Summe von projektiven Räumen zerlegen. Jeder $\mathfrak{P}$-Raum oder jeder lineare Primraum ist ein projektiver Raum.*

Dem obigen Veblen-Youngschen Axiomensystem, welches eine Definition des, sozusagen, *dimensionsfreien* projektiven Raumes ist, wird gewöhnlich das folgende Dimensionsaxiom hinzugefügt.

V. There is a finite upper bound to the dimensions of the spaces. Let n be the upper bound, our set of points is called an n-dimensional projective space.

Dann besteht der folgende Satz.

Satz 75. *Jeder lineare Primraum vom Range n ist ein n-dimensionaler projektiver Raum. Jeder lineare Raum lässt sich bis auf die Anordnung der Faktoren auf die einzige Weise in die endliche direkte Summe von projektiven Räumen von endlichen Dimensionen zerlegen*[16].

§ 3. Anwendungen und verwandte Arbeiten.

1. Die Anwendung zum allgemeinen linearen Raum[17] und Hilbertschen Raum[18].

Die Abelsche Gruppe $\mathfrak{R}$ mit den linksseitigen Operatoren der reellen Zahlen (oder mit dem allgemeinen abstrakten Körper) heisst den allge-

(14) Unter ein n-simplex verstehen wir die Menge von n Elementen, in deren die *Gelten-Relation* folgendermassen definiert ist; d. h., der Zyklus, der mehr als zwei dieselbe Elementen enthält, setzen wir $=0$, sonst $\neq 0$.

(15) Definition VIII auf S. 52, sowie Zusatz 1 zum Satz 72 auf S. 68 in A2.

(16) Satz 62 auf S. 62, sowie Satz 57 auf S. 60 in A2.

(17) Vgl. z.B. S. Banach, "*Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932, Kap. II!

(18) D. Hilbert, "*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*", 4. Mitteilung, Göttingen Nachrichten, 1906, (SS, 157-227).

meinenlinearen Raum[19]. Es seien nun $x_1, \cdots, x_s$ je s von Null verschiedene Elemente von $\mathfrak{R}$. Wenn es s reelle Zahlen $a_1, \cdots, a_s$ gibt, die nicht sämtlich gleich Null sind, und für die gilt: $a_1x_1 + \cdots + a_sx_s = 0$ (d. h. $x_1, \cdots, x_s$ vektorabhängig!), bezeichnen wir dies mit $x_1 \cdots x_s = 0$, und sonst mit $x_1 \cdots x_s \neq 0$. Dann werden die fünf Axiome des $\mathfrak{B}_2$-Raum offenbar im $\mathfrak{R}$ erfüllt. Folglich ist folgendes zu behaupten:

Die Menge der allen von Null verschiedenen Elemente des allgemeinen linearen Raums ist ein $\mathfrak{B}_2$-Raum in Bezug auf die oben erklärte lineare Abhängigkeit.

Wenn man ferner die Bedingung $\sum_i a_i = 0$ zur obigen Definition der linearen Abhängigkeit hinzufügt (d. h. $x_1, \cdots, x_s$ punktabhängig!), so sind die vier Axiome des $\mathfrak{B}_1$-Raums offenbar im $\mathfrak{R}$ erfüllt. Also kann man behaupten:

Der allgemeine lineare Raum ist ein $\mathfrak{B}_1$-Raum in Bezug auf die solchermasse definierte Abhängigkeit.

Da es bei den beiden Definitionen der linearen Abhängigkeit mindestens drei Punkte auf jeder Gerade gibt, so ist der allgemeine lineare Raum ein $\mathfrak{P}$-Raum. Der Hilbertsche Raum ist bekanntlich ein Sonderfall des allgemeinen linearen Raumes, daher ist unser Zyklenkalkül auch dazu anzuwenden.

2. Die Anwendung zur "*Lattice*"-Theorie[20], *Boolschen* Algebra[21], und *Verbändentheorie*[22].

Wir denken uns ein solches "Lattice C", welches kommutativ, assoziativ, reduktiv[23], und schwach distributiv[24] ist, und noch dem

(19) S. Banach, "*Sur les opérations dans les ensembles abtraits et leur application aux équations integrales*", Fund. Math., **3**, (1922), S. 135.
A. Tychonoff, "*Ein Fixpunktsatz*", Math. Ann., **111**, (1935), S. 767.

(20) G. Birkhoff, "*On the combination of subalgebras*", Proc. of the Cam. Phil. Soc., **29**, 1933, (441–464), sowie "*Applications of lattice algebra*", ibid., **30**, 1934, (115–122).

(21) E. V. Huntington, "*Set of independent postulates for the algebra of logic*", Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. **5**, 1904, (288–290).
G. Bergmann, "*Zur Axiomatik der Elementargeometrie*", Monat. für Math. und Phys., **36**, 1929, (269–290).

(22) Fritz Klein, "*Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen*", Math. Ann., **105**, 1931, (308–323), sowie *Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen*", Math. Ann., **106**, 1932, (114–130).

(23) d. h. $a \frown (a \smile b) = a \smile (a \frown b) = a$ für beliebige a, b. L4 auf S. 743 in G. Birkhoff, "*Combinatorial relations in projective geometries*", Ann. of Math., Vol. **36**, 1935, (743–748). Wegen der Bequemlichkeit bezeichnen wir diese Arbeit kurz mit "G. Birkhoff C".

(24) d. h. $(a \smile c) \frown \{b \smile (a \frown c)\} = \{(a \smile c) \frown b\} \smile (a \frown c)$ für beliebige a, b, c. L5 auf S. 442 in G. Birkhoff, "*On the structure of abstract algebras*", Proc. of the Cam. Phil. Soc., **31**, 1935, (433–454).

Vielfachenkettensatz(25), genügt(26). Dies ist nämlich nach G. Birkhoff sogenanntes "*modular Lattice*", *dessen Elemente lauter von endlichen Dimensionen sind*(27). Die Menge der allen ein-dimensionalen Elemente, nämlich der allen Punkte von C, bezeichnen wir mit L, und s Punkte $a_1, \cdots, a_s$ derselben bezeichnen wir mit $a_1 \cdots a_s \neq 0$ bzw. $a_1 \cdots a_s = 0$, je nachdem, $\dim(a_1 \cup \cdots \cup a_s) = s$ oder $\dim(a_1 \cup \cdots \cup a_s) < s$ ist. So bestehen offenbar die fünf Axiome des $\mathfrak{V}_2$-Raums in L. Daher gilt;

Die Punktmenge von jedem "modular Lattice", das dem Vielfachenkettensatz genügt, ist ein $\mathfrak{V}_2$-Raum von endlichen Dimensionen.

Es sei hier bemerkt, dass in L aus $a_1 \neq a_2$ $a_1a_2 \neq 0$ folgt, und demnach besteht der Punkt $\mathfrak{N}(a)$ aus einem einzigen Element a. Setzt man nun noch das Gesetz des Komplements(28) in C voraus, so lässt sich jedes n-dimensionale Element a als $a = a_1 \cup \cdots \cup a_n$ bezüglich der n treffenden Punkte $a_1, \cdots, a_n$ darstellen(29), also kann man folgendermassen behaupten;

Die Punktmenge von jedem "complemented modular Lattice", das dem Vielfachenkettensatz genügt, ist ein $\mathfrak{V}_2$-Raum von endlichen Dimensionen, und jedes Element von Lattice entspricht eineindeutig zu einem linearen Raum von $\mathfrak{V}_2$-Raum.

Setzt man das distributive Gesetz $a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile (a \frown c)$(30) an die Stelle des schwachen distributiven Gesetzes in "complemented modular Lattice", so ergibt sich die Boolsche Algebra; also ist jede Boolsche Algebra, die dem Vielfachenkettensatz genügt, auch selbstverständlich ein $\mathfrak{V}_2$-Raum. Da in der Boolschen Algebra können keine drei Punkte auf einer Gerade liegen, so zerfällt die Boolsche Algebra in die direkte Summe von endlichen Punkten; infolgedessen wird sie endlich. Es ist ohne weiteres einzusehen, dass sich der von Herrn F. Klein betrachtete sog. Verband auch als ein Lattice auffassen lässt.

---

(25) d. i. in jeder Reihe der Produkte a_1, $a_1 \frown a_2$, $a_1 \frown a_2 \frown a_3$, ... irgend zwei Absätze je gleich sind. L_4 auf S. 801 in G. Birkhoff, "*Abstract linear dependence and lattices*", Amer. Journ. of Math., Vol. **57**, 1935, (800–804).

(26) Das Gesetz des Komplements ist hier nicht immer notwendig.

(27) S. 745 in G. Birkhoff C.

(28) Gesetz des Komplements: Für jedes Element a gibt es wenigstens ein Element nämlich "Komplement" a' derart, dass $a \frown a' \frown x = a \frown a'$ und $a \smile a' \smile x = a \smile a'$ für jedes x sind. Vgl. L7 auf S. 743 in G. Birkhoff C!

(29) S. 746 in G. Birkhoff C.

(30) S. 705 in M. H. Stone, "*Postulates for Boolean algebras and generalized Boolean algebras*", Amer. Journ. of Math., Vol. **57**, 1935, (703-732).

3. Die Beziehung zur H. Whitneyschen Matroidentheorie(31).

Es seien M ein $\mathfrak{B}_1$-Raum(32) von endlichen vielen Elementen $e_1, e_2, \cdots, e_n$, und N seine Teilmenge. Sodann bestehen natürlich die folgende Sätze.

R_1 Rang $\mathfrak{N} = 0$(33).

R_2 Rang $(N+e) =$ Rang $N+k$, wo $k=1$ oder 0 ist.

R_3 Rang $(N+e_1) =$ Rang $(N+e_2) =$ Rang N
$\rightarrow$ Rang $(N+e_1+e_2) =$ Rang N.

Umgekehrt legt man diese drei Sätze der abstrakten aus $e_1, e_2, \cdots, e_n$ bestehenden Menge M als Axiome zugrunde, und schreibt man $e_1 \cdots e_n = 0$ bzw. $e_1 \cdots e_n \neq 0$, je nachdem Rang $(e_1 \cdots e_s) < s$ oder Rang $(e_1 \cdots e_s) = s$ ist, so wird M auch ein $\mathfrak{B}_1$-Raum. Diese R_1, R_2, und R_3 sind in der Tat die Axiome des H. Whitneyschen sogenannten Matroid(34), also kann man folgendermassen behaupten;

Jeder endliche $\mathfrak{B}_1$-Raum ist ein Matroid, und umgekehrt.

§ 4. Die Unabhängigkeit des Axiomensystems.

In diesem Paragraphen soll nun ein Axiomensystem, das zum 1°, 5°-Axiom äquivalent und gleichzeitig untereinander unabhängig ist, hergestellt werden. Zuerst sind die folgenden sieben Eigenschaften aus dem 1°, 5°-Axiom leicht herzuleiten.

1* $a \neq 0$.

2* aba.

3* $ac,\ bc \rightarrow ab$.

4* $abc,\ abd \rightarrow ab$ oder bcd.

5* $abcd \rightarrow acbd$.

6* $a_1 \cdots a_s z,\ zb_1b_2 \rightarrow a_1 \cdots a_s b_1 b_2,\ s \geqq 1$.

7* $a_1 \cdots a_s b_1 b_2 \rightarrow Ez,\ a_1 \cdots a_s z,\ zb_1b_2,\ s \geqq 1$.

---

(31) H. Whitney, "*On the abstract properties of linear dependence*", Amer. Journ. of Math., Vol. **57**, 1935, (509-533).

S. Maclane, "*Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry*", Amer. Journ. of Math., Vol. **58**, 1936, (236-240).

(32) S. 236 in A1.

(33) $\mathfrak{N}$ bedeutet die leere Menge.

(34) S. 510 in der obigen H. Whitneyschen Arbeit.

Um die Äquivalenz der beiden Axiomensysteme zu zeigen, wollen wir behaupten ;

(1) Es gilt aa für jedes a.

Beweis : aaa

$az\,,\quad zaa$

$az\,,\quad az\,,\quad \longrightarrow aa\,,$ w. z. b. w.

(2) $ab \rightarrow ba$.

Beweis : $bb\,,\quad ab \longrightarrow ba\,,$ w. z. b. w.

(3) Es gilt baa für beliebige a, b.

Beweis :
$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} aba\,, \\ aba \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & baa\,, \\ ab & \end{tikzcd}$$

$ba\,,\quad aaa \longrightarrow baa\,,$ w. z. b. w.

(4) Es gilt aab für beliebige a, b.

Beweis :
$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} baa\,, \\ bab \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & aab\,, \\ ba & \end{tikzcd}$$

$ab\,,\quad bab \longrightarrow aab\,,$ w. z. b. w.

(5) $abc \longrightarrow bac$.

Beweis :
$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} aba\,, \\ abc \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & bac\,, \\ ab & \end{tikzcd}$$

$ba\,,\quad aac \longrightarrow bac\,,$ w. z. b. w.

(6) $abc \longrightarrow bca$.

Beweis :
$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} abc\,, \\ aba \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & bca\,, \\ ab & \end{tikzcd}$$

$ba\,,\quad aca \longrightarrow bca\,,$ w. z. b. w.

(7) $a_1 \cdots a_s \to a_1 \cdots a_s x$ für jedes x, $s \geqq 2$.

Beweis: $a_1 \cdots a_s$

$a_1 \cdots a_s$, $a_s a_s x$

$a_1 \cdots a_s x$, w. z. b. w.

(8) $a_1 \cdots a_m z$, $z b_1 \cdots b_n \to a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n$, $m \geqq 1$, $n \geqq 2$.

Beweis: (Vollständige Induktion in Bezug auf n)

$a_1 \cdots a_m z$, $z b_1 \cdots b_n$

$a_1 \cdots a_m z$, $z b_1 \cdots b_{n-2} z_1$, $z_1 b_{n-1} b_n$

$a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_{n-2} z_1$, $z_1 b_{n-1} b_n$

$a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n$, w. z. b. w.

(9) $a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n \to Ez$, $a_1 \cdots a_m z$, $z b_1 \cdots b_n$, $m \geqq 1$, $n \geqq 2$.

Beweis: (Vollständige Induktion in Bezug auf n)

$a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n$

$a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_{n-2} z_1$, $z_1 b_{n-1} b_n$

$a_1 \cdots a_m z$, $z b_1 \cdots b_{n-2} z_1$, $z_1 b_{n-1} b_n$

$a_1 \cdots a_m z$, $z b_1 \cdots b_n$, w. z. b. w.

(10) $a_1 \cdots a_i \cdots a_s \to a_i \cdots a_1 \cdots a_s$, $s = 4$, $4 \geqq i \geqq 2$.

Beweis: $abcd$	$abcd$	$abcd$	
abz, zcd	$bacd$	$badc$	
baz, zcd	$bcad$	$bdac$	
$bacd$,	$cbad$,	$dbca$,	w. z. b. w.

(11) $a_1 \cdots a_i \cdots a_s \to a_i \cdots a_1 \cdots a_s$, $s \geqq 5$, $s \geqq i \geqq 2$.

Beweis: (Vollständige Induktion in Bezug auf s)

(i) $i \leqq s - 2$.

$a_1 \cdots a_i \cdots a_s$

$a_1 \cdots a_i \cdots a_{s-2} z$, $z a_{s-1} a_s$

$a_i \cdots a_1 \cdots a_{s-2} z$, $z a_{s-1} a_s$

$a_i \cdots a_1 \cdots a_s$, w. z. b. w.

(ii) $i = s-1$ (iii) $i = s$

$$a_1 \cdots a_{s-3} a_{s-2} a_{s-1} a_s$$
$$a_{s-2} \cdots a_{s-3} a_1 a_{s-1} a_s$$
$$a_{s-2} \cdots a_{s-3} z\,, \quad z a_1 a_{s-1} a_s$$

$a_{s-2} \cdots a_{s-3} z\,, \quad z a_{s-1} a_1 a_s$	$a_{s-2} \cdots a_{s-3} z\,, \quad z a_s a_{s-1} a_1$
$a_{s-2} \cdots a_{s-3} a_{s-1} a_1 a_s$	$a_{s-2} \cdots a_{s-3} a_s a_{s-1} a_1$
$a_{s-1} \cdots a_{s-3} a_{s-2} a_1 a_s\,,$	$a_s \cdots a_{s-3} a_{s-2} a_{s-1} a_1\,,$

w. z. b. w.

(12) $\left.\begin{matrix} abx_1 \cdots x_m\,, \\ aby \end{matrix}\right\} \longrightarrow ab$ od. $bx_1 \cdots x_m y\,, \quad m \geqq 1\,.$

Beweis: $\left.\begin{matrix} abx_1 \cdots x_m\,, \\ aby \end{matrix}\right\}$

$\therefore$ $\left.\begin{matrix} abz\,, \quad zx_1 \cdots x_m\,, \\ aby \end{matrix}\right\}$

$\therefore$ $(ab$ od. $bzy),\ zx_1 \cdots x_m$

$\therefore$ ab od. $(byz,\ zx_1 \cdots x_m)$

$\therefore$ ab od. $bx_1 \cdots x_m y\,,$ w. z. b. w.

(13) $\left.\begin{matrix} a_1 \cdots a_s x_1 \cdots x_m\,, \\ a_1 \cdots a_s y \end{matrix}\right\} \longrightarrow a_1 \cdots a_s$ od. $a_2 \cdots a_s x_1 \cdots x_m y\,,$
$s \geqq 2\,, \quad m \geqq 1\,.$

Beweis: (Vollständige Induktion in Bezug auf s)

$\left.\begin{matrix} a_1 \cdots a_s x_1 \cdots x_m\,, \\ a_1 \cdots a_s y \end{matrix}\right\}$

$\therefore$ $\left.\begin{matrix} a_1 \cdots a_s x_1 \cdots x_m\,, \\ a_1 \cdots a_{s-1} z\,,\ z a_s y \end{matrix}\right\}$

$\therefore$ $(a_1 \cdots a_{s-1}$ od. $a_2 \cdots a_s x_1 \cdots x_m z)\,,\ z a_s y$

$\therefore$ $a_1 \cdots a_{s-1}$ od. $(a_2 \cdots a_s x_1 \cdots x_m z\,,\ z a_s y)$

$\therefore$ $a_1 \cdots a_{s-1}$ od. $a_s z$ od. $a_2 \cdots a_s x_1 \cdots x_m y$

$\therefore$ $a_1 \cdots a_{s-1}$ od. $(a_1 \cdots a_{s-1} z\,,\ z a_s)$ od. $a_2 \cdots a_s x_1 \cdots x_m y$

$\therefore$ $a_1 \cdots a_{s-1}$ od. $a_1 \cdots a_s$ od. $a_2 \cdots a_s x_1 \cdots x_m y$

$\therefore$ $a_1 \cdots a_s$ od. $a_2 \cdots a_s x_1 \cdots x_m y\,,$ w. z. b. w.

Folglich gilt;

Satz 76. *Das 1*, 7*-Axiom und 1°, 5°-Axiom sind miteinander äquivalent.*

Wir wollen nun die Unabhängigkeit des 1*, 7*-Axiomensystems zeigen.

(1) 1* ist von übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: Dafür brauchen wir uns nur eine aus einzigen Element bestehende Menge zu denken, indem wir allen Zyklen als " $= 0$ " setzen.

(2) 2* ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Dafür brauchen wir uns nur eine aus einzigen Elemente bestehende Menge zu denken, indem wir dann allen Zyklen als " $\neq 0$ " setzen.

(3) 3* ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Wir denken uns eine aus zwei Elementen a, b bestehende Menge, und deuten dann die Abhängigkeit der Zyklen folgendermassen:

Anzahl der Elemente des Zyklus	1	2	$3 \leqq$
Festsetzung der Abhängigkeit des Zyklus	$\neq 0$	$ab \neq 0$ sonst, $= 0$	$= 0$

(4) 4* ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Um ein konkretes Model zu geben denken wir uns eine aus drei Elementen a, b, c bestehende Menge, und definieren dann die Abhängigkeit der Zyklen durch die folgende Festsetzung:

Anzahl der Elemente des Zyklus	1	2	3	$4 \leqq$
Festsetzung der Abhängigkeit des Zyklus	$\neq 0$	$A \neq 0$ $B = 0$	$abc \neq 0$ sonst, $= 0$	$= 0$

wobei:

A: der aus lauter verschiedenen Elementen bestehende Zyklus und

B: der mindestens ein Paar von denselben Elementen enthaltende Zyklus.

(5) 5^* ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Als ein konkretes Model denken wir uns eine aus fünf Elementen a, b, c, d, e bestehende Menge, und definieren die Abhängigkeit der Zyklen durch folgende Festsetzung:

Anzahl der Elemente des Zyklus	1	2	3	4	$5 \leqq$
Festsetzung der Abhängigkeit des Zyklus	$\neq 0$	$A \neq 0$ $B = 0$	$B = 0$ $(abe) = 0$ $(cde) = 0$ sonst, $\neq 0$	$B = 0$ $(e) = 0$ $((ab)(cd)) = 0$ sonst, $\neq 0$	$= 0$

wobei:

A: der aus lauter verschiedenen Elementen bestehende Zyklus,

B: der mindestens ein Paar von denselben Elementen enthaltende Zyklus,

(abe): der in beliebiger Reihenfolge aus a, b, e bestehende Zyklus, und dasselbe gilt für (cde),

(e): der wenigstens einmal e enthaltende Zyklus, und

$((ab)(cd))$: einer der $abcd$, $bacd$, $abdc$, und $badc$ ist.

(6) 6_1^* ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Als ein Model denken wir uns eine aus drei Elementen a, b, c bestehende Menge, indem wir die Abhängigkeit der Zyklen folgendermassen festsetzen:

Anzahl der Elemente des Zyklus	1	2	3	$4 \leqq$
Festsetzung der Abhängigkeit des Zyklus	$\neq 0$	$= 0$	$aab \neq 0$ sonst, $= 0$	$= 0$

(7) 6_s^*, $(s \geqq 2)$ ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Wir betrachten eine aus einem einzigen Element bestehende Menge, inwelcher die Abhängigkeit der Zyklen folgendermassen definiert ist:

Anzahl der Elemente des Zyklus	1	$2 \leqq, \quad \leqq s+1$	$s+2 \leqq$
Festsetzung der Abhängigkeit des Zyklus	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$

(8) 7_1^* ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Wir denken uns eine aus einem einzigen Elemente bestehende Menge. Die Festsetzung der Abhängigkeit der Zyklen ist hierbei die folgende:

Anzahl der Elemente des Zyklus	$1 \leqq, \quad \leqq 2$	$3 \leqq$
Festsetzung der Abhängigkeit des Zyklus	$\neq 0$	$= 0$

(9) 7_s^*, $(s \geqq 2)$ ist von übrigen unabhängig.

Beweis: Wir denken uns eine aus $s+2$ Elementen bestehende Menge mit der folgenden Festsetzung der Abhängigkeit der Zyklen:

Anzahl der Elemente des Zyklus	$1 \leqq, \quad \leqq s+1$	$s+2 \leqq$
Festsetzung der Abhängigkeit des Zyklus	$A \neq 0$ sonst, $= 0$	$= 0$

wobei A der aus lauter verschiedenen Elementen bestehende Zyklus ist.

Schliesslich kann man behaupten;

Satz 77. *Das 1^*, 7^*-Axiom ist untereinander unabhängig.*

Das hier betrachtete Axiomensystem ist selbstverständlich widerspruchsfrei, aber kategorisch ist es nicht.

Bei Verlegung dieser Arbeit hat mein Lehrer Prof. K. Nakamura sich der grossen Mühe unterzogen, eine vollständige Korrektur mitzulesen, und mich vielfach mit kritischen Bemerkungen und wertvollen Ratschläge und herzlichen Anregungen unterstützt. Auch an dieser Stelle sei ihm der herzlichste Dank ausgesprochen.
