Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. I.

Von Takeo NAKASAWA

(Eingegangen am 30. Juni, 1935)

Einleitung.

In der vorliegenden Untersuchung soll ein Axiomensystem für eine neue Formulierung der linearen Abhängigkeit des n-dimensionalen projektiven Raumes angegeben werden, indem wir hauptsächlich den *Zyklenkalkül*, den Herr G. Thomsen bei seiner Grundlegung der elementaren Geometrie hergestellt hat[1], hier in einem noch abstrakteren Sinne verwenden.

Zuerst wollen wir die Geometrie des ersten Verknüpfungsraumes aufbauen, dessen Definition später angegeben wird.

Bezeichnungen.

In dieser Schrift werden wir häufig folgende Bezeichnungen brauchen.

1.	$A \rightarrow B$	bedeutet, dass aus A B folgt.
2.	$A \leftrightarrow B$	bedeutet, dass $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$.
3.	$A \rightarrow W.$	bedeutet, dass A zum Widerspruch gerät.
4.	$A\,,\ B$	bedeutet, dass A und B.
5.	A oder B	bedeutet, dass mindestens eins von A und B.
6.	$A -(S)\rightarrow B$	bedeutet, dass auf Grund des Aussages S aus A B folgt.
7.	$\left.\begin{array}{l} A_1\,, \\ A_2\,, \\ \vdots\,, \\ A_k \end{array}\right\} \rightarrow B$	bedeutet, dass aus dem gleichzeitigen Bestehen der k Aussagen $A_1\,, A_2\,, \cdots, A_k$ B folgt.
8.	$A \rightarrow \left\{\begin{array}{l} B_1\,, \\ B_2\,, \\ \vdots\,, \\ B_k \end{array}\right.$	bedeutet, dass aus A gleichzeitig die k Aussagen $B_1\,, B_2\,, \cdots, B_k$ folgt.

(1) G. THOMSEN: Grundlagen der Elementargeometrie, (Leipzig 1933), (S. 67–S. 70).

9. A_i, $(i=1, \cdots, m)$ bedeutet, dass $A_1, A_2, \cdots$, und A_m.
10. Wir brauchen auch noch die folgenden Bezeichnungen von Mengenlehre, wie sie gewöhnlich bedeuten; $\geqq$, $\not\geqq$, $>$, $\not>$, $=$, $\neq$, $\ni$, $\not\ni$, $+$, u. s. w.

ERSTES KAPITEL

Der $\mathfrak{V}_1$-Raum.

§ 1. Axiome.

Grundannahme: Wir denken uns eine gewisse Menge der Elementen; $\mathfrak{V}_1 \ni a_1, a_2, \cdots, a_s, \cdots$. Für gewisse Reihen der Elementen, die wir *Zyklen* nennen wollen, denken wir dazu die Relationen "*gelten*" oder "*gültig sein*", in Zeichen $a_1 \cdots a_s = 0$ (2), bzw. "*nicht gelten*" oder "*nicht gültig sein*", in Zeichen $a_1 \cdots a_s \neq 0$. Diese Relationen sollen nun folgenden Axiomen genügen;

Axiom 1. (Reflexivität) : aa.

Axiom 2. (Folgerung) : $a_1 \cdots a_s \rightarrow a_1 \cdots a_s x$, $(s = 1, 2, \cdots)$.

Axiom 3. (Vertauschung) : $a_1 \cdots a_i \cdots a_s \rightarrow a_i \cdots a_1 \cdots a_s$, $(s = 2, 3, \cdots; i = 2, \cdots, s)$.

Axiom 4. (Transitivität) : $a_1 \cdots a_s \neq 0$, $x a_1 \cdots a_s$, $a_1 \cdots a_s y \rightarrow x a_1 \cdots a_{s-1} y$, $(s = 1, 2, \cdots)$.

Definition I. Eine solche Menge $\mathfrak{V}_1$ heisst der erste Verknüpfungsraum, in kurzen Worten, **$\mathfrak{V}_1$-Raum.**

V_1. 1. Nehmen wir uns die Menge von allen Punkten des klassischen n-dimensionalen projektiven Raumes als $\mathfrak{V}_1$-Raum, und nennen wir von gewissen darin liegenden linearen abhängigen, bzw. unabhängigen Reihen von Punkten als gelten, bzw. nicht gelten, so sind die Grundannahme, sowie die Axiome 1, 2, 3, 4 erfüllt, wie leicht einzusehen(3).

V_1. 2. Da das obige Axiomensystem keine Existenzaussage enthält, so ist eine beliebige Teilmenge des $\mathfrak{V}_1$-Raumes auch ein $\mathfrak{V}_1$-Raum.

---

(2) Von jetzt an gewöhnlich, statt "$a_1 \cdots a_s = 0$", werden wir auch schreiben kurz "$a_1 \cdots a_s$", wie Thomsen in seiner Zyklenkalkül braucht (Vgl. a. a. O. (1)).

(3) Also von jetzt an, werden wir oft die Wörter "Punkt" statt "Element", oder "linear abhängig", bzw. "linear unabängig" statt "gelten", bzw. "nicht gelten" brauchen.

Ferner aus Axiomen 1, 2, 3, folgt leicht:

V_1. 3. Ein Zyklus, welcher mehr als zwei dasselbe Element enthält, ist stets gültig; folglich sind die Elemente in einem nicht gültigen Zyklus einander verschieden.

§ 2. Lineare Räume.

Definition II. Die Menge der allen Elementen x aus $\mathfrak{B}_1$ derart, dass $a_1 \cdots a_n \neq 0$ aber $a_1 \cdots a_n x$, nennen wir den von $a_1, \cdots, a_n$ erzeugten *linearen Raum in* $\mathfrak{B}_1$ *vom Range n*; in Zeichen: $\mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n)$, und den Zyklus $a_1 \cdots a_n$ nennen wir die *Basis* des $\mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n)$.

Definition II′. Die Menge der allen Elementen x aus $\mathfrak{B}_1$ derart, dass $x = 0$, nennen wir die *Nullstelle* von $\mathfrak{B}_1$; in Zeichen: $\mathfrak{N}$(4).

Dann, weil $x=0$ $-$(Axiom 2, 3)$\rightarrow a_1 \cdots a_n x$, so kann man folgendermassen behaupten:

V_1. 4. $\mathfrak{R} \geqq \mathfrak{N}$;

in Worten: Jeder lineare Raum enthält stets die Nullstelle in sich.

Und, weil (Axiom 1)$\rightarrow a_i a_i$ $-$(Axiom 2, 3)$\rightarrow a_1 \cdots a_n a_i$, $(i=1, \cdots, n)$, so folgt,

V_1. 5. $\mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n) \ni a_1, \cdots, a_n$;

in Worten: Der lineare Raum enthält alle ihre Basispunkten in sich.

Ferner, weil $a_1 \cdots a_m x$, $m \leqq n$ $-$(Axiom 2, 3)$\rightarrow$ $a_1 \cdots a_m \cdots a_n x$, so folgt,

V_1. 6. $n \geqq m \rightarrow \mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n) \geqq \mathfrak{R}^m(a_1 \cdots a_m)$.

Satz 1. Ist $n \geqq 1$, so besteht die folgende Formel;

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1, \\ a_1 \cdots a_n x_2 \end{array}\right\} \rightarrow a_2 \cdots a_n x_1 x_2 .$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1, \\ a_1 \cdots a_n x_2 \end{array}\right\} -(\text{Axiom } 3)\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n a_1 \neq 0, \\ x_1 a_2 \cdots a_n a_1, \\ a_2 \cdots a_n a_1 x_2 \end{array}\right\} -(\text{Axiom } 4)\rightarrow x_1 a_2 \cdots a_n x_2$$

$$-(\text{Axiom } 3)\rightarrow a_2 \cdots a_n x_1 x_2 .$$

(4) Dieselbe Menge ist anderseits auch als linearer Raum vom Range 0, d.h. $\mathfrak{R}^0$, zu betrachten, solange wir den leeren Zyklus als nicht gültig voraussetzen.

Daher

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1 , \\ a_1 \cdots a_n x_2 \end{array}\right\} \rightarrow a_2 \cdots a_n x_1 x_2 , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 2. Ist $n \geqq 2$, so besteht die folgende Formel ;

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1 , \\ a_1 \cdots a_n x_2 , \\ a_1 \cdots a_n x_3 \end{array}\right\} \rightarrow a_3 \cdots a_n x_1 x_2 x_3 .$$

Beweis : (i) Falls $a_2 \cdots a_n x_1 \neq 0$, so folgt,

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1 , \\ a_1 \cdots a_n x_2 , \\ a_1 \cdots a_n x_3 \end{array}\right\} \text{—(Satz 1)}\rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n x_1 \neq 0, \\ \left\{\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n x_1 x_2 , \\ a_2 \cdots a_n x_1 x_3 \end{array}\right. \end{array}\right\} \text{—(Satz 1)}\rightarrow a_3 \cdots a_n x_1 x_2 x_3 .$$

(ii) Falls $a_2 \cdots a_n x_2 \neq 0$, so folgt,

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1 , \\ a_1 \cdots a_n x_2 , \\ a_1 \cdots a_n x_3 \end{array}\right\} \text{—(Satz 1)}\rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n x_2 \neq 0, \\ \left\{\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n x_2 x_1 , \\ a_2 \cdots a_n x_2 x_3 \end{array}\right. \end{array}\right\} \text{—(Satz 1)}\rightarrow a_3 \cdots a_n x_2 x_1 x_3$$

$$\text{—(Axiom 3)}\rightarrow a_3 \cdots a_n x_1 x_2 x_3 .$$

(iii) Falls $a_2 \cdots a_n x_1$, $a_2 \cdots a_n x_2$, so folgt,

$$a_1 \cdots a_n \neq 0 \text{ —(Axiom 2, 3)}\rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n \neq 0, \\ a_2 \cdots a_n x_1 , \\ a_2 \cdots a_n x_2 \end{array}\right\} \text{—(Satz 1)}\rightarrow a_3 \cdots a_n x_1 x_2$$

$$\text{—(Axiom 2)}\rightarrow a_3 \cdots a_n x_1 x_2 x_3 .$$

Daher

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1 , \\ a_1 \cdots a_n x_2 , \\ a_1 \cdots a_n x_3 \end{array}\right\} \rightarrow a_3 \cdots a_n x_1 x_2 x_3 , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 3. Ist $n \geqq m-1$, so besteht die folgende Formel;

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1, \\ a_1 \cdots a_n x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_1 \cdots a_n x_m \end{array}\right\} \rightarrow a_m \cdots a_n x_1 \cdots x_m .$$

Beweis: Wir beweisen dies durch die vollständige Induktion in Bezug auf m. Falls m gleich 1 ist, ist es trivial, und falls m gleich 2, bzw. 3 ist, ist es bereits im Satz 1, bzw. Satz 2 bewiesen worden. Also genügt es zu zeigen, dass aus dem Fall $[m-1]$ den Fall $[m]$ folgt.

(i) Falls unter m Elementen $x_1, \cdots, x_m$, mindestens ein solches Element z.B. x_1 existiert, dass $a_2 \cdots a_n x_1 \neq 0$, dann ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1, \\ a_1 \cdots a_n x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_1 \cdots a_n x_m \end{array}\right\} -(\text{Satz } 1)\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n x_1 \neq 0, \\ a_2 \cdots a_n x_1 x_2, \\ a_2 \cdots a_n x_1 x_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_2 \cdots a_n x_1 x_m \end{array}\right\} -[m-1]\rightarrow a_m \cdots a_n x_1 \cdots x_m .$$

(ii) Falls für alle Elementen $x_1, \cdots, x_m$ die Relationen $a_2 \cdots a_n x_i$, $(i=1, \cdots, m)$, bestehen, dann ergibt sich

$$a_1 \cdots a_n \neq 0 -(\text{Axiom } 2, 3)\rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n \neq 0, \\ a_2 \cdots a_n x_1, \\ a_2 \cdots a_n x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_2 \cdots a_n x_{m-1} \end{array}\right\} -[m-1]\rightarrow a_m \cdots a_n x_1 \cdots x_{m-1}$$

$$-(\text{Axiom } 2)\rightarrow a_m \cdots a_n x_1 \cdots x_m .$$

Daher

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x_1, \\ a_1 \cdots a_n x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_1 \cdots a_n x_m \end{array}\right\} \rightarrow a_m \cdots a_n x_1 \cdots x_m , \qquad \text{w. z. b. w.}^{(5)}$$

---

(5) Es sei hier bemerkt, dass wir in diesem Beweis das Axiom 1 gar nicht benutzen.

Setzt man, im Satz 3, besonders $n=m-1$, so folgt die folgende Behauptung;

$$\left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n \neq 0, \\ a_1\cdots a_n x_1, \\ a_1\cdots a_n x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_1\cdots a_n x_{n+1} \end{array}\right\} \rightarrow x_1 x_2 \cdots x_{n+1}.$$

Diesen Satz stellen wir durch die folgende Formel dar:

Satz 4. $\mathfrak{R}^n(a_1\cdots a_n) \ni x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \rightarrow x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$;

in Worten: Je $n+1$ im linearen Raum vom Range n enthaltenen Punkte sind linear abhängig.

Zusatz. $\mathfrak{R}^n(a_1\cdots a_n) \ni x_1, \cdots, x_m$ und $n<m \rightarrow x_1\cdots x_m$;

in Worten: Je mehr als $n+1$ im linearen Raum vom Range n enthaltenen Punkte sind linear abhängig.

Beweis: Nach Satz 4 folgt $x_1\cdots x_{n+1}$.

Dann ist $n<m$, so folgt

$$x_1\cdots x_{n+1} \text{ —(Axiom 2)}\rightarrow x_1\cdots x_m.$$

Satz 5. $\mathfrak{R}_1^n \geqq \mathfrak{R}_2^n \rightarrow \mathfrak{R}_1^n \leqq \mathfrak{R}_2^n$;

in Worten: Wenn ein linearer Raum n^{ten} Ranges $\mathfrak{R}_1^n$ einen anderen linearen Raum n^{ten} Ranges $\mathfrak{R}_2^n$ enthält, so stimmen die zwei linearen Räume mit einander ein(6).

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{R}_1$, bzw. $\mathfrak{R}_2$ $a_1\cdots a_n$, bzw. $b_1\cdots b_n$, so ist,

$$\mathfrak{R}_1 \geqq \mathfrak{R}_2 \ni b_1, \cdots, b_n \rightarrow \mathfrak{R}_1 \ni b_1, \cdots, b_n.$$

Also

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a_1\cdots a_n \neq 0, \\ a_1\cdots a_n b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_1\cdots a_n b_n, \end{array}\right. \\ \text{Anderseits } \mathfrak{R}_1 \ni x \rightarrow a_1\cdots a_n x \end{array}\right\} \text{(Satz 4)}\rightarrow b_1\cdots b_n x \rightarrow \mathfrak{R}_2 \ni x.$$

(6) Falls zwei lineare Räume $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ mit einander einstimmen, schreiben wir in Zeichen $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}_2$.

Daher $\quad \mathfrak{R}_1 \ni x \to \mathfrak{R}_2 \ni x$.

Daher $\quad \mathfrak{R}_1 \leqq \mathfrak{R}_2$, w. z. b. w.

Zusatz. $\mathfrak{R}_1^n \not\supset \mathfrak{R}_2^n$

in Worten: Der lineare Raum enthält keinen linearen Raum desselben Ranges als seine echte Teilmenge.

Satz 6. $n < m \to \mathfrak{R}_1^n \not\geqq \mathfrak{R}_2^m$;

in Worten: Jeder lineare Raum enthält keinen anderen linearen Raum höheren Ranges.

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{R}_1$, bzw. $\mathfrak{R}_2$ je $a_1 \cdots a_n$, bzw. $b_1 \cdots b_m$, und wäre vorläufig $\mathfrak{R}_1 \geqq \mathfrak{R}_2$, so wäre

$$\mathfrak{R}_1^n(a_1 \cdots a_n) \geqq \mathfrak{R}_2^m(b_1 \cdots b_m) \ni b_1, \cdots, b_m \to \mathfrak{R}_1^n(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_m .$$

$$\text{Daher} \quad \left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}_1^n(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_m \\ \text{und} \quad n < m \end{array}\right\} (\text{Zusatz zum Satz 4}) \to b_1 \cdots b_m \to W.$$

Daher $\quad \mathfrak{R}_1 \not\geqq \mathfrak{R}_2$, w. z. b. w.

Zusatz. $n \neq m \to \mathfrak{R}_1^n \neq \mathfrak{R}_2^m$;

in Worten: Die zwei linearen Räume verschiedenen Ranges können nicht mit einander einstimmen.

Satz 7. $\mathfrak{R}_1^n(a_1 \cdots a_n) = \mathfrak{R}_2^m(b_1 \cdots b_m) \longleftrightarrow n=m,\ a_1 \cdots a_n b_i,\ (i=1, \cdots m)$;

in Worten: Zwei lineare Räume $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ stimmen dann und nur dann ein, wenn die Ränge derselben Räume gleich sind, und einer von ihnen z.B. $\mathfrak{R}_1$, die Basispunkten des anderen $\mathfrak{R}_2$ enthält.

Beweis: (i) Die Bedingung ist notwendig:

Aus Zusatz zum Satz 6, ist es notwendig $n = m$.

Und

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 \ni b_1, \cdots, b_m \to \mathfrak{R}_1 \ni b_1, \cdots, b_m \to a_1 \cdots a_n b_i,\ (i=1, \cdots, m).$$

(ii) Die Bedingung ist hinreichend:

$$\left.\begin{array}{r l} & a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ & a_1 \cdots a_n b_1 , \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots , \\ & a_1 \cdots a_n b_n , \\ \mathfrak{R}_1 \ni x \to & a_1 \cdots a_n x \end{array}\right\} (\text{Satz 4}) \to b_1 \cdots b_n x \to \mathfrak{R}_2 \ni x.$$

Daher $\quad \mathfrak{R}_1 \leqq \mathfrak{R}_2$.

Daher $\quad \mathfrak{R}_1^n \leqq \mathfrak{R}_2^n$ —(Satz 5)→ $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2$.

Zusatz 1. $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_n$ und $b_1 \cdots b_n \neq 0$

$$\rightarrow \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) = \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_n) ;$$

in Worten: Die lineare unabhängige Reihe von n Punkte in einem linearen Raume n^{ten} Ranges lässt sich als Basis desselben Raumes genommen werden.

Zusatz 2. Falls $a_1 \cdots a_n \neq 0$, $b_1 \cdots b_n \neq 0$, so besteht umkehrbar

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n b_1 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots , \\ a_1 \cdots a_n b_n \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_1 \cdots b_n a_1 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots , \\ b_1 \cdots b_n a_n \end{array}\right\} .$$

Satz 8. $\mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_m$ und $b_1 \cdots b_m \neq 0$, $n > m$

→ Die Existenz von $a_{i_{m+1}}, \cdots, a_{i_n}$ in der Reihe $a_1, \cdot \cdot, a_n$ derart, dass $b_1 \cdots b_m a_{i_{m+1}} \cdots a_{i_n} \neq 0$;

in Worten: Im linearen Raume $\mathfrak{R}^n(a_1 \cdots a_n)$ existiert stets eine Basis desselben Raumes, welche die gegebene darin liegende linear unabhängige Reihe von m Punkte $b_1, \cdots, b_m$, $(m < n)$ als ihre Teilreihe enthält.

Beweis: Induktionell genügt es zu zeigen, dass es ein Element $a_{i_{m+1}}$ in der Reihe $a_1, \cdots, a_n$ gibt, derart, dass $b_1 \cdots b_m a_{i_{m+1}} \neq 0$.

Nun wäre $b_1 \cdots b_m a_i = 0$, $(i = 1, \cdots, n)$, so würde sich folgern,

$$\left.\begin{array}{l} b_1 \cdots b_m \neq 0 , \\ b_1 \cdots b_m a_1 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots , \\ b_1 \cdots b_m a_n , \\ \quad m < n \end{array}\right\} \text{(Zusatz zum Satz 4)} \rightarrow a_1 \cdots a_n \rightarrow W .$$

So muss $b_1 \cdots b_m a_i \neq 0$ für mindestens ein a_i . Setzt man dasselbe a_i als $a_{i_{m+1}}$, so kommt unser Beweis zum Schluss.

Satz 9. $\mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_m$ und $b_1 \cdots b_m \neq 0$

$$\rightarrow \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \geqq \mathfrak{R}_2(b_1 \cdots b_m) ;$$

in Worten: Der lineare Raum, der die Basis eines anderen linearen Raumes enthält, enthält stets alle seine Punkte.

Beweis: Nach Satz 4, folgt, dass $n \geqq m$. Also nach Satz 8 existieren die Elemente $a_{i_{m+1}}, \cdots, a_{i_n}$ in der Reihe $a_1, \cdots, a_n$ derart, dass $b_1 \cdots b_m a_{i_{m+1}} \cdots a_{i_n} \neq 0$.

Dann wegen Zusatz 1 zum Satz 7,

$$\mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) = \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m a_{i_{m+1}} \cdots a_{i_n}) .$$

Daher $\mathfrak{R}_2(b_1 \cdots b_m) \ni x \rightarrow b_1 \cdots b_m x \rightarrow b_1 \cdots b_m a_{i_{m+1}} \cdots a_{i_n} x$
$\rightarrow \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m a_{i_{m+1}} \cdots a_{i_n}) \ni x \rightarrow \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \ni x .$

Daher $\mathfrak{R}_2 \ni x \rightarrow \mathfrak{R}_1 \ni x$.

Daher $\mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \geqq \mathfrak{R}_2(b_1 \cdots b_m)$, w. z. b. w.

Satz 10. $\overset{n}{\mathfrak{R}}_1(a_1 \cdots a_n) \supset \overset{m}{\mathfrak{R}}_2(b_1 \cdots b_m) \longleftrightarrow$
$n > m,\ a_1 \cdots a_n b_i,\ (i = 1, \cdots, m);$

in Worten: Der lineare Raum $\mathfrak{R}_1$ enthält einen anderen linearen Raum $\mathfrak{R}_2$ dann und nur dann, wenn der Rang von $\mathfrak{R}_1$ grösser als der von $\mathfrak{R}_2$ ist, und $\mathfrak{R}_1$ die Basispunkten von $\mathfrak{R}_2$ enthält.

Beweis: (i) Die Bedingung ist notwendig:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Zusatz zum Satz 5 lehrt, dass} & n \neq m, \\ \text{Satz 6 lehrt, dass} & n \not< m\end{array}\right\} \rightarrow n > m .$$

Ferner

$$\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \ni b_1, \cdots, b_m \rightarrow \mathfrak{R}_1 \ni b_1, \cdots, b_m \rightarrow a_1 \cdots a_n b_i,\ (i = 1, \cdots, m).$$

(ii) Die Bedingung ist hinreichend:

$$a_1 \cdots a_n b_i,\ (i = 1, \cdots, m) \rightarrow \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_m \text{ und } b_1 \cdots b_m \neq 0$$
$$-(\text{Satz 9}) \rightarrow \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \geqq \mathfrak{R}_2(b_1 \cdots b_m) .$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \geqq \mathfrak{R}_2(b_1 \cdots b_m), \\ n > m\end{array}\right\} (\text{Satz 7}) \rightarrow \mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 .$$

Daher $\overset{n}{\mathfrak{R}}_1(a_1 \cdots a_n) \supset \overset{m}{\mathfrak{R}}_2(b_1 \cdots b_m)$.

§ 3. Der Rang.

Definition III. Von einer gewissen Menge M der Elementen, nennen wir denjenigen nicht gültigen Zyklus, dessen Zahl der Elementen am grössten unter den allen zu M gehörigen nicht gültigen Zyklen ist, die *Basis* der Menge M, und die Zahl der Elementen in der Basis nennen wir den *Rang* der Menge M; in Zeichen: Rang M[7, 8].

So sind die folgenden Behauptungen leicht zu erhalten:

V_1. 7. Wenn man den linearen Raum als linearer Raum oder als Menge betrachtet, so stimmen auch die Bedeutung des Ranges in beiden Fällen einander ein. Gleiches gilt auch für die Bedeutung der Basis.

V_1. 8. $M_1 \geqq M_2 \rightarrow \text{Rang } M_1 \geqq \text{Rang } M_2$.

Satz 11. Sei die Basis der M $a_1 \cdots a_n$, so besteht die folgende Formel;

$$\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \geqq M .$$

Beweis: Sei x ein beliebiges Element von M, so folgt nach der Definition, dass

$$a_1 \cdots a_n \neq 0 , \quad a_1 \cdots a_n x .$$

Daher $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni x$.

Daher $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \geqq M$, w. z. b. w.

Definition IV. Den Durchschnitt der k Mengen $M_1, \cdots, M_k$, schreiben wir in Zeichen als $\mathfrak{D}(M_1, \cdots M_k)$.

Dann folgt leicht;

V_1. 9. $\mathfrak{D}(M_1 M_2) = \mathfrak{D}(M_2 M_1)$,

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{D}(M_1 \cdots M_{k-1}), M_k) = \mathfrak{D}(M_1 \cdots M_k) ,$$

$$\mathfrak{D}(M_1, \mathfrak{D}(M_2 \cdots M_k)) = \mathfrak{D}(M_1 \cdots M_k) .$$

Satz 12. Der $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2)$ ist ein linearer Raum.

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, und $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2)$ je $a_1 \cdots a_n$, $b_1 \cdots b_m$, und $c_1 \cdots c_k$, so folgt nach Satz 11,

$$\mathfrak{R}(c_1 \cdots c_k) \geqq \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2) .$$

---

(7) Anlog wird man auch die Bedeutung begreifen, dass der Rang M gleich ∞ oder 0 ist.

(8) Falls $M \ni a_1, a_2, \cdots$, werden wir oft statt "Rang M" auch "Rang $(a_1 a_2 \cdots)$" schreiben.

Anderseits ist

$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \geqq \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \ni c_1, \cdots, c_k ;$$

also
$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}_1 \ni c_1, \cdots, c_k \quad \text{und} \quad c_1\cdots c_k \neq 0 - (\text{Satz } 9) \rightarrow \mathfrak{R}_1 \geqq \mathfrak{R}(c_1\cdots c_k), \\ \mathfrak{R}_2 \ni c_1, \cdots, c_k \quad \text{und} \quad c_1\cdots c_k \neq 0 - (\text{Satz } 9) \rightarrow \mathfrak{R}_2 \geqq \mathfrak{R}(c_1\cdots c_k) \end{array}\right\}$$
$$\rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \geqq \mathfrak{R}(c_1\cdots c_k) .$$

Daher $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = \mathfrak{R}(c_1\cdots c_k)$.

Also ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$ ein linearer Raum.

Aus Satz 12 und V_1. 9 folgt der

Zusatz. Der $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\cdots\mathfrak{R}_k)$ ist ein linearer Raum.

Und ferner aus V_1. 4, folgt,

V_1. 10. $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\cdots\mathfrak{R}_k) \geqq \mathfrak{R}$.

Definition V. Unter allen k Mengen $M_1, \cdots, M_k$ enthaltenden linearen Räumen nennen wir denjenigen, dessen Rang am kleinsten ist, den *Vereinigungsraum* von $M_1, \cdots, M_k$, und wir schreiben in Zeichen als $\mathfrak{V}(M_1\cdots M_k)$(9) .

Dann folgt leicht,

V_1. 11. $\mathfrak{V}(M_1M_2) = \mathfrak{V}(M_2M_1)$,

V_1. 12. $\mathfrak{V}(M_1+\cdots+M_k) = \mathfrak{V}(M_1\cdots M_k)$.

Satz 13. Sei die Basis von M $a_1\cdots a_n$, so besteht die folgende Gleichung ;

$$\mathfrak{V}(M) = \mathfrak{R}(a_1\cdots a_n) ;$$

in Worten: Sei der Rang der Menge M endlich, so bestimmt sich der einzige Vereinigungsraum $\mathfrak{V}(M)$, und derselbe ist nichts anders als linearer Raum, welcher die Basis von M als seine Basis besitzt.

Beweis: Nach Satz 11, folgt

$$\mathfrak{R}(a_1\cdots a_n) \geqq M .$$

Anderseits folgt nach Definition V,

$$\mathfrak{V}(M) \geqq M \ni a_1, \cdots, a_n \rightarrow \mathfrak{V}(M) \ni a_1, \cdots, a_n$$
$$-(\text{Satz } 9) \rightarrow \mathfrak{V}(M) \geqq \mathfrak{R}(a_1\cdots a_n) .$$

(9) Falls $M \ni a_1, a_2, \cdots$, werden wir statt "$\mathfrak{V}(M)$" oft auch "$\mathfrak{V}(a_1 a_2\cdots)$" schreiben.

Daher $\mathfrak{V}(M) \geqq \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \geqq M$.

Also ist nach Definition V, sowie Zusatz zum Satz 5,

$$\mathfrak{V}(M) = \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zusatz. Rang $\mathfrak{V}(M) =$ Rang M .

Satz 14. $\mathfrak{R} \geqq M \rightarrow \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{V}(M)$;

in Worten: Ein solcher linearer Raum, der eine Menge M in sich enthält, enthält auch den Vereinigungsraum $\mathfrak{V}(M)$ in sich.

Beweis: Sei die Basis der M $a_1 \cdots a_n$, so folgt

$$\mathfrak{R} \geqq M \ni a_1 , \cdots , a_n \rightarrow \mathfrak{R} \ni a_1 , \cdots , a_n - (\text{Satz } 9) \rightarrow \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) .$$

Nun ist $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) = \mathfrak{V}(M)$.

Daher $\mathfrak{R} \geqq \mathfrak{V}(M)$, w. z. b. w.

Satz 15. $\mathfrak{R} \geqq M_1 , \cdots , M_k \rightarrow \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{V}(M_1 \cdots M_k)$;

in Worten: Ein solcher linearer Raum, der k Mengen $M_1 , \cdots , M_k$ in sich enthält, enthält auch den Vereinigungsraum $\mathfrak{V}(M_1 \cdots M_k)$ in sich.

Beweis: $\mathfrak{R} \geqq M_1 , \cdots , M_k \rightarrow \mathfrak{R} \geqq M_1 + \cdots + M_k$

$$-(\text{Satz } 14) \rightarrow \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{V}(M_1 + \cdots + M_k) - (\text{V}_1 .\ 12) \rightarrow \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{V}(M_1 \cdots M_k),$$

w. z. b. w.

Aus Satz 15 kann man leicht folgenden Zusatz herleiten:

Zusatz.
$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}(M_1 \cdots M_{k-1}) , M_k) = \mathfrak{V}(M_1 \cdots M_k) ,$$
$$\mathfrak{V}(M_1 , \mathfrak{V}(M_2 \cdots M_k)) = \mathfrak{V}(M_1 \cdots M_k) .$$

Satz 16. $\mathfrak{V}_1(\mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) , \mathfrak{R}_2(b_1 \cdots b_m)) = \mathfrak{V}_2(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m)$.

Beweis:
$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{V}_1 \geqq \mathfrak{R}_1 \ni a_1 , \cdots , a_n \quad \text{und} \\ \mathfrak{V}_1 \geqq \mathfrak{R}_2 \ni b_1 , \cdots , b_m \end{array}\right\} \rightarrow \mathfrak{V}_1 \ni a_1 , \cdots , a_n , b_1 , \cdots , b_m$$
$$-(\text{Satz } 14) \rightarrow \mathfrak{V}_1 \geqq \mathfrak{V}_2(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m) .$$

Anderseits,

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{V}_2 \ni a_1 , \cdots , a_n & \text{und} & a_1 \cdots a_n \neq 0 - (\text{Satz } 9) \rightarrow \mathfrak{V}_2 \geqq \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) , \\ \mathfrak{V}_2 \ni b_1 , \cdots , b_m & \text{und} & b_1 \cdots b_m \neq 0 - (\text{Satz } 9) \rightarrow \mathfrak{V}_2 \geqq \mathfrak{R}_2(b_1 \cdots b_m) \end{array}\right\}$$
$$-(\text{Satz } 15) \rightarrow \mathfrak{V}_2 \geqq \mathfrak{V}_1(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2) .$$

Daher $\mathfrak{V}_1(\mathfrak{R}_1(a_1\cdots a_n)\,,\ \mathfrak{R}_2(b_1\cdots b_m)) = \mathfrak{V}_2(a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m)\,,$
w. z. b. w.

Man kann analog folgenden Satz beweisen;

Satz 17. $\mathfrak{V}_1(\mathfrak{R}_1(a_1\cdots a_n)\,,\ \cdots\,,\ \mathfrak{R}_k(l_1\cdots l_m)) = \mathfrak{V}_2(a_1\cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m)\,.$

Satz 18. $\text{Rang}\ \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1^n\ \mathfrak{R}_2^m) + \text{Rang}\ \mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1^n\ \mathfrak{R}_2^m) \leqq n+m\,;$

in Worten: Die Summe der Ränge des Durchschnittes und des Vereinigungsraumes zweier gegebenen linearen Räume des n^{ten}, bzw. m^{ten} Ranges ist höchstens gleich $n+m$[10].

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, und $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$, bzw. je $a_1\cdots a_n$, $b_1\cdots b_m$, und $c_1\cdots c_k$, so folgt nach Satz 8, und Zusatz 1 zum Satz 7, z. B.,

$$\mathfrak{R}_1(a_1\cdots a_n) = \mathfrak{R}_1(c_1\cdots c_k a_{k+1}\cdots a_n)\,,$$

$$\mathfrak{R}_2(b_1\cdots b_m) = \mathfrak{R}_2(c_1\cdots c_k b_{k+1}\cdots b_m)\,.$$

Also folgt nach Satz 16

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) &= \mathfrak{V}(c_1\cdots c_k a_{k+1}\cdots a_n c_1\cdots c_k b_{k+1}\cdots b_m)\\ &= \mathfrak{V}(c_1\cdots c_k a_{k+1}\cdots a_n b_{k+1}\cdots b_m)\,.\end{aligned}$$

Daher
$$\begin{aligned}\text{Rang}\ \mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) &= \text{Rang}\ \mathfrak{V}(c_1\cdots c_k a_{k+1}\cdots a_n b_{k+1}\cdots b_m)\\ &= \text{Rang}\ (c_1\cdots c_k a_{k+1}\cdots a_n b_{k+1}\cdots b_m)\\ &\leqq n+m-k\,.\end{aligned}$$

Und wegen Satz 12 folgt leicht

$$\text{Rang}\ \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = \text{Rang}\ \mathfrak{R}(c_1\cdots c_k) = k\,.$$

Daher $\text{Rang}\ \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) + \text{Rang}\ \mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \leqq n+m\,,$ w. z. b. w.

Satz 19. $\text{Rang}\ \mathfrak{D}(M_1M_2) + \text{Rang}\ \mathfrak{V}(M_1M_2) \leqq \text{Rang}\ M_1 + \text{Rang}\ M_2$[11].

Beweis: Da der Vereinigungsraum gegebener Menge auch ein linearer Raum ist, so besteht nach Satz 18 die folgende Ungleichung;

---

(10) Es sei hier bemerkt, dass in dieser Formel das Gleichzeichen nicht immer besteht.

(11) Der Satz 18 und Satz 19 sind gleichwertig im Inhalt, weil man, wie bereits im V_1. 2 erwähnt, die Summenmenge M_1+M_2 von M_1 und M_2 des Satz 19 als unser $\mathfrak{V}_1$-Raum betrachten kann.

$$\text{Rang}\,\mathfrak{D}(\mathfrak{V}(M_1),\,\mathfrak{V}(M_2))+\text{Rang}\,\mathfrak{V}(\mathfrak{V}(M_1),\,\mathfrak{V}(M_2)) \\ \leqq \text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_1)+\text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_2)\;.$$

Nun folgt wegen Zusatz zum Satz 13

$$\text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_1) = \text{Rang}\,M_1\,,$$

$$\text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_2) = \text{Rang}\,M_2\;.$$

Und wegen Zusatz zum Satz 15 folgt

$$\text{Rang}\,\mathfrak{V}(\mathfrak{V}(M_1),\,\mathfrak{V}(M_2)) = \text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_1 M_2)\;.$$

Ferner ist,

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{V}(M_1) \geqq M_1\,,\\ \mathfrak{V}(M_2) \geqq M_2\,,\end{array}\right\} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{V}(M_1),\,\mathfrak{V}(M_2)) \geqq \mathfrak{D}(M_1 M_2)\;.$$

Daher $\quad \text{Rang}\,\mathfrak{D}(\mathfrak{V}(M_1),\,\mathfrak{V}(M_2)) \geqq \text{Rang}\,\mathfrak{D}(M_1 M_2)\;.$

Also folgt

$$\text{Rang}\,\mathfrak{D}(M_1 M_2)+\text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_1 M_2) \leqq \text{Rang}\,M_1+\text{Rang}\,M_2\,,\quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 20. Sind alle Ränge der k Mengen $M_1\,,\cdots,\,M_k$ endlich, so besteht die folgende Ungleichung;

$$\text{Rang}\,(M_1+\cdots+M_k) \leqq \text{Rang}\,M_1+\cdots+\text{Rang}\,M_k\;.$$

Beweis: Nach Satz 19 folgt leicht,

$$\begin{aligned}\text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_1\,,\,\mathfrak{V}(M_2\cdots M_k)) &\leqq \text{Rang}\,M_1+\text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_2\cdots M_k)\\ &\leqq \text{Rang}\,M_1+\text{Rang}\,M_2+\text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_3\cdots M_k)\\ &\leqq \cdots \leqq \text{Rang}\,M_1+\text{Rang}\,M_2+\cdots+\text{Rang}\,M_k\;.\end{aligned}$$

Also, weil

$$\begin{aligned}\text{Rang}\,(M_1+\cdots+M_k) &= \text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_1\cdots M_k)\\ &= \text{Rang}\,\mathfrak{V}(M_1\,,\,\mathfrak{V}(M_2\cdots M_k))\,,\end{aligned}$$

folgt

$$\text{Rang}\,(M_1+\cdots+M_k) \leqq \text{Rang}\,M_1+\cdots+\text{Rang}\,M_k\,,\quad \text{w. z. b. w.}$$

§ 4. Die Reduktionsmethode.

Bei unserem Zyklenkalkül, brauchen wir oft, als eine der höchst wirksamen Beweismethoden, eine, sog. *Reduktionsmethode.* In diesem Paragraphen will ich dieselbe erklären, und einige durch diese Methode beweisbare Sätze angeben.

Satz 21. $a_1\cdots a_n x,\ xy \rightarrow a_1\cdots a_n y$ oder x .

Beweis: Man setze zunächst $a_2\cdots a_n x \neq 0$; dann folgt

$$\left.\begin{array}{r} a_2\cdots a_n x \neq 0 \ , \\ a_1 a_2\cdots a_n x \ , \\ xy \rightarrow a_2\cdots a_n xy \end{array}\right\} (\text{Axiom } 4) \rightarrow a_1 a_2\cdots a_n y \ .$$

Also folgt

$$a_1\cdots a_n x\ ,\quad xy \rightarrow a_1\cdots a_n y \quad \text{oder} \quad a_2\cdots a_n x \ .$$

Daher $a_1\cdots a_n x\ ,\quad xy \rightarrow a_1\cdots a_n y \quad$ oder $\quad \left\{ a_2\cdots a_n x,\ xy \right\}$.

Wir stellen diese Bedeutung mit der folgenden Bezeichnung dar ;

$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x\ , \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_2\cdots a_n x\ , \\ xy \end{matrix}\right\} . \\ a_1\cdots a_n y \ . & \end{tikzcd}$$

Dann bekommen wir die folgende logische Bezeichnungsformel, indem wir die obige Bezeichnungsoperation nach einander wiederholen.

$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x\ , \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_2\cdots a_n x\ , \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_3\cdots a_n x\ , \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \left.\begin{matrix} a_n x\ , \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x \ . \\ a_1\cdots a_n y \ . & a_2\cdots a_n y \ . & a_3\cdots a_n y \ . & & a_n y \ . & \end{tikzcd}$$

Da anderseits

$$a_1\cdots a_n y \leftarrow a_2\cdots a_n y \leftarrow a_3\cdots a_n y \leftarrow \cdots \leftarrow a_n y$$

besteht, so kann man auch die obige Formel folgendermassen noch einmal umschreiben ;

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x\,, \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_2\cdots a_n x\,, \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_3\cdots a_n x\,, \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \left.\begin{matrix} a_n x\,, \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x\,. \\ a_1\cdots a_n y\,. & a_2\cdots a_n y \arrow[l] & a_3\cdots a_n y \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & a_n y \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Daher

$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x\,, \\ xy \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x\,, \\ a_1\cdots a_n y\,, & \end{tikzcd} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Das letzte zweite Schema nennen wir die *Reduktionsformel*, und die die Reduktionsformel in sich enthaltenden Beweismethode nennen wir die Reduktionsmethode.

Als methodisches Beispiel der durch dieselbe Beweisführung beweisbaren Sätze sei der folgende genommen.

Satz 22. $a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,,\; x_1\cdots x_k y \rightarrow a_1\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} y$ oder $x_1\cdots x_k\,.$

Beweis :

$$\left.\begin{matrix} a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k \neq 0\,, \\ a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k \neq 0\,, \\ a_1 a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\} (\text{Axiom } 4) \rightarrow a_1\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} y.$$

Daher

$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k\,. \\ a_1\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} y\,. & \end{tikzcd}$$

Daher

$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\}. \\ a_1\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} y\,. & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \left.\begin{matrix} a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x_1\cdots x_k\,. \\ a_1\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} y\,. & a_2\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} y \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & a_n x_1\cdots x_{k-1} y \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Daher

$$\begin{tikzcd}\left.\begin{array}{r} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ x_1\cdots x_k y \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x_1\cdots x_k\,, \\ a_1\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} y\,, & \end{tikzcd}$$

w. z. b. w.[12]

Satz 23. $a_1\cdots a_n x\,,\ b_1\cdots b_m x \rightarrow a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m$ oder x .

Beweis:

$$\begin{tikzcd}\left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n x\,, \\ b_1\cdots b_m x \end{array}\right\} \arrow[r] & \left.\begin{array}{r} a_1\cdots a_n b_2\cdots b_m x\,, \\ b_1 b_2\cdots b_m x \end{array}\right\} (\text{Satz } 22) \arrow[r] \arrow[d] & b_2\cdots b_m x\,. \\ & a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m\,. & \end{tikzcd}$$

Daher

$$\begin{tikzcd}\left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n x\,, \\ b_1\cdots b_m x \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n x\,, \\ b_2\cdots b_m x \end{array}\right\}. \\ a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m\,. & \end{tikzcd}$$

Daher

$$\begin{tikzcd}\left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n x\,, \\ b_1\cdots b_m x \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n x\,, \\ b_2\cdots b_m x \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \left.\begin{array}{r} a_1\cdots a_n x, \\ b_m x \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x\,. \\ a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m\,. & a_1\cdots a_n b_2\cdots b_m \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & a_1\cdots a_n b_m \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Daher

$$\begin{tikzcd}\left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n x\,, \\ b_1\cdots b_m x \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x\,, \\ a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m\,, & \end{tikzcd}$$

w. z. b. w.

Satz 24. $a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,,\ b_1\cdots b_m x_1\cdots x_k$
$\rightarrow a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m x_1\cdots x_{k-1}$ oder $x_1\cdots x_k$.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}\left.\begin{array}{l} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ b_1\cdots b_m x_1\cdots x_k \end{array}\right\} \arrow[r] & \left.\begin{array}{r} a_1\cdots a_n b_2\cdots b_m x_1\cdots x_k\,, \\ b_1 b_2\cdots b_m x_1\cdots x_k \end{array}\right\} (\text{Satz } 22) \arrow[r] \arrow[d] & b_2\cdots b_m x_1\cdots x_k\,. \\ & a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m x_1\cdots x_{k-1}\,. & \end{tikzcd}$$

(12) Der Beweis des Satz 22 wäre ein typisches Beispiel der Reduktionsmethode.

Daher
$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ b_1\cdots b_m x_1\cdots x_k \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ b_2\cdots b_m x_1\cdots x_k \end{matrix}\right\} . \\ a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m x_1\cdots x_{k-1} . & \end{tikzcd}$$

Daher
$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ b_1\cdots b_m x_1\cdots x_k \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ b_2\cdots b_m x_1\cdots x_k \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ b_m x_1\cdots x_k \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x_1\cdots x_k . \\ a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m x_1\cdots x_{k-1} . & a_1\cdots a_n b_2\cdots b_m x_1\cdots x_{k-1} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & a_1\cdots a_n b_m x_1\cdots x_{k-1} \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Daher
$$\begin{tikzcd} \left.\begin{matrix} a_1\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ b_1\cdots b_m x_1\cdots x_k \end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x_1\cdots x_k\,, \\ a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m x_1\cdots x_{k-1}\,, & \end{tikzcd}$$
w. z. b. w.

Zusatz 1. $a_1 \cdots a_n x\,,\ bx\,,\ x \neq 0 \rightarrow a_1 \cdots a_n b$.

Zusatz 2. $a_1 \cdots a_n x\,,\ b_1 b_2 x\,,\ x \neq 0 \rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 b_2$.

Zusatz 3. $a_1 \cdots a_n x\,,\ b_1 \cdots b_m x\,,\ x \neq 0 \rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$.

Zusatz 4. $a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m \neq 0 \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{R}(a_1\cdots a_n)\,,\ \mathfrak{R}(b_1\cdots b_m)) = \mathfrak{N}$.

Zusatz 5. $a_1 \cdots a_n x_1 \cdots x_k\,,\ b_1 \cdots b_m x_1 \cdots x_k\,,\ x_1 \cdots x_k \neq 0$
$$\rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_k\,,\ (i = 1\,, \cdots, k)\,.$$

Zusatz 6. $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m d_1 \cdots d_k \neq 0$
$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R}(a_1\cdots a_n d_1\cdots d_k)\,,\ \mathfrak{R}(b_1\cdots b_m d_1\cdots d_k)) = \mathfrak{R}(d_1\cdots d_k)\,.$$

Bemerkung:

Wenn die Prämisse eines Satzes, wie oben, aus zwei Zyklen besteht, so gibt es in diesem Fall ausser obiger Reduktionsmethode noch eine stets brauchbare Beweismethode, welche sich auf Satz 18 zurückführen lässt. Um dieselbe Methode zu erklären wollen wir einen neuen Beweis des Satzes 23 angeben.

(Satz 23.) $a_1\cdots a_n x,\ b_1\cdots b_m x \rightarrow a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m$ oder x .

Beweis: (i) Sei $a_1\cdots a_n$, so folgt trivialerweise $a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m$.

(ii) Sei $b_1\cdots b_m$, so folgt trivialerweise $a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m$.

(iii) Nun sei $a_1\cdots a_n \neq 0$, $b_1\cdots b_m \neq 0$, so folgt wegen des Satz 18,
$$\text{Rang}\ \mathfrak{D}(\mathfrak{R}(a_1\cdots a_n)\,,\ \mathfrak{R}(b_1\cdots b_m)) + \text{Rang}\ \mathfrak{B}(\mathfrak{R}(a_1\cdots a_n)\,,\ \mathfrak{R}(b_1\cdots b_m)) \leqq n + m\,.$$

Dabei ist

$$a_1 \cdots a_n x \,,\; b_1 \cdots b_m x \to \mathfrak{D}(\mathfrak{N}(a_1 \cdots a_n),\, \mathfrak{N}(b_1 \cdots b_m)) \ni x \,.$$

Und ist weiter

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{N}(a_1 \cdots a_n)\,,\; \mathfrak{N}(b_1 \cdots b_m)) \ni a_1\,,\, \cdots,\, a_n\,,\, b_1\,,\, \cdots,\, b_m \,.$$

Also folgt

$$\text{Rang}\ \mathfrak{D}(\mathfrak{N}(a_1 \cdots a_n)\,,\; \mathfrak{N}(b_1 \cdots b_m)) \geqq \text{Rang}\ (x)\,,$$

$$\text{Rang}\ \mathfrak{V}(\mathfrak{N}(a_1 \cdots a_n)\,,\; \mathfrak{N}(b_1 \cdots b_m)) \geqq \text{Rang}\ (a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m)\,.$$

Daher $\quad \text{Rang}\ (x) + \text{Rang}\ (a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m) \leqq n + m \,.$

Daher $\quad x \neq 0 \to a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \,,$

$\qquad\qquad a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0 \to x \,.$

Daher $\quad a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \;$ oder $\; x \,.$

Also ist

$$a_1 \cdots a_n x \,,\; b_1 \cdots b_m x \to a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \;\text{ oder }\; x \,,$$ w. z. b. w.

Satz 25. $a_1 \cdots a_n \,,\, a_i b_i \,,\, a_i \neq 0 \,,\, (i = 1\,,\, \cdots,\, n) \to b_1 \cdots b_n \,.$

Beweis :

$$a_1 \cdots a_n \,,\, a_i b_i \text{ — (Satz 21)} \to a_1 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_n \quad \text{oder} \quad a_i \,.$$

Daher

$$\begin{tikzcd} \left.\begin{array}{r} a_1 \cdots a_n\,, \\ a_1 b_1 \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{array}{r} b_1 a_2 \cdots a_n\,, \\ a_2 b_2 \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{array}{r} b_1 b_2 a_3 \cdots a_n\,, \\ a_3 b_3 \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ a_1 \to W\,. & a_2 \to W\,. & a_3 \to W\,. & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \left.\begin{array}{r} b_1 \cdots b_{n-1} a_n\,, \\ a_n b_n \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & b_1 \cdots b_n \,. \\ & a_n \to W\,. & \end{tikzcd}$$

Daher $\; a_1 \cdots a_n \,,\, a_i b_i \,,\, a_i \neq 0 \,,\, (i = 1,\, \cdots,\, n) \to b_1 \cdots b_n \,,\;$ w. z. b. w.

Zusatz. $a_1 \cdots a_n \neq 0 \,,\, a_i b_i \,,\, b_i \neq 0 \,,\, (i = 1\,,\, \cdots,\, n) \to b_1 \cdots b_n \neq 0 \,.$

Beweis : Wäre vorläufig $b_1 \cdots b_n$, so wäre

$$b_1 \cdots b_n \,,\, a_i b_i \,,\, b_i \neq 0 \,,\, (i = 1\,,\, \cdots,\, n) \text{ — (Satz 25)} \to a_1 \cdots a_n \to W.$$

Daher $\; a_1 \cdots a_n \neq 0 \,,\, a_i b_i \,,\, b_i \neq 0 \,,\, (i = 1\,,\, \cdots,\, n) \to b_1 \cdots b_n \neq 0 \,,$

w. z. b. w.

Satz 26.
$$\left.\begin{array}{l} *a_2\cdots a_n x\,, \\ a_1*\cdots a_n x\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ a_1 a_2\cdots *x \end{array}\right\} \to a_1 a_2\cdots a_n \quad \text{oder} \quad x\,.$$

Beweis:
$$\left.\begin{array}{l} *a_2\cdots a_n x, \\ a_1*\cdots a_n x \end{array}\right\} (\text{Satz } 22) \begin{array}{l} \longrightarrow ** a_3\cdots a_n x\,. \\ \downarrow \\ a_1 a_2\cdots a_n\,. \end{array}$$

Daher
$$\left.\begin{array}{l} *a_2\cdots a_n x\,, \\ a_1*\cdots a_n x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \downarrow \\ a_1 a_2\cdots a_n\,. \end{array} \left.\begin{array}{l} **a_3\cdots a_n x\,, \\ a_1 a_2*\cdots a_n x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \downarrow \\ a_1 a_2\cdots a_n\,. \end{array} \left.\begin{array}{l} ***a_4\cdots a_n x\,, \\ a_1 a_2 a_3 *\cdots a_n x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \cdots \\ \downarrow \\ a_1 a_2\cdots a_n\,. \end{array}$$

$$\cdots \longrightarrow \left.\begin{array}{r} *\cdots * a_n x\,, \\ a_1\cdots a_{n-1} * x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x\,. \\ \downarrow \\ a_1 a_2\cdots a_n\,. \end{array}$$

Daher
$$\left.\begin{array}{l} * a_2\cdots a_n x\,, \\ a_1 * \cdots a_n x\,, \\ \cdots\cdots\cdots\,, \\ a_1 a_2\cdots * x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x\,, \\ \downarrow \\ a_1 a_2\cdots a_n\,, \end{array} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zusatz. $a_1\cdots a_n \neq 0 \to \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1(* a_2\cdots a_n)\,,\ \mathfrak{R}_2(a_1 *\cdots a_n)\,,$
$\cdots\,,\ \mathfrak{R}_n(a_1\cdots a_{n-1} *)) = \mathfrak{N}\,;$

in Worten: Es gibt keinen Punkt, welcher zugleich in aller $(n-1)$-Seitensimplexen eines n-Simplexes enthalten ist.

Satz 27.
$$\left.\begin{array}{l} * a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ a_1 * \cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ a_1 a_2\cdots * x_1\cdots x_k \end{array}\right\} \to a_1 a_2\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} \quad \text{oder} \quad x_1\cdots x_k\,.$$

Beweis:
$$\left.\begin{array}{l} * a_2\cdots a_i\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ a_1 a_2\cdots *_i\cdots a_n x_1\cdots x_k \end{array}\right\} (\text{Satz } 22) \begin{array}{l} \longrightarrow * a_2\cdots *_i\cdots a_n x_1\cdots x_k\,. \\ \downarrow \\ a_1 a_2\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1}\,. \end{array}$$

Daher

$$\begin{tikzcd}
\left.\begin{array}{l} * a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ a_1 *\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ a_1 a_2\cdots * x_1\cdots x_k \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \left.\begin{array}{l} * a_3\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ a_2 * \cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ a_2 a_3\cdots * x_1\cdots x_k \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
a_1 a_2\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1}\,. & a_2 a_3\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1} \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \left.\begin{array}{l} * a_n x_1\cdots x_k\,, \\ a_{n-1} * x_1\cdots x_k \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x_1\cdots x_k\,. \\
\cdots & a_{n-1} a_n x_1\cdots x_{k-1} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Daher

$$\begin{tikzcd}
\left.\begin{array}{l} * a_2\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ a_1 *\cdots a_n x_1\cdots x_k\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ a_1 a_2\cdots * x_1\cdots x_k \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d] & x_1\cdots x_k\,, \\
a_1 a_2\cdots a_n x_1\cdots x_{k-1}\,, &
\end{tikzcd}$$

w. z. b. w.

Zusatz. $a_1\cdots a_n \neq 0\,,\quad m \leqq n$

$$\longrightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1(* a_2\cdots a_m a_{m+1}\cdots a_n)\,,\ \mathfrak{R}_2(a_1 * \cdots a_m a_{m+1}\cdots a_n)\,,$$
$$\cdots\,,\ \mathfrak{R}_m(a_1 a_2\cdots * a_{m+1}\cdots a_n)) = \mathfrak{R}(a_{m+1}\cdots a_n)\,.$$

§ 5. Einige Bemerkungen.

Betreffs des § 4 sei nun besonders erwähnt, dass alle Sätze in dem § 4 lauter Folgerungen sind von den Axiomen ausser Axiom 1. Dies wollen wir besonders betonen, da wir die Absicht haben später Geometrien aufzubauen mit den Axiomen 2, 3, 4, ohne Benutzung des Axiom 1.

Betreffs ganzer dieser Arbeit sei bemerkt, dass die alle Sätze keinerlei Existenzforderung enthalten. Dies steht auch im tiefen Zusammenhang mit einer Fortsetzung dieser Arbeit, s.g. Theorie des zweiten Verknüpfungsraumes, welche demnächst erscheinen wird.
