Über die Abbildungskette vom Projektionsspektrum.

Von Takeo NAKASAWA.

(Eingegangen am 13. Dezember, 1937)

Einleitung.

In vorliegender Arbeit wollen wir zwei neue Begriffe, d. h. *Abbildungskette* und *Projektionspunktfolge* einführen, und dadurch wird dasjenige untersucht, welches man etwa die Analyse und die Verfeinerung eines *Homöomorphiesatzes*[1] *von Alexandroff* nennen darf. Durch die Abbildungskette wollen wir nämlich denselben Satz in die einseitige Homomorphiesätze zerlegen, welche die topologischen Eigenschaften der Abbildungsketten zum deutlichen Ausdruck bringen, und durch die Projektionspunktfolge den Beweis derselben Sätze einigermassen vereinfachen. Als nächstes wollen wir unter Verwendung des Abbildungskettenbegriffs einen Beweis des Satzes von Borsuk[2] angeben. Und zuletzt betrachten wir eine Erweiterung des Abbildungskettenbegriffs und einige daraus verfolgte Ergebnisse.

Bezeichnungen.

Zuerst schicken wir die ausführlichen Definitionen für die häufig vorkommenden Buchstaben bzw. Bezeichnungen voraus: Damit sparen wir die mühsame Wiederholung derselben Definitionen.

A bzw. B bedeuten je ein Kompaktum, d. i. einen kompakten metrisierbaren Raum.

$\{A_m\}$ bzw. $\{B_m\}$ bedeuten je eine *geometrisch realisierte* Spektrenentwicklung von A oder von B, d. i. ein bzw. von A oder von B konstruiertes und bzw. in A oder in B geometrisch realisiertes Projektionsspektrum.

$\{\mathfrak{A}_m\}$ bzw. $\{\mathfrak{B}_m\}$ bedeuten je eine Unterteilungsfolge von A oder von B, deren Nerfenfolge bzw. $\{A_m\}$ oder $\{B_m\}$ ist, d. i. Nerf von $\mathfrak{A}_m = A_m$ und Nerf von $\mathfrak{B}_m = B_m$ sind.

(1) P. Alexandroff, *Gestalt und Lage*, Ann. of Math. **30** (1929), S. 134.

(2) K. Borsuk, *Sur les rétracts*, Fund. Math. **17** (1931), S. 165.

α_m bzw. β_m bedeuten je ein Durchmesser der Überdeckung $\mathfrak{A}_m$ oder der Überdeckung $\mathfrak{B}_m$, d. i. $\mathfrak{A}_m = \alpha_m$-Überkeckung und $\mathfrak{B}_m = \beta_m$-Überdeckung sind.

$d(\mathfrak{A}_m)$ bzw. $d(\mathfrak{B}_m)$ bedeuten je eine *Lebesguesche Konstante*, welche in Bezug auf die Überdeckung $\mathfrak{A}_m$ oder in Bezug auf die Überdeckung $\mathfrak{B}_m$ bestimmt wird, (Vgl. Gestalt und Lage, S. 115, Hilfssatz).

a_m (bzw. $a_{i_1 \cdots i_m}$) bedeutet ein Eckpunkt von A_m, und b_m (bzw. $b_{j_1 \cdots j_m}$) bedeutet ein Eckpunkt von B_m.

Eine Folge, welche gleichzeitig eine Projektionsfolge und eine Eckpunktfolge ist, nennen wir die *Projektionspunktfolge*.

Was die Bedeutung der anderen Bezeichnungen betrifft, vgl. die a. a. O.[1] zitierte Alexandroffsche Arbeit!

1.

Satz 1. *Wenn für jedes m eine simpliziale Abbildung f_{ν_m} von A_{ν_m}* **in**[3] *B_m derart existiert, dass für beliebige p und q, $p \leqq q$, und einen beliebigen Eckpunkt a_{ν_q} von A_{ν_q} die Relation*

$$(A) \qquad f_{\nu_p} \pi_p^q (a_{\nu_q}) \cdot\!-\!\cdot\; \pi_p^q f_{\nu_q} (a_{\nu_q})$$

in B_p stattfindet, dann bestimmt die Folge $\{f_{\nu_m}\}$ der simplizialen Abbildungen f_{ν_m} eine eindeutige Abbildung von A in B.

Beweis: Es sei $\{a_{i_1 \cdots i_m}\}$ die einen Punkt x von A definierende Projektionspunktfolge. Wegen der Ungleichung $\rho\left(f_{\nu_p}(a_{i_1 \cdots i_{\nu_p}}), f_{\nu_q}(a_{i_1 \cdots i_{\nu_q}})\right) \leqq 2\beta_p$, konvergiert die Folge $\left\{f_{\nu_m}(a_{i_1 \cdots i_{\nu_m}})\right\}$. Den Häufungspunkt bezeichnen wir mit y, und wir definieren die Abbildung f von A in B durch $f(x) = y$. Da x definierende Projektionspunktfolgen untereinander benachbart sind, so sind ihre Abbildungen durch f_{ν_m} auch benachbart. Daher ist f eine eindeutige Abbildung von A in B.

Es sei nun $\{x^n\} \to x$ in A, und $f(x^n) = y^n$ in B. Sei $\{a^n_{i_1 \cdots i_m}\}$ die x^n definierende Projektionspunktfolge, dann kann für beliebiges p ein hinreihend grosses n so gewählt werden, dass die Relation $a_{i_1 \cdots i_{\nu_p}} \cdot\!-\!\cdot\; a^n_{i_1 \cdots i_{\nu_p}}$ stattfindet; daher ist $\rho\left(f_{\nu_p}(a_{i_1 \cdots i_{\nu_p}}), f_{\nu_p}(a^n_{i_1 \cdots i_{\nu_p}})\right) < 2\beta_p$. Aus $\rho\left(f_{\nu_p}(a_{i_1 \cdots i_{\nu_q}}), f_{\nu_q}(a_{i_1 \cdots i_{\nu_q}})\right) < 2\beta_p$ ist anderseits $\rho\left(f_{\nu_p}(a_{i_1 \cdots i_{\nu_p}}), y\right) \leqq 2\beta_p$. Ebenfalls ist $\rho\left(f_{\nu_p}(a^n_{i_1 \cdots i_{\nu_p}}), y^n\right) \leqq 2\beta_p$. Daher ist $\rho(y, y^n) < 6\beta_p$; infolge dessen ist f stetig, w. z. b. w.

Satz 1′. *Wenn für jedes m eine simpliziale Abbildung f_{ν_m} von A_{ν_m}* ***auf***[4] *B_m derart existiert, dass für beliebige p und q, $p \leqq q$, und einen beliebigen Eckpunkt a_{ν_q} von A_{ν_q} die Relation*

$$(A) \qquad f_{\nu_p}\pi_p^q(a_{\nu_q}) \cdot\!-\!\cdot\ \pi_p^q f_{\nu_q}(a_{\nu_q})$$

in B_p stattfindet, dann bestimmt die Folge $\{f_{\nu_m}\}$ der simplizialen Abbildungen f_{ν_m} eine eindeutige stetige Abbildung von A ***auf*** *B.*

Beweis: Nach Satz 1 genügt es zu beweisen, dass wenigstens ein Punkt von A auf einen beliebigen Punkt y von B sich abbildet. Es sei $\{a^m_{i_1\cdots i_{\nu_m}}\}$ eins der Urbilder der y definierenden Projektionspunktfolgen $\{b_{j_1\cdots j_m}\}$ in Bezug auf $\{f_{\nu_m}\}$, und sei ferner x^m der Häufungspunkt einer Projektionspunktfolge $\{a^m_{i_1\cdots i_s}\}$, derer ν_m^{te} Eckpunkt $a^m_{i_1\cdots i_{\nu_m}}$ ist. Da A kompakt ist, so konvergiert eine passend gewählte Teilfolge $\{x^{m_\mu}\}$ der Folge $\{x^m\}$ gegen einen Punkt x von A. Es sei ferner $f(x^m) = y^m$, $f(x) = y^*$, so folgt,

$$\lim \rho(y, b_{j_1\cdots j_{m_\mu}}) = 0\,,$$

$$\lim \rho(b_{j_1\cdots j_{m_\mu}}, y^{m_\mu}) \leqq \lim 2\beta_{m_\mu} = 0\,,$$

$$\lim \rho(y^{m_\mu}, y^*) = 0\,.$$

Daher ist $\rho(y, y^*) = 0$.

Also ist $f(x) = y$, w. z. b. w.

Satz 2. *Wenn eine eindeutige stetige Abbildung f von A* ***in*** *B existiert, dann können eine Teilfolge $\{A_{\nu_m}\}$ von $\{A_m\}$ und eine simpliziale Abbildung f_{ν_m} von A_{ν_m}* ***in*** *B_m für jedes m so gefunden werden, dass für beliebige p und q, $p \leqq q$, und einen beliebigen Eckpunkt a_{ν_q} von A_{ν_q} die Relation*

$$(A) \qquad f_{\nu_p}\pi_p^q(a_{\nu_q}) \cdot\!-\!\cdot\ \pi_p^q f_{\nu_q}(a_{\nu_q})$$

in B_p stattfindet, und dass die Folge $\{f_{\nu_m}\}$ die Abbildung f definiert.

Beweis: Setzt man $f(A) = A'$ in B, so ist die Folge $\{f(\mathfrak{A}_m)\}$ eine Unterteilungsfolge von A'. Dann lässt sich für beliebiges m ein

(3), (4) Hierbei bedeutet "*in*" "*auf einen echten oder unechten Teilkomplex* (*bzw. Teilmenge*) *von*", und ähnlich "*auf*" "*auf einen unechten Teilkomplex* (*bwz. Teilmenge*) *von*", und ein Teilkomplex Q eines gegebenen Komplexes P soll ein *unechter Teilkomplex* heissen, wenn Q alle Eckpunkte von P enthält.

hinreihend grosses ν_m so finden, dass der Durchmesser von $f(\mathfrak{A}_{\nu_m})$ kleiner als die Lebesguesche Konstante $d(\mathfrak{B}_m)$ von $\mathfrak{B}_m$ ist. Dann lässt sich der Komplex $f(A_{\nu_m})$ in B durch eine simpliziale Abbildung φ_{ν_m} in B_m abbilden. Setzt man $\varphi_{\nu_m} f = f_{\nu_m}$, so ist f_{ν_m} eine simpliziale Abbildung von A_{ν_m} in B_m. Wegen der Ungleichung $\rho\big(f(a_{i_1 \dots i_{\nu_p}}), f(a_{i_1 \dots i_{\nu_q}})\big) < d(\mathfrak{B}_p)$ gilt

$$f_{\nu_p}(a_{i_1 \dots i_{\nu_p}}) \cdot\!-\!\cdot\ \pi^q_p f_{\nu_q}(a_{i_1 \dots i_{\nu_q}}) \quad \text{in} \quad B_p\,,$$

was die Bedingung (A) ist. Wegen der Ungleichung $\rho\big(f(a_{i_1 \dots i_{\nu_m}}), f_{\nu_m}(a_{i_1 \dots i_{\nu_m}})\big) < \beta_m$ gilt auch

$$\lim f_{\nu_m}(a_{i_1 \dots i_{\nu_m}}) = \lim f(a_{i_1 \dots i_{\nu_m}}) = f(x)\,.$$

Also definiert die Folge $\{f_{\nu_m}\}$ die Abbildung f, w. z. b. w.

Satz 2'. *Wenn eine eindeutige stetige Abbildung f von A auf B existiert, dann können eine Teilfolge $\{A_{\nu_m}\}$ von $\{A_m\}$ und eine simpliziale Abbildung f_{ν_m} von A_{ν_m} auf B_m für jedes m so gefunden werden, dass für beliebige p und q, $p \leqq q$, und einen beliebigen Eckpunkt a_{ν_q} von A_{ν_q} die Relation*

$$(A) \qquad f_{\nu_p}\pi^q_p(a_{\nu_q}) \cdot\!-\!\cdot\ \pi^q_p f_{\nu_q}(a_{\nu_q})$$

in B_p stattfindet, und dass die Folge $\{f_{\nu_m}\}$ die Abbildung f definiert.

Beweis: Nehmen wir die Lebesguesche Konstante, welche bei dem Beweis des Satzes 2 auftritt, hinreichend klein, so wird wegen der Gleichung $f(A) = B$ $f(A_{\nu_m})$ durch eine simpliziale Abbildung *auf* B_m abgebildet. Was übrig bleibt läuft ganz analog wie bei dem Satz 2.

Nun wollen wir die Definition der Abbildungskette ausführlich aussprechen:

Definition 1. Die Folge $\{f_{\nu_m}\}$ von simplizialen Abbildungen, welche die Bedingung (A) erfüllt, soll nun eine *Abbildungskette* von $\{A_m\}$ *in* (oder *auf*) $\{B_m\}$ heissen.

Durch diesen Begriff können wir die oben bewiesenen Sätze in der folgenden Form aussprechen:

Satz I. *Die eindeutige stetige Abbildung von A in B lässt sich vollständig durch die Abbildungskette von $\{A_m\}$ in $\{B_m\}$ charakterisieren.*

Satz I′. *Die eindeutige stetige Abbildung von A auf B lässt sich vollständig durch die Abbildungskette von $\{A_m\}$ auf $\{B_m\}$ charakterisieren.*

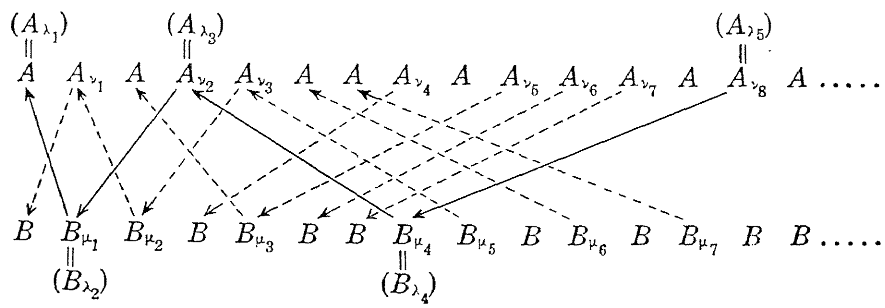
2.

Satz II[5]. *A und B sind dann und nur dann ineinander homöomorph, wenn sich eine Teilfolge $\{A_{\lambda_{2m-1}}\}$ von $\{A_m\}$, eine Teilfolge $\{B_{\lambda_{2m}}\}$ von $\{B_m\}$, und für jedes m eine simpliziale Abbildung $f_{\lambda_{2m+1}}$ von $A_{\lambda_{2m+1}}$ in $B_{\lambda_{2m}}$ und eine simpliziale Abbildung $g_{\lambda_{2m}}$ von $B_{\lambda_{2m}}$ in $A_{\lambda_{2m-1}}$ so finden lassen, dass für beliebige p und q, $p \leqq q$, und einen beliebigen Eckpunkt $a_{\lambda_{2q+1}}$ von $A_{\lambda_{2q+1}}$ bzw. $b_{\lambda_{2q}}$ von $B_{\lambda_{2q}}$ die Relationen*

$$
\begin{aligned}
&(A) \qquad && f_{\lambda_{2p+1}}\pi_{2p+1}^{2q+1}(a_{\lambda_{2q+1}}) \;\cdot\!\!-\!\!-\!\!\cdot\; \pi_{2p}^{2q} f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}}) \,, \\
& && g_{\lambda_{2p}}\pi_{2p}^{2q}(b_{\lambda_{2q}}) \;\cdot\!\!-\!\!-\!\!\cdot\; \pi_{2p-1}^{2q-1} g_{\lambda_{2q}}(b_{\lambda_{2q}}) \,, \\
&(B) \qquad && g_{\lambda_{2q}} f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}}) \;\cdot\!\!-\!\!-\!\!\cdot\; \pi_{2q-1}^{2q+1}(a_{\lambda_{2q+1}}) \,, \\
& && f_{\lambda_{2q-1}} g_{\lambda_{2q}}(b_{\lambda_{2q}}) \;\cdot\!\!-\!\!-\!\!\cdot\; \pi_{2q-2}^{2q}(b_{\lambda_{2q}})
\end{aligned}
$$

bzw. in $B_{\lambda_{2p}}$, in $A_{\lambda_{2p-1}}$, in $A_{\lambda_{2q-1}}$, in $B_{\lambda_{2q-2}}$ stattfinden.

Beweis: Seien A und B ineinander homöomorph. Dann können nach Satz 2 eine Teilfolge $\{A_{\nu_m}\}$ von $\{A_m\}$, eine Teilfolge $\{B_{\mu_m}\}$ von $\{B_m\}$, und für jedes m eine simpliziale Abbildung f_{ν_m} von A_{ν_m} in B_m und eine simpliziale Abbildung g_{μ_m} von B_{μ_m} in A_m so gefunden werden, dass zwei Relationen von (A) erfüllt werden. Wählen wir weiter die Teilfolge $\{A_{\lambda_{2m-1}}\}$ bzw. $\{B_{\lambda_{2m}}\}$ von $\{A_{\nu_m}\}$ bzw. $\{B_{\mu_m}\}$ nach dem Regel, wie in der folgenden Figur angegeben wird;



(5) Dies ist wörtlich der sog. *Homöomorphiesatz* von Alexandroff, (Ann. of Math., 30 (1929), S. 134).

Dann ist $\rho\left(gf_{\lambda_{2q+1}}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2q+1}}}),\ gf(a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2q+1}}})\right) < d(\mathfrak{A}_{\lambda_{2q-1}})$(6).

Also ist $g_{\lambda_{2q}} f_{\lambda_{2q+1}}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2q+1}}}) \cdot - \cdot\ a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2q-1}}}$.

Das ist die erste Relation von (B), und auf dieselbe Weise ist die zweite zu beweisen. Damit ist die Bedingung notwendig.

Um die Hinreichendheit ze beweisen genügt es nach Satz 1 zu zeigen, dass $gf(x) = x$ in A und $fg(y) = y$ in B sind. Sei $\{a_{i_1\cdots i_m}\}$ die einen Punkt x von A definierende Projektionspunktfolge, so konvergiert die Folge $\left\{f_{\lambda_{2m+1}}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2m+1}}})\right\}$, welche man auch $\{b^{2m+1}_{j_1\cdots j_{\lambda_{2m}}}\}$ schreibt, zu dem Punkt $f(x)$ in B, welcher auch y heissen möge. Es sei ferner $\{b_{j_1\cdots j_{\lambda_{2m}}}\}$ die y definierende Projektionspunktfolge. Dann existiert für beliebiges k ein hinreichend grosses n, so dass die Relation $b_{j_1\cdots j_{\lambda_{2k}}} \cdot - \cdot\ b^{2n+1}_{j_1\cdots j_{\lambda_{2k}}}$ gilt. Daher ist

$$g_{\lambda_{2k}}(b_{j_1\cdots j_{\lambda_{2k}}}) \cdot - \cdot\ g_{\lambda_{2k}}\pi^{2n}_{2k}(b^{2n+1}_{j_1\cdots j_{\lambda_{2n}}}) \cdot - \cdot\ \pi^{2n-1}_{2k-1} g_{\lambda_{2n}}(b^{2n+1}_{j_1\cdots j_{\lambda_{2n}}})$$
$$= \pi^{2n-1}_{2k-1} g_{\lambda_{2n}} f_{\lambda_{2n+1}}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2n+1}}}) \cdot - \cdot\ \pi^{2n+1}_{2k-1}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2n+1}}}) = a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2k-1}}}.$$

Also gilt $g_{\lambda_{2k}}(b_{j_1\cdots j_{\lambda_{2k}}}) \cdot - \cdot - \cdot - \cdot\ a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2k-1}}}$.

Daher ist $gf(x) = \lim g_{\lambda_{2k}}(b_{j_1\cdots j_{\lambda_{2k}}}) = \lim a_{i_1\cdots i_{\lambda_{2k-1}}} = x$.

Daher ist $gf(x) = x$.

Gleicherweise ist die Relation $fg(y) = y$ zu beweisen, w. z. b. w.

Man kann die Bedingung des Satzes II ein wenig modifizieren, indem man die Bedingung von *in*-Abbildbarkeit mit der stärkeren, d. h. Abbildbarkeit von $A_{\lambda_{2m+1}}$ *auf* einen unechten Teilkomplex von $B_{\lambda_{2m}}$ ersetzt, und die zweite Relation von (B) auslässt. Die so veränderte Bedingung ist wieder notwendig und hinreichend. Denn dieselbe Bedingung ist tatsächlich notwendig nach Satz 2′ und dem Notwendigkeitsbeweis des Satzes II. Anderseits folgt nach Satz 1′ $f(A) = B$, und nach dem Hinreichendheitsbeweis des Satzes II gilt $gf =$ *Identität*; dabei wird die zweite Formel von (B) keineswegs gebraucht, womit die Bedingung hinreichend ist. Infolgedessen kann man den folgenden Satz aussprechen:

Satz II′. *A und B sind dann und nur dann ineinander homöomorph, wenn sich eine Teilfolge* $\{A_{\lambda_{2m-1}}\}$ *von* $\{A_m\}$, *eine Teilfolge* $\{B_{\lambda_{2m}}\}$ *von* $\{B_m\}$, *und für jedes* m *eine simpliziale Abbildung* $f_{\lambda_{2m+1}}$

(6) g bedeutet hierbei bloss f^{-1}.

von $A_{\lambda_{2m+1}}$ *auf* $B_{\lambda_{2m}}$ *und eine simpliziale Abbildung* $g_{\lambda_{2m}}$ *von* $B_{\lambda_{2m}}$ *in* $A_{\lambda_{2m-1}}$ *so finden lassen, dass für beliebige* p *und* q, $p \leqq q$, *und einen beliebigen Eckpunkt* $a_{\lambda_{2q+1}}$ *von* $A_{\lambda_{2q+1}}$ *bzw.* $b_{\lambda_{2q}}$ *von* $B_{\lambda_{2q}}$ *die Relationen*

$$(A) \qquad f_{\lambda_{2p+1}}\pi^{2q+1}_{2p+1}(a_{\lambda_{2p+1}}) \cdot\!-\!\cdot\; \pi^{2q}_{2p}f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}})\,,$$

$$g_{\lambda_{2p}}\pi^{2q}_{2p}(b_{\lambda_{2q}}) \cdot\!-\!\cdot\; \pi^{2q-1}_{2p-1}g_{\lambda_{2q}}(b_{\lambda_{2q}})\,,$$

$$(B) \qquad g_{\lambda_{2q}}f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}}) \cdot\!-\!\cdot\; \pi^{2q+1}_{2q-1}(a_{\lambda_{2q+1}})$$

bzw. in $B_{\lambda_{2p}}$, *in* $A_{\lambda_{2p-1}}$, *in* $A_{\lambda_{2q-1}}$ *stattfinden.*

3.

Satz 3. *Es seien* $\{f_{\lambda_m}\}$ *und* $\{g_{\mu_m}\}$ *Abbildungsketten von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$, *und es seien* f *bzw.* g *die eindeutige stetige Abbildungen, welche* $\{f_{\lambda_m}\}$ *bzw.* $\{g_{\mu_m}\}$ *definieren. Wenn für gegebenes* ε *ein hinreichend grosses* s *existiert, so dass für irgendeinen Eckpunkt* $a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}$ *von* A_{λ_s} *bzw.* $a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}$ *von* A_{μ_s} *die Relation*[7]

$$(C) \qquad f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}) \cdot\!-\!\cdot\!-\!\cdot\!-\!\cdot\; g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})$$

in B_s *stattfindet, so gilt die Ungleichung* $\rho\big(f(x),\, g(x)\big) < \varepsilon$ *in* B *für jeden Punkt* x *von* A.

Beweis: Man nehme s so gross, dass die Ungleichung $\varepsilon > 8\beta_s$ gilt. Sei $\{a_{i_1\cdots i_m}\}$ die einen Punkt x von A definierende Projektionspunktfolge, so sind

$$\rho\big(f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}),\, f(x)\big) \leqq 2\beta_s\,,$$

$$\rho\big(g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}),\, g(x)\big) \leqq 2\beta_s\,,$$

Anderseits ist nach (C)

$$\rho\big(f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}),\, g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})\big) < 4\beta_s\,.$$

(7) Es wäre notwendig zu bemerken, dass die Indexe von $a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}$ und $a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}$, d. h. die zwei Eckpunkte in ein und derselben Projektionspunktfolge umgefasst werden.

Also ist $\rho\big(f(x),\ g(x)\big) < 8\beta_s < \varepsilon$ in B, w. z. b. w.

Satz 4. *Es seien* $\{f_{\lambda_m}\}$ *und* $\{g_{\mu_m}\}$ *Abbildungsketten von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$, *und es seien* f *bzw.* g *die eindeutige Abbildungen, welche* $\{f_{\lambda_m}\}$ *bzw.* $\{g_{\mu_m}\}$ *definieren. Wenn es für gegebenes* s *ein hinreichend kleines* ε *existiert, so dass für jeden Punkt* x *von* A *die Ungleichung* $\rho\big(f(x),\ g(x)\big) < \varepsilon$ *in* B *gilt, so gilt für beliebigen Eckpunkt* $a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}$ *von* A_{λ_s} *bzw.* $a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}$ *von* A_{μ_s} *die folgende Relation in* B_s:

$$(C) \qquad f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}) \cdot\!-\!\cdot\!-\!\cdot\!-\!\cdot\ g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})\ .$$

Beweis: Man nehme ε so klein, dass die Ungleichung $d(\mathfrak{B}_s) > \varepsilon$ gilt, und weiter n so gross, dass die Ungleichung $d(\mathfrak{B}_s) - \varepsilon > 4\beta_n$ gilt. Dann gelten

$$\rho\Big(f_{\lambda_n}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_n}}),\ f(x)\Big) \leqq 2\beta_n\ ,$$

$$\rho\Big(g_{\mu_n}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_n}}),\ g(x)\Big) \leqq 2\beta_n\ .$$

Anderseits gilt nach der Voraussetzung $\rho\big(f(x),\ g(x)\big) < \varepsilon$.

Also ist $\rho\Big(f_{\lambda_n}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_n}}),\ g_{\mu_n}(a_{i_1\cdots i_{\mu_n}})\Big) < 4\beta_n + \varepsilon < d(\mathfrak{B}_s)$.

Also ist $\pi_s^n f_{\lambda_n}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_n}}) \cdot\!-\!\cdot\ \pi_s^n g_{\mu_n}(a_{i_1\cdots i_{\mu_n}})$.

Anderseits gelten nach der Bedingung (A)

$$f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}) \cdot\!-\!\cdot\ \pi_s^n f_{\lambda_n}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_n}})\ ,$$

$$g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}) \cdot\!-\!\cdot\ \pi_s^n g_{\mu_n}(a_{i_1\cdots i_{\mu_n}})\ .$$

Also ist $f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}) \cdot\!-\!\cdot\!-\!\cdot\!-\!\cdot\ g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})$, w. z. b. w.

Daraus lassen sich die folgenden Sätze aussprechen:

Satz III. *Zwei eindeutige stetige Abbildungen von* A *in* B *haben dann und nur dann die sog. "kleine Entfernung", wenn deren zugehörigen Abbildungsketten von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$ *für hinreichend grosses* s *die Bedingung* (C) *erfüllen.*

Satz III'. *Zwei Abbildungsketten* $\{f_{\lambda_m}\}$, $\{g_{\mu_m}\}$ *von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$ *definieren dann und nur dann dieselbe eindeutige stetige Abbildung von* A *in* B, *wenn für jedes* m *die Bedingung* (C) *erfüllt wird.*

Satz III''. *Dass die Bedingung (C) für jedes m erfüllt wird, ist ein Äquivalenzrelation in der Menge der Abbildungsketten.*

Unter Verwendung des Abbildungskettenbegriffs will ich einen neuen Beweis eines Satzes von Borsuk(8) angeben.

Satz von Borsuk. *Der Abbildungsraum*(9) *ist separabel.*

Beweis: Für irgendeine feste Zahl λ_m können wir die Menge der Abbildungsketten, deren m-te Glied A_{λ_m} in B_m abbildet, in die Klassen einteilen, indem wir Abbildungsketten als gleich ansehen, wenn deren zugehörigen simplizialen Abbildungen von A_{λ_m} in B_m dieselbe Eckpunktzuordnung bewirken. Da die Anzahl der simplizialen Abbildungen von A_{λ_m} in B_m offenbar endlich ist, so ist die Anzahl der Klassen auch endlich. Aus jeder Klasse ziehen wir je eine Abbildungskette als Vertreter der Klasse heraus; es seien $f^m_{1\lambda_m}, f^m_{2\lambda_m}, \ldots, f^m_{l(\lambda_m)\lambda_m}$ diese Vertreter. Dann ist die Menge der allen Vertreter $M=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{\lambda_m=m}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{l(\lambda_m)} f^m_{i\lambda_m}$ offenbar eine abzählbare Menge. Nun denken wir uns eine beliebige Abbildungskette $g=\{g_{\nu_m}\}$, und nehmen wir sodann eine endliche Teilmenge $f^s_{1\mu_s}, f^s_{2\mu_s}, \ldots, f^s_{l(\mu_s)\mu_s}$ von M in Bezug auf μ_m und für beliebiges festes s, so soll g, gemäss der obigen Klasseneinteilung in Bezug auf die simpliziale Abbildung von A_{μ_s} in B_s, mit irgendeiner Abbildungskette von $\left\{f^s_{1\mu_s}, \ldots, f^s_{l(\mu_s)\mu_s}\right\}$ zu derselben Klasse angehören. Nun gehört g, z. B., mit $f^s_{i\mu_s}$ zu derselben Klasse, und sei $f^s_{i\mu_s}=\left\{f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_{s-1}}, f_{\mu_s}, f_{\nu_{s+1}}, \ldots\right\}$, so gilt für jeden Eckpunkt $a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}$ von A_{μ_s} $f_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})=g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})$; dies ist die Bedingung (C). Also gilt nach Satz 3 die Ungleichung $\rho(f^s_i, g)<\varepsilon$; damit liegt die abzählbare Menge M in dem Abbildungsraum überalldicht. Also ist der Abbildungsraum separabel, w. z. b. w.

4.

Definition 2. In diesen Paragraphen bedeuten $k, k_1, \ldots, k_6$ gegebene, voneinander unabhängige Konstante. Und "$a\cdot-(k)-\cdot b$"

---

(8), (9) Wir definieren eine Metrik in der Menge der eindeutigen stetigen Abbildungen von A in B durch $\rho(f, g)=\underset{x\in A}{\mathrm{Max}}\ \rho(f(x), g(x))$ in B. Die so metrisierte Menge der Abbildungen nennen wir den *Abbildungsraum* von A in B. Der Satz, dass der Abbildungsraum beschränkt, vollständig und separabel ist, ist von *K. Borsuk* (K. Borsuk, *Sur les rétracts*, Fund. Math. 17 (1931), S. 164–165) bewiesen. Was hier von mir betrachtet handelt sich nur um den Beweis der Separabilität.

bedeutet, dass man a und b mit einer aus höchstens k Kanten bestehenden Kette verbinden kann, und a heisst von b *k-benachbart*. Besonders ist a von b gewöhnlich benachbart im Sinne von Alexandroff, wenn $k=1$ ist.

Definition 3. Eine Eckpunktabbildung f von A_{ν_m} in B_m heisst eine *pseudosimpliziale Abbildung*, wenn aus $a \cdot - \cdot b$ in A_{ν_m} die Relation $f(a) \cdot - (k) - \cdot f(b)$ in B_m folgt. Für $k=1$ ist die pseudosimpliziale Abbildung offenber eine gewöhnliche simpliziale Abbildung.

Definition 4. Eine Folge $\{f_{\nu_m}\}$ der pseudosimplizialen Abbildungen f_{ν_m}, $(m=1, 2, \ldots)$ von A_{ν_m} in (auf) B_m heisst die *Abbildungskette im weiteren Sinne* von $\{A_m\}$ in (auf) $\{B_m\}$, wenn für beliebige p und q, $p \leqq q$, und für einen beliebigen Eckpunkt a_{ν_q} von A_{ν_q} die Relation

$$(A') \qquad f_{\nu_p}\pi_p^q(a_{\nu_q}) \cdot - (k_2) - \cdot \pi_p^q f_{\nu_g}(a_{\nu_q}) \quad \text{in} \quad B_p$$

stattfindet. Und für $k_1 = k_2 = 1$ wird die Abbildungskette im weiteren Sinne ein gewöhnliche Abbildungskette.

Satz 5. *Die Abbildungskette im weiteren Sinne von $\{A_m\}$ in (auf) $\{B_m\}$ definiert eine eindeutige stetige Abbildung von A in (auf) B.*

Der Beweis läuft ganz ähnlich mit demselben vom Satz 1 (Satz 1').

Satz IV. *A und B sind ineinander homöomorph, wenn sich eine Teilfolge $\{A_{\lambda_{2m-1}}\}$ von $\{A_m\}$, eine Teilfolge $\{B_{\lambda_{2m}}\}$ von $\{B_m\}$, und für jedes m eine pseudosimpliziale Abbildung $f_{\lambda_{2m+1}}$ von $A_{\lambda_{2m+1}}$ in $B_{\lambda_{2m}}$ und eine pseudosimpliziale Abbildung $g_{\lambda_{2m}}$ von $B_{\lambda_{2m}}$ in $A_{\lambda_{2m-1}}$ so finden lassen, dass für beliebige p und q, $p \leqq q$, und einen beliebigen Eckpunkt $a_{\lambda_{2q+1}}$ von $A_{\lambda_{2q+1}}$ bzw. $b_{\lambda_{2q}}$ von $B_{\lambda_{2q}}$ die Relationen*

$$(A') \qquad f_{\lambda_{2p+1}}\pi_{2p+1}^{2q+1}(a_{\lambda_{2q+1}}) \cdot - (k_3) - \cdot \pi_{2p}^{2q} f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}}),$$

$$g_{\lambda_{2p}}\pi_{2p}^{2q}(b_{\lambda_{2q}}) \cdot - (k_4) - \cdot \pi_{2p-1}^{2q-1} g_{\lambda_{2q}}(b_{\lambda_{2q}}),$$

$$(B') \qquad g_{\lambda_{2q}} f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}}) \cdot - (k_5) - \cdot \pi_{2q-1}^{2q+1}(a_{\lambda_{2q+1}}),$$

$$f_{\lambda_{2q-1}} g_{\lambda_{2q}}(b_{\lambda_{2q}}) \cdot - (k_6) - \cdot \pi_{2q-2}^{2q}(b_{\lambda_{2q}})$$

bzw. in $B_{\lambda_{2p}}$, in $A_{\lambda_{2p-1}}$, in $A_{\lambda_{2q-1}}$, in $B_{\lambda_{2q-2}}$ stattfinden.

Der Beweis läuft ganz ähnlich mit dem Hinreichendheitsbeweis des Satzes II.

Satz IV′. *A und B sind miteinander homöomorph, wenn sich eine Teilfolge* $\{f_{\lambda_{2m-1}}\}$ *von* $\{A_m\}$, *eine Teilfolge* $\{B_{\lambda_{2m}}\}$ *von* $\{B_m\}$, *und für jedes m eine pseudosimpliziale Abbildung* $f_{\lambda_{2m+1}}$ *von* $A_{\lambda_{2m+1}}$ *auf* $B_{\lambda_{2m}}$ *und eine pseudosimpliziale Abbildung* $g_{\lambda_{2m}}$ *von* $B_{\lambda_{2m}}$ *in* $A_{\lambda_{2m-1}}$ *so finden lassen, dass für beliebige p und q,* $p \leqq q$, *und einen beliebigen Eckpunkt* $a_{\lambda_{2q+1}}$ *von* $A_{\lambda_{2q+1}}$ *bzw.* $b_{\lambda_{2q}}$ *von* $B_{\lambda_{2q}}$ *die Relationen*

$$(A') \qquad f_{\lambda_{2p+1}}\pi_{2p+1}^{2q+1}(a_{\lambda_{2q+1}}) \cdot\!-\!(k_3)\!-\!\cdot\ \pi_{2p}^{2q} f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}})\,,$$

$$g_{\lambda_{2p}}\pi_{2p}^{2q}(b_{\lambda_{2q}}) \cdot\!-\!(k_4)\!-\!\cdot\ \pi_{2p-1}^{2q-1} g_{\lambda_{2q}}(b_{\lambda_{2q}})\,,$$

$$(B') \qquad g_{\lambda_{2q}} f_{\lambda_{2q+1}}(a_{\lambda_{2q+1}}) \cdot\!-\!(k_5)\!-\!\cdot\ \pi_{2q-1}^{2q+1}(a_{\lambda_{2q+1}})$$

bzw. in $B_{\lambda_{2p}}$, *in* $A_{\lambda_{2p-1}}$, *in* $A_{\lambda_{2q-1}}$ *stattfinden.*

Der Beweis läuft ganz ähnlich mit dem Hinreichendheitsbeweis des Satzes II′.

Satz 6. *Es seien* $\{f_{\lambda_m}\}$ *und* $\{g_{\mu_m}\}$ *Abbildungsketten im weiteren Sinne von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$, *und es seien f bzw. g die eindeutige stetige Abbildungen, welche* $\{f_{\lambda_m}\}$ *bzw.* $\{g_{\mu_m}\}$ *definieren. Wenn für gegebenes* ε *ein hinreichend grosses s existiert, so dass für irgendeinen Eckpunkt* $a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}$ *von* A_{λ_s} *bzw.* $a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}$ *von* A_{μ_s} *die Relation*

$$(C') \qquad f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}) \cdot\!-\!(k_5)\!-\!\cdot\ g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})$$

in B_s *stattfindet, so gilt die Ungleichung* $\rho\big(f(x), g(x)\big) < \varepsilon$ *in B für jeden punkt x von A.*

Der Beweis läuft ganz ähnlich nach demselben vom Satz 3.

Satz 7. *Es seien* $\{f_{\lambda_m}\}$ *und* $\{g_{\mu_m}\}$ *Abbildungsketten im weiteren Sinne von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$, *und es seien f bzw. g die eindeutige stetige Abbildungen, welche* $\{f_{\lambda_m}\}$ *bzw.* $\{g_{\mu_m}\}$ *definieren. Wenn es für gegebenes s ein hinreichend kleines* ε *existiert, so dass für jeden Punkt x von A die Ungleichung* $\rho\big(f(x), g(x)\big) < \varepsilon$ *in B gilt, so gilt für beliebigen Eckpunkt* $a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}$ *von* A_{λ_s} *bzw.* $a_{i_1\cdots i_{\mu_s}}$ *von* A_{μ_s} *die folgende Relation in* B_s:

$$(C') \qquad f_{\lambda_s}(a_{i_1\cdots i_{\lambda_s}}) \cdot\!-\!(k_5)\!-\!\cdot\ g_{\mu_s}(a_{i_1\cdots i_{\mu_s}})\,.$$

Der Beweis läuft ganz ähnlich nach demselben vom Satz 4. Es sei hier bemerkt, dass $k_5 \geqq k_3+k_4+1$ sein soll.

Satz V. *Zwei Abbildungsketten im weiteren Sinne* $\{f_{\lambda_m}\}$, $\{g_{\mu_m}\}$ *von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$ *definieren dann und nur dann dieselbe eindeutige Abbildung von* A *in* B, *wenn für jedes* m *die Bedingung* (C') *erfüllt wird.*

Satz V'. *Wenn für zwei Abbildungsketten* $\{f_{\lambda_m}\}$, $\{g_{\mu_m}\}$ *von* $\{A_m\}$ *in* $\{B_m\}$ *die Relation* $f_{\lambda_m}(a_{i_1 \cdots i_{\lambda_m}}) \cdot - (k) - \cdot\, g_{\mu_m}(a_{i_1 \cdots i_{\mu_m}})$ *für jedes* m *gilt, so gilt auch für jedes* m *die Relation* $f_{\lambda_m}(a_{i_1 \cdots i_{\lambda_m}}) \cdot - \cdot - \cdot - \cdot\, g_{\mu_m}(a_{i_1 \cdots i_{\mu_m}})$.
