

数学

東京から京都へ行くのに最も早く効率のよい行き方とは何であろうか？左図に示した①と②の中から選ぶと、①は距離は最も短であるが、加速が大きく、②では加速が小さいが距離が長い。其の②が最短時間で行けるコースとなり、何と10分たらずで行くことが出来るのである。これは積分方程式の問題で、その曲線はサイクロイド曲線になるのが、もちろん實際によるエネルギー損失を考えないものとします。最近の筑波大学の入試問題をみると、全般的には複雑な問題が多く、微積分に関する底辺は出題されている。その他では、行列・数列などの融合問題が多く出題されているようである。さすがに1973年、文部省が理組の入学をかけて現在の筑波へ移転しただけあり、民間も多く、どの項目も手が抜けず、甚なる計算力だけの出題は少なく、総合力が要求されるようである。

(表)

時間	距離	速度	距離	速度
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	2	4	2
3	9	3	9	3
4	16	4	16	4
5	25	5	25	5
6	36	6	36	6
7	49	7	49	7
8	64	8	64	8
9	81	9	81	9
10	100	10	100	10

上記の表を見ても微積分の応用の出題が主流であるが、内容的にはあくまでも総合力である。そこで今日は、自習にも迷ったように微積分の応用としての大学入試レベルの問題として、「バケツの問題」を取りあげてみた。

【問題】底面の半径yの直円柱のバケツに高さhまで水がはいっている。いまバケツの底に危険が生じ、水ものがこぼたつとする。流出する水量の速さは水面の高さに比例し、1分後に全水の約2%が漏出したとする。1分後にバケツに残っている水量はいくらく。

【解答】時刻tのときの水面の高さをxとすればV(t)=x²yとすると、

$$V(t) = \pi x^2 y$$

流出する水量はxに比例するから、kを比例定数として

$$\frac{dV(t)}{dt} = kx \quad (k < 0) \quad \text{(2)}$$

より、全水の水量は、t=0のときで

$$V(0) = \pi x^2 h$$

t=1のとき、全水の水量V(0)の約2%が漏出するから、

$$V(1) = \left(1 - \frac{a}{100}\right) V(0) \quad \text{(3)}$$

④②から

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{k}{\pi x^2} V(t)$$

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \frac{k}{\pi x^2}$$

$$\int \frac{dV(t)}{V(t)} dt = \int \frac{k}{\pi x^2} dt$$

$$\log V(t) = \frac{k}{\pi x^2} t + c$$

$$V(t) = e^{\frac{k}{\pi x^2} t + c} \quad \text{(4)}$$

一方、⑤と初期条件③より

$$V(0) = c = \pi x^2 h$$

また、⑤と初期条件④より

$$V(1) = \left(1 - \frac{a}{100}\right) c = c \cdot e^{\frac{k}{\pi x^2}}$$

$$\therefore e^{\frac{k}{\pi x^2}} = 1 - \frac{a}{100} \quad \text{よって}$$

$$e^{\frac{k}{\pi x^2}} = \left(1 - \frac{a}{100}\right)^{-1}$$

ゆえにt分後のバケツの水量は

$$V(t) = \pi x^2 h \left(1 - \frac{a}{100}\right)^t \quad \text{(答)}$$

以上の結果から、時間がくらうたってもバケツの水はなくなることがないことがわかる。

もちろんt=∞ならばV(t)=0に収束することになるのですが、バケツの底に穴があいていても、水は全部はなくならないといふ。

興味深い結論なのです。最後に、大学受験にあたって、偏差値を無視して進路指導は出来ないとわれています。そこで一言／＼

偏差値 = $\frac{x - m}{\sigma} \times 10 + 50$

x: 自己の得点 m: 平均点 σ: 偏差値

と表わされ、あくまでも、受験者全體の

中心にしておられる自己の得点の相対的割合を示す數値であり、必ずしも自己的成績の伸びや減りを量でないことに留意したい。ですから偏差値により分けられることなく、最大限に

それを利用して進路を決めてほしいものです。

受験生の御理解を仰ぎます。

（野出義典先生）

上記の表を見ても微積分の応用の出題が主流であるが、内容的にはあくまでも総合力である。そこで今日は、自習にも迷ったように微積分の応用としての大学入試レベルの問題として、「バケツの問題」を取りあげてみた。

【問題】底面の半径yの直円柱のバケツに高さhまで水がはいっている。いまバケツの底に危険が生じ、水ものがこぼたつとする。

流出する水量の速さは水面の高さに比例し、1分後に全水の約2%が漏出したとする。1分後にバケツに残っている水量はいくらく。

【解答】時刻tのときの水面の高さをxとすればV(t)=x²yとすると、

水の荷重はV(t)=

