研究論文

数学的推論における命題解釈の問題
――「4枚カード問題」の再評価――

大　塚　慎太郎※

Problems of Interpretations of Proposition in Mathematical Reasoning: Reappraisement of Wason's Selection Task

Shintaro OTSUKA

1．研究意図

1．1　問題の所在、研究目的

ものごとを批判的に見たり，論理的に考えたりすることは，現実における様々な意思決定の場面において重要な要素である。数学教育では，このような批判的思考や論理的思考を育成することを重要な目標にしており，数学を学習することでこのような思考力の育成が考えられてきた。そして，効率よく思考力を育成するために，子どもの論理的思考の実態を捉えるという調査研究が行われてきた(O'Brien, 1973；松尾・栗原・味八木・田島，1977など)。

このような研究は数学教育だけで行われてきたわけではない。論理的思考力の育成は教育全体の目標として考えられてきた。このような教育的側面からの研究に対し，心理学では，人間の思考の特徴を捉えるために論理的推論という側面から研究がされている。これまでの研究で用いられてきた課題の中でも特に注目されてきた課題がP.C. Wasonによって考案された「4枚カード問題」である(Wason, 1968)。この課題の特徴は，単に命題の真偽を判断するのではなく，命題の真偽を確かめるために確認すべき対象を探すことが目的になっていることである。このような特徴を持つため，単純な状況にもかかわらず正答率はかなり低くなっている。

このような論理的推論の困難性の要因は，条件文の解釈，特に論理的な言葉で

※筑波大学大学院人間総合科学研究科学校教育学専攻（数学教育学）

ある「ならば」の概念にあると考えられている（O'Brien, 1973; Hoyles & Küchemann, 2003; Durand-Guerrier, 2003 など）。例えば，O'Brien（1973）は，論理的に妥当な推論において使われる論理（Math. Logic）と論理的に妥当でない推論によく見られる論理（Child's Logic）を区別し，多くの大学生がChild's Logicを用いていることを示している。また，命題とその命題の逆の関係について，それらは同値であると認識していたり，仮定と結論の関係は「ならば」ではなく「かつ」で結びついていると認識していたりする生徒がいることも明らかにされている（Küchemann & Hoyles, 2002)。これらの研究では，主に論理的な言葉の概念や命題の真偽の概念に焦点が当てられている（Lee & Smith, 2009)。

しかし，実際に推論するときには，論理的な言葉の概念だけが問題になるわけではない。文章や命題から得られる情報によって異なる推論結果になることもある。つまり，命題を解釈して得られる情報によって，その推論の仕方は変わってくる。そのため，従来は論理の問題だと考えられてきたことが実は命題解釈の問題だったということも十分考えられる。本研究では，このような今までは論理の問題として捉えられてきた「ならば」の概念に関する問題を命題解釈の立場から捉え直し，その問題を明らかにすることを目的とする。

1．2　研究方法

本研究では，上述した目的を達成するために，具体的な題材として「４枚カード問題」における命題解釈を分析する。

本研究の理論的枠組みは，本橋（2002，2006）による「命題の解釈」の概念を参考にしている。本橋は，推論を形式的なものとしてだけ捉えるのではなく，現実世界や数学の世界で実際に使われている推論から「命題の解釈」という行為によって意味を取り出したり与えたりすることも含めた論理学を構築している。このような背景を持つ理論的枠組みを用いることで，学習者の命題解釈に関する問題を明らかにできると考える。

命題解釈の問題に関するこれまでの研究（例えば大塚，2009）では，具体的な場面として数学学習における命題解釈の問題を議論している。そのため，命題を理解しようとしたり，証明しようとしたり，活用しようとしたりという数学を学習する際に特に重要になる文脈を考慮している。しかし，命題解釈の問題のみに焦点を当てるならば，文脈からの影響は少ないほうがよいと考えられる。このよ

うな理由から，本研究では，単純な状況にも関わらず正答率が低い「４枚カード問題」を分析の対象とする。

２．学習者の命題解釈を捉える枠組み

２．１　命題解釈を捉える枠組み

命題解釈とは，問題を理解したり，命題が何を主張しているか理解したりするために行う，命題の意味を捉えるという行為である。従来の研究では，学習者の論理的思考を捉えるために，論理学で扱う論理をそのまま用いることが多かった。しかし，それだけでは十分に学習者の論理的思考を捉え切れない部分があった。そのため，「解釈という作業を記述するのに十分の枠組みを備えた論理学」を構築している本橋（2002）の理論に基づき，「命題の解釈」という概念を用いて，学習者の命題解釈も考慮に入れた枠組みを新しく提案した（大塚，2008)。

本橋は「命題の解釈」を次のように定めている。

> 個々の命題は何かについての主張の表現と見なすことができる。この何かを主題と呼び，命題 A からその主題 a を削除すると，欠損部分を持った不完全な命題ができる。その欠損部分に適当な変数 x を代入すると，変数 x の条件 $P(x)$ ができる。すると，命題 A は“a が $P(x)$ を満たしている”という主張と見なせる。この行為を“命題の解釈”といい，a をこの解釈の主題，$P(x)$ を“命題 A を主題 a のもとで解釈して得られる条件”という。(本橋，2006，p.5)

例えば「６の倍数はすべて偶数である」という命題は，「自然数“６”が“ｘの倍数はすべて偶数である（ｘの変域は自然数)”を満たす」と捉えることもできるし，「自然数の集合“６の倍数”が“ｘは偶数である（ｘの変域は自然数の集合族)”を満たす」と捉えることもできる。前者では，自然数の“６”に着目しているのに対し，後者では自然数の集合である“６の倍数”に着目している。主題とは，このように命題の中で着目する部分のことである。主題を決めることによって，命題から「『主題』はこの『条件』を満たす」という情報を得ることができる。

「命題の解釈」の際の主題と条件が定まったとしても，その解釈がどのような場

面で，どのような人によって行われているかによって，その解釈から得られる情報は異なることがある。例えば，命題の中の“6の倍数”を，自然数の集合である“6の倍数”ではなく，整数の集合である“6の倍数”として捉えることも考えられる。本橋（2002）は，このような命題を解釈する人の見方を視点と呼んでいる。数学的に視点を定義すると，視点とは，ある世界と，その世界における定数，関数，関係からなる構造から構成されるものである。例えば，先の具体例の場合，次の①，②のような視点に基づいて「命題の解釈」が行われている。

①〈自然数，自然数の集合族；6の倍数，偶数〉
②〈整数，整数の集合族；6の倍数，偶数〉

①では，視点の世界である“自然数”と“自然数の集合族”，その構造である1変数関係“6の倍数”と“偶数”という視点の下，「自然数の集合“6の倍数”が“xは偶数である（xの変域は自然数の集合族)”を満たす」という情報を得ることができる。また，①では，視点の世界である“整数”と“整数の集合族”，その構造である1変数関係“6の倍数”と“偶数”という視点の下，「整数の集合“6の倍数”が“xは偶数である（xの変域は整数の集合族)”を満たす」という情報を得ることができる。このように視点が変わると「命題の解釈」の際に得られる情報もまた変わってくる。

以上のように「命題の解釈」において特に重要になる部分は，「命題の解釈」における視点と主題である。この2点に着目することによって，学習者が命題解釈によって命題から受け取る情報を知ることができると考える。そのため，本研究では，学習者の命題解釈を捉える枠組みとして，本橋の「命題の解釈」を用いることにする。そして，その中でも特に「命題の解釈」における視点と主題に焦点を当てる。

2.2 「命題の解釈」による推論の捉え方

一般的に，数学の証明では「A」と「AならばB」から「B」を導く演繹的推論が用いられる。このような推論を「命題の解釈」の観点から考えると，推論が正しいということは次のように示すことができる(本橋，2002，2006)。

① 命題Aと命題Bについて，それぞれに共通の主題aを見つける。

② 命題Aを「aは条件$P(x)$を満たす。」，命題Bを「aは条件$Q(x)$を満たす。」と解釈する。

③ 根拠法則「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」が正しいことから，命題Aから命題Bを導く推論も正しい。

この①から③の過程を経ることで，一般に推論が正しいことを示すことができる。このとき，命題Aと命題Bは個別事実として解釈され，根拠法則となる命題は一般法則「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」として解釈される(1)。

数学の証明をするときは，仮定と結論について共通の主題を見つけることが重要になる。実際の証明では，様々な解釈があることにより様々な証明方法が存在する(本橋，2002)。しかし，解釈をするときに共通の主題が見つからないと，根拠法則としての定理や命題を知っていても適用することができない。

2．3　個人の置かれた文脈を踏まえた枠組み

学校数学における教授・学習場面での学習者の命題解釈を捉えることを考慮に入れると，学習者がどのような文脈で命題解釈をしているか捉えることも重要になる。特に，命題解釈をする学習者がどのような意図をもって命題解釈をしようとしているかという個人の置かれた文脈が，命題解釈に大きな影響を与えると予想できる。

本研究では，個人の置かれた文脈として，「命題を理解しようとする文脈」，「命題を証明しようとする文脈」，「命題を活用しようとする文脈」の3種類を定める(以下，それぞれ「理解」，「証明」，「活用」とする)。「理解」の文脈における命題解釈は，命題を構成する様々な要素に着目して命題を理解しようとする命題解釈，「証明」の文脈における命題解釈は，条件に着目して命題の構造を明らかにしようとする命題解釈，そして「活用」の文脈における命題解釈は，他の「理解」の文脈や「証明」の文脈における命題解釈を踏まえて新しい命題を得ようとするための命題解釈である。

数学を学習する際には，多くの場合，これらの文脈のもとで命題解釈をしている。そのため，これら3種類の文脈を踏まえた上で学習者の命題解釈を捉えることによって，実際に数学を学習する際の命題解釈の傾向を捉えることができるよ

うになると考える。

3．「4枚カード問題」とその調査研究

3．1　「4枚カード問題」の困難性

「4枚カード問題」は，従来の演繹的推論課題のようにいくつかの前提から結論を導く推論が正しいかどうか判断するものではなく，ある命題の真偽を確かめるために確認すべき対象を探すことが目的になっている（Wason, 1968)。この課題は一般的に次のような形(2)で被験者に出題される。被験者は，片面には数字が，もう片面にはアルファベットが書いてある4枚のカード（D，K，3，7）について，「片面がDのカードのもう片面は3である」という規則が正しいことを確認するために，片面だけがわかっている4枚のカードの中から裏面を確認する必要があるカードだけを選ぶように指示される。もちろん，全部のカードを確認してもよいが，すべて確認しなくても規則が正しいかどうかは確認できる。つまり，規則が破られている可能性のあるカードだけを選ぶという問題である。大学生を対象に行われた調査では，このような抽象的な形で与えられた「4枚カード問題」の正答率は10%を下回る（Wason & Johnson-Laird, 1972)。

「4枚カード問題」は，命題論理学的にいえば「PならばQ」という条件文が正しいことを確認するために，それぞれ「P」，「Pでない」，「Q」，「Qでない」という4種類の命題が真であるという情報で十分かどうか問うものである。「Pでない」と「Q」という命題が真であれば，「PならばQ」は真となるため，それらの裏側を確認する必要はない。ただし，「P」と「Qでない」の場合，それらが真だとしても「PならばQ」の真偽を決定することはできないため，その裏側を確認する必要がある。すなわち，「4枚カード問題」における論理的に正しい解答は「P」と「Qでない」の2つを確認することである。

命題論理学的に考えると上記のような解答になるが，調査結果からそのように考える人は多くないことがわかる。Wasonらの調査（Wason & Johnson-Laird, 1972）では，「P」と「Qでない」を選択した学生は全体の4％しかおらず，最も多い選択は「P」と「Q」を選ぶような選択で，全体の46%の学生が選択している。また，Inglis & Simpson（2004）では，「4枚カード問題」における数学者と数学専攻の学生，歴史学専攻の学生の解答を比較している。この調査からは，正答（この場合，Dと7）を選んだ人はそれぞれ43%，28%，8％という結果が

得られている。論理学を十分知っているだろう数学者や数学専攻の学生でさえ正答を得られていないことがわかる。

十分論理的に考えることのできる大学生でも困難であるという結果に対して，Wasonらは，このような課題を考える際に確証バイアス（confirmation bias）と呼ばれる傾向があることを用いて，この困難性を説明している。確証バイアスとは，条件文「PならばQ」が真であることを確かめようとする傾向のことであり，この課題の最も典型的な誤答である「P」と「Q」を選択してしまう要因となっている。

3．2 「4枚カード問題」を用いた調査研究

「4枚カード問題」が多くの研究で扱われる理由として，正答率が低いこと以外にも，問題の内容を変えると正答率が大きく変化するということがある。例えば，Johnson-Laird, Legrenzi & Legrenzi（1972）では，上述のような抽象的な「4枚カード問題」と同じ構造をしている，具体的な文脈を持つ課題を被験者に与えている（図1）。「もし手紙の裏が封をしてあれば50リラの切手が貼られていなければならない」という規則について，〈裏向き，封〉，〈裏向き，開封〉，〈表向き，50リラ切手〉，〈表向き，40リラ切手〉という4枚の封筒を用意し，被験者に郵便局の手紙仕分け員になったと想像するように指示して4枚カード問題と同じように問題を解いてもらった結果，83％の正答率を得ている。同じ被験者に対する抽象的な「4枚カード問題」の正答率が15％であることと比較すると，問題の内容がより具体的なほうが論理的に正しく考えていることがわかる[3]。さらに，問題

「もし手紙の裏が封をしてあれば50リラの切手が貼られていなければならない」という規則が守られているかどうかをチェックするためには、下のどの封筒を裏返してみる必要がありますか。

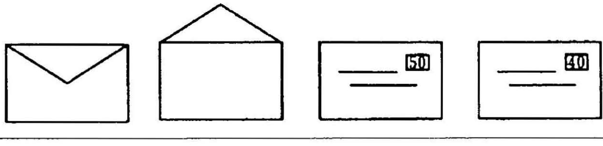

図1：封筒問題（Johnson-Laird et al., 1972）

の文脈を変えなくても，被験者が課題を合目的的に捉えられるように工夫して出題すると抽象的な課題でも正答率が上がることも指摘されている（小谷津・伊東・松田，1984）。

このような人間の思考の特徴は様々な理論や仮説で説明されている。例えば，Chen & Holyoak（1985）は，実用的推論スキーマ（pragmatic reasoning schema）という概念を用いて，主題化効果によって「４枚カード問題」の正答率が高まる理由を説明している。この理論では，被験者が問題を許可事態，あるいは義務事態と捉えることで，問題を解く際に許可スキーマや義務スキーマと呼ばれる特定のスキーマが適用されたものと考える。また，被験者の意図や目的が問題解決に影響を与えるのではないかということを，「視点」という概念を用いて説明している研究もある（佐伯，1980；上野，1982）。課題に対して「視点」を導入することによって，被験者が課題を合目的的な活動として捉えることができれば，問題自体を活動主体の観点で捉えられ，妥当な推論ができるようになる。具体的な問題では，封筒問題における「郵便局員になったつもりで」という問題の提示が，被験者に郵便局員という視点を持たせることになり，被験者は郵便局員がどのような情報に着目するかという観点から問題を解くことができるようになる。

一方，問題の文脈を具体的なものにするのではなく，抽象的な「４枚カード問題」において規則に否定を導入することで正答率が変化することも指定されている。例えば，Evans & Lynch（1973）では，一般的な「４枚カード問題」のように規則を肯定文にするのではなく，条件文として前件と後件にそれぞれ否定を導入した場合も調査を行っている。この調査では，「片面がＳのカードのもう片面は９ではない」という後件否定型の場合に正答率が60％という結果が得られている。このような結果に対し，Evans らは，人は提示された規則「ＡならばＢ」の反証例を挙げる際に，ＡやＢが肯定，否定に関わらず，一般的に肯定形を選ぶ傾向があるという，マッチングバイアス（matching bias）と呼ばれる概念を用いて「４枚カード問題」を説明している。例えば，「片面がＳのカードのもう片面は９ではない」という後件否定型の規則の場合，マッチングバイアスによって“Ｓ”と“９”のカードを選択する傾向が強まるため正答率が上がる，という説明がされる。

このように「４枚カード問題」には様々なバリエーションがあり，結果もオリジナルの「４枚カード問題」とは同じようにならない場合がある。そのため，「４

枚カード問題」における人間の思考の特徴を説明する理論は様々なものが提唱されている。このような理論は，大きく「論理形式に依存した理論」と「内容に依存した理論」[4]という2つに分類されている（高橋・服部，1996）。ただし，理論が論理形式に依存している場合，「演繹的課題における内容の影響を説明できないという批判がある」（高橋・服部，1996，p. 27）。一方，内容に依存している場合も「被験者がどのような推論プロセスを経てFCP（4枚カード問題）に正答するに至ったか，そのメカニズムの分析が不十分なこと（括弧内筆者）」や「正答へと至る推論メカニズムの分析がないことと並んで誤答分析がないこと」といった問題点も指摘されている（中垣，1987，p. 292）。

このような問題に対して，本研究の理論的枠組みは，本橋による論理学を基に構築した命題解釈を捉える枠組みであり，個人がどのように命題解釈をしているか記述できる枠組みでもある。推論をする際には，問題に含まれる命題を解釈して，そこから問題を理解するという過程が必ず含まれる。そのため，被験者の命題解釈を捉えることができれば，その命題解釈を分析することで，正答，あるいは誤答の要因を究明することができるかもしれない。また，本研究の理論的枠組みは，学校数学という数学を学習する場面の文脈も踏まえることで，文脈に依存する命題解釈に焦点を当てている。そのため，課題の内容や個人の目的意識のような意味内容に関することによる推論への影響も考察対象に含めることができる。

4．「4枚カード問題」における命題解釈の分析

4．1　分析の観点

本節では，命題解釈を捉える枠組みを用いて，「4枚カード問題」における命題解釈の問題を明らかにする。様々なバリエーションがある「4枚カード問題」であるが，本研究で分析の対象とするものは，Wason（1968）で用いられた最も単純で抽象的な形をしている課題である（図2）。単純で抽象的な課題を選んだ理由は，文脈からの影響を少なくし，命題解釈の問題そのものに焦点を当てるためである。

この課題を用いて調査をしたInglis & Simpson（2004）の調査結果（表1）を見ると，歴史学専攻の学生が典型的な誤答である“D”と“3”を選択している割合が高い。しかし，数学専攻の学生や数学者はその割合が低く，代わりに“D”のみを選択している割合が高くなっている。彼らはこの結果に対し，数学専攻の

片面には数字が，もう片面にはアルファベットが書いてあるカードが 4 枚ある。

D	K	3	7

このとき，これらの 4 枚のカードについて，

「片面が D のカードのもう片面は 3 である」

という規則が破られていないかどうかを確認するのに，必ず見なければならないカードだけを選びなさい。

図 2 ：抽象的 4 枚カード問題（Inglis & Simpson, 2004）

表 1 ：誤答の割合（Inglis & Simpson, 2004）

	Maths Students	Maths Staff	History Students
D	50%	42%	24%
D K	1%	0%	0%
D 3	8%	8%	36%
D 7	−	−	−
D K 3	0%	5%	2%
D K 7	18%	25%	1%
D37	4%	17%	7%
D K37	11%	0%	20%
non-D	7%	0%	10%

学生や数学者らは，初めは “D” と “3” を選択してしまうが，その考えをチェックすることで “3” を確認する必要はないということに気付いているだろうと予想し，被験者にインタヴューすることでその確認をしている。そして，このような結果から数学専攻の学生や数学者らはエラーをチェックする能力がそうでない人よりも高いのではないかと予想している。

本研究では，彼らの調査結果をもとに命題解釈の問題を議論する。なぜ，歴史学専攻の学生は “D” と “3” を選択している割合が高いのか，数学専攻の学生や数学者らが “3” を選択しないのはなぜか，“7” を選択するには何が必要なのか，といった疑問について，命題解釈を分析することでそれらを説明する。ただ

し，本研究では，数学専攻の学生と歴史学専攻の学生の間に生ずる差の要因については議論しない。本研究で焦点を当てる部分は，あくまで誤答における被験者の命題解釈である。

4．2　命題解釈の分析

「4枚カード問題」における「片面がDのカードのもう片面は3である」という規則を理解しようとするとき，何らかの対象を主題として解釈することになる。このとき，具体的な場面であれば主題が多くなるが，抽象的な「4枚カード問題」の場合，主題にできそうなものは“D”や“3”といった文字である。そのため，「理解」の文脈において“D”や“3”を主題とした命題解釈が考えられる。例えば，主題を“D”として命題解釈をしてみる。視点の世界は，アルファベット全体“**A**”と自然数全体“**N**”とする。その構造は，定数として“D”，“3”，アルファベットから数字への1変数関数として“f”，2変数関係として“=”とする。この視点の下，主題“D”を変数x（変域は**A**）で置き換えると，この命題は，主題“D”が条件「f(x)＝3」を満たす，と解釈できる。この命題解釈は次の解釈1のように表せる。

<u>解釈1</u>（「片面がDのカードのもう片面は3である」）
・視点〈**A**,**N**；D，3，f，=〉
・“D”が条件「f(x)＝3」（xの変域は**A**）を満たす。

解釈1からは主題である“D”が条件「f(x)＝3」（xの変域は**A**）を満たすという情報を得ることができる。そのため，“D”が条件「f(x)＝3」（xの変域は**A**）を満たすかどうかが問題になる。つまり，規則が正しいかどうか確認するためにはDのカードを裏返して3になることを確かめなければならないということがわかる。

一方で“3”を主題にした命題解釈を考えると，解釈1と同じ視点の下，主題である“3”を変数y（変域は**N**）で置き換えて条件「f(D)＝y」が得られる。この命題解釈は次の解釈2のようになる。

<u>解釈2</u>（「片面がDのカードのもう片面は3である」）

・視点〈**A**，**N**；D，3，f，＝〉
・“3”が条件「f(D)＝y」（yの変域は**N**）を満たす。

解釈2から得られる情報は“3”が条件「f(D)＝y」（yの変域は**N**）を満たすということである。つまり，この命題解釈によって“3”は「yはDの裏側の数字である」という条件を満たすという情報を得ることができる。したがって“3”が条件を満たしているかどうか確認するためには，3のカードの裏側がDになることを確認しなければならない。しかし，論理的には3のカードは確認しなくてもよいことになっている。このように3のカードを確認しなければならないということを導いてしまった原因はその命題解釈にある。解釈1と解釈2では，「片面がDのカードのもう片面は3である」という規則を，“D”と“3”を主題にして解釈している。これらを主題にすると，規則は個別事実として解釈される。本来は，一般的に「片面がDであるどのカードももう片面は3である」という意味で解釈すべきところを，「あるカードの片面はDでもう片面は3である」という解釈をしてしまっているため，Dのカードも3のカードも確認しなければならないという結論を導いたと考えられる。

では，規則を一般法則として解釈するためにはどのような命題解釈が重要になるのか。規則を一般法則として解釈するためには，“D”や“3”といったカードの文字や数字ではなく，“カード”そのものを主題とする必要がある。“カード”を主題とした命題解釈は次の解釈3あるいは解釈4のように表せる。

<u>解釈3</u>（「片面がDであるどのカードももう片面は3である」）
・視点〈{$\boxed{D}$，$\boxed{K}$，$\boxed{3}$，$\boxed{7}$}，**A**，**N**；D，3，f，g，＝〉
・“□”が条件「f(x)＝Dならばg(x)＝3」（xの変域は{$\boxed{D}$，$\boxed{K}$，$\boxed{3}$，$\boxed{7}$}）を満たす。

<u>解釈4</u>（「片面がDであるどのカードももう片面は3である」）
・視点〈**A**×**N**，**A**，**N**；D，3，m，n，＝〉
・“(a, b)”が条件「m(x, y)＝Dならばn(x, y)＝3」（(x, y)の変域は**A**×**N**）を満たす。

解釈3における視点は，“4枚のカード全体”と“アルファベット”，“数字”からなる世界と新たに1変数関数として“4枚のカード全体”から“**A**”への関数“f”と“4枚のカード全体”から“**N**”への関数“g”を加えた構造から構成される。そして，この視点の下，任意定数としてカード“□”を主題にすると，主題が満たす条件は「f(x)＝D ならば g(x)＝3」（xの変域は｛D，K，3，7｝）となる。一方，解釈4は，視点の世界に**A**と**N**の直積集合“**A×N**”を加え，構造に**A×N**から**A**，**A×N**から**N**への2変数関数“m”，“n”を加えている。そして，主題として任意定数“(a, b)”を選ぶと，“(a, b)”が条件「m(x, y)＝D ならばn(x, y)＝3」（(x, y)の変域は**A×N**）を満たすという情報を得られる。

解釈3と解釈4では，それぞれ任意定数として“カード”を解釈しているため，主題の代わりに導入した変数の変域にあるものはすべて条件を満たすという命題解釈になる。このような命題解釈によってはじめて条件の中に「ならば」が現れる。つまり，“カード”を主題とすることで条件文として解釈していることになる。このような命題解釈において，例えば，解釈3によって得られた条件の変数xに，xの変域である｛D，K，3，7｝から適当なカードを選び，代入することで，具体的な命題を作ることができる（ただし，実際には情報が不足しているため命題ではなく条件になる）。実際に4枚のカードを代入してみると次のようになる。

① Dを代入すると，「f(D)＝Dならばg(D)＝3」
② Kを代入すると，「f(K)＝Dならばg(K)＝3」
③ 3を代入すると，「f(3)＝Dならばg(3)＝3」
④ 7を代入すると，「f(7)＝Dならばg(7)＝3」

この中で仮定を満たしているものは①だけである。そのため，g(D)＝3が正しいかどうか確かめることはすぐに思いつく。また，②は仮定を満たしていないため，確認する必要がないということもわかる。しかし，③と④の場合は仮定が正しいかどうかわからないため，カードを確認すべきかどうかの判断は難しくなると予想できる。

Durand-Guerrier（2003）では，「1から20までの整数で，『nが偶数ならばn+1は素数』を満たすようなnの値をすべて求めなさい」という問題を用いて大

学１年生を対象に調査をしている。この条件文を正しくするｎは８，14，20以外のすべての整数であるが，このように解答した学生は90人中３人だけであった。多くの学生は奇数を除いており，命題の仮定に独立した変数がある場合，その変数の変域は仮定を満たすものに限定されてしまい，真偽判断には結論の真偽だけが関係するようになる。このような事実からも，③や④での判断の困難性には次のような命題解釈が影響を与えていると考えられる。

解釈５（「片面がＤであるどのカードももう片面は３である」）
・視点〈{$\boxed{3}$, $\boxed{7}$}，{Ｄ}，**N**；Ｄ，３，ｆ，ｇ，＝〉
・"□" が条件「f(x)＝Ｄならば g(x)＝３」（ｘの変域は {$\boxed{3}$, $\boxed{7}$}）を満たす。

解釈５は，解釈３と同じ主題を持つ解釈であるが，視点の世界におけるＡが{Ｄ}に制限されている。これは，仮定を満たす範囲が限定されているためである。このような解釈の下では，③や④は次のように考えられる。Ａの範囲が{Ｄ}に制限されているため，実質，③と④は命題になる。つまり，③は正しい命題になり，④は正しくない命題になる。そのため，真偽がすでにわかっているものは確認しなくてもよいという判断になる。したがって，「ならば」の概念の問題ではなく，このような命題解釈が真偽判断に影響を与えている可能性がある。

一般法則として解釈された規則が成り立つかどうかを確認するためには２つの方法がある。１つは仮定を満たすものはすべて結論を満たすことを確認すること。もう１つは反例がないことを確認すること。前者の場合，問題中にあるカードから得られる情報で仮定を満たすものは片面がＤのカードしかない。そのため，他のカードを確認すべきかどうかすぐにはわからない。一方，後者の場合，反例があるかどうかの確認になるため，仮定を満たし，かつ，結論を満たさないものがあるかどうか確認すればよい。このように反例があるかどうか考えるためには，次のような命題解釈が必要になるだろう。

解釈６（「片面はＤであり，もう片面は３ではないカードは存在しない。」）
・視点〈**A**×**N**，**A**，**N**；Ｄ，3，m，n，＝〉
・"(a, b)" が条件「m(x, y)＝D　かつ　n(x, y)＝３ではない」（(x, y)の変域は **A**×**N**）を満たさない。

解釈4によって得られた条件「$m(x, y)=D$ かつ $n(x, y)=3$ ではない」の変数 (x, y) に問題中の情報を入れてみると次のようになる。

① xにDを代入 → 条件「$m(D, y)=D$ かつ $n(D, y)=3$ ではない」
② xにKを代入 → 条件「$m(K, y)=D$ かつ $n(K, y)=3$ ではない」
③ yに3を代入 → 条件「$m(x, 3)=D$ かつ $n(x, 3)=3$ ではない」
④ yに7を代入 → 条件「$m(x, 7)=D$ かつ $n(x, 7)=3$ ではない」

そして，この①から④の残っている変数に適当に代入して成り立つものがあるかどうか確認する。すると，①と④においてそれぞれ $y=5$，$x=D$ のとき条件を満たす。一方，②と③については条件を満たすものは存在しない。したがって，Dのカードと7のカードは反例が存在するかもしれないので，裏側を確認する必要があることがわかる。

5．本研究のまとめと今後の課題

本研究では，今までは論理の問題として捉えられてきた「ならば」の概念に関する問題を命題解釈の立場から捉え直し，その問題を明らかにすることを目的とした。そのために，具体的な題材として「4枚カード問題」を選び，その解答における命題解釈を分析した。

その結果，4枚カード問題における規則をどのように命題解釈するかによって，その解答は変わる可能性があることを導けた。例えば，主題を“カード”そのものにするか，“D”や“3”といった文字や数字にするかによって，規則の解釈が変わることがある。そのため，条件文として解釈することが望まれているところをそもそも条件文として解釈しないことが問題であることが予想できる。また，条件文として解釈をしても，視点の世界が狭くなることで命題が限定された範囲で解釈され，判断に影響を与えることがある。そのため，「ならば」の概念の問題ではなく，命題解釈の仕方によって，論理的に正答を導けない可能性があることが確認できた。

本研究では，分析対象としてのみ「4枚カード問題」を扱ったが，学校数学において「ならば」の概念や反例の役割などを学習する教材として「4枚カード問題」を扱うことができるかもしれない。実際，「4枚カード問題」を解く際には，

反例となるカードを探すことが目的となる。そのため，反例となるカードを想定できなければ，正答を得ることができない。命題が正しいことを確認するという観点だけでなく，正しくない可能性を確認するという観点も持つことは，論理的に考えることにおける重要な要素である。

註

（1） 本橋（2002）は，同じ命題でも「命題の解釈」によって個別事実としても解釈できるし，一般法則としても解釈できることを述べている。

（2） Wason & Johnson-Laird（1972）では，4枚のカード（D, K, 4，7）について「片面が母音のカードのもう片面は偶数である」という規則が正しいかどうか問う課題を用いている。この場合も課題の構造は同じである。

（3） 論理的な判断を要求するような課題において，論理的な構造は同じ課題であっても課題に盛り込まれる内容の違い，課題が設定される文脈の違いによって，課題が解決されたり，解決されなかったりすることがある。このような効果は主題化効果（thematic-material effect）と呼ばれている（Johnson-Laird et al., 1972)。

（4） 例えば，「論理形式に依存した理論」には「形式的規則理論」（Braine & O'Brien, 1991など）や「メンタルモデル理論」（Johnson-Laird, 1983など）等，「内容に依存した理論」には「記憶手がかり説」（Manktelow & Evans, 1979など）や「実用的推論スキーマ説」（Chen, & Holyoak, 1985)，「社会的契約説」（Cosmides, 1989など）等がある（高橋・服部，1996)。

引用・参考文献

Braine, M. D. S. & O'Brien, D. P. (1991). A theory of if: A lexical entry, reasoning program, and pragmatic principles, *Psychological Review,* 98, 182–203.

Chen, P. W. & Holyoak, K. J. (1985). Pragmatic reasoning schemas, *Cognitive Psychology,* 17, 391–416.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one?: From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics 53,* 5–34.

Evans, J. St. B. T. & Lynch, J. S. (1973). Matching bias in the selection task. *British Journal of Psychology,* 64, 391–397.

Hoyles, C. & Küchemann, D. (2003). Students' understandings of logical implication, *Educational Studies in Mathematics,* 51, 193–223.

Inglis, M. and Simpson, A. (2004). Mathematicians and the selection task, In M. Johnsen Höines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, 89–96.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language inference and consciousness.* Cambridge University Press.（海保博之（監訳）（1988）『メンタルモデル―

言語・推論・意識の認知科学一』産業図書)

Johnson-Laird, P. N., Legrenzi, P. & Legrenzi, M. S. (1972). Reasoning and a sense of reality. *British Journal of Psychology,* 63, 395–400.

小谷津孝明・伊東昌子・松田真幸（1984）4枚カード問題における課題素材効果と視点教示の効果　基礎心理学研究　3, 21－29

Küchemann, D. & Hoyles, C. (2002). Students' understandings of logical implication and its converse, In A. Cockburn, & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3. 241–248.

Lee, K., & Smith, J. P., III. (2009). Cognitive and linguistic challenges in understanding proving, In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.). *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education,* Vol. 2. 21–26.

Manktelow, K. I. & Evans, J. St. B. T. (1979). Facilitation of reasoning by realism: Effect or non-effect?, *British Journal of Psychology,* 70, 477–488.

松尾吉知・栗原幹夫・味八木徹・田島稔（1977）日常論理の様相について　日本数学教育学会誌数学教育学論究　31, 1–33

本橋信義（2002）『数学と新しい論理一数学的帰納法をめぐって一』遊星社

本橋信義（2006）『論理学は数学の役に立つか？一新しい論理学の構築一』遊星社

中垣啓（1987）論理的推論におけるみかけの“主題化効果”について　教育心理学研究　35, 290－299

O'Brien, T. C. (1973). Logical thinking in college students, *Educational Studies in Mathematics,* 5, 71–79.

大塚慎太郎（2009）学校数学における学習者による命題解釈の分析と評価：命題が偽であることの説明に焦点を当てて　第42回数学教育論文発表会論文集，535－540

佐伯胖（1980）情報処理と「視点」　サイコロジー　9, 54－60

上野直樹（1982）視点と理解　サイコロジー　24, 30－37

高橋和弘・服部雅史（1996）演繹的推論『認知心理学4　思考』（市川伸一編）東京大学出版会

Wason, P. C. (1968). Reasoning about a rule, *Quarterly Journal of Experimental Psychology,* 20, 273–281.

Wason, P. C. & Johnson-Laird, P. N. (1972). *Psychology of Reasoning: Structure and Content.* Harvard University Press.

Problems of Interpretations of Proposition in Mathematical Reasoning: Reappraisement of Wason's Selection Task

Shintaro OTSUKA

The purpose of this study is to review problems of understanding of implication, which has been the typical focus of problems concerning logic, from a perspective of interpretations of proposition, and to clarify problems of interpretations of proposition in mathematical reasoning. First, this paper presents a research framework considering context in which children interpret a proposition, based on the framework for "interpretation of proposition" constructed by N. Motohashi. Second, we focus on "Wason's Selection Task" as a case, and analyze answers in the task by using our framework.

As a result, we were able to determine that the answer might change based on how the rule is interpreted in the task. For example, interpretation of the rule might change by the subject which is "card" or which is "letter" or "number" like "D" or "3". An expected problem is that the rule could be disregarded as a conditional even if it is so. Furthermore, even if the rule is regarded as a conditional, the fact that it is interpreted within a limited domain by reason of a limited universe of perspective might affect a decision about the truth value of conditionals. Therefore, we claim the possibility that the fallacy is caused not by the notion of implication but the interpretations of proposition.