投稿論文

学校数学における action proof の意義

小　松　孝太郎※

The Significance of Action Proofs in School Mathematics

Kotaro KOMATSU

1．研究の意図，目的，方法

1．1　研究の意図，目的

平成19年11月に，次期学習指導要領の改訂に向けて，中央教育審議会より『教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ』（中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会, 2007）が出された。この度の改訂は改正教育基本法等を踏まえて行われるため，今後の学校教育の方向性を定める重要なものであると言える。この審議のまとめでは，今回の学習指導要領の改訂において各教科等を貫く重要な改善の視点として，各教科等における言語活動の充実が挙げられている。この中で，算数・数学科に関連した学習活動の例示として，「（中略）帰納的な考え方や演繹的な考え方などを活用して説明する」（中央教育審議会, 2007, p. 53）ことを重視することが示されている。したがって，算数・数学科では，今後ますます，演繹的な説明の一つである証明（proof）[1] の学習がよりよく行われる必要がある。

これまで，その証明の一つである action proof について，国内の研究に限っても様々な研究が行われてきた。それらの研究はおおよそ次の二つに分けることができる。第一は，小学校の算数教育において action proof を利用することを提案するものである（例えば，古藤怜, 1986, 1988；坂本美知夫, 1991；川島健治, 1996）。第二は，中学校以降の数学，特に形式的証明（formal proof）[2] の学習指導において，action proof を利用することを提案するものである（例えば，宮崎樹夫, 1995[3]；國本景亀, 1996；梅川貢司, 2002）。しかし，これらの先行研究では，それぞれの立場から action proof の利用が提案されているため，action proof の意義が十分に整理されていないように思える。action proof に関する基礎的な研究と

※筑波大学大学院人間総合科学研究科学校教育学専攻（数学教育学）

して，action proof にどのような意義があるのかを明らかにしておくことは必要であろう。

以上より，本研究の目的は，学校数学における action proof の意義を明らかにすることとする。

1．2 研究の方法

意義という言葉には「意味」と「物事が他との連関において持つ価値・重要さ」の二つの意味がある（新村出編, 1998)。したがって，action proof に関しては，前者は action proof の概念を，後者は action proof の価値や機能をそれぞれ指していると考えることができる。ここで，action proof の概念規定については，筆者はすでに行っているため（小松孝太郎, 印刷中)，本研究では簡単に説明する程度にとどめる（２節)。一方，後者をより細かく考察すると，それは action proof を行うことそれ自体に何らかの教育的な価値がある場合と，ある事柄についてよりよく学習を行うために action proof を活用することができる場合の二つに分けられる。そこで，本研究では，はじめに，action proof を行うことそれ自体の教育的な価値について議論する（３節)。次に，ある事柄，特に形式的証明の学習をよりよく行うために，action proof を活用することが有効になりえることを指摘する（４節)。

2．action proof

筆者は action proof に関する諸外国の先行研究（例えば，Morley, A., 1967, 1973; Semadeni, Z., 1983, 1984; Blum, W. & Kirsch, A., 1991）に対する検討に基づき[4]，action proofの概念を次のように規定した（小松, 印刷中)。

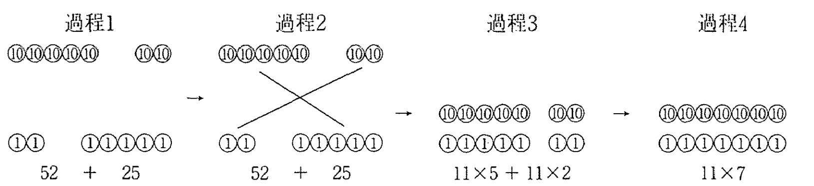
> action proofとは，代表的特殊の場合における具体物に対する諸行為（具体物に対する諸行為の過程を図で示すことも含む）を手がかりとして，他のすべての場合においても共通に行うことができる具体物に対する諸行為の本質的な特徴を認識し提示して，命題の仮定から結論を演繹的に導くものである。

例えば，命題Ａ「二桁の自然数と，その自然数の十の位の数と一の位の数とを入れかえた自然数との和は，11の倍数になる」について，action proofとして図１が考えられる。ここでは，52＋25という代表的特殊の場合（ポリヤ, G., 1954/1959）における具体物に対する諸行為（具体物に対する変形と具体物に対

する見方の変更）を手がかりとして，命題Aが真であることが示されている。代表的特殊の場合とは，その例における考察が他のすべての場合についても共通に行うことができるものである。この場合，図１の具体物に対する諸行為は，63＋36など，二桁の自然数すべてについて共通に行うことができる。52＋25は，二桁の自然数すべてを代表する特殊という意味で，代表的特殊の場合と呼ばれるのである。

しかし，子どもがある一つの場合を実際に代表的特殊の場合としてとらえるためには，そのある一つの場合における具体物に対する諸行為を，他のどのような場合でも共通に行うことができることを内面化（internalization）しなければならない。Piaget, J.（1953）は，この行為の内面化について，「行為の本質的な特徴（original character）を失うことなく思考の中で行われる」（p. 8）と述べている。

action proof の場合，この行為の本質的な特徴とは，行為の対象となっている個別の場合を越えて，すべての場合に共通する性質に基づくものである。例えば，図1のaction proofでは，他のすべての場合においても共通に行うことができる具体物に対する諸行為の本質的な特徴とは，一方の10円玉と他方の１円玉，一方の１円玉と他方の10円玉の枚数はそれぞれ等しいことから，それらを組み合わせれば，常に11の組を作ることができることである。このように，すべての場合において共通に行うことができる具体物に対する諸行為の本質的な特徴を，代表的特殊の場合を手がかりとしながら認識して提示し，命題の仮定から結論を演繹的に導くものがaction proof である。



52の10円玉5枚と25の1円玉5枚，52の1円玉2枚と25の10円玉2枚をそれぞれ組み合わせれば，11の組が5つと2つで合計7つできる。だから，52＋25は11の倍数になる。他のすべての場合についても同様の行為を行うことができる。よって，この命題は真である。

図１：命題Aに対する action proof

3．action proof を通じた「筋道を立てて説明する力」の育成

本節では，action proof を取り入れることが「筋道を立てて説明する力」の育成に貢献しうることを示す。はじめに，「筋道を立てて説明する力」とその育成の意義を明らかにする。

3．1　「筋道を立てて説明する力」とその育成の意義

冒頭で述べたように，次期学習指導要領の改訂において各教科等を貫く重要な改善の視点として，各教科等における言語活動の充実が挙げられている。この言語活動の充実については，文部科学省の言語力育成協力者会議の意見が強く反映されていると思われる。その会議の報告書案『言語力の育成方策について』（言語力育成協力者会議, 2007）では，算数・数学科の特質を踏まえた指導の充実について，次のように述べられている。

> 算数・数学を活用して考えたり判断したりする活動に重点をおき，その活動がよりよく行われるよう，言葉や数，式，図，表，グラフなどを用いて，筋道を立てて説明したり論理的に考えたりして，自ら納得したり他者を説得したりする指導を行うことが大切である。

このように，言語力の育成において算数・数学科が果たすべき役割の一つは，「筋道を立てて説明する力」の育成にある。この「筋道を立てて説明する力」について，算数・数学科の立場から当会議の委員を務めている清水静海氏は，第1回会議で資料として提出した論文（清水, 2006）において次のように述べている。

> 「説明する力」を身につけた子どもは，一般的には「ものごとをよく分かるように工夫して述べることができる子ども」であり，「筋道を立てて説明できる力」を身につけた子どもは，さらに「ものごとを，根拠とすることを明らかにし，それをもとに推論により述べることができる子ども」といえる。また，後者は前者を前提としている。（清水, 2006, p. 7）

したがって，「筋道を立てて説明する力」とは，「ものごとを，根拠とすることを明らかにし，それをもとに推論により述べる能力」と言える。なお，清水が述べるように，ここで根拠とできることには操作や実験で確認できたことも含まれ，推論には帰納，類比，演繹を挙げることができる。また，『言語力の育成方策について』や清水（2006）で述べられているように，「筋道を立てて説明する力」を育成する際には，「Yes を Yes と主張すること」だけでなく，「No を No と主張すること」や，「Yes か No か不明なときにはそれを明らかにすること」もバランス

よく取り入れる必要がある。

さらに，清水は「説明はなぜ筋道が立っていないといけないのか」という問いに対して，次のように主張している。

> 説明は，納得と説得のためになされるのが一般である。したがって，筋道が立っていればそうでない場合と対比してよりよく納得や説得ができるということである。(清水, 2006, p. 8)

このように，清水は「筋道を立てて説明すること」の意義として，よりよい納得と説得を挙げている。この主張の前提には，言語力がなければ納得や説得ができないということがあろう。そして，言語力の中でも「筋道を立てて説明する力」を身につけた子どもは，単に納得したり説得するではなく，根拠に基づいてよりよく納得や説得ができるのである。したがって，「筋道を立てて説明する力」を育成することの意義は，よりよく納得や説得ができる生徒を育てることにあると言える。

21世紀は「知識基盤社会」の時代であると言われている。そして，「知識基盤社会」の特質の一つとして，知識が日進月歩であり，競争と技術革新が絶え間なく生まれることが挙げられている（中央教育審議会, 2007)。それゆえ，日々生まれ変わる情報の真偽や有効性を判断したりするために，その真偽や有効性を根拠に基づいて論理的，批判的に納得することができる子どもを育てる必要がある。また，競争や技術革新が絶え間ない社会では，人は他者とコミュニケーションを取らなければ生きていくことができない。したがって，自分の考えを筋道を立てて説明し，自分の考えを正確に相手に伝えることで，他者を説得する能力を身につけている子どもを育てることも重要である。

3．2　action proof を通じた「筋道を立てて説明する力」の育成

前述の『教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ』では，「小・中・高等学校を通じ，国語科のみならず各教科等において，記録，要約，説明，論述といった言語活動を発達の段階に応じて行うことが重要である」（中央教育審議会, 2007, p. 26，下線は引用者による）と述べられている。したがって，言語力育成の観点から算数・数学科に期待されている「筋道を立てて説明する力」の育成も，算数・数学科を通じて行われる必要がある。

「筋道を立てて説明すること」における推論の一つに演繹があり，その典型に形式的証明がある。この形式的証明の学習は，日本の学校数学では中学校第二学年

から始まる。これはPiagetによる発達段階の研究から考えても合理的である。Piaget（1953）によれば，具体的操作期（7歳から11歳まで）の子どもは，思考が具体的な事象にしばられており，言語や記号を用いて仮説演繹的に説明することが難しい。そのため，それを必要とする形式的証明の学習は，形式的操作期（11－12歳から14－15歳まで）の子どもから始められる必要がある。

一方で，「筋道を立てて説明すること」において根拠とできる事柄には，操作や実験で確認したことも含まれる。ここで，action proof は，代表的特殊の場合における具体物に対する諸行為を根拠として，命題の仮定から結論を演繹的に導くものである。したがって，action proof によって命題の真偽を説明することは，「筋道を立てて説明すること」に含まれるものである。さらに，Piaget の研究に基づけば，具体的操作期の子どもは，具体物や図に依存しながらであれば演繹的に考えることができると言われている。したがって，action proof を小学校の算数に取り入れることは，「筋道を立てて説明する力」を発達の段階に応じて育成するという面で重要である。

例えば，命題Aに対する action proof では，代表的特殊の場合における具体物に対する諸行為を手がかりとして，命題Aが真であることが次のように演繹的に示されている。すなわち，「二桁の自然数と，その自然数の十の位の数と一の位の数とを入れかえた自然数とでは，一方の10円玉の枚数と他方の1円玉の枚数，一方の1円玉の枚数と他方の10円玉の枚数は等しい」と「等しいもの同士を組み合わせることで，11の集まりを作ることができる」などに基づいて，「二桁の自然数と，その自然数の十の位の数と一の位の数とを入れかえた自然数との和は，11の倍数になる」ことを説明しているのである。

現在の小学校では，学習指導要領解説（文部省，1999）や教科書を見る限り，数の性質に関する命題について，このような学習はあまり行われていないと推測される。だが，前述のように，「筋道を立てて説明する力」を発達の段階に応じて育成することは，今後ますます必要とされる。したがって，小学校高学年頃から，他にも「奇数と奇数の和は偶数である」や「連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍である」等の命題を題材に，子どもが action proof によって命題の真偽を演繹的に説明することは重要であろう。また，子どもがそのような経験を多く積んでいれば，中学校以降の数学において，形式的証明を通じて演繹的に説明する学習がよりよく行われる可能性も増すと期待される。

さらに，action proof を通じて「筋道を立てて説明する力」を育成することは，小学校段階に限定された話ではない。中学校数学の現状として，多くの生徒が形式的証明を記述することができないと指摘されている。その場合，一時的に action proof によって命題の真偽を演繹的に説明することも認めることは，「筋道を立てて説明する力」を育成するためには必要であると筆者は考える。ただし，すべての命題に対して action proof が存在するわけではないため，そのような生徒についても，将来的には形式的証明を記述できるようになることを目指すべきであろう(5)。

4．形式的証明の学習における action proof の活用

「筋道を立てて説明する力」は，演繹的な説明の典型である形式的証明の学習を通しても育成することができる。そのためには，形式的証明の学習がよりよく行われる必要がある。この形式的証明の学習には，少なくとも，形式的証明を生成することと，形式的証明をよんで形式的証明の納得を深めることが含まれよう。また，形式的証明の学習では，生徒の創造性を高めるために，証明に基づく発展的な考察も行われるべきである。以下では，この三つの学習において action proof を活用することが有効になりえることを示す。

國本（1996）は，action proof を含む前形式的証明（preformal proof）には，形式的証明を生成する役割と，定理や形式的証明を納得・確信させる役割があると述べている。これは形式的証明を生成する際と，形式的証明をよんで形式的証明の納得を深める際に，action proof を活用することができる可能性を示唆している。しかし，國本（1996）は上記の二つの役割があることを指摘するにとどまっており，action proof をどのように利用することで形式的証明の納得が深まるのかなど，学習指導の詳細に立ち入った議論をあまり行っていない。したがって，まず，形式的証明の生成と納得における action proof の活用について議論する。

4．1　形式的証明の生成における action proof の活用

形式的証明を生成することができる生徒はそれほど多くない。一般に，数の性質に関する命題の形式的証明を生成する場合，生徒は「文字式による表現」（国宗進, 1997）を行わなければならない。その際，生徒はその命題で述べられている数のすべてに共通な部分を見出す必要がある。そして，生徒はその共通な部分を数字で表し，それに基づいて，命題で述べられている数の個々に応じて異なる部

分を，変数としての文字で表さなければならない。しかし，この「文字式による表現」に困難を感じる生徒が多いと言われている。

例えば，国宗（1997）によれば，命題Aに対する形式的証明は図２のように行われる[6]。この形式的証明を記述するためには，生徒は二桁の自然数すべてが10×(十の位の数)＋(一の位の数）の形で表されることができることを知っていなければならない。そして，個別の二桁の自然数に応じて位の数が変わることから，それぞれの位の数を変数としての文字 a，b で表し，二桁の自然数を $10a+b$ と表す必要がある。しかし，生徒は自然数をそのように位の数に分解して考える機会が少ないと予想される。そのため，生徒がそれらの部分を見出して二桁の自然数を $10a+b$ と表すことは難しいと予想される。

一方，生徒が図１の action proof を行ったとする。このとき，命題で述べられている個々の数について，図１で述べた具体物に対する諸行為を共通に行うことができることを生徒は認識していることになる。より具体的には，①どのような二桁の自然数であっても「10×(10円玉の個数)＋(１円玉の個数)」によって表すことができること，②個別の数に応じて10円玉の個数と１円玉の個数が変わること，③図１で述べた具体物に対する諸行為をすべての場合に共通に行うことができることを，この生徒は認識していると言える。したがって，action proof にお

二桁の自然数と，その自然数の十の位の数と一の位の数とを入れかえた自然数との和は，11の倍数になる。

↓ 文字式による表現

これらの自然数は，$10a+b$，$10b+a$ （a, b：一桁の自然数）と表すことができる。

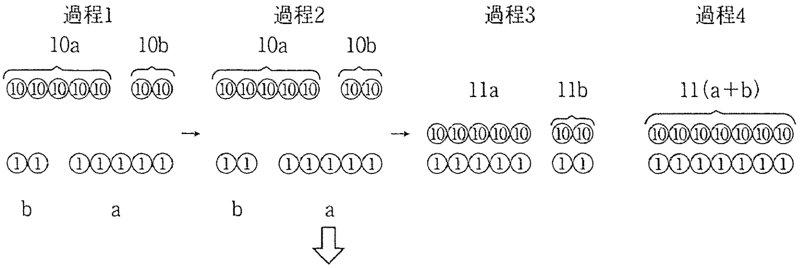
$$\begin{aligned}&(10a+b)+(10b+a)\\&=10a+b+10b+a\\&=10a+a+b+10b\\&=11a+11b\\&=11(a+b)\end{aligned}$$

↓ 文字式の同値変形

↓ 文字式をよむこと

$a+b$ は自然数であるから $11(a+b)$ は11の倍数である。よって，二桁の自然数と，その自然数の十の位の数と一の位の数とを入れかえた自然数との和は11の倍数になる。

図２：命題Aに対する形式的証明



二桁の自然数を10a+b (a, b：一桁の自然数）とすると，その自然数の位の数を入れかえた自然数は10b+aとなる。

$(10a+b)+(10b+a)=10a+b+10b+a=10a+a+b+10b=11a+11b=11(a+b)$

a+b は自然数であるから11(a+b)は11の倍数である。よって，二桁の自然数と，その自然数の十の位の数と一の位の数とを入れかえた自然数との和は11の倍数になる。

図３：action proof から形式的証明の生成

いて10円玉，１円玉の個数をそれぞれ変数としての文字 a，b を用いて表すことによって，図３に示すように，「文字式による表現」に加えて，「文字式の同値変形」，「文字式をよむこと」も生徒が行うことができるようになると期待される。

このように，action proof を通じて形式的証明を生成する学習も取り入れることで，形式的証明を生成することができるようになる生徒が増えると期待される。

４．２　形式的証明の納得における action proof の活用

Hanna, G. (1995) は，「もっともよい証明は，証明されている定理の意味を数学者が理解すること，すなわち，定理が真であること (that) だけでなく，なぜ (why) 真であるのかも見出すことを助けるものである」(p. 47) と述べている。このように，Hanna は定理の理解の深まりを，定理が真であることを知っている状態から，なぜ定理が真であるのかも知っている状態へと移行することとして特徴づけている。このことは定理の理解だけでなく形式的証明の納得についても同様であると筆者は考える。具体的には，生徒が形式的証明を得た際に，その形式的証明が「なぜ命題が真であるのか」を示していることをよみとることができれば，形式的証明に対する生徒の納得は深まるだろう。

ここで，生徒が形式的証明を得る場面として，生徒自身が形式的証明を記述する場合と，友人や教師から形式的証明を提示される場合の二つが考えられる。以下では後者に限定して議論を進める。なぜなら，日本の学校数学の現状として，

形式的証明を記述することができない生徒が多く，また，後者の生徒の方がその形式的証明から「なぜ命題が真であるのか」をよみとることが難しいと思われるからである。

特に，数の性質に関する命題の場合，「なぜ命題が真であるのか」を形式的証明からよみとることは難しいと思われる。その理由は次の通りである。数の性質に関する命題の形式的証明では，「なぜ命題が真であるのか」は主に文字式の同値変形の過程に示されている。この文字式の同値変形には，文字式が意味する具体的な意味を考えることなく，同値変形を機械的に進めることができるという利点がある。その利点ゆえに，生徒は文字式の同値変形の一つ一つに着目して，「なぜ命題が真であるのか」を形式的証明からよみとることは難しいと思われる。

例えば，図2に示した命題Aの形式的証明では，「なぜ命題Aが真であるのか」が次のように示されている。

> 二桁の自然数とその位の数を入れかえた自然数との和では，一方の十の位の数と他方の一の位の数が等しく（a），一方の一の位の数と他方の十の位の数も等しい（b）。等しいもの同士を組み合わせると11の組ができるため（11a＋11b），全体も11の組でまとめることができる（11(a＋b)）。したがって，その和は11の倍数になる。

だが，(10a＋b)＋(10b＋a) から11(a＋b) までの一連の同値変形を示されたとしても，彼らの多くはこの文字式の同値変形を機械的に進めているだろう。そのため，文字式の同値変形がもつ意味に生徒が着目し，その同値変形から「なぜ命題が真であるのか」をよみとることは難しいと思われる。

一方で，図１の action proof では，代表的特殊の場合における具体物に対する諸行為を手がかりとして，「なぜ命題が真であるのか」が次のように示されている。

> 一方の10円玉の枚数と他方の1円玉の枚数，一方の1円玉の枚数と他方の10円玉の枚数がそれぞれ等しい。したがって，それらを組み合わせると11の組ができるため，全体も11の組でまとめられる。よって，この命題は真である。

この action proof で示されている「なぜ命題が真であるのか」と，形式的証明で示されている「なぜ命題が真であるのか」は，具体（硬貨に対する操作）と抽象（数や文字に対する操作）の関係にあることがわかる。

筆者は，多くの生徒にとって，形式的証明よりも action proof からの方が，「なぜ命題が真であるのか」をよみとりやすいと考える。その理由は次の二つである。第一は，形式的証明よりも action proof の方が証明の過程に着目しやすいと思われるからである。前述のように，生徒は，「なぜ命題が真であるのか」をよみとるためには，証明の過程に着目しなければならない。形式的証明と action proof の主な過程は，それぞれ文字式の同値変形と具体物に対する諸行為である。この具体物に対する諸行為は，一般には，文字式の同値変形と比べて，その諸行為の過程に着目しやすいと思われる。

第二は，ブルーナー，J. S. による研究に基づくものである。ブルーナーら（1966/1968）によれば，子どもの表象作用の発達は，動作的表象（enactive representation），映像的表象（iconic representation），記号的表象（symbolic representation）の順に進む。そして，ブルーナー（1966/1977）は，最適なシークエンスもそれと同じ順序で進むことになりそうであると述べている。さらに，ブルーナー（1966/1977）は，学習者が記号的表象に長けていれば，動作的，映像的表象の段階をとばすことも可能であるが，その場合，記号的表象での問題解決に失敗したときに，もう一度立ち戻るための心像を持ち合わせていない危険性が伴うと述べている。action proof は動作的，映像的表象で行われ，形式的証明は記号的表象で行われる。それゆえ，形式的証明から「なぜ命題が真であるのか」をよみとることが難しい生徒にとっては，action proof からの方がそれをよみとりやすいだろう。

したがって，action proof を利用した次のような活動により，形式的証明に対する生徒の納得が深まると期待される。はじめに，生徒が友人や教師から形式的証明を提示されたとする。次に，生徒が action proof を行い，その具体物に対する一連の諸行為を手がかりとして，「なぜ命題が真であるのか」を action proof からよみとったとする。それから，その action proof に基づいて形式的証明をよむことによって，形式的証明に動作的，映像的な意味を付与することができると思われる。特に，「なぜ命題が真であるのか」が主に表れている文字式の同値変形を，より生徒が考えやすい動作的，映像的表象と関連づけることができるだろう。そのため，この一連の活動によって，生徒が「なぜ命題が真であるのか」を形式的証明からよみとりやすくなると期待される。

例えば命題Aについて，生徒が図2の形式的証明を友人や教師から提示された後

に，図１の action proof を行い，「なぜ命題Aが真であるのか」をよみとったとする。この action proof では，一方の10円玉の枚数と他方の１円玉の枚数，一方の１円玉の枚数と他方の10円玉の枚数がそれぞれ等しいことから，それらを組み合わせて11の組を作っている。これは形式的証明における文字式の同値変形の中でも，$(10a+b)+(10b+a)=10a+b+10b+a=11a+11b$ の部分を，動作的，映像的表象で考えたものである。したがって，生徒がこの具体物に対する諸行為に基づいて図2の形式的証明をよむことで，「なぜ命題が真であるのか」を形式的証明からよみとりやすくなると思われる。

以上の議論をまとめると，形式的証明を与えられた後に action proof を行い，その action proof に基づいて形式的証明をよむことで，生徒がその形式的証明から「なぜ命題が真であるのか」をよみとりやすくなり，形式的証明に対する納得が深まると期待される。

４．３　証明に基づく発展的な考察における action proof の活用

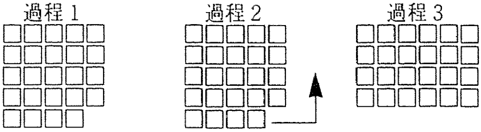
証明に基づく発展的な考察において action proof を活用することの意義として，次のものが考えられる。すなわち，生徒が既存の命題に対する action proof を振り返ることによって，形式的証明のみを考えた場合では生まれにくいような新しい命題が推測され証明されうる。それによって，証明に基づく発展的な考察を促す機会が増えることにつながるのである。

例えば，命題Ｂ「連続する３つの自然数について，真ん中の数の２乗から１を引いた数は，残りの２つの数の積に等しい」について，形式的証明とaction proofとして，それぞれ図４，図５のものが考えられる。

ある生徒は，この action proof で右下から取り除くタイルが１×１の正方形であるため，２×２の正方形を取り除くとどうなるだろうかと考えるかもしれない。そのような生徒は，試行錯誤を経て，命題Ｃ「階差が２の３つの自然数について，真ん中の数の２乗から2^2を引いた数は，残りの２つの数の積に等しい」と図６の action proofを考え出すだろう。

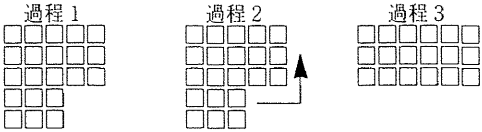
連続する３つの自然数をn，n+1，n+2（n：自然数）とすると， $(n+1)^2-1=n^2+2n+1-1=n^2+2n=n(n+2)$ $n(n+2)$は，残りの2つの数の積である。よって，連続する3つの自然数について，真ん中の数の2乗から1を引いた数は，残りの２つの数の積に等しい。

図４：命題Ｂに対する形式的証明



5 × 5 の正方形から 1 つだけタイルを取り除いたものでは，下側にある 4 枚のタイルを右側に移すことで，4 × 6 の長方形を作ることができる。したがって，5 の 2 乗から 1 を引いた数は 4 × 6 に等しい。他のすべての場合についても同様の行為を行うことができる。よって，この命題は真である。

図 5 ：命題 B に対する action proof



5 × 5 の正方形から 2 × 2 個分のタイルを取り除いたものでは，下側にある 6 枚のタイルを右側に移すことで，3 × 7 の長方形を作ることができる。したがって，5 の 2 乗から 2^2を引いた数は 3 × 7 に等しい。他のすべての場合についても同様の行為を行うことができる。よって，この命題は真である。

図 6 ：命題 C に対する action proof

さらに，右下から取り除くタイルを 3 × 3 個，4 × 4 個，…と考え，これらの考えを統合することによって，より一般的な命題「階差が d の 3 つの自然数について，真ん中の数の 2 乗から d^2 を引いた数は，残りの 2 つの数の積に等しい」を推測するとともに，そのaction proofを行う生徒も出てくるであろう。そして，元々の命題Bをこの一般的な命題の特殊（d＝1）として位置づけることができるようになると期待される。このような証明に基づく発展的な考察は，個々の生徒にもよるが，形式的証明からは生まれにくいと思われる。この場合には，action proof をこのように振り返って発展的に考察した後に，命題Cなどに対する形式的証明を記述することも考えられる。

当然のことだが，形式的証明を振り返る方が発展的な考察を行いやすい場合もある。例えば，命題 B の形式的証明では，n が自然数であるという条件は使われていない。したがって，形式的証明を振り返ることで，「連続する 3 つの整数について…」や「階差が 1 である 3 つの実数について…」という命題を推測して形式

的証明を行う生徒もいると思われる。action proof は具体物に対する諸行為に基づいて行われるため，思考が自然数の場合に限定されがちであろう。そのため，action proof では，負の数の場合までを対象とした発展的な考察は生まれにくいと思われる。逆に，形式的証明に基づいて発展的に考察した後に図５や図６の action proof を振り返れば，それらの action proof に対する見方が変わり，それらの action proof が，自然数の範囲を越えて整数や実数の場合においても，数の間の関係を明らかにしていることを生徒はより鮮明によみとることができるようになるだろう。

いずれにせよ，形式的証明だけでなく action proof も行うことで，証明に基づく発展的な考察がより多様となるため，生徒の創造性をより高めることができると期待される。

５．研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は学校数学における action proof の意義を明らかにすることであった。はじめに action proof の概念を簡単に説明した後に，学校数学における action proof の意義を，action proof を行うことそれ自体に何らかの教育的な価値がある場合と，形式的証明の学習をよりよく行うために action proof を活用することができる場合の二つに分けて議論した。前者については，「筋道を立てて説明する力」とその育成の意義を明らかにし，action proof を取り入れることが「筋道を立てて説明する力」を発達の段階に応じて育成することにつながることを指摘した。後者については，形式的証明の生成と納得，そして，証明に基づく発展的な考察において，action proof を活用することが有効になりえることを指摘した。

今後の課題としては，本研究で指摘した action proof の意義を証明指導の場でどのように実現していくか，理論と実践の両面から検討することが少なくとも必要である。

注

（１） 本研究では，証明を，正しいと認められている事柄を根拠にして，命題の仮定から結論を演繹的に導くものと捉える。

（２） 本研究では，一般の学校数学の場において通常行われている証明を，形式的証明と呼

ぶこととする。

（３） 宮崎（1995）は action proof という用語は用いていない。しかし，宮崎の研究における水準２の説明は，action proof に該当するものであると考えることができる。

（４） 冒頭で述べたように，action proof に関しては国内においてもいくつか研究が行われている。しかし，それらの先行研究は主に action proof の利用について議論しており，action proof の概念それ自体は，基本的には Semadeni や Blum & Kirsch を拠り所としている。したがって，小松（印刷中）では，action proof の概念規定に際して，Morley, Semadeni, Blum & Kirsch を検討の対象とした。

（５） 以上で議論してきたことは，「Yes を Yes と主張すること」における action proof の活用と言える。他に，「No を No と主張すること」などにおいても，action proof を活用することが想定されるが，それらについては本稿では考察しないこととする。

（６） 国宗（1997）は，文字式による論証の過程を，「文字式による表現」，「文字式の計算」，「文字式を読むこと」の３点に分析している。本稿では，「文字式の計算」を「文字式の同値変形」に，「文字式を読むこと」を「文字式をよむこと」に改めた。

引用・参考文献

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 183-203.

ブルーナー, J. S. ら（1966/1968）. *認識能力の成長：認識研究センターの協同研究* (Studies in Cognitive Growth: A Collaboration at the Center for Cognitive Studies, 岡本夏木ら訳). 東京：明治図書.

ブルーナー, J. S.（1966/1977）. *改訳版 教授理論の建設*（Toward a Theory of Instruction, 田浦武雄ら訳）. 愛知：黎明書房.

中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会（2007）. *教育課程部会におけるこれまでの真偽のまとめ*. http://www.mext.go.jp/b-menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryo/001/07110606/001.pdf.（参照2008－01－09）

言語力育成協力者会議（2006）. *言語力の育成方策について（報告書案）【修正案・反映版】*. http://www.mext.go.jp/b-menu/shingi/chousa/shotou/036/shiryo/07081717/004.htm.（参照2008－01－09）

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15 (3)*, 42-49.

川島健治 （1996）. 前形式的証明の活用についての一考察：action proof を導入して. *日本数学教育学会誌, 78 (4)*, 66－72.

小松孝太郎 （印刷中）. 学校数学における action proof の概念規定. *筑波数学教育研究, 26*.

古藤怜（1986）. わかり方の深まり：その１. *学習指導研修10月号*, 76－79.

古藤怜（1988）. 思考実験と学校数学. *数学教育研究 （上越教育大学）, 3*, 1－10.

國本景亀（1996）. *空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善.*

平成６～７年度文部省科学研究費補助金一般研究(C)．課題番号06680256研究報告書．
国宗進（1997）．「文字や文字式を理解している」とは．国宗進編著．*確かな理解をめざした文字式の学習指導*（pp. 32－48）．東京：明治図書．
宮崎樹夫（1995）．*学校数学における証明に関する研究：証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して*．博士学位請求論文，筑波大学．
文部省（1999）．*小学校学習指導要領解説 算数編*．東京：東洋館出版社．
Morley, A. (1967). Changes in primary school mathematics: Are they complete?. *Mathematics Teaching, 41*, 20-24.
Morley, A. (1973). Mathematics as "process". *Mathematics Teacher, 66 (1)*, 39-45.
Piaget, J. (1953). *Logic and Psychology* (translated by Mays, W. & Whitehead, F.). Manchester: Manchester University Press.
ポリヤ, G.（1954/1959）．*帰納と類比*（Induction and Analogy in Mathematics, 柴垣和三雄訳）．東京：丸善．
坂本美知夫（1991）．論理的思考力を育成する算数指導：action proof を視座として．*数学教育研究（上越教育大学），６*，85－94．
Semadeni, Z. (1983). Integration of content and pedagogy in pre-service training of mathematics teachers. In Zweng, M. etc. (eds.). *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 96-98). Boston: Birkhaeuser.
Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4 (1)*, 32-34.
清水静海（2006）．*算数・数学の学びと言語力の育成：「筋道を立てて説明する力」に焦点を当てて*．言語力育成協力者会議 第１回資料．http://www.mext.go.jp/b-menu/shingi/chousa/shotou/036/shiryo/06061520/010.htm．（参照2008－01－09）
梅川貴司（2002）．数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：Action Proof を選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から．*上越数学教育研究，17*，67－78．

The Significance of Action Proofs in School Mathematics

Kotaro KOMATSU

ABSTRACT

In Japan, it will become more important to teach proofs in school mathematics. There are some studies about action proofs which are one type of proofs, but the studies have not clarified the significance of action proofs. If we want to utilize action proofs in school mathematics, we must discuss the significance. Therefore, the purpose of this study is to clarify the significance of action proof in school mathematics.

After describing the concept of action proof briefly, I will discuss the significance of action proofs as follows: at first, I clarify "the ability to explain logically" and its educational worth, and then discuss that to have students doing action proofs can bring to foster "the ability to explain logically" according to students' development. Secondly, I will discuss that students are able to utilize action proofs in three ways when studying formal proofs. It is expected that students can constitute a formal proof through an action proof. Then, by relating a formal proof to an action proof, students will be able to read "why the proposition is true" from the formal proof. Lastly, if students examine not only a formal proof but also an action proof, it is probable that they can expand their thinking through their proofs.