

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340001

研究課題名 (和文) 散在型有限単純群と頂点作用素代数に内包された対称性の発見

研究課題名 (英文) Detection of hidden symmetries in sporadic simple groups and vertex operator algebras

研究代表者

宮本 雅彦 (MIYAMOTO MASAHIKO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：30125356

研究成果の概要：

頂点作用素代数関係

- (1) 頂点作用素代数の研究は、有理型の条件の下で行われることが多かったが、研究代表者の研究により、C2有限条件の方が重要であることが認識された。ここでは、C2-有限型の条件の下に、非有理型頂点作用素代数を扱い、semi-rigidity という概念を導入して、その仮定の下で平坦性を証明した。
- (2) ある種の頂点作用素代数のウエイト 2 の空間はグライス代数と呼ばれる可換代数である。可換代数として有名なジョルダン代数がグライス代数となるかどうかは良く分かっていなかった。ここでは、対称行列全体がなすジョルダン代数に対してそれをグライス代数として持つような任意の中心電荷を持つ頂点作用素代数を構成した。

群論関係 偶数位数の単純群の位数を抑える非常に良い公式を見つけた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,800,000	0	3,800,000
2006年度	3,500,000	0	3,500,000
2007年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2008年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
年度			
総計	14,500,000	2,160,000	16,660,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：散在型有限単純群、頂点作用素代数、モンスター単純群、ムーンシャイン予想、semi-rigidity、表現

1. 研究開始当初の背景

- (1) 頂点作用素代数は分かり易い有理型 (すべての加群が既約加群の直和となっているもの) のものしかほとんど研究されていなかった。
また、頂点作用素代数の自己同型に関し

ても特別なものしか研究されていなかった。

ところが、研究代表者の宮本の研究により、有理型よりはC2有限性の方が重要であることが示され、加群の交絡作用素なども logarithmic と呼ばれる z ベキ以外に $\log z$ の自然数ベキが付いたも

のを研究するようになってきた。

- (2) 有限群の研究は、単純群分類完成後、急激に構造的解析の研究が停滞し、条件付きの可解群の研究や表現論的な研究が中心で、単純群の構造解析が少なくなった。

2. 研究の目的

- (1) 頂点作用素代数の場合、非有理型であっても C_2 有限であれば良い性質を持っていると予測し、その解明を行う。例えば、通常の代数におけるテンソル積に対応するフージョン積が平坦であるとか、 C_2 有限条件を満たす頂点作用素代数の有限位数の自己同型による固定空間も C_2 有限条件を満たすのではないかと予想している。これらの予想を解く為の手法を開発するのが本研究の目的であった。
- (2) 有限群の研究では、頂点作用素代数の自己同型群として出て来る有限群を調べ、その性質を求めたい。例えば、ムーンシャイン頂点作用素代数の自己同型として出て来るモンスター単純群の性質を頂点作用素代数の自己同型群として特徴づけたい。

3. 研究の方法

- (1, 2) 頂点作用素代数に関しては、グライスやメイソンなどの海外の研究者と情報交換し、ツエ代数の構造を調べる。また、有限群との関連においては、有限代数系の表現論研究者や群の研究者と連絡を取りながら、頂点作用素代数のツエ代数の構造を決定し、その性質を調べる。また、頂点作用素代数の自己同型によるトレイス関数を使って、表現の研究に指標理論を持ち込み、モジュラー不変性の理論を利用したい。これらの知識を得る為に、それぞれの分野の研究者と連絡を取る。

4. 研究成果

- (1) 研究代表者が行った C_2 有限であるような頂点作用素代数のモジュラー不変性をかなり拡張した。
- (2) C_2 有限かつ semi-rigidity であれば、希

望の性質を満たすことを確認した。また、より大きなモジュラー不変性を期待できる

- (3) グライス代数がジョルダン代数となるようなものを無限系列構成した。
- (4) 有限群の立場から、位数 2 の自己同型元の重要性に着目し、偶数位数の群の位数を抑える非常に良い評価式を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

- ① T. Ashihara, M. Miyamoto Deformation of central charges, vertex operator algebras whose Griess algebras are Jordan algebras. J. Algebra 査読有 321 (2009), no. 6, 1593-1599.
- ② N. Horiguchi, M. Kitazume, H. Nakasora, Hiroyuki The Hall-Janko graph and the Witt system $W\mathbb{F}_5\{10\}$. European J. Combin. 29 査読有 (2008), no. 1, 1-8.
- ③ S. Naito, D. Sagaki, Lakshmibai - Seshadri paths of level-zero shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations. Compos. Math. 144 査読有 (2008), no. 6, 1525-1556.
- ④ S. Naito, D. Sagaki, A modification of the Anderson-Mirković conjecture for Mirković-Vilonen polytopes in types B and C. J. Algebra 320 査読有 (2008), no. 1, 387-416.
- ⑤ S. Naito, D. Sagaki, Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrary level-zero shape. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 96 査読有 (2008), no. 3, 582-622.
- ⑥ K. Harada, M. Miyamoto, On the order of a group of even order. J. Algebra 査読有 310 (2007), no. 2, 793-800.
- ⑦ N. Chigira, M. Harada, M. Kitazume, Some self-dual codes invariant under the Hall-Janko group. J. Algebra 316 査読有 (2007), no. 2, 578-590.

- ⑧ N. Chigira, M. Harada, M. Kitazume, Permutation groups and binary self-orthogonal codes. Algebra 309 査読有(2007), no. 2, 610-621.
- ⑨ N. Chigira, M. Harada, M. Kitazume, Extremal self-dual codes of length 64 through neighbors and covering radii. Des. Codes Cryptogr. 42 査読有(2007), no. 1, 93-101.
- ⑩ C. H. Lam, M. Miyamoto, Niemeier lattices, Coxeter elements, and McKay's E₈-observation on the Monster simple group. Int. Math. Res. Not. 査読有(2006) Art. ID 35967, 27 pp
- ⑪ S. Naito, D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. II. Adv. Math. 200 査読有(2006), no. 1, 102-124.
- ⑫ S. Naito, D. Sagaki, Construction of perfect crystals conjecturally corresponding to Kirillov - Reshetikhin modules over twisted quantum affine algebras. Comm. Math. Phys. 263 査読有(2006), no. 3, 749-787.
- ⑬ S. Naito, D. Sagaki, Crystal base elements of an extremal weight module fixed by a diagram automorphism. Algebr. Represent. Theory 8 査読有(2005), no. 5, 689-707.
- ⑭ S. Naito, D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai - Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra. Int. Math. Res. Not. 査読有(2005), no. 14, 815-840.
- ⑮ S. Naito, D. Sagaki, An approach to the branching rule from $\{\mathfrak{sl}\}_{2n}(\mathbb{C})$ to $\{\mathfrak{sp}\}_{2n}(\mathbb{C})$ via Littelmann's path model. J. Algebra 286 査読有(2005), no. 1, 187-212.
- ⑯ M. Harada, M. Kitazume, A. Munemasa, B. Venkov, On some self-dual codes and unimodular lattices in dimension 48. European J. Combin. 26 査読有(2005), no. 5, 543-557.

[学会発表] (計 2 件)

- ① M. Miyamoto, Nonvanishing elements, 日本数学会 2009年3月28日 東京大学
- ② M. Miyamoto, Semirigidity and flatness, Symposium on Lie algebras and VOAs 2008年12月28日 Academica Sinica (台湾)

[図書] (計 2 件)

- ① 著者: 宮本雅彦・宮本恭子、出版社: 岩波書店、書名: シンメトリーとモンスター 一発行年: 2008年、総頁数: 250頁
- ② 著者: 宮本雅彦、出版社: 日本評論社、書名: 有限群村の冒険、発行年: 2007年、総頁数: 200頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮本 雅彦 (MIYAMOTO MASAHIKO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号: 30125356

(2) 研究分担者

森田 純 (MORITA JUN)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号: 20166416

北詰 正顕 (KITAZUME MASA AKI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60204898

内藤 聡 (NAITO SATOSHI)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号: 60252160

木村 達雄 (KIMURA TATSUO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号: 30022726

杉山 和成 (SUGIYAMA KAZUNARI)
千葉工業大学・情報科学部・助教
研究者番号: 90375395

田邊 顕一郎 (TANABE KENICHIRO)
北海道大学・大学院理学研究科・助教授
研究者番号：10334038

和嶋 雅幸 (WAJIMA MASAYUKI)
北海道工業大学・工学部・教授
研究者番号：20201163

鈴木 寛 (SUZUKI HIROSHI)
国際基督教大学・教養学部・教授
研究者番号：10135767