様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月２２日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００２３
研究課題名（和文）　非正曲率距離空間の位相構造の研究

研究課題名（英文）　Study of the topological structure of metric spaces of non-positive curvature

研究代表者
永野　幸一　（NAGANO KOICHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師
研究者番号：３０３３３７７７

研究成果の概要:非正曲率距離空間に代表される CAT(k)空間の位相構造の理解を目指し，主に，CAT(k)空間がいつ n 次元位相多様体になるかについて記述する局所位相正則性の問題(Lytchak 氏と共同)，および 2 次元 CAT(k)空間の幾何構造と位相構造に関する Gauss・Bonnet の定理等（Kleiner 氏，塩谷氏，山口氏と共同）について取り組み，汎用性の高い成果を得た．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,300,000	0	1,300,000
２００７年度	1,100,000	0	1,100,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	330,000	3,830,000

研究分野：大域リーマン幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何学，リーマン幾何学

１．研究開始当初の背景

1980 年代終盤 Gromov が双曲群の概念を提起して以来，離散群を幾何学的対象を通して調べる「幾何学的群論」が注目を集めており，重要な応用が多くなされている．Alexandrov を祖とする曲率が上に有界な距離空間の理論は幾何学的群論の基礎となっており，最近では CAT(k)空間の理論と呼ばれてその価値が再認識されている．CAT(k)空間自身の構造は一般に複雑で深く理解されている訳では無い．CAT(k)空間は Euclid 空間と同相な近傍を許容しない特異点を許容し得る．さらに Kleiner（1999）によって局所コンパクト測地的完備な 2 次元 CAT(k)空間でも多面体構造を許容するとは限らないことが指摘され，研究代表者（2002）によってその具体的な構成がなされた．これらの事実が示唆するように，一般的に CAT(k)空間は野性的である．その一方で，研究開始当初，Lytchak 氏（ボン大学）と研究代表者による最近の一連の共同研究で，CAT(k)空間の局所的な幾何構造および位相構造が特異点集合も含めて理想的に近い形で記述されつつあった．

２．研究の目的

本研究では非正曲率距離空間に代表される CAT(k)空間の位相構造の理解を目指した.

(1) CAT(k)空間の局所位相正則性の記述.

研究開始当初, Lytchak 氏と研究代表者による一連の共同研究で, CAT(k)空間の局所位相正則性が証明されていた. 本研究では, Lytchak 氏との共同研究を研究論文として仕上げながら, 完全な記述と更なる発展を目指した.

(2) 2 次元非正曲率距離空間の研究.

一般のコンパクト測地的完備な 2 次元非正曲率距離空間に対して, その距離構造の詳細な理解と位相型の分類を目指した. 一つの目標として, 一般の局所コンパクト測地的完備な CAT(k)空間に対して, 滑らかな曲面に対する曲率積分の拡張となっているような自然な曲率測度の構成と, その曲率測度に関する Gauss・Bonnet の定理について研究した.

(3) CAT(k)空間に関するその他の研究.

小さな 2 次元 CAT(1)空間に対する射影平面の特徴付けや, 球面的ビルディングとの関連で 2 次元 CAT(1)空間に対する直径剛性などの興味深い問題も山積している. 研究の進展状況によって, これらの 2 次元 CAT(1)空間に対する問題に取り組むことも念頭に入れ研究を行った.

３．研究の方法

(1) CAT(k)空間の局所位相正則性の記述.

前世紀の 1960 年代から 80 年代にかけて, Bing を初めとして Edwards や Quinn が整備した多様体認識理論（分解理論）と, CAT(k)空間に対する特異点集合の計量的研究を適当な形で関連付けた. 特に, CAT(k)ホモロジー多様体に対して微分幾何学的研究を行った. Lytchak 氏との共同研究で得られた最近の結果を研究論文として出版を試みるとともに, その中で開発した技法を吟味し直し, 更なる発展の可能性について研究した.

(2) 2 次元非正曲率距離空間の研究.

具体的な目標として, 2 次元 CAT(k)空間に対する Gauss・Bonnet の定理の記述を目指した. 2 次元 CAT(k)空間が局所的には適当な幾つかの凸な線織面の貼り合わせとして理解することによって, 局所幾何構造を研究した. 曲率測度の構成法のアイデアは, 先行する Alexandrov-Zalgaller の 2 次元 CAT(k)曲面に対する構成法, Burago-Buyalo の 2 次元 CAT(k)多面体に対する構成法を適当に一般化することであった.

(3) CAT(k)空間に関するその他の研究.

2 次元 CAT(1)空間に対する直径剛性などの問題には, 前項の 2 次元 CAT(k)空間の局所幾何構造の研究成果をうまく適用できるように工夫を重ねた.

４．研究成果

(1) CAT(k)空間の局所位相正則性の記述.

Lytchak 氏と研究代表者による共同研究で得られた局所位相正則性定理は次である.

定理. 局所コンパクト測地的完備な CAT(k)空間が n 次元位相多様体であることと, 任意の点における方向空間（多面体であればその点でのリンクに相等）が(n-1)次元球面とホモトピー同値であることは必要十分である.

一般に, 仮に CAT(k)空間が n 次元位相多様体であっても, 方向空間が(n-1)次元球面と同相でないような点を許容し得ることに注意する. 上の局所位相正則性は未解決であった Alexandrov の問題に解決を与えるばかりでなく, 一般次元 CAT(k)位相多様体を理想的な形で特徴づけた定理である

この局所位相正則性を示す過程で得られた様々な成果の一つとして, 次の特異点集合に対する求積可能性を証明した.

定理. 局所コンパクト測地的完備な CAT(k)空間の次元が n であれば, その特異点集合は(n-1) 求積可能である.

局所位相正則性を証明するには, この求積可能性と共に, CAT(k)ホモロジー多様体の研究が必要不可欠である. 例えば, 次を示した.

定理. CAT(k)4 次元ホモロジー多様体において, 各点の任意に十分小さな距離球面は 3 次元位相多様体である.

また局所位相正則性の応用として, CAT(k)ホモロジー多様体の局所錐性が分かる.

定理. CAT(k)n 次元ホモロジー多様体に対して, 5 次元以外の場合は, 各点はある位相空間上の錐と同相な近傍を持つ. 5 次元の場合もある障害を除いて正しい.

この他にも, 局所位相正則性の応用として, 次の CAT(1)空間に対する球面定理も得た.

定理. コンパクト測地的完備な n 次元 CAT(1)空間は, 互いに距離が π 以上離れた 3 点を許

容しなければ，n 次元球面と同相である．

これらの Lytchak 氏との一連の共同研究を研究論文の完成に向けて推進した．その過程で，非コンパクトの場合も適用できるような測地的完備な CAT(1)空間に対する球面的結距離的安定性定理など新たな知見も得られた．
以上で述べた成果は，いずれも CAT(k)空間の位相構造に関する汎用性の高い結果であり，今後の発展が期待できると言えよう．

(2) 2 次元非正曲率距離空間の研究．
Kleiner 氏（イェール大学），塩谷氏（東北大学），山口氏（筑波大学）との共同研究として，2 次元 CAT(k)空間の局所構造に関する次の Gauss・Bonnet の定理を得た．

定理．局所コンパクト測地的完備である 2 次元 CAT(k)空間に対して，滑らかな曲面に対する曲率積分の拡張となっている自然な曲率測度が存在する．特に空間が有界な場合，その曲率測度に関する Gauss・Bonnet の定理が成り立つ．すなわち，全曲率測度が Euler 数の 2π倍に等しい．

これは Burago-Buyalo（1999）によって得られた CAT(k)2 次元多面体の Gauss・Bonnet の定理の一般化である．今回の Gauss・Bonnet の定理は，多面体構造を許容しない空間にも適用できる点で他に類を見ない．さらに同じ共同研究において，次の局所構造多面体近似定理を得た．

定理．局所コンパクト測地的完備である 2 次元 CAT(k)空間は，局所的に 2 次元 CAT(k)多面体で Gromov-Hausdorff 位相の意味で近似できる．

これらの研究により，2 次元 CAT(k)空間の局所構造が完全に記述できたといえよう．
またコンパクト測地的完備な 2 次元非正曲率距離空間の位相型の分類の研究，具体的には次の問題に応用されることが期待される．

予想．2 次元コンパクト非正曲率空間の基本群は Bieberbach 群か非可換自由群を部分群として持つ（これは Ballmann-Brin（1995）により多面体の仮定の下で正しい）．

(3)その他の CAT(k)空間に関する研究．
Lytchak 氏とは，2 次元 CAT(1)空間に対する直径剛性の問題に向けて共同研究が本格的に始まった．この問題へのアプローチとして，2 次元 CAT(1)空間に対してある条件下のもとで，球面的錐状近傍の存在性などを示し，2 次元球面的ビルディングに対するある距離的特徴付けを得た．この特徴付けにより，2 次元 CAT(1)空間に対する直径剛性の問題に，僅かではあるが，ある程度前進したといえる．
なお研究期間中に学術雑誌に掲載された研究を付記しておく．藤原氏（東北大学）および塩谷氏との共同研究として，CAT(0)空間上の放物的等長変換の固定点集合の半径の評価と中心集合の研究を行った．また組み合わせ群論における Tits の自由構成方法のアイデアを応用して非自明な CAT(1)空間の例を構成した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Koichi Nagano, Free construction of CAT(1) spaces, Archiv der Mathematik, 88, 173-180, 2007, 査読有.
② Koji Fujiwara, Koichi Nagano, and Takashi Shioya, Fixed point sets of parabolic isometries of CAT(0)-spaces, Commentarii Mathematici Helvetici, 81, 305-335, 2006, 査読有.

〔学会発表〕（計１２件）

① 永野 幸一, 曲率が上に有界な２次元距離空間, 東北大学談話会, 2008 年 11 月 17 日，東北大学.
② 永野 幸一, A characterization of 2-dimensional spherical buildings, 研究会「リーマン幾何と幾何解析」, 2008 年 2 月 19 日，筑波大学.
③ Koichi Nagano, Topological regularity of Alexandrov spaces with an upper curvature bound, Third Russian-German Geometry Meeting --dedicated 95-anniversary of A. D. Alexandrov 2007 年 6 月 18 日，Steklov Institute of Mathematics (St. Petersburg, Russia)
④ 永野 幸一, CAT(1)空間の位相正則性, 東北大学談話会, 2006 年 12 月 18 日，東北大学.
⑤ 永野 幸一, CAT(1)空間の求積可能性, 研究会「測地線及び関連する諸問題」, 2006 年 10 月 28 日，熊本大学.
⑥ Koichi Nagano, Topological regularity of CAT(1) spaces, Rigidity School, Nagoya 2006, 2006 年 9 月 28 日，名古屋大学.
⑦ 永野 幸一, A sphere theorem for CAT(1) spaces, 日本数学会秋期総合分科会幾何学分科会，特別講演, 2006 年 9 月 21 日，大阪市立大学.
⑧ 永野 幸一, Topological regularity of

CAT(1) spaces, 第53回幾何学シンポジウム, 全体講演, 2006年8月5日, 金沢大学.

⑨ 永野 幸一, Topological regularity of CAT(1) spaces, 岡山大学談話会, 2006年7月21日, 岡山大学.

⑩ Koichi Nagano, Distance and convexity, 第4回COEシンポジウム「物質階層融合科学の構築」国際会議, 2006年6月28日, 仙台国際センター.

⑪ 永野 幸一, Topological regularity of CAT(1) spaces, 筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 2006年6月27日, 筑波大学.

⑫ 永野 幸一, Rectifiability of CAT(1) spaces, 東北大学幾何学セミナー, 2006年4月25日, 東北大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

永野　幸一　(NAGANO　KOICHI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師

研究者番号：３０３３３７７７