

## 3 次の積率構造を用いる 構造方程式モデリングによる因果分析

筑波大学大学院人間総合科学研究科・心理学系 服部 環

Causal analysis utilizing structural equation modeling based on third-order moment structures

Tamaki Hattori (*Institute of Psychology, Graduate School of Comprehensive Human Sciences, University of Tsukuba, Tsukuba 305-8572, Japan*)

Structural Equation Modeling (SEM) is a powerful multivariate analysis technique that incorporates many of the techniques of traditional statistical analysis (e.g., regression analysis, causal modeling, confirmatory factor analysis, correlation structure models) as special cases. The serious problems with using traditional SEM relate to model under-identification and the existence of equivalent models. In contrast to traditional SEM plagued by such problems, non-normal SEM (nnSEM) utilizing higher order (e.g. third and fourth) moment structures has the potential to overcome these problems. We develop computer programs for the nnSEM approach that incorporate the asymptotically distribution free (ADF) estimation method. Analyzing several sets of real-life data with the programs, it is shown that the nnSEM utilizing third-order moment structures can estimate the parameters of structural models, which could not be identified by traditional SEM. The relative fits of equivalent models are also examined. Finally, based on simulation studies, we present the necessary sample sizes in order to detect significant path coefficients in full path models with two or three observed variables and those with three latent variables with two observed variables each.

**Key words:** causal analysis, structural equation modeling, asymptotically distribution free estimation method

構造方程式モデリング（共分散構造分析ともいう；structural equation modeling；以下，SEMと記す）は相関分析，重回帰分析，パス解析，因子分析，潜在変数（因子）のパス解析などを下位モデルとする多変量解析法の一つである。その特徴は，研究仮説に基づいて（1）相関分析においては任意の相関係数もしくは共分散を0へ固定できる点，（2）重回帰分析とパス解析においては任意の偏回帰係数を0へ固定できる点，（3）パス解析においては観測変数の測定誤差を分離した上で潜在変数の因果関係を検討できる点，（4）因子分析においては任意の因子パターンと因子間共分散を0へ固定できる点にある。さらに，（5）多母集団の間で外生変数の分散共

分散，パス係数（因子パターン）に等値制約を課し，母数の相違を検討できる点も従来の技法にはない特徴である。こうしたSEMの利点を的確に利用することにより，分析者は観測変数と潜在変数の因果関係および相関関係に関する研究仮説を統計的に検討できる。このため，行動科学の多くの研究分野では，従来の重回帰分析，パス解析，因子分析などに代わる多変量解析法として利用されるようになってきた。例えば，豊田（2007a）には行動科学の研究分野における多数の研究例が紹介されている。

SEMを実行する商用ソフトウェアとしてLISREL（Jöreskog & Sörbom, 1996a, 1996b; Jöreskog, Sörbom, Du Toit, S. & Du Toit, M. 2000）, EQS

(Bentler, 1985, 2007), AMOS (Arbuckle, 2008), Mplus (Muthén & Muthén, 2006), STATISTICA 上で利用する SEPATH (Steiger, 2006), SYSTAT 上で利用する RAMONA (Browne, Mels & Coward, 1994) などがある。また、フリーソフトウェアには Mx (Neale, 2007), R (R Development Core Team, 2008) 上で利用する sem パッケージ (Fox, 2006, 2008) などがある。

SEM の利点は一変数間の因果の方向性と因果関係の有無を統計的に検証できることにある。しかし、飽和・同値モデルの存在と解の識別不定性により、分析者が立てた研究仮説を常に検証できるとは限らない。例えば、2変数  $x_1$  と  $x_2$  の間に因果関係があるとしても、 $x_1$  の  $x_2$  への単回帰モデルと  $x_2$  の  $x_1$  への単回帰モデルは両者とも飽和・同値モデルになるので因果の方向を統計的に知ることはできない。2変数間に相関のみを仮定するモデルも単回帰モデルと同様に飽和・同値モデルであるから、相関モデルと単回帰モデルの適合度を統計的に比較することもできない。また、 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$  と  $x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3$  と  $x_1 \leftarrow x_2 \rightarrow x_3$  の因果連鎖モデルは同値モデルであるから、モデルの適合性を比較しても意味がなく、結果的に因果の方向を統計的に特定できない。さらに、分析者はすべての変数間にパスを引きたい誘惑に駆られるが、実際に因果を仮定しても解が識別不定となってパス係数を推定できない。こうした限界は観測変数の1次と2次の積率のみを利用することによるものであるから、上述のソフトウェアを利用しても解決できない。

しかし、3次以上の積率を用いた SEM (Bentler, 1983; Mooijaart, 1985; 豊田, 2007b; Shimizu & Kano, 2008) はこうした問題を解決できる可能性がある。Bentler (1983, 1995) は理論的な考察に止まり実例を示していないが、Mooijaart (1985) は3次の積率を用いることによって直交因子モデルの解がユニークに決まることを証明し、適用事例を示した。また、豊田 (2007b) は3次までの積率を用いた単回帰分析に焦点を当て、シミュレーション実験によって100名の標本で98%以上の確率で因果の方向性を特定できた。また、Shimizu & Kano (2008) は4次までの積率を利用したシミュレーション実験を行い、100名から200名程度の標本ではほぼ80%程度以上の確率で因果の方向性を特定できた。シミュレーション実験の結論を実際のデータへ過剰に一般化することは避けなければならないが、2つの研究により、単回帰分析では高次の積率構造を用いた SEM の有効性が示されたと言えよう。以下、高次の積率構造を用いた SEM を Shimizu & Kano

(2008) に倣い nnSEM (non-normal SEM の省略形) と記す。

また、豊田 (2007b) は nnSEM により、2次の積率を用いる SEM では解を得ることができない双方向モデル、因子分析モデル、パス解析モデル、重回帰分析、潜在変数のパス解析モデルなどを行い、その有効性を示している。そこで、本稿は以下の3点を目的とする。(i) 因果の方向あるいは測定時点が明確な観測変数へ nnSEM を適用して因果の方向を正しく特定できるかどうかを調べる。この主な内容は豊田 (2007b) の追試に相当する。(ii) 因果関係を仮定できないデータに相関関係と因果関係を仮定し、nnSEM によって因果関係を仮定するモデルを棄却できるかどうかを調べる。(iii) 2次の積率を用いる SEM では解を得ることができない双方向モデルを取り上げ、人工データを用いて nnSEM が正しく因果の方向を特定するために必要な標本の大きさについて検討する。

### 3 次の積率構造と母数の推定

#### モデル

観測変数の積率構造を導出する代表的な3つのモデルを概観する。

**LISREL モデル** LISREL モデル (Jöreskog, 1978; Jöreskog & Sörbom, 1996a) の構造方程式は

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta \quad (1)$$

である。ここで、各項は以下の通りである。

- ・  $\eta$  内生的潜在変数ベクトル
- ・  $B$  内生的潜在変数間のパス係数行列
- ・  $\xi$  外生的潜在変数ベクトル
- ・  $\Gamma$  外生的潜在変数の内生的潜在変数に対するパス係数行列
- ・  $\zeta$  内生的潜在変数の誤差ベクトル

さらに、LISREL モデルは観測変数を内生的潜在変数  $\eta$  の指標である  $y$  と外生的潜在変数  $\xi$  の指標である  $x$  に分類し、測定方程式を

$$y = \Lambda_y \eta + \varepsilon \quad (2)$$

$$x = \Lambda_x \xi + \delta \quad (3)$$

と定義する。ここで、各項は以下の通りである。

- ・  $y$  内生的潜在変数から影響を受ける観測変数ベクトル
- ・  $\Lambda_y$  内生的潜在変数から影響を受ける観測変数ベクトルのパス係数行列 (因子パターン)
- ・  $\varepsilon$  観測変数ベクトル  $y$  の誤差ベクトル
- ・  $x$  外生的潜在変数から影響を受ける観測変数

ベクトル

- ・  $\Lambda_x$  外生的潜在変数から影響を受ける観測変数ベクトルのパス係数行列（因子パターン）
- ・  $\delta$  観測変数ベクトル  $x$  の誤差ベクトル

このように LISREL モデルは3つの方程式を用いて変数間の関係を表現しているが、超行列を用いて

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ \Lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ y \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \Lambda_x & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \\ \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix} \quad (4)$$

と表現することもある。このとき、パス係数と因子パターンは2つの行列に配置されている。

**EQS モデル (Bentler-Weeks モデル)** LISREL モデルの特徴は潜在変数と観測変数をそれぞれ外生変数と内生変数に分類している点にあるが、必ずしもその必要はない。EQS モデル (Bentler & Weeks, 1979, 1980; Bentler, 1985) は誤差を含めたすべての変数を内生変数  $\eta$  と外生変数  $\xi$  に分類し、

$$\eta = \beta \eta + \gamma \xi \quad (5)$$

と表現する。超行列によって方程式を表現すると

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ I \end{bmatrix} \xi \quad (6)$$

である。パス係数と因子パターンは2つの行列に配置されている。ここで、各項は以下の通りである。

- ・  $\eta$  内生変数ベクトル
- ・  $\xi$  外生変数ベクトル
- ・  $\beta$  変数  $\eta$  間のパス係数行列
- ・  $\gamma$  変数  $\xi$  の変数  $\eta$  に対するパス係数行列
- ・  $I$  単位行列

**RAM モデル** EQS モデルはオリジナルの LISREL モデルよりも簡潔に方程式を表現することができるが、EQS モデルにはパス係数行列が2つある。RAM モデル (McArdle & McDonald, 1984) はパス係数行列を1つにまとめ、方程式を

$$v = Av + u \quad (7)$$

と表現する。 $v$  は構造変数を入れたベクトル、 $u$  は外生変数を入れたベクトル、 $A$  は因子パターンを含むパス係数を入れた行列である。

超行列を用いて行列とベクトルの要素を示すと

$$\begin{bmatrix} y \\ x \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_x \\ 0 & 0 & B & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \\ \zeta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (8)$$

である。超行列内に配置されるベクトルと行列の意味は LISREL モデルと同様であるから、RAM モデルは LISREL モデルに4つあったパス係数行列を行列  $A$  で表現していることがわかる。

ここでは3つのモデルを概観したが、互いに他のモデルを表現することができるので、本稿はパス係数行列が最も少ない RAM モデルを用いる。

### 観測変数の積率構造

平均構造を検討するために、RAM モデルの方程式を

$$v = \alpha + Av + u \quad (9)$$

と表現する。 $v$  は  $p+q$  次の構造変数ベクトルである。ここで、 $p$  は観測変数の数、 $q$  は潜在変数（共通因子）の数である。 $u$  は  $p+q$  次の外生変数ベクトルであり、対応する構造変数  $v$  が外生変数のときは外生変数そのもの、内生変数のときは誤差変数である。 $A$  は  $p+q$  次の正方行列であり、因子パターンとパス係数が配置される。 $\alpha$  は構造変数に対応する  $p+q$  次の切片項であり、対応する構造変数  $v$  が外生変数のときは平均に等しく、内生変数のときは切片となる。

1次の積率  $T = (I - A)^{-1}$  が存在するなら

$$v = (I - A)^{-1} (\alpha + u) = T(\alpha + u) \quad (10)$$

と表現できる。 $u$  の期待値は  $E(u) = 0$  と仮定する。したがって、構造変数  $v$  から観測変数を取り出す選択行列  $G$  を用いて、観測変数の1次の積率ベクトル  $\sigma_{(1)}(\theta)$  を

$$\sigma_{(1)}(\theta) = GE(T(\alpha + u)) = GT\alpha \quad (11)$$

と表現できる。 $A$  と  $\alpha$  は推定母数である。

2次の積率 観測変数の2次の積率ベクトル  $\sigma_{(2)}(\theta)$  は直積  $\otimes$  を用いて

$$\begin{aligned} \sigma_{(2)}(\theta) &= F_{(2)}(G \otimes G)(T \otimes T)E(u \otimes u) \\ &= F_{(2)}(G \otimes G)(T \otimes T)\text{vec}(\Phi_2) \end{aligned} \quad (12)$$

と表現できる (Bentler, 1983; 豊田, 2007b)。 $F_{(2)}$  は重複しない2次の積率を選択するための行列である。 $\Phi_2$  は  $u$  の2次の積率行列であるが、 $E(u) = 0$  と仮定しているので分散共分散行列である。 $\Phi_2$  は

推定母数である。vec ( ) は行列内の列ベクトルをベクトル化するための演算子である。

**3次の積率** 観測変数の3次の積率ベクトル $\sigma_{(3)}(\theta)$ は直積 $\otimes$ を用いて

$$\begin{aligned}\sigma_{(3)}(\theta) &= F_{(3)}(G \otimes G \otimes G)(T \otimes T \otimes T)E(u \otimes u \otimes u) \\ &= F_{(3)}(G \otimes G \otimes G)(T \otimes T \otimes T)\text{vec}(\Phi_3)\end{aligned}\quad (13)$$

と表現できる (Bentler, 1983; 豊田, 2007b)。 $F_{(3)}$ は重複しない3次の積率を選択するための行列である。 $\Phi_3$ は $u$ の3次の積率であり、推定母数である。

以上により1次から3次までの積率構造が得られたので、観測変数の1次・2次・3次の積率構造を配置したベクトル $\sigma(\theta)$ は

$$\sigma(\theta) = (\sigma_{(1)}(\theta)' \sigma_{(2)}(\theta)' \sigma_{(3)}(\theta)')' \quad (14)$$

である。

## 母数の推定

**適合度関数と反復計算** 本稿は適合度関数に観測変数の3次までの積率を利用した。これを Mooijaart (1982) と 豊田 (2007b) は ADF3 (asymptotically distribution free method using 3rd order cross-products; asymptotically distribution free method utilizing up to the 3rd order moment) と呼んでいる。ADF3は2次までの積率を用いる Browne (1984) の Asymptotically distribution-free method の拡張である。数理的には4次以上の積率を利用することは可能であるが (例えば, Bentler, 1983; Shimizu & Kano, 2008), 観測変数が増えると計算に長時間を必要とする。

ADF3は3次までの積率を用いて適合度関数を

$$f = (s - \sigma(\theta))' W^{-1} (s - \sigma(\theta)) \quad (15)$$

と定義する。ここで、 $s$ は標本から求めた1次・2次・3次の積率を並べた縦ベクトル、 $\sigma(\theta)$ は母数の推定値 $\theta$ を用いて計算した1次・2次・3次の積率を並べた縦ベクトルである。観測変数の数を $p$ とすると、重複しない2次の積率の数は $p(p+1)/2$ 、重複しない3次の積率の数は $p(p+1)(p+2)/6$ である。2次と3次の積率は平均値の回りの積率である。

また、 $W$ は1次・2次・3次の積率 ( $s$ の要素) の漸近分散共分散行列に標本の大きさ $n$ を乗じた行列である。 $W$ の次数は $p + p(p+1)/2 + p(p+1)(p+2)/6$ であるから、例えば、 $p=30$ のとき (調査研究では必ずしも多いとはいえない)、 $W$ は5,455 $\times$ 5,455行列、重複しない要素の数は14,881,240である。変数の平均値に関心がないうときは、 $s$ と $\sigma(\theta)$ には2次・3次の積率のみを配置し、 $W$ は2次・3次の積率の漸

近分散共分散行列に標本の大きさ $n$ を乗じた行列とする。このとき、 $W$ の次数は $p(p+1)/2 + p(p+1)(p+2)/6$ である。

さて、本稿は最適化法としてニュートン法とBFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 法を用いた。反復計算式は式 (16) であり、母数の初期値ベクトル $\theta_0$ を右辺の $\theta_i$ へ代入し、解が収束するまで反復計算を行った。

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \alpha \left( n \frac{\partial \sigma(\theta)'}{\partial \theta_i} W^{-1} \frac{\partial \sigma(\theta)}{\partial \theta_i} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \quad (16)$$

ここで、

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_i} = - \frac{\partial \sigma(\theta)'}{\partial \theta_i} W^{-1} (s - \sigma(\theta_i)) \quad (17)$$

である。 $\alpha$ は $0 < \alpha \leq 1$ の値を取るステップサイズ母数であり、反復計算を実行する局面に応じて値を変える。単回帰分析のような単純なモデルでは、 $\alpha = 1$ と固定しても経験的には解は収束する。

RAM モデルは一部の母数を削除する (0に固定することにより、下位モデルとして因子分析モデル、高次因子分析モデル、重回帰分析モデル、観測変数のパス解析モデル、潜在変数を伴うパス解析モデル、相関モデルなどを表現する。そのため、観測変数へ適合させるモデルによっては0へ固定する母数が多くなり、不要な計算が増えてしまう。したがって、計算量を減らすためにはそれぞれのモデルに特化したプログラムを作成する方がよい。

**適合度統計量** 多くの適合度統計量が提案されているが、本稿は次に示す $\chi^2$ 統計量、RMSEA、情報量基準 (AIC, CAIC, SBC) を用いた。 $f$ は最小化された適合度関数の値、 $df$ は自由度である。

$$\begin{aligned}\chi^2 &= nf \\ &= n(s - \sigma(\theta))' W^{-1} (s - \sigma(\theta))\end{aligned}\quad (18)$$

$$RMSEA = \sqrt{\max\left(\frac{f}{df} - \frac{1}{n-1}, 0\right)} \quad (19)$$

$$AIC = \chi^2 - 2df \quad (20)$$

$$CAIC = \chi^2 - df (\log n + 1) \quad (21)$$

$$SBC = \chi^2 - df \log n \quad (22)$$

## 実データへの適用

変数間の因果関係もしくは測定時点の順序が明確なデータを用いて変数間の因果の方向を探ってみた。取り上げた主なモデルは豊田 (2007b) で提案

されているモデルと相関モデルである。

### 単回帰モデル

17歳から29歳までの女性1,314名の身長と体重の測定値（未公開）を用いた。年齢の平均は19.1、標準偏差は0.99である。身長と体重の相関係数は0.483であり、身長が高い者ほど体重は重い関係にあるので身長から体重を予測することは妥当であるが、この年齢段階では体重が増えても身長が伸びているとは限らないので、体重から身長を予測することは適切ではない。身長と体重を相互に目的変数として単回帰予測したところ、モデルの適合度と母数の推定値はTable 1の通りであった。誤差の3次の積率を推定しているので自由度は2である。身長から体重を予測する単回帰モデルは棄却されず、体重から身長を予測する不適切な単回帰モデルは棄却された。

また、身長と年齢、体重と年齢を対にして相互に単回帰分析を行った。身長と年齢の相関係数は0.038、体重と年齢の相関係数は-0.024と小さく、相互に予測することはできないが（実際に回帰係数は有意ではない）、予測式のAICは身長→年齢が-2.347、年齢→身長が-3.951、体重→年齢が-3.679、年齢→体重が-3.908となり、妥当な結論を得た。

Curran (2008) は4時点で測定した反社会的行動尺度の得点を公開している ( $n = 221$ )。これは同一の尺度を用いて収集した反復測定データであるから、新しい時点の測定値から古い時点の測定値を遡及的に予測することは不適當である。ここでは、測定時点すべて対にして、測定値を相互に単回帰分

析してみた。モデルの $\chi^2$ 値と $p$ 値をTable 2に示す。 $\chi^2$ 検定によれば、モデルの古い時点から新しい時点の測定値を予測した単回帰モデルは有意水準5%ですべて棄却されず、逆方向の単回帰モデルはすべて棄却された。すべて期待通りの検定結果である。

同様に4時点で測定された読解力テストの得点を単回帰予測してみた。その適合度をTable 3に示す。適合度を比較すると時点1と時点4、時点2と時点4では逆方向の単回帰モデルが選択される。これは、nnSEMでも因果の方向を適切に特定できないことがあることを示す例である。

### 相関モデル

青木 (2009) は大学生（男女各50名）の手のひらサイズを公開している。両手の大きさには相関関係を仮定することはできても、因果関係を仮定することには無理がある。手のひらサイズのデータに相関モデルと単回帰モデルを当てはめてみた。2変数のすべての3次の積率を推定すると飽和モデルになるので、ここでは2変数間の3次の積率を0、つまり、 $\sigma_{x_2x_3} = \sigma_{y_2y_3} = 0$ と制約した。相関モデルと単回帰モデルの適合度をTable 4に示す。

標本が男女とも50名と小さいので、すべてのモデルは有意水準5%棄却できない。しかし、男子では2つの単回帰モデルのRMSEAは0.05よりも大き

Table 1 単回帰モデルの適合度と推定値

推定値	身長 → 体重	体重 → 身長
[適合度]		
$\chi^2(df)$	2.603(2)	9.160(2)
$p$	0.272	0.010
RMSEA	0.015	0.052
AIC	-1.397	5.160
CAIC	-13.759	-7.201
SBC	-11.759	-5.201
[推定値]		
$\hat{\delta}_{yx}$	0.614	0.437
$\hat{\alpha}_{yx}$	-45.509	135.551
$\hat{\mu}_x$	158.032	51.554
$\hat{\sigma}_{x^2}$	24.536	35.755
$\hat{\sigma}_{e^2}$	32.406	17.800
$\hat{\sigma}_{x^3}$	1.431	40.382
$\hat{\sigma}_{e^3}$	259.774	-0.889

Table 2 反社会的行動尺度得点の単回帰モデル

測定時点		単回帰予測の方向と $\chi^2$ 値			
		$i \rightarrow j$		$j \rightarrow i$	
		$\chi^2(2)$	$p$	$\chi^2(2)$	$p$
1	2	5.459	0.065	6.686	0.035
1	3	0.885	0.642	11.442	0.003
1	4	4.107	0.128	13.149	0.001
2	3	5.227	0.073	9.344	0.009
2	4	5.498	0.063	13.903	0.000
3	4	1.581	0.453	11.012	0.004

Table 3 読解力得点の単回帰モデル

測定時点		単回帰予測の方向と $\chi^2$ 値			
		$i \rightarrow j$		$j \rightarrow i$	
		$\chi^2(2)$	$p$	$\chi^2(2)$	$p$
1	2	13.413	0.001	20.187	0.000
1	3	2.955	0.228	11.682	0.002
1	4	11.863	0.002	9.950	0.006
2	3	2.510	0.285	7.886	0.019
2	4	11.727	0.002	6.979	0.030
3	4	9.716	0.007	16.456	0.000

く、適合性が悪い。これに対し、相関モデルのRMSEAは0.000であり、情報量基準も単回帰モデルよりも小さい。明らかに3つのモデルの中では相関モデルが最適である。手のひらサイズの相関は0.936、推定値は0.937である。一方、女子では相関モデルと右手から左手を予測する単回帰モデルの適合度に大きな違いはないが、期待した通りに相関モデルの情報量基準が最小となっている。手のひらサイズの相関は0.906、推定値は0.912である。なお、相関モデルと単回帰モデルの適合度に大きな相違がないのは、女子では手のひらサイズの分布が対称型に近いためである。

2次の積率のみを利用するSEMは3つのモデルとも飽和・同値モデルになるので適合度を比較することができないが、男女のデータともnnSEMによって不適切な回帰モデルを棄却できたと言える。

なお、手のひらサイズを決める因子を仮定するモデル（後述の2変数共通1因子モデル）が妥当であると思われるが、男子の飽和モデルでは解が収束しなかった。また、女子の飽和モデルは不適解となった。これは、小さい標本では3次の積率を推定することが難しいことを示す。さらに、3次の積率を0へ固定したモデルは男子では不適解（有意ではないが、誤差分散が負）となった。女子では許容解が得られたが、RMSEAが0.059となり、他のモデルよりも適合性が悪かった。

## 2 変数共通1 因子モデル

先の身長と体重のデータを用いて2変数に共通1

Table 4 相関モデルと単回帰モデルの適合度

[性別]	単回帰モデル		
推定値	相関モデル	右手 → 左手	左手 → 右手
[男子]			
$\chi^2(df)$	0.562(2)	2.689(2)	4.648(2)
$p$	0.754	0.260	0.097
RMSEA	0.000	0.080	0.161
AIC	-3.437	-1.310	0.648
CAIC	-9.261	-7.134	-5.175
SBC	-7.261	-5.134	-3.175
[女子]			
$\chi^2(df)$	1.358(2)	1.448(2)	1.939(2)
$p$	0.506	0.484	0.379
RMSEA	0.000	0.000	0.000
AIC	-2.641	-2.551	-2.060
CAIC	-8.465	-8.375	-7.884
SBC	-6.465	-6.375	-5.884

因子を仮定した。豊田（2007b）に倣い4つのモデルを当てはめたが、すべてのモデルで体重の誤差分散が不適解となった。有意性検定によれば誤差分散は有意ではないが、身長と体重に1つの共通因子を仮定することが不適切であったとも言えよう。

不適解となりやすいモデルであるが、共通因子得点に自由度5の $\chi^2$ 乱数、2つの観測変数の測定誤差に正規乱数を用いて人工データを発生し（ $n=200$ ）、測定誤差に歪みを仮定するモデルを当てはめたところ、許容解が得られた。したがって、データ発生機構がモデル通りであるなら、比較的小さな標本でも許容解を得られよう。詳細なシミュレーション実験を行うことが今後の課題である。

## 2 変数共通2 因子モデル

豊田（2007b）は誤差の有無と共通因子の歪みの有無によって4つのモデルを提案している。そのモデルに身長と体重のデータを当てはめてみた。適合度をTable 5に示す。C1は誤差を仮定せず因子 $g$ の3次の積率を0とするモデル、C2は誤差を仮定して因子 $g$ の3次の積率を0とするモデル、C3は誤差を仮定せず因子 $g$ の3次の積率を推定するモデル、C4は誤差と因子 $g$ の3次の積率を推定するモデルである。

情報量基準によれば、測定誤差を仮定せず、因子 $g$ の3次の積率を0とするモデルC1（ $\sigma_{\eta_1}^2=0$ ,  $\sigma_{\eta_2}^2=0$ ,  $\sigma_{\eta_3}=0$ ）が選択される。その解は

$$\text{身長} = 0.060(0.037)f + 0.997(0.019)g$$

$$\text{体重} = 0.904(0.033)f + 0.429(0.032)g$$

$$\hat{\sigma}_{\eta_3} = 1.498$$

である。括弧内の値は標準誤差である。因子 $f$ の身長に対する因子パターンは有意ではない。因子 $g$ は主に身長を決める因子であるが、体重に対する因子パターンも大きいので、体重もいくらか説明すると言える。因子 $f$ は体重を決める因子と言え、体重の分布は正に歪んでいるので、 $\sigma_{\eta_3}$ の推定値は妥当である。

Table 5 2変数共通2因子モデルの適合度

統計量	C1	C2	C3	C4
$\chi^2(df)$	0.186(2)	0.186(1)	0.179(1)	0.049(0)
$p$	0.910	0.665	0.671	1.000
RMSEA	0.000	0.000	0.000	—
AIC	-3.813	-1.813	-1.820	0.049
CAIC	-16.174	-7.994	-8.001	0.049
SBC	-14.174	-6.994	-7.001	0.049

## 双方向モデル

2変数のみを用いて因果の方向性を探るモデルである。このモデルを身長と体重のデータに当てはめた場合、身長から体重へ向かうパス係数が有意となり、体重から身長へ向かうパス係数が有意とならないことが期待される。モデルの適合度を Table 6 に示す。D1は2つの誤差に歪みを仮定するモデル、D2は次式の誤差 $\varepsilon$ の3次の積率を0とするモデル、D3は次式の誤差 $\varepsilon$ の3次の積率を0とするモデルである。因果の方向に関心があるので、ここでは切片を推定していない。

情報量基準によれば最適モデルはD2であり、その非標準化推定値は

$$\begin{aligned}\text{身長} &= 0.051(0.031) \text{ 体重} + \varepsilon \\ \text{体重} &= 0.567(0.040) \text{ 身長} + \varepsilon \\ \hat{\sigma}_{\varepsilon_2} &= 23.092, \quad \hat{\sigma}_{\varepsilon_3} = 32.884, \quad \hat{\sigma}_{\varepsilon_4} = 282.605\end{aligned}$$

である。回帰係数の右にある括弧内の値は推定値の標準誤差である。回帰係数の検定統計量 $z$ は体重が1.631、身長が14.206である。体重から身長に向かうパスが明らかに不要であると言えるが( $n = 1,314$ )、身長から体重に向かうパス係数は高度に有意である。このモデルでも妥当な結果が得られた。

## 因子回帰モデル

2つの観測変数の間に1つの共通因子を仮定した上で、一方の観測変数が他方の観測変数を予測することを仮定するモデルである。身長と体重のデータに4つのモデルを当てはめてみた。モデルE1とE3は身長から体重へパスを引き、モデルE2とE4は体重から身長へパスを引いている。4つのモデルの適合度を Table 7 に示す。E1とE2は誤差の3次の積率を推定し、E2とE4は誤差の3次の積率を0としている。モデルE3とE4の適合度は同値であるが、モデルE3は不適解である。また、モデルE4は身長と体重の共通因子から身長へ向かうパス係数が負となり、解釈が難しい。

Table 6 双方向モデルの適合度

統計量	D1	D2	D3
$\chi^2(df)$	0.179(1)	0.186(2)	11.102(2)
$p$	0.671	0.910	0.003
RMSEA	0.000	0.000	0.058
AIC	-1.820	-3.813	7.102
CAIC	-8.001	-16.174	-5.259
SBC	-7.001	-14.174	-3.259

## 重回帰モデル

通常重回帰モデルは飽和モデルであるから、観測変数の間に逆方向の因果を仮定しても完璧な適合度を得る。したがって、モデルの適合度を統計的に比較することはできない。しかし、3次までの積率を用いると重回帰モデルでも適合度が異なるので、モデルの適合度を比較できる。

ここでは、Curran (2008) の反社会的行動尺度の得点を用いて、それぞれの時点で測定した得点を他の3時点の測定値から重回帰予測してみた。時点4の測定値を重回帰予測するモデル以外は、新しい時点から古い時点を遡及的に予測することになるので不適切である。4つのモデルの適合度を Table 8 に示す。逆方向の予測を含む3つのモデルは有意水準5%で棄却され、適切な方向だけを含む時点4の予測モデルは棄却されない。しかも、時点1・2・3を予測したモデルのRMSEAは0.05を越えており、適合度は低い。ここでも、逆方向の予測を含む不適切なモデルが棄却された。

## 直交因子モデルと斜交因子モデル

2次の積率を用いる探索的因子分析には回転の不定性があるので、軸を回転できないように制約を置いた上で因子パターンを推定する。これに対し、Mooijart (1985) は観測変数の2次と3次の積率を用いることにより直交因子モデルに限り因子パターンを一意的に推定できること、つまり、探索的因子分析でも因子軸の回転が許されないこと(因子軸の符号を逆転することはできる)を証明した。

Table 7 因子回帰モデルの適合度

統計量	E1	E2	E3	E4
$\chi^2(df)$	0.008(0)	0.151(0)	0.186(1)	0.186(1)
$p$	—	—	0.665	0.665
RMSEA	—	—	0.000	0.000
AIC	0.0085	0.151	-1.813	-1.813
CAIC	0.0085	0.151	-7.994	-7.994
SBC	0.0085	0.151	-6.994	-6.994

Table 8 重回帰モデルの適合度

統計量	目的変数とした測定時点			
	時点1	時点2	時点3	時点4
$\chi^2(df)$	25.586(9)	19.568(9)	18.400(9)	11.356(9)
$p$	0.002	0.020	0.030	0.252
RMSEA	0.091	0.072	0.068	0.034
AIC	7.586	1.568	0.400	-6.643
CAIC	-31.996	-38.015	-39.182	-46.227
SBC	-22.996	-29.015	-30.182	-37.227

ここでは LISREL 8.5 (Jöreskog & Sörbom, 1996a, 1996b) に附属する SPV. RAW ファイルの 6 変数 ( $n = 301$ ) に直交・斜交因子モデルを当てはめてみた。この 6 変数は 2 因子が仮定される認知能力検査の得点である。直交因子モデルの因子パターンと誤差の積率の標準化推定値を Table 9 に示す。因子パターンの大きさから、因子 1 は一般知能の強さ、因子 2 は変数 1 から変数 3 と変数 4 から変数 6 が測定する 2 つの基礎能力の個人内における乖離の大きさを表すと言える。この解は相関関係の大きい観測変数を因子分析したときの初期解 (回転を行う前の解で、第 1 因子として主因子を抽出する解) に類似している。誤差の 3 次の積率の有意性検定の結果、誤差 2、誤差 3、誤差 4 が有意となった。また、因子の 3 次の積率の標準化推定値 (歪度に等しい) は  $\hat{\sigma}_{f_{111}} = -0.015$ 、 $\hat{\sigma}_{f_{222}} = 0.596$  であり、検定統計量は 0.097 と 1.988 である。因子 2 の分布にやや偏りがあると言える。

斜交因子モデルの解は母数の初期推定値に強く依存するので、ここでは 2 つの因子に  $\lambda_{12} = 0$ 、 $\lambda_{61} = 0$  という制約を置いた。因子パターン (標準化解) と誤差の積率の推定値を Table 10 に示す。2 つの因子パターンを固定したことにより、単純構造を持つ 2 因子を抽出できた。誤差の 3 次の積率の有意性検定の結果、誤差 2、誤差 3、誤差 4 が有意である。

また、因子間の共分散 (相関) を推定しているので、因子間の 3 次の積率も母数となり、その標準化推定値は  $\hat{\sigma}_{f_{111}} = 0.244$ 、 $\hat{\sigma}_{f_{222}} = -0.075$ 、 $\hat{\sigma}_{f_{112}} = \hat{\sigma}_{f_{121}}$

$= \hat{\sigma}_{f_{211}} = 0.331$ 、 $\hat{\sigma}_{f_{212}} = \hat{\sigma}_{f_{221}} = \hat{\sigma}_{f_{122}} = -0.096$  である。有意性検定の結果、 $\hat{\sigma}_{f_{112}} (= \hat{\sigma}_{f_{121}} = \hat{\sigma}_{f_{211}})$  が有意であるが、その他の 3 次の積率は有意ではない。したがって、斜交因子得点の分布に強い偏りはないと言える。

直交因子モデルと斜交因子モデルの適合度を Table 11 に示す。表中の斜交因子 (1) が上述の斜交因子モデルである。AIC によれば斜交因子 (1) モデル、CAIC と SBC によれば直交因子モデルを選択することになるが、RMSEA がほぼ同値であるから、一方のモデルを採用することはできないであろう。

一方、変数 1 から変数 3 が因子 1 へ負荷し、変数 4 から変数 6 が因子 2 へ負荷する単純な 2 因子構造を仮定したところ (表中の斜交因子 (2))、すべての情報量基準が最小であった。また、表の第 4 列に示す最尤推定法の値は、斜交因子 (2) の母数を 2 次の積率を用いる最尤推定法で推定したときの適合度である。最尤推定法に基づく RMSEA の値は ADF 3 よりも大きく、ADF3 によって最尤推定法よりも適合度の良いモデルを構成できることが示唆される。今後、最尤推定法と ADF3 との比較検討も必要となろう。

## シミュレーション実験

2 次の積率を用いても適切な道具的変数を用意す

Table 10 斜交因子モデルの解

変数	因子 1	因子 2	3 次積率
1	0.758	0.000	-0.071
2	0.418	0.084	0.609
3	0.595	-0.047	0.648
4	0.111	0.737	0.458
5	0.070	0.852	0.242
6	0.000	0.838	0.071
因子間相関			
因子 1	1.000		
因子 2	0.369	1.000	

Table 9 直交因子モデルの解

変数	因子 1	因子 2	3 次積率
1	0.594	-0.473	-0.241
2	0.378	-0.193	0.591
3	0.395	-0.374	0.619
4	0.715	0.305	0.390
5	0.812	0.362	0.209
6	0.720	0.438	0.135

Table 11 直交因子モデルと斜交因子モデルの適合度

統計量	直交因子	斜交因子 (1)	斜交因子 (2)	最尤推定法
$\chi^2(df)$	116.557(51)	112.515(50)	118.489(54)	24.280(8)
$p$	0.000	0.000	0.000	0.002
RMSEA	0.065	0.064	0.062	0.082
AIC	14.556	12.515	10.489	8.280
CAIC	-225.505	-222.840	-243.694	-29.376
SBC	-174.505	-172.840	-189.694	-21.376



れば2変数間の因果の方向を特定できる。しかし、常に道具的変数を用意できるわけではないから、2変数だけを用いて因果の方向を特定できれば、nnSEMは研究実践においてたいへん有用である。実例は先に見てきた通りである。ここでは、双方向モデルに焦点を当て、nnSEMが因果の方向を正しく特定できるかどうかをシミュレーション実験によって検討する。シミュレーション実験で操作できる要因には外生変数の数と分布型、標本の大きさ、パス係数の大きさなどがあり、しかも、その組み合わせは無数に昇る。ここでは少数の条件に絞り、シミュレーション実験を行った。

## 2変数の双方向モデル

**実験条件** 2変数  $x$ ,  $y$  の間の真の回帰式として Fig. 1 に示す

$$x_i = b_{xy} y_i + e_{xi}, \quad (b_{xy} = 0)$$

$$y_i = b_{yx} x_i + e_{yi}$$

を仮定した。つまり、 $b_{xy} = 0$  とするので、母集団において変数  $x$  が変数  $y$  へ一方的に影響する関係である。

この関係を満たす2変数の観測値を人工的に発生させて双方向モデルを適合させ、パス係数の有意性検定によって因果の方向を特定できるかどうかを検討した。パス係数  $b_{yx}$  の真値を0.1, 0.2, 0.4の3通りとしたが、この実験ではパス係数の値は2変数の相関係数の値に一致する。また、標本の大きさを50, 100, 200, 400, 800の5通りとした。誤差  $e_{xi}$ ,  $e_{yi}$  には自由度8の  $\chi^2$  乱数を用いた。乱数を真の回帰式に代入して2変数  $x_i$ ,  $y_i$  の値を生成し、小数点以下1桁を四捨五入して整数とした。

パス係数の値と標本の大きさを組み合わせた15通りの条件において10,000回のシミュレーション実験を行い、パス係数の検定統計量に着目し、

- ・  $z(\hat{b}_{yx}) \geq z_{\alpha/2}$  かつ  $|z(\hat{b}_{xy})| < z_{\alpha/2}$  のとき成功
- ・  $z(\hat{b}_{yx}) < z_{\alpha/2}$  かつ  $|z(\hat{b}_{xy})| \geq z_{\alpha/2}$  のとき失敗
- ・ その他

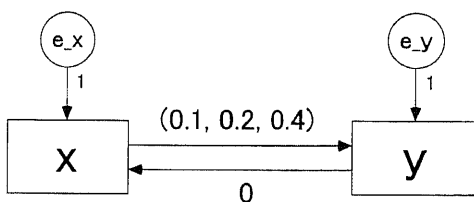


Fig. 1 2変数の双方向モデル

と判定した。有意水準  $\alpha$  を0.05としたので、 $z_{\alpha/2} = 1.959964$  である。成功とはパス係数の符号を含めて正しい因果の方向を特定できたこと、失敗とは逆方向の因果を特定したことを指す。

**実験結果** シミュレーション実験の結果を Table 12 に示す。

パス係数が0.1と小さい場合、800名であっても成功の割合が60%程度であり、因果の方向を正しく特定することが難しいことがわかる。ところが、パス係数が0.2になると、400名で80%以上の成功率であり、失敗の割合も2%と小さい。この実験ではパス係数の値が相関係数に等しくなるので、2変数の間に因果関係があり、2変数の相関が0.2程度であれば、400名程度の標本で正しく因果の方向を特定できる可能性が高いことがわかる。標本が800名と大きい場合の成功率は93%とさらに大きい。また、パス係数が0.4の場合、200名での成功率が90%を越えており、失敗は0.5%である。100名でも成功率は78%である。したがって、2変数の相関が0.4を越えるなら、200名程度の標本で因果の方向を正しく特定できる可能性が高い。

シミュレーション実験の結果は誤差の歪みの大きさとも関係する。今後、歪みのバリエーションを増やした実験を行う必要がある。また、2変数間の単回帰分析を相互に行い、2つのモデルの適合度を比較して因果の方向を特定することもできるので（豊田, 2007b; Shimizu & Kano, 2008）、そうした方法と本稿の方法との相違も検討すべきであろう。

## 3変数の双方向モデル

Fig. 2 に示す観測変数  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  の間に双方向の因果関係があるモデルを仮定した。2次の積率のみを用いる SEM はこのモデルの母数を識別できないが、3次までの積率を用いる nnSEM は母数を識別できる。

パス係数の真値は Fig. 2 に示す通りである。すべての変数間に0以外のパス係数を仮定した。誤差  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  には自由度8の  $\chi^2$  乱数を用いたので、母集団における誤差分散は16、したがって、観測変数の相関係数は  $r(x_2, x_1) = -0.056$ ,  $r(x_3, x_1) = 0.029$ ,  $r(x_3, x_2) = -0.020$  である。この実験は観測変数の間に異符号の因果関係を仮定しているため、相関係数が小さい。標本の大きさを50, 100, 200, 400, 800の5通りとした。シミュレーションの回数を各人数条件とも1,000回とした。

パス係数の真値をすべて0以外の値としたので、各パス係数の推定値について推定値の符号が真値の符号と同一で有意水準5%で有意となった割合を調べた。また、 $\chi^2$  値の平均と分散、パス係数の推定

Table 12 双方向モデルの実験結果

	標本の大きさ				
	50	100	200	400	800
[ $b_{yx} = 0.1$ 条件]					
$\chi^2$ の平均	1.177	1.210	1.177	1.184	1.130
$\chi^2$ の分散	2.032	2.348	2.406	2.868	2.676
成功の割合	0.110	0.134	0.198	0.338	0.613
失敗の割合	0.102	0.069	0.050	0.037	0.028
$\hat{b}_{xy}$ の平均	-0.002	-0.002	-0.001	-0.000	-0.000
$\hat{b}_{yx}$ の平均	0.103	0.102	0.099	0.098	0.099
[ $b_{yx} = 0.2$ 条件]					
$\chi^2$ の平均	1.181	1.210	1.220	1.168	1.120
$\chi^2$ の分散	1.976	2.380	2.613	2.742	2.589
成功の割合	0.235	0.355	0.585	0.844	0.933
失敗の割合	0.091	0.060	0.038	0.020	0.002
$\hat{b}_{xy}$ の平均	-0.006	-0.005	-0.002	-0.001	-0.000
$\hat{b}_{yx}$ の平均	0.202	0.202	0.198	0.198	0.198
[ $b_{yx} = 0.4$ 条件]					
$\chi^2$ の平均	1.169	1.192	1.206	1.153	1.136
$\chi^2$ の分散	1.994	2.272	2.583	2.622	2.665
成功の割合	0.565	0.781	0.901	0.926	0.935
失敗の割合	0.063	0.032	0.005	0.000	0.000
$\hat{b}_{xy}$ の平均	-0.023	-0.007	-0.004	-0.002	-0.002
$\hat{b}_{yx}$ の平均	0.405	0.398	0.398	0.397	0.398

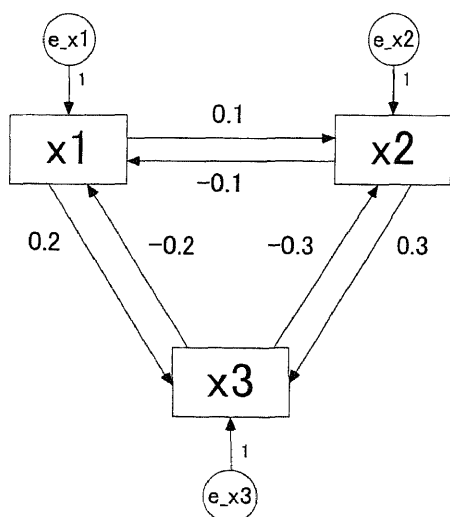


Fig. 2 3変数の双方向モデル

値の平均を Table 13に示す。標本の大きさが100名の場合、すべての帰無仮説を棄却できたケースが5%ほどあるものの、過半数の帰無仮説を棄却できなかった。一方、200名の場合は過半数の帰無仮説を棄却できた割合が70%を越え、すべての帰無仮説を

棄却できた割合も17%ほどある。さらに標本が増えて400名の場合、96%は過半数の帰無仮説を棄却できた。しかも、すべての帰無仮説を棄却できた割合も40%ある。800名の場合、すべての帰無仮説を棄却できた割合は70%と大きい。ここでは比較的小さなパス係数(標準化解の絶対値は0.098から0.304)としたが、さらに大きなパス係数では検出力も大きくなる。また、一般的な研究論文で400名程度の標本を収集することは難しいことではないから、双方向モデルを検証するには400名が一つの目安にできるかもしれない。もちろん、誤差の歪み、標本の大きさ、パス係数の値を変えたシミュレーション実験を積み重ね、因果の方向を特定するために必要となる条件を探るべきである。

### 3 潜在変数の双方向モデル

3つの潜在変数 $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ をすべて内生変数とする Fig. 3に示すモデルを用いた。シミュレーション実験では図に示すパス係数の値を真値とした。潜在変数の間に異符号の因果を仮定している。また、各潜在変数に2つの観測変数を用意し、因子パターンをすべて0.7とした。ここでは潜在変数間のパス係数に関心があるので、因子パターンを同値とした。観測変数に対する誤差 $e_1$ から $e_6$ , 潜在変数に対

Table 13 3変数の双方向モデルの実験結果

パス係数の数	標本の大きさ				
	50	100	200	400	800
条件を満たしたパス係数の推定値の割合					
0	0.071	0.027	0.002	0.000	0.000
1	0.138	0.058	0.015	0.000	0.000
2	0.247	0.207	0.095	0.007	0.000
3	0.249	0.251	0.160	0.032	0.000
4	0.193	0.254	0.350	0.316	0.123
5	0.078	0.151	0.207	0.244	0.181
6	0.024	0.052	0.171	0.401	0.696
$\chi^2$ の平均	4.163	4.508	4.622	4.617	4.787
$\chi^2$ の分散	5.514	7.284	9.313	9.808	11.460
$\hat{b}_{21}$ の平均	0.159	0.110	0.107	0.097	0.100
$\hat{b}_{31}$ の平均	0.267	0.233	0.209	0.197	0.199
$\hat{b}_{32}$ の平均	0.366	0.342	0.313	0.301	0.297
$\hat{b}_{12}$ の平均	-0.113	-0.102	-0.103	-0.100	-0.099
$\hat{b}_{13}$ の平均	-0.267	-0.233	-0.212	-0.199	-0.201
$\hat{b}_{23}$ の平均	-0.357	-0.338	-0.315	-0.302	-0.299

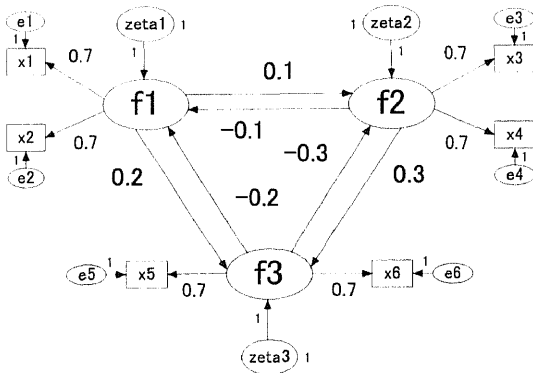


Fig. 3 3潜在変数の双方向モデル

する誤差 $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ にはすべて自由度8の $\chi^2$ 乱数を平均と標準偏差の理論値によって標準化した値を用いた。パス係数として符号を異にする値を用いたので、潜在変数の母相関係数は $r(f_2, f_1) = -0.056$ ,  $r(f_3, f_1) = 0.029$ ,  $r(f_3, f_2) = -0.020$ と小さい。

標本の大きさを500, 1000, 1500, 2000, 3000, 4000, 5000, 10000の8通りとし、シミュレーションの回数を各人数条件とも100回とした。この実験は潜在変数間のパス係数を推定するので、比較的大きな標本とした。また、シミュレーションの回数として100回は十分とはいえないが、100回のシミュレーションに約27時間を要したため（CPUはPentium M processor 1.20GHzであるが、計算時間はCPUの性能だけでは決まらない）、各人数条件とも

100回に止めた。母数を推定するにはすべての因子パターンの初期推定値を正值とした上で、潜在変数に対する誤差 $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ の分散を1へ固定した。各パス係数の推定値の符号が真値の符号と同一となり、有意水準5%で有意となった割合を調べた。また、 $\chi^2$ 値の平均と分散、パス係数の推定値の平均をTable 14に示す。

500名条件では過半数のパス係数の推定値の符号が真値と一致し、有意となった割合は33%である。パス係数の真値が小さいため、500名では十分な検出力が得られなかったと言える。また、 $\hat{\beta}_{31}$ の平均に見られるように推定値のバイアスがやや大きい。また、 $\chi^2$ の分散も理論値の100よりもやや大きいように思われる。これがシミュレーション回数が少ないことによるものなのか、標本が小さいことによるものなのか、この実験だけでは正確な原因を特定することはできない。

また、1000名条件では過半数のパス係数が条件を満たした割合は57%、すべてのパス係数が有意となった割合は13%である。パス係数の真値が小さいため、1000名でも十分な検出力を確保できなかったと言える。したがって、小さなパス係数までも検出したい場合はさらに大きな標本を確保すべきであろう。過半数のパス係数が条件を満たした割合は、1500名条件が77%、2000名条件が80%である。小さなパス係数までも検出したい場合は1500名程度の標本を必要であろう。他の条件の結果を見ていくと、現実的ではないが、10000名の標本があれば、これ

Table 14 3潜在変数の双方向モデルの実験結果

	標本の大きさ							
	500	1000	1500	2000	3000	4000	5000	10000
パス係数の数	条件を満たしたパス係数の推定値の割合							
0	0.04	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.06	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.41	0.19	0.07	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.16	0.19	0.15	0.12	0.02	0.00	0.01	0.00
4	0.19	0.37	0.39	0.31	0.44	0.25	0.13	0.07
5	0.12	0.07	0.20	0.22	0.24	0.17	0.17	0.04
6	0.02	0.13	0.18	0.27	0.30	0.58	0.69	0.89
$\chi^2$ の平均	53.654	53.784	52.675	51.110	52.327	50.910	50.235	50.847
$\chi^2$ の分散	135.738	103.610	117.888	91.312	85.177	92.993	112.953	119.688
$\hat{\beta}_{21}$ の平均	0.109	0.103	0.094	0.105	0.088	0.098	0.101	0.090
$\hat{\beta}_{31}$ の平均	0.266	0.203	0.221	0.183	0.214	0.205	0.195	0.196
$\hat{\beta}_{32}$ の平均	0.315	0.293	0.279	0.302	0.300	0.291	0.304	0.301
$\hat{\beta}_{12}$ の平均	-0.098	-0.105	-0.083	-0.101	-0.082	-0.094	-0.098	-0.091
$\hat{\beta}_{13}$ の平均	-0.239	-0.196	-0.202	-0.183	-0.206	-0.204	-0.199	-0.194
$\hat{\beta}_{23}$ の平均	-0.315	-0.290	-0.281	-0.302	-0.305	-0.297	-0.301	-0.300

だけ小さいパス係数であってもほぼ検出できる。

#### 計算量について

観測変数の数が増えると重み行列  $\mathbf{W}$  の次数が大きくなり、それに応じて計算量が増大する。計算量の多さはシミュレーション実験の結果と共に報告した通りである。一方、Ferguson (1958) は計算量を軽減させた上で、ADF3と同一の漸近的性質を持つ推定値を得る方法を提案している。この方法は最初に母数の一致推定量を求め、次に  $\chi^2$ 線形形式を最小化する推定値を求めるという2段階の手順を踏む。第一段階で求める一致推定量も反復計算を必要とするので、観測変数が少ない場合はそれほど良い計算効率を持つとは思われないが、観測変数の数が多い場合はADF3に代わる推定法として有効かもしれない。参考までに、この事例の計算効率が良いわけではないが、身長を説明変数、体重を目的変数とする単回帰分析にFerguson (1958) の方法を適用してみた。一致推定量には単純最小二乗 (SLS) 推定値を用いた。ADF3, Ferguson (1958) の方法、SLSに基づく推定値をTable 15に示す。この計算例ではFerguson (1958) の方法はADF3にほぼ等しい推定値を得ることができた。今後、観測変数が増えたときの計算効率について検討する必要がある。

#### まとめ

2次までの積率を用いたSEMでは飽和モデルあ

Table 15 Ferguson (1958) の方法に基づく推定値

推定値	ADF3	Ferguson	SLS
[適合度]			
$\chi^2(df)$	2.632(2)	2.604(2)	3.614(2)
$p$	0.268	0.271	0.164
RMSEA	0.015	0.015	0.024
AIC	-1.367	-1.395	-0.385
CAIC	-13.729	-13.757	-12.746
SBC	-11.729	-11.757	-10.746
[推定値]			
$\hat{\delta}_{yx}$	0.614	0.614	0.638
$\hat{\alpha}_{yx}$	-45.509	-45.613	-49.322
$\hat{\mu}_x$	158.032	158.031	158.024
$\hat{\sigma}_{x^2}$	24.531	24.537	24.564
$\hat{\sigma}_{e^2}$	32.783	32.425	32.567
$\hat{\sigma}_{x^3}$	1.395	1.658	4.699
$\hat{\sigma}_{e^3}$	273.987	259.941	274.003

るいは同値モデルとなって変数間の因果の方向を統計的に特定できないことがある。これに対し、nnSEMは、そうしたモデルでも因果の方向を統計的に特定できる可能性がある。本稿は、まず豊田 (2007b) に提案されているモデルに焦点を当て、因果関係あるいは測定時点が明確な実データを用いて因果の方向を検証してみた。その結果、まれに失敗したケースがあったものの、多くのケースでは期待した通りに因果の方向を特定できた。

次に、2 変数の双方向モデル、3 変数の双方向モデル、3 潜在変数の双方向モデルを取り上げ、シミュレーション実験を行った。その結果、2 変数の双方向モデルでは、2 変数の相関係数が0.2程度であっても、400名の標本で正しく因果の方向を特定できる可能性の高いことが示された。しかも、2 変数の相関が0.4を越えるなら、200名の標本で因果の方向を正しく特定できる可能性が高いことがわかった。また、3 変数の双方向モデルでも400名の標本で因果の方向を特定できる可能性の高いことが示された。いずれの実験でも因果の方向を特定しにくいように小さなパス係数を敢えて設定したが、それでも観測変数の因果分析では、現実的な標本の大きさで因果の方向を特定できる可能性が高いことが示された。もちろん、本稿は統計解析あるいは統計量だけで変数間の因果の方向を確実に特定できると主張するわけではないが、飽和モデルだけをういた解析、あるいは同値モデルの存在を無視した解析だけでは、因果の方向を強く主張することはできないと言えよう。

## 付 記

本研究は平成20年度科学研究費補助金（基盤研究（C）課題番号20530585）の助成を受けた。

筑波大学心理学類の藤 吾郎君の示唆を受け、手のひらサイズの測定値に2変数共通1因子モデルを当てはめてみた。

## 文 献

- 青木 繁 伸 (2008). 大学生の手足サイズ  
<http://aoki2.si.gunma-u.ac.jp/DataLibrary/> (2009年1月1日)
- Arbuckle, J.L. (2008). *Amos 17.0 User's Guide*. SPSS Inc.
- Bentler, P.M. (1983). Some contributions to efficient statistics in structural models: Specification and estimation of moment structures. *Psychometrika*, 48, 493-517.
- Bentler, P.M. (1985). *Theory and Implementation of EQS, A Structural Equations Program*. Los Angeles: BMDP Statistical Software.
- Bentler, P.M. (2007). *EQS 6 for Windows Program Manual*. Encino, CA: Multivariate Software, Inc.
- Bentler, P.M. & Weeks, D.G. (1979). Interrelations among models for the analysis of moment structures. *Multivariate Behavioral Research*, 14, 169-185.
- Bentler, P.M. & Weeks, D.G. (1980). Linear structural equations with latent variables. *Psychometrika*, 45, 289-308.
- Browne, M.W. (1984). Asymptotically distribution-free methods for the analysis of covariance structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 37, 62-83.
- Browne, M.W., Mels, G. & Coward, M. (1994). *Path Analysis: RAMONA: SYSTAT for DOS: Advanced Applications*. (Version 6, pp.167-224). Evanston, IL: SYSTAT.
- Curran, P.J. (2008). *Growth Curve Example*. <http://www.unc.edu/~curran/example.htm> (2009年1月1日)
- Ferguson, T.S. (1958). A method of generating best asymptotically normal estimates with application to the estimation of bacterial densities. *Annals of Mathematical Statistics*, 29, 1046-1062.
- Fox, J. (2006). Structural equation modeling with the sem package in R. *Structural Equation Modeling*, 13, 465-486.
- Fox, J. (2008). *sem (Structural Equation Models) package for R*. <http://cran.r-project.org/web/packages/sem/index.html> (2009年1月1日)
- Jöreskog, K.G. (1978). Structural analysis of covariance and correlation matrices. *Psychometrika*, 43, 443-477.
- Jöreskog, K.G. & Sörbom, D. (1996a). *LISREL 8: User's Reference Guide*. Chicago: Scientific Software International.
- Jöreskog, K.G. & Sörbom, D. (1996b). *LISREL 8: Structural Equation Modeling with the SIMPLIS Command Language*. Chicago: Scientific Software International.
- Jöreskog, K.G., Sörbom, D., Du Toit, S. & Du Toit, M. (2000). *LISREL 8: New Statistical Features. Second printing with revision*. Lincolnwood, IL: Scientific Software International.
- McArdle, J.J. & McDonald, R.P. (1984). Some algebraic properties of the Reticular Action Model for moment structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 37, 234-251.
- Mooijjaart, (1985). Factor analysis for non-normal variables. *Psychometrika*, 50, 323-342.
- Muthén, L.K. & Muthén, B.O. (2006). *Mplus User's*

- Guide*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.
- Neale, M.C. (2007). *Mx* <http://www.vcu.edu/mx/documentation.html> (2009年1月1日)
- R Development Core Team (2008). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- Shimizu, S. & Kano, Y. (2008). Use of non-normality in structural equation modeling: Application to direction of causation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, 3483-3491
- Steiger, J.H. (2006). *Structural Equation Modeling (SEPATH) In STATISTICA 06J (data analysis software system)*. Tulsa, OK: StatSoft, Inc.
- 豊田秀樹編 (2007a). 共分散構造分析 Amos 編 - 構造方程式モデリング - 東京図書
- 豊田秀樹 (2007b). 共分散構造分析 [理論編] - 構造方程式モデリング - 朝倉書店
- (受稿 3 月 23 日 : 受理 5 月 7 日)