【30】

| | |
|---|---|
| 氏　名（本籍） | **本　池　　巧（東 京 都）** |
| 学 位 の 種 類 | 博　　士（理　　学） |
| 学 位 記 番 号 | 博　甲　第　4844　号 |
| 学位授与年月日 | 平成 20 年 9 月 30 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第 4 条第 1 項該当 |
| 審 査 研 究 科 | 数理物質科学研究科 |
| 学 位 論 文 題 目 | **$2^n$ 周期軌道のトポロジー及び階層構造とその物理系への応用** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 主　査 | 筑波大学教授 | 工学博士 | 初　貝　安　弘 |
| 副　査 | 筑波大学教授 | 理学博士 | 有　光　敏　彦 |
| 副　査 | 筑波大学教授 | 理学博士 | 白　石　賢　二 |
| 副　査 | 筑波大学准教授 | 博士（工学） | 谷　口　伸　彦 |
| 副　査 | 筑波大学教授 | 工学博士 | 金　野　秀　敏 |

## 論 文 の 内 容 の 要 旨

本論文の前半部分には，トポロジカル構造解析について新たに得られた成果が記されている。連続力学系のトポロジカルな構造を特徴付けるテンプレートを定義し，それによって，損失変調レーザー・モデル，Duffing 方程式，非線形 Mathieu 方程式など様々な物理系における周期倍分岐軌道のトポロジカルな構造の特徴付けに成功した。さらに，局所交差数という量を新たに導入し，実際の軌道データからテンプレートの構造を決め，周期倍分岐軌道のトポロジカルな構造の普遍則を導き出した。また，軌道のパワー・スペクトルから，直接，局所交差数が読み取れることを明らかにした。これにより，多様な実験データより軌道のトポロジカルな構造を決定することが可能となった。

後半部分には，$n^\infty$周期軌道の階層構造解析について得られた成果が記されている。離散力学系の長周期（$\sim 10^7$）軌道の厳密計算方法を開発し，それに基づいた数値計算を実施して，$n^\infty$周期軌道の持つ階層構造が $n$ スケール・カントール集合となること，ベキ的な不安定性の構造が $n=2$ と $n>2$ では異なることを明らかにした。まず，Lyra-Tsallis のスケーリング関係式

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}} \qquad (1)$$

は，「軌道拡大率の生の時間発展データ（階層構造の詳細を反映している）に，最も荒い粗視化を施して得られた平均軌道拡大率のベキ指数 $1/(1\text{-}q)$ を与える関係式」であることを明確にした。なお，(1) 式中のスケーリング指数 $\alpha_{\min}$ と $\alpha_{\max}$ は，$n^\infty$周期軌道が有するマルティフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ の定義域の最小値と最大値である。間欠性の特徴を抽出するには，粗視化のレベルを下げ，軌道拡大率の時開発展の中から間欠性を特徴付けるユニットを取り出す必要がある。そのユニットを取り出すための適切な粗視化が，「$n^\infty$周期軌道からスケーリング指数 $\alpha_{\min}$ と $\alpha_{\max}$ に対応する軌道点のみを抽出し 2 スケール・カントール集合を構築するプロセス」で与えられることを，初めて明らかにした。このユニット内で，平均化して得られる間欠性を特徴付けるベキ指数 $1/(1\text{-}q)$ は，スケーリング関係式

$$\frac{1}{1-q} = \frac{\ln n}{\ln 2}\left(\frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}}\right) \qquad (2)$$

で与えられることを導き出した。新たに導出したこのスケーリング関係式を利用することにより，間欠性を示す物理系の時系列データから，その背後にある階層構造を決定するための道を開いた。

## 審査の結果の要旨

前半部分での周期軌道のトポロジカルな性質の解析では，テンプレートの基礎付けとなる低次元トポロジーや周期軌道の特徴付けのための記号力学など，抽象的な数学の理論を用いる。しかし，実際にデータ解析を行うには，抽象的な理論を実際の系で扱い易くするために，数学的モデルへの変更・拡張が必要になる。その例が，本論文で初めて導入された「$(\xi, p)$ —テンプレート」や「局所交差数」という素材や概念である。

また，後半で扱った $n^{\infty}$ 周期軌道は，これまでは，Feigenbaum 普遍則の解析という抽象的な視点以外では取り扱われる機会がほとんどなかった。$n^{\infty}$ 周期軌道の構造を解析するために必要となる非常に長い周期の周期軌道を求める数値計算方法を考案し，抽象的な $n^{\infty}$ 周期軌道を具体的に扱えるようにしたことで，その後の「$n^{\infty}$ 周期軌道の階層構造解析」,「間欠性を特徴付ける新たなスケーリング関係式」の導出が可能となった。

このように，抽象的な数学モデルを具体的に扱えるように拡張・具現化し，抽象概念を常に図解して考え，新しい結果を導き出すことが，本池氏の研究スタイルの特徴である。その研究スタイルで導き出された新しい成果は，何れも独創性に富んだ，高レベルのものである。本池氏の研究上のさらなる発展がおおいに期待される。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。