〈研究論文〉

# 学校数学における証明する活動のあり方

## ——数学的探究に焦点をあてて——

小　松　孝太郎

〈研究論文〉

# 学校数学における証明する活動のあり方
## ——数学的探究に焦点をあてて——

小　松　孝太郎

### 1．研究の意図，目的

学校数学において，多くの子どもが証明を記述できない，証明の必要性やよさを認めないなど，証明の学習状況が望ましくないことは周知の事実である。清水（1994b）は，そのような背景に関して，「証明は研究すなわち学習活動や探究活動における方法であるという視点が見失われ，その形式に拘泥してしまったことがあるのではないか」（p. 77）と指摘している。

一方，2008年3月に告示された新学習指導要領では，その基本方針として，引き続き「生きる力」の育成が挙げられている（文部科学省，2008）。その「生きる力」の知の一部分である「自ら学び自ら考える力」を育成するためには，探究型の教育が重要となる。実際，新学習指導要領への改訂の途中経過を示す『審議経過報告』（中央教育審議会，2006）では，「探究的な活動を行うことは，子どもの知的好奇心を刺激し，学ぶ意欲を高めたり，知識・技能を体験的に理解させたりする上で重要なことであり，自ら学び自ら考える力を高めるため，積極的に推進する必要がある」（p. 16）と述べられている。

したがって，今後は，証明の学習状況を改善するためにも，また，証明指導を通じて自ら学び自ら考える力を育成するためにも，学校数学において，証明する活動（proving）を数学的探究（mathematical inquiry）に位置づけることがますます重要となる（以下では，学校数学における証明，証明する活動，数学的探究を，それぞれ単に証明，証明する活動，数学的探究と呼ぶこととする[1]）。そのためには，まず，数学的探究に焦点をあてた場合，証明する活動はどうあるべきかを，何よりも明らかにしなければならない。だが，そのことを対象とした研究は，筆者の知る限りでは行われていない。

そこで，本研究では，証明する活動の一つのあり方を，数学的探究に焦点をあてて明らかにすることを目的とする。

### 2．研究の方法

本研究では，まず，一般に数学的探究を捉える視点を抽出する。次に，証明や問題解決に関する研究を参考として，証明と証明する活動の相を考察する。そして，数学的探究を捉える視点から，証明する活動の相を検討することによって，証明する活動のあり方を数学的探究に焦点をあてて指摘し，さらにその意義を議論する。

ここで，本研究では，数学的探究を捉える視点に関しては，Raffaella Borasi（1992, 1994, 1996）の研究に依拠することにする。その理由は次の通りである。

Borasiは当時のアメリカにおける数学教育を改善することを意図して，「ヒューマニスティックな探究という観点から学校数学へアプローチすること（a humanistic inquiry approach to school mathematics）」（以下，探究的アプローチとする[2]）を提案した。その彼女の研究は大きく次の二つに分けることができる。第一は，探究的アプローチの前提となる数学観，知識観，学習観，指導観（以下，数学観等とする）を理論的に考察したことである。第二は，探究的アプローチの具体例として，定義の構成やエラーの利用を題材に，高校生のペアを対象として自ら教授実験を行ってその様子を分析したことや，

筑波大学大学院　人間総合科学研究科

実際の授業を検討したことである。

前者の数学観等は，数学的探究について考察するための基本的な考え方を示したものである。これらは特定の数学的な内容や方法に依存しないものではあるが，後者の定義の構成やエラーの利用を視野に入れて構成されたものであると思われる。ここで，この定義の構成やエラーの利用は，いずれも本研究の対象である証明する活動と関わりが深い。例えば，Fawcett (1938) は，「証明の本性」に関して四つの事柄を挙げているが，そのうち二つが定義に関するものである[(3)]。また，Borasi 自身，学校数学においてエラーを利用することを支える数学の認識論の一つとして，Lakatos (1976) の可謬主義 (fallibilism) を挙げている。この Lakatos の研究も，「非形式的で準経験的な数学は，（中略）証明と論駁の論理によって，推測を絶え間なく改良することを通じて成長する」(Lakatos, 1976, p. 5) という数学観が展開されているように，証明する活動について議論したものである[(4)]。それゆえ，Borasi の探究的アプローチの前提にある数学観等は，証明する活動に深く関わりのあるものであると言える。

しかし，Borasi が示した数学観等は，学習者だけでなく指導者の側までも考察の対象とする広範なものである。その一方で，本研究では，「数学的探究という場合，子どもの証明する活動はどうあるべきか」という学習者の側を問題としている。換言すれば，「教師の指導はどうあるべきか」という指導者の側までは考察の範囲としていない。したがって，Borasi が示した数学観等の中でも，指導観は本研究の関心とは直接関係しない。

以上の理由から，本研究では，証明する活動と関わりの深い Borasi の探究的アプローチに着目し，彼女が探究的アプローチの前提として示した数学観，知識観，学習観の部分に依拠して，数学的探究を捉える視点を抽出することにする。

## 3．数学的探究を捉える視点

### (1) Borasi の問題意識

アメリカでは，1990年前後に，NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) や NRC (National Research Council) から，学校数学を改善するための勧告がいくつか提起された。Borasi (1992) は，これらの勧告では，既存の知識体系を伝達することではなく，よりよく問題を解決したり批判的に考えたりする人間を育成することなどが強調されていると述べ，これらの勧告に同調している。

しかし，これまでアメリカの典型的な数学の授業は，「宿題を確認する，教師が新しい題材を提示する，生徒が個々に練習する，似た課題が宿題として出される」といった「想像力に乏しいルーティン」で展開されてきたとBorasiは批判し，そのような授業を「伝達モデル」と称している (Borasi, 1996, pp. 15-16)。彼女はさらに批判的に，そのような授業では，「生徒に，推測をしてその推測について議論したり，真正な問題解決を経験したり，数学の本性を理解したりする機会が与えられていない」(Borasi, 1992, p. 2) と指摘している。

Borasi によれば，その「伝達モデル」の背景には，数学の指導に関するある特定の見方がある。その特定の見方とは，「一方では，数学を文脈や価値に依存しない不変な事実や規則の体系と見なすことによって，他方では，学習を主に記憶や練習を通じて断片的な情報や技能を連続的に蓄積していくことと解釈することによって，正当化されている」(Borasi, 1992, p. 2) ものである。そして，彼女は，現在の数学の授業を改善し，NCTM や NRC の勧告で述べられている数学教育を実現するためには，伝達モデルの背景にあるこのような見方から根本的に変えていかなければならないと考え，探究的アプローチとその前提となる数学観等を提案したのである。

### (2) Borasi の探究的アプローチ

Borasi は探究的アプローチの概念を明示的に規定することは避けている。言い換えれば，ヒューマニスティックな探究やその観点から学校数学へアプローチすることの意味を，彼女は明確には述べていない。それは，探究的アプローチの前提にある数学観等を示した後に，次のように述べていることから読み取ることができる

(Borasi, 1992, p. 3)。

> 筆者は，これらの前提（引用者注：数学観等のこと）に満ちた革新的な実践例を分析する際に得た洞察から，「ヒューマニスティックな探究」という言葉が数学教育を再考するための価値あるメタファーであると考えている。筆者はこの概念を規定しようとするのではなく，ある指導経験の物語を語りながらその意味を明らかにすることにした。その指導経験では，生徒は学校数学の文脈の中で，この種の探究に取り組んだ。

したがって，Borasi が探究的アプローチそのものをどのように捉えていたのかは，その「ある指導経験」から解釈することが必要である。

彼女はこのように述べた1992年の文献では，その指導経験として，高校生二人を対象とした定義に関する教授実験を描写している。彼女は定義を題材として選択した理由を，「生徒が真正 (genuine) な数学的探究に取り組み，「真 (real)」の数学者として行動するのに適した文脈が，数学的定義に関する学習によって生まれると信じたからである」と述べている (Borasi, 1992, p. 3)。ここで，「真正」や「真」という言葉が使われているように，数学の本性や数学の学問的な研究を反映した探究に子どもが取り組むことを，Borasi は目指しているのである。

そして，Borasi は数学そのものに関する自身の見方を，「ヒューマニスティック」という言葉で表現している。さらに，彼女はその見方の詳細について，「数学は可謬的であり (fallible)，社会的に構成され，文脈や文化に依存しており，不確かさ (uncertainty) を完全に消すことができるとは期待しないものの，それを減少させたいという人間の願いによって突き動かされている学問と見るもの」(Borasi, 1992, p. 163) と述べている。

以上から，Borasi の探究的アプローチとは，学校数学において上述の数学のヒューマニスティックな側面を反映した探究に子どもが取り組むことを志向したものであると言える。

(3) Borasi の探究的アプローチの前提

Borasi は探究的アプローチに関して，その前提となる数学観等を明示している。その表現は三つの文献で微妙に異なっているが，1996年の文献にある次の部分が，最も端的に述べられているものである (Borasi, 1996, pp. 23-24)。

- 数学をヒューマニスティックな学問と見る。すなわち，数学的知識は社会的に構成され，可謬的であり，文化的及び個人的価値によって形成されると考える。
- 知識を，より一般的に，探究のプロセスを通じて構成されるものと見なす。その探究のプロセスでは，不確かさ，葛藤，疑念によって，世界をよりよく理解しようと継続的に追求する動機が生まれる。
- 学習を，意味を作り出す (meaning making) 創造的なプロセスと見る。その創造的なプロセスは，社会的相互作用と個人による構成の両方を必要とし，文脈や目的によって特徴づけられる。
- 指導を，生徒自身の探究を刺激して支え，そのような探究が行われやすい学習環境を確立することであると見なす。

本研究では，2節で述べたように，これらの数学観等の中でも，指導観を除く数学観，知識観，学習観の三つを考察の対象とし，数学的探究を捉える視点を抽出する。ここで，これらの数学観，知識観，学習観を概観すると，可謬性と不確かさや，社会的構成と社会的相互作用など，それぞれの見方に類似している要素があることがわかる。したがって，これらの数学観，知識観，学習観を区分して数学的探究を捉える視点を抽出しようとすれば，重複する部分が生じることになる。そこで，本研究では，これらの数学観，知識観，学習観を区分せずに考察することで，数学的探究を捉える視点を抽出することにする。加えて，Borasi 自身，探究的アプローチでは，先述の NCTM や NRC の勧告では軽視されている部分も，これらの数学観等から付加的に強調されることになると述べている。

本研究ではその点も考察の対象に含める。

(4) 数学的探究を捉える視点

前述の数学観，知識観，学習観を概観すると，それらの内容は不確かさや疑念（数学観と知識観），構成主義（数学観と学習観），目的や文脈の関わり（数学観と学習観）の三つに大別することができる。ここで，目的や文脈の関わりは，「人間の営みはその営みが行われる目的や文脈に影響される」と総括できるものである。これは，あるべき姿のような規範的な意味ではなく，ありのままの姿といった記述的な意味が強いものである。一方，本研究では，証明する活動のあり方という規範的な事柄を問題としている。そこで，以下では，まず，目的や文脈の関わりを除いた不確かさや疑念と構成主義の二つについて考察することによって，数学的探究を捉える視点を抽出する。

① 不確かさや疑念

Borasi は数学観の部分で，数学的知識は可謬的であると述べている。彼女はこの数学観に関して，非ユークリッド幾何学の創始や，証明と論駁の繰り返しによる数学的知識の構成という Lakatos (1976) の解釈に触れている。そして，「数学的知識は絶対的に正しいものでも完全に確証可能なものでもなく，他の科学と同様に，可謬的であり，絶え間ない修正に開かれていると数学者は結論づけた」(Borasi, 1992, p. 162) と彼女は述べている。この可謬性とは誤りうることであるから，Borasi 自身が知識観の部分で言及している不確かさの一種であるとも言える。

Borasi はこの数学の不確かさを負の要素としては捉えていない。それは先述の知識観にも表れており，その背景には Peirce の探究や Dewey の反省的思考に関する研究がある。例えば，Borasi (1996) は「人間の知識に浸透している不確かさは，我々の周囲の世界をより洗練された形で説明しようと継続的な探究を促進する一種の「疑念」を引き起こすから，それには積極的な意味がある」(p. 18) という Peirce の考え方に依拠している。したがって，Borasi は，数学は不確かであり疑念を引き起こすものであるがゆえに，よりよいものを追究しようとする人間の動機が生まれると考えているのである。

このような Borasi の考え方は，「探究のための踏み切り板 (springboards for inquiry)」としてエラーを利用するという，彼女の教授実験に具体化されている (Borasi, 1994)。例えば，16歳の高校生二人（Katya と Mary）を対象とした教授実験では，円や多角形に関する不正確な定義や曖昧な定義を，いわば叩き台として検討し，その検討を通じてより的確な定義を追究し続ける過程が展開されている。

ここで，数学的知識には驚きを引き起こすものもあり[5]，その驚きによっても探究は促進されるであろう。実際，Borasi 自身も，Dewey や Peirce の知識観の中では，「「異常さ (anomalies)」は（中略），探究の過程を動かす疑念を作り出しそうであると見なされるから，重要な役割を果たす」(Borasi, 1994, p. 168) と述べている。そして，彼女はその「異常さ」を，「理解できない事柄，知覚的判断，予想外に思える観察」（前掲）と具体的に換言している。この中でも予想外の観察が，何かある事柄に驚きを感じることに該当するであろう。したがって，驚きもまた探究を促進する要素であると言える。

以上より，数学的探究を捉える視点として，視点①「数学的知識は不確かであり，疑念や驚きを引き起こすものであるからこそ，人間は常によりよいものを数学的に追究しようとする」が挙げられる。

② 構成主義

Borasi は，先述の「伝達モデル」の背景にある行動主義的な学習観を批判し，「探究的アプローチでは，（中略）急進的構成主義の認識論を前提とする」(Borasi, 1994, p. 168) と述べている。この急進的構成主義は，認識主体による能動的な知識の構成を前提とするとともに，客観的知識の存在を否定しようとするものである（中原, 1994）。しかし，客観的知識の存在が否定されるからといって，社会的次元が無視されるわけではない。実際，急進的構成主義者として知られる von Glasersfeld (1990) は，適合性 (fit) や生存可能性 (viability) といった概念に基づいて，個人の営みは社会的相互作用などに

よって制限されたり先導されたりすると述べている。

この点に関しては，Borasi 自身も，「学習に関する構成主義的な見方が教授学的に重要であることは，数学的知識は社会的に構成されるという点も認めない限りは，完全には評価されることができない」(Borasi, 1992, p. 175) と述べている。加えて，彼女は Vygotsky の研究にも触れながら，子どもたちが結果や解釈を共有したり，議論や説明の妥当性を集団で吟味したりすることなど，学習の社会的次元の重要性をさらに強調している。したがって，彼女は，構成主義の中では，急進的構成主義よりも，むしろ社会的構成主義に近い立場に立っていると言える(構成主義の立場については中原 (1994) を参照)。

子どもたちが他者と相互作用しながら議論や説明の妥当性を能動的に吟味することも，前述の Borasi の教授実験に表れている。例えば，Katya が，正五角形の内角の和を求める際，「二等辺三角形の底角は等しい」ことを利用したが，Mary はそれが成り立つことに納得しなかった。その後，二人はお互いに議論しながら，それを証明したり，二等辺三角形の定義を検討したりした (Borasi, 1992)。また，Borasi (1996) は高等学校におけるある授業の様子も報告している。その授業では，ある条件が与えられた場合の三角形の作図方法を，子どもたちが互いに主張し，論駁し，洗練していく様子が描写されている。

このように，Borasi は行動主義を背景とした受動的な学習観を否定し，子どもが他者と相互作用しながら能動的に学習を進めることを重視しているのである。したがって，数学的探究を捉える視点として，視点②「人間は他者との相互作用の中で能動的に知識を構成する」を抽出することができる。

③　子ども自身の問題設定

Borasi (1996) は，探究的アプローチでは，先述の NCTM や NRC の勧告では軽視されている部分も，前述の数学観等から付加的に強調されることになると述べている。その強調される部分とは，カリキュラムに数学史等の内容を位置づけること，探究における不確かさの重視，子ども自身の問題設定の重視，生徒の探究を支える学習環境を教師が設定することの四つである (pp. 24-26)。本研究では，数学的探究や証明する活動という数学のプロセスについて，学習者の側に着目して議論を展開している。また，不確かさの重視は既に言及した通りである。したがって，四つの中でもここで特に関わりのあるものは，子ども自身の問題設定である。

Borasi が子ども自身の問題設定を重視することは，特に，what-if-not ストラテジーで著名な Stephen Brown (例えば，Brown & Walter, 1990) から強い影響を受けていると思われる。なぜなら，Borasi は1996年の著作の謝辞において，自身の博士論文の主査が Brown であったことと，ヒューマニスティックな数学観や子ども自身の問題設定を促進する what-if-not ストラテジーを Brown が紹介してくれたことに，感謝の意を示しているからである。

ところが，高校生二人を対象とした Borasi の教授実験では，各セッションの初めに子どもが自ら問題を設定することは見られない。セッションの途中に子どもが自ら問題を設定することについても，次の二つしか見られない。一つは，「n 辺多角形の内角の和は180(n−2)度である」を証明した後に，Mary が「星型五角形の内角の和はどうなるか」と考えてそれを調べたことである。もう一つは，タクシー幾何学として，ユークリッド距離に基づく円の定義をマンハッタン距離の場合に適用して検討した後に，二人が自ら「ダイヤモンド」と名付けたものを定義しようとしたことである(6)。したがって，子ども自身の問題設定は，不確かさや疑念と構成主義に比べると，Borasi の教授実験のレベルには強く具体化されていない。

しかし，Borasi は，理念的なレベルでは，探究的アプローチにおいて子ども自身の問題設定が重視されると考えている。このことから，数学的探究を捉える視点として，視点③「子どもが考察の対象とする問題を自ら設定する」が導出される。

最後に，これまでに抽出した数学的探究を捉える三つの視点を総括する形で，本研究における数学的探究の概念を規定する。まず，視点③は子ども自身の問題設定について述べたものである。このことから，数学的探究は基本的に問題解決の形で展開されることも導き出される。さらに，視点②を考慮すれば，他者との相互作用の中で能動的に問題解決に取り組む活動が求められる。ここで，活動（activity）とは「いきいきと行動すること」（新村,2008,p. 556）であり，本来的には，能動性（activity）を前提とした主体の働きである。その一方で，視点①から，不確かさや疑念は問題解決の契機となるとともに，よりよい数学的な問題解決を追究し続けることによって，その不確かさや疑念の解消を目指すことになる。以上より，本研究では，数学的探究を，子どもが他者と相互作用しながら，不確かさや疑念の解消を目指して，問題を設定してその問題のよりよい数学的な解決を追究し続ける活動と捉える。

## 4．証明と証明する活動の相

### (1) 証明

証明（proof）とは，一般に，真であると既に認められた事柄を根拠にして，命題が真であることを演繹的に示したものである。証明という概念をこのように捉えると，中学校第二学年から「証明」という言葉で学び始めるもののみが，学校数学における証明であるとは限らない。言い換えれば，何を根拠にするのか，また，どのような表現様式で演繹的な推論を表すのかなどに応じて，様々な証明の種類があるはずである。

例えば，現行の学習指導要領では，小学校第五学年において，三角形の内角の和が180度であることを経験的に確かめた上で，それを根拠として，四角形や五角形などの内角の和の性質を演繹的に説明する学習が行われる。このような説明が行われる場では，三角形の内角の和が180度であることは，正しい事柄として認められている。したがって，その説明は，正しいと認められた事柄を根拠にして命題が真であることを演繹的に示しているから，その説明が行われた場において証明である。

また，action proof（例えば，Semadeni, 1984；小松, 2007a）のように，必ずしも数学的な記号や文字で表現されなくても，具体物に対する諸行為に基づきながら，命題が真であることを演繹的に導くものもある。このような具体物に対する諸行為などが正しいものとして認められ，具体物に対する諸行為によって演繹的な推論を表現することが認められる場では，action proof も証明であると言える。

### (2) 証明する活動の相

本研究では，証明する活動の相を指摘するにあたって，問題解決に関する研究をまず参考とする。その理由は証明する活動は広い意味での問題解決に含まれるからである。例えば，問題解決に関する研究で著名な Polya（1957/2004）は，問題を「決定問題」と「証明問題」に分けている。この中でも，証明問題の解決は，まさしく証明する活動に関係するものである。したがって，本研究では，問題解決の相を証明する活動の場合に限定することによって，証明する活動の相を指摘する。

Polya（1957/2004）は，教師や教科書から問題が与えられた文脈を想定し，問題解決を，問題の理解，解決の計画，計画の実行，振り返りの四つの相（phases）に分けている。それに対して，文部省（1991）は子どもが自ら問題を設定することも想定し，問題解決の要素として，問題の構成（設定），問題の理解（把握），解決の計画，解決の実行，解決の検討の五つを挙げている。

ここで，以下の二点について注意が必要である。第一に，これらの研究において「相」や「要素」という言葉が用いられているように，ここで挙げた各相や各要素は必ずしもその順番通りに進むとは限らず，一連の過程の中で繰り返し現れるものである。実際，文部省（1991）も，「問題の構成に始まって解決の検討まで各要素を順番に述べたが，問題解決は必ずしもこの順序で行われるとは限らない」（p. 34）や，「一連の問題解決の中で先に述べた問題解決の各要素は，繰り返し何度も現れるものである」（p. 35）と

述べている。第二に，振り返りや解決の検討の対象は，「解決の実行だけでなく，問題の構成や理解，解決の計画などにも及ぶ」（文部省，1991，p. 35）ものである。

証明する活動の場合，解決の対象となる問題は命題であり，証明を構成して命題の真偽を示すことで問題は解決されることになる。したがって，問題解決の相を参考とすれば，証明する活動の相として，命題の推測，命題の把握，証明の構想，証明の構成，振り返りの五つをまず挙げることができる。ここで，前項において証明に関わって証明の構成について検討したため，以下では残りの四つの相について考察する。

教師や教科書などから命題が与えられるのではなく，子どもが自ら命題を推測することは，子どもの能動的な証明の構成につながると期待される。例えば，清水（1994a）は，数学の学問的な研究とその研究における証明との関わりに基づいて，「子どもたちにおいて論証の必要性や必然性を明確にするためには，事実の推測・発見を伴う想像的・生産的な活動の過程に論証を位置づけ，そこにおいて論証が力を発揮することを具体的に明らかにすることが必要であろう」（p. 225）と述べている。このように，証明の対象となる命題を子どもが自ら推測することにより，子どもは証明の必要性や必然性をより明確に意識できるようになると思われる。

また，Polya（1957/2004）は，問題の理解に関わって，「理解していない問題に答えることは愚かである」（p. 6）と述べている。そして，証明問題の理解において，「仮定は何か」，「結論は何か」，「仮定をいくつかの部分に分けてみよ」といった問いや注意が重要であることを彼は指摘している。

証明の構想に関わって，清水（1994a）は，『ユークリッド原論』に代表される古代ギリシャの幾何学について，新しい事実や証明の方法の発見には実験的な方法が深く関わっているとともに，厳密な証明ではそのことが表面には現れないことに言及している。そして，『ユークリッド原論』に見られるような仮定から結論へと向かう「総合的な方法」だけでなく，結論から仮定へと向かう「解析的な方法」にも光を当てることの重要性を指摘している。より具体的には，清水は，解析的な方法が総合的な方法よりも証明を構想しやすいことから，証明を構想し構成する基本的な方法として解析的な方法を生かしたいと述べている。したがって，証明をよりよく構成するためには，「解析的な方法」と「総合的な方法」の両者を駆使した証明の構想が，非常に大きな役割を果たすのである。

一方，振り返りについてさらに分析すると，その下位相として，命題や証明の検証と新たな命題とその証明の生成の二つを挙げることができる。実際，Polya（1957/2004）自身も，振り返りの内容について，結果や議論の検証だけではなく，別な方法でその結果を導いたり，その結果や方法を他の問題に利用したりすることを挙げている。また，杉山（1986）は証明を見返す価値に関わって，「証明を振り返って，真なることを保証する要素と命題との関係を調べてみる（中略）ことによって，証明は厳密になり，命題をより一般的にしたり，新しい問題を発見したりして，発展的に学習を進めることができる」（p. 134）と述べている。このように，それまでの行為を振り返ることは，単なる検証にとどまらず，新たな命題とその証明の追究など，より創造的な学習の契機になりえるものである。

以上より，証明する活動を分析すれば，その相として，命題の推測，命題の把握，証明の構想，証明の構成，命題や証明の検証，新たな命題とその証明の生成の六つを指摘することができる。ただし，前述の通り，一連の過程において，これらの相はこの順番の通りに進むとは限らず，各々の相は繰り返し何度も現れるものでもある。

ここで，証明する活動を最も広義に捉えたものは，命題の推測から新たな命題とその証明の生成までの一連の相を含むものである。しかし，証明する活動が常にこの広義の意味で行われるとは限らない。例えば，子どもが教師や教科書から与えられた命題を証明する場合があるが，その場合には命題の推測の相は欠けていることになる。また，子どもがそれまでの行為を振り

返って検証することはあっても，その証明を通じて新たな命題とその証明を生成することが行われない場合もある。その場合には，新たな命題とその証明の生成の相は欠けることになる。

## 5．証明する活動のあり方

本節では，3節で抽出した数学的探究を捉える視点から，4節で指摘した証明する活動の相を検討することによって，証明する活動のあり方を数学的探究に焦点をあてて明らかにし，さらにその意義を議論する。

### (1) 子どもが疑念や驚きを感じるような命題を自ら推測すること

数学的探究の特徴として，視点③より，考察の対象となる問題を子どもが自ら設定することが挙げられる。これを証明する活動の相に照らして考察すれば，子ども自身が命題を推測するということになる。また，視点①に関わって，その推測した命題から疑念や驚きが生まれれば，それらがその後の取り組みの動機となる。以上より，証明する活動のあり方として，「子どもが疑念や驚きを感じるような命題を自ら推測すること」を指摘することができる。ただし，当然ではあるが，どのような推測に対して子どもが疑念や驚きを感じるのかは，絶対的に定まるものではなく，子どもやその推測が行われる状況等に依存する。

子どもが自ら命題を推測することは，Brown & Walter (1990) が意図しているように，子どもの能動的な学習につながるであろう。特に，前述の清水 (1994b) が指摘するように，子どもが証明の必要性や必然性をより認めるようになると期待される。それに加えて，その推測から疑念や驚きなどが生まれれば，子どもは，単に「命題が真である」という事実だけでなく，「なぜ命題が真であるのか」という理由を捉えるために証明を構成するようになることが，先行研究から示唆されている。

例えば，Hadas & Hershkowitz (1998) では，第九学年（日本では中学三年生に該当）の子ども二人が，「△ABCの辺ACを三等分（AD＝DE＝EC）し，等分点（D，E）と対角（B）をそれぞれ結んだとき，∠ABD，∠DBE，∠EBC の大きさの関係を調べて説明せよ」という問題に，動的幾何ソフトウェアを用いて取り組んだ様子が報告されている（図1）。二人の子どもは，当初，「それら三つの角度は等しくなるに違いない」と推測した。だが，動的幾何ソフトウェア上において，常に三つの角度が等しくなるとは限らないどころか，それらが等しくなる場合を一つも見つけられないことに彼らは驚いていた。それから，彼らはなぜ三つの角度が等しくなりえないのかを，以前に学習した「二等辺三角形の底角は90度より小さい」を利用して演繹的に説明した。Hadas & Hershkowitz は，この結果に関して，二人の子どもは三つの角度が等しくなる場合を一つも見つけられないという事実に驚きを感じたために，その事実に対して納得できる議論を得たいと考えるようになったと分析している。そして，子どもたちは「なぜ三つの角度が等しくなりえないのか」を演繹的に説明することによって，その事実に完全に納得するようになったと述べている（Hadas & Hershkowitz, 1998, p. 28)。

ここで，人が証明を通じて「なぜ命題が真であるのか」を捉えることができるのは，証明に「説明」の機能があるからである（De Villiers, 1990)。このように，証明を通じて「なぜ命題が真であるのか」を捉えることは，数学的に価値がある営みとされ，数理哲学の研究においてもそのことについて議論が展開されている（小松, 2007b)。また，「なぜ命題が真であるのか」を捉えることは，命題の理解を深めることにつながるという点で，数学教育においても重要である（例えば，Hanna, 1995)。それに加えて，「なぜ命題が真であるのか」を捉えて説明するこ

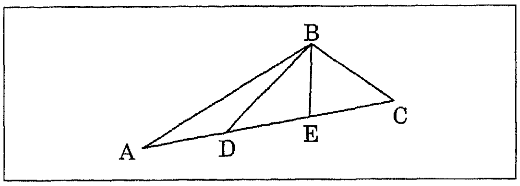


図1：辺を三等分する点とその辺の対角をそれぞれ結んだ三角形

とは，数学教育だけに限定されることなく，「根拠となることを明らかにしそれに基づいて述べること」（清水, 2008, p. 18）に深く関わりのあるものである。この「根拠となることを明らかにしそれに基づいて述べること」は，「自他ともによりよく分かるように工夫して述べたり，相互に納得と説得をもたらしたりするために重要なこと」（同, p. 19）の一つである。

したがって，子どもが疑念や驚きを感じるような命題を自ら推測する場合には，子どもは「なぜ命題が真であるのか」という理由を捉えるために証明を構成するようになり，上述の価値ある学習が実現されると期待されるのである。

(2) 子どもは証明を構成した後でも，それまでの行為を振り返って，命題や証明を検証して必要に応じて修正したり，新たな命題とその証明を追究したりすること

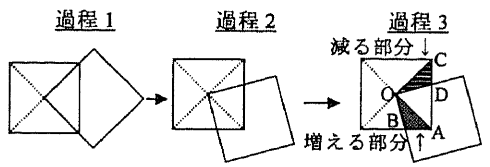
数学的探究を捉える視点として，視点①「数学的知識は不確かであり，疑念や驚きを引き起こすものであるからこそ，人間は常によりよいものを数学的に追究しようとする」を指摘した。したがって，数学的探究という場合，証明する活動では，証明を構成したらそれで終わりではない。証明は誤りうるものであるから，命題や証明を検証して，必要に応じてそれらを修正することが重要となる。また，証明に誤りがなくても，さらによりよいものを求めて，新たな命題とその証明を追究していくことも重要となる。よって，証明する活動のあり方として，「子どもは証明を構成した後でも，それまでの行為を振り返って，命題や証明を検証して必要に応じて修正したり，新たな命題とその証明を追究したりすること」が挙げられる。

数学の学問的な研究においても，証明を構成した後に，その命題に暗黙の前提が隠されていることや，その証明において不確かな事柄が根拠として用いられていることに気づき，より明確な命題やより確実な証明を新たに構成し直す場合がある（Lakatos, 1976）。また，ある命題とその証明についてよりよく理解するためには，それらから新たな命題とその証明を作り出し，既有の命題及びその証明と新たな命題及びその証明とを比較することが重要となる（Brown & Walter, 1990）。このような学習を通じてこそ，物事を解決したらそれでよしとせずに，よりよい解決を追究し続けようとする態度が育成されるであろう。

例として，「二つの合同な正方形①，②について，正方形①の対角線の交点と正方形②の一つの頂点とを重ねて正方形②を回転させるとき，どのような場合に正方形①，②の重なる部分の面積が一番大きくなるだろうか」という問いについて考えてみよう[7]。ここで，試行錯誤を通じて，命題A「二つの合同な正方形①，②について，正方形①の対角線の交点と正方形②の一つの頂点とを重ねて正方形②を回転させるとき，どんな正方形①，②でもそれらの重なる部分の面積は常に等しい」を推測し，その命題が真である理由を図2のように説明したとする。

このとき，その説明が行われた場において，もしも「∠AOB＝∠CODより△AOB≡△COD」が正しいと認められているのであれば，この説明は真であると認められた事柄を根拠にして命題が真である理由を演繹的に示しているため，その説明が行われた場において証明である。

ここで，「正方形（正四角形）だけでなく正五角形の場合も同様だろうか」と問い，正五角形という新たな場合について，命題とその証明を




左図のとき，重なる部分の面積は正方形の 1／4 である。ここで，中央の図のように正方形②をある角度だけ回転させると，∠AOB＝∠COD であるから，「増える部分」（△AOB）と「減る部分」（△COD）の三角形は合同になる。よって，「増える部分」と「減る部分」の面積が等しいから，重なる部分の面積は常に等しくなる。これは正方形②をどのように回転させても，また，二つの合同な正方形がどのような大きさであっても成り立つ。よって，この命題は真である。

図2：命題Aが真である理由の説明

追究しようとしたとする。ただし，正五角形では，正方形の場合とは異なり，対角線が一点で交わらない。そのため，正方形の対角線の交点が正方形の重心であると見て，正五角形に関しても，一方の正五角形の重心に他方の正五角形の頂点を重ねて回転させる場合を考える（図3）。

しかし，正五角形の場合，図3のように，正方形の場合と同様に∠AOB＝∠CODであるが，図の見た目から，「増える部分」（△AOB）と「減る部分」（△COD）の三角形が合同にならないことに気づく。そこで，正方形と正五角形の場合を比較すると，それらの違いとして，両者の過程1において，正方形の場合には，一方の正方形の重心から各頂点に引いた線分上に他方の正方形の辺が重なるものの，正五角形の場合ではそうならないことを見出すことができる。このことから，正方形の場合には，正五角形の場合とは異なり，∠AOB＝∠COD に加え，AO＝COと∠OAB＝∠OCD も成り立つゆえに，三角形の合同条件から△AOB≡△COD が成り立つということを捉えることができる。このように，新たな命題とその証明を追究していく中で，既有の証明を検討して構成し直すことや，既有の命題とその証明の理解を深めることも可能になるであろう。

以上の例では，既有の命題に変更を加える形で新たな命題や証明を追究することについて議論した。それに対し，既有の証明の方を見返すことによって，新たな命題や証明を考察する場合もあろう。例えば，De Villiers（1990）によれば，証明に「発見」の機能があるゆえに，人は証明を通じて新たな結果を発見または発明できる。De Villiers は発見の対象を広く結果と述べているが，彼が発見の機能を例証している部分を解釈すると，その結果という言葉は新たな命題とその証明を指していることがわかる。その場合にも，子どもが証明を通じて発展的に学習を進めたり，証明を生産的・創造的な活動の起点として捉えたりするなど，価値ある学習活動が展開されるであろう（杉山，1986；宮崎，2002）。

(3) 子どもは命題の推測から新たな命題とその証明の生成までの一連の行為に，他の子どもと相互作用しながら能動的に取り組むこと

数学的探究を捉える視点として，視点②「人間は他者との相互作用の中で能動的に知識を構成する」を指摘した。それゆえ，証明する活動では，命題の推測や新たな命題とその証明の生成だけでなく，命題の把握，証明の構想，証明の構成，命題や証明の検証も含めて，子どもが一連の行為に，他の子どもと相互作用しながら能動的に取り組むことが重要となる。よって，証明する活動のあり方として，「子どもは命題の推測から新たな命題とその証明の生成までの一連の行為に，他の子どもと相互作用しながら能動的に取り組むこと」を指摘することができる。

他者と相互作用しながら取り組むことで，一人だけでは得られなかった事柄を発見できるようになるだろう。例えば，ある子どもが図2のような説明を行った場合を考えよう。このとき，実際は正方形②の回転角度を0度から90度の範囲までしか想定せずに（つまり，過程3において $0^\circ<\angle AOB<90^\circ$），図2のような説明を行う子どももいると思われる。しかし，その説明を他の子どもに示すことによって，その説明に気づいていなかった他の子どもから，「なるほど，基準とする直角二等辺三角形を適切に選べば，その説明は正方形②をどれだけ回転させても成り立つね」（図4）というフィードバックが

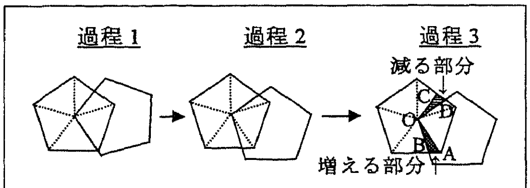



図3：正五角形の場合

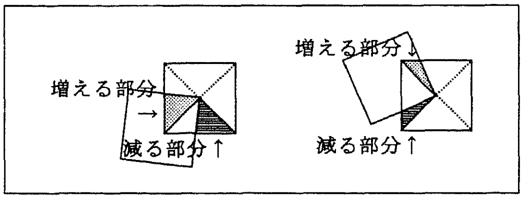



図4：正方形②を様々な角度で回転させた場合

帰ってくるかもしれない。このように，お互いの考えを伝え合うことで，お互いが当初は所持していなかったアイデアが生まれ，より数学的に洗練された説明が創発される可能性もある(江森, 1997)。逆に，図２のような説明を聞いて，「それって正方形②の回転角度を０度から90度の範囲までしか想定していないよね」と批判する子どももいると思われる。そして，そのような批判や論駁が契機となり，正方形②の回転角度を大きくした場合も含めた，よりよい説明を追究する機会が生まれることもあるだろう(Lakatos, 1976)。このような学習を通じてこそ，学校数学だけに限らず，他者と相互作用しながら物事に取り組む姿勢が養われると期待される。

ただし，社会的な相互作用が必ずしも数学的に望ましい方向につながるとは限らない。例えば，Stylianides (2007) は，ある議論が証明として認められるかどうかは，社会的次元を考慮した上で検討する必要があるとした上で，ある小学三年生の授業を分析している。その授業では，子どもたちは「奇数と奇数の和は偶数になる」と推測し，その推測が成り立つことを様々な方法で検討していた。その際，Betsy という子どもが，その推測が成り立つ理由を，７＋７を例としながら，「どんな奇数でもペアを作ると一つ余り，奇数と奇数の和では余ったもの同士で再びペアを作ることができるから，奇数と奇数の和は偶数になる」と議論した。この議論は，中学校で学ぶ文字式を用いた証明を言葉で表現したものであり，数学的には価値のある証明であると言える。しかし，Betsy の議論を聞いた子どもの中には，その議論に納得する子どももいれば，すべての奇数の場合にその議論を適用できるかどうかはわからないなどと，その議論に納得しない子どももいた。その後も，それぞれの子どもが自分の考えを主張するが，Betsy の議論は最終的にはそのクラスで受け入れられなかった(8)。Stylianides はこの結果に関して，そのクラスがまだ数学的に成熟しておらず，Betsy の議論を証明として認めるために必要な事柄が，そのクラスでは社会的に共有されていなかったと結論づけている。

したがって，他の子どもと相互作用することは，それ自体は目的ではなく手段である。換言すれば，単に子どもたちが社会的な相互作用を行えばよいのではなく，社会的な相互作用を通じて数学的に価値のあるものを互いに生み出すことが必要なのである。

## ６．研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は，証明する活動の一つのあり方を，数学的探究に焦点をあてて明らかにすることであった。この目的を達成するために，まず，Borasi の探究的アプローチに着目して，数学的探究を捉える視点を抽出した。次に，証明や問題解決に関する研究を参考として，証明する活動の相を指摘した。最後に，数学的探究を捉える視点から，証明する活動の相を検討することによって，証明する活動のあり方に関して三点を指摘し，さらにそれらの意義を議論した。

本来であれば，数学的探究を捉える三つの視点と証明する活動の六つの相を組み合わせると，証明する活動のあり方とその意義について，単純に計算すれば18個の点が議論されなければならない。しかし，本研究では，証明する活動のあり方を議論する際には，必要に応じて，複数の視点や相を総括して検討してきた。例えば，三点目のあり方については，視点②から証明する活動の六つの相をそれぞれ個別に検討するよりも，簡潔さのために総括して考察することを選択した。そのため，証明する活動のあり方の三点を細かく分割すれば，各視点と各相の組み合わせを見出すことができるであろう。

本稿の冒頭で触れたように，2008年３月に告示された新学習指導要領において，探究型の教育はますます重要となる。本研究で指摘した三点は，証明する活動が数学的探究たりえているのかを判断する際に，その判断の指針の一つとして役立ちうるものである。

もちろん，これらの三点はそれぞれが独立しているものではなく，相互に重なり合ったり，相互に関係し合ったりする部分もある。しかし，それらの関係については考察が及ばなかったため，今後の検討が必要とされる。また，このよ

うな証明する活動を子どもが進めるためには，子どもと教師のそれぞれにどのようなことが必要とされるのかを，理論と実践の両面から考察していくことも今後の課題である。

## 謝辞

本稿の作成にあたって貴重なご意見をいただいた査読者の方々に感謝を申し上げます。

## 注

（1）本研究では，証明（proof）と証明する活動（proving）を区別する。具体的には，証明を，4節で触れるように，真であると既に認められた事柄を根拠にして，命題が真であることを演繹的に示したものとし，作り出された所産（product）として捉える。一方，証明する活動はその証明の構成に関わる活動とし，過程（process）を表すものと捉える。数学的探究の定義については3節の最後に述べる。

（2）実際，Borasi 自身も，1992年の文献では a humanistic inquiry approach と述べているが，1994年と1996年の文献では単に an inquiry approach としている。しかし，後述の数学観，知識観，学習観，指導観は，それら三つの文献で大きな相違は見られない。

（3）Fawcett は，「子どもは次の事柄を理解しているとき，演繹的証明の本性を理解している」と仮定した（Fawcett, 1938, p. 10）。

1. あらゆる命題を証明する際の無定義概念の位置と重要性
2. 明確に定義された用語の必要性と，命題に対するその影響
3. 前提または証明されない命題の必要性
4. いかなる論証も，前提から含意されない事柄を証明できないこと

この中でも，定義に直接関わる記述は，一番目と二番目に見出すことができる。

（4）Lakatos（1976）は，オイラーの多面体定理について推測，証明，論駁，改良などを行う過程を，数学史もふまえながら，教室における生徒同士や生徒と教師の議論という形で展開している。

（5）例えば，Mary と Katya を対象とした Borasi の教授実験では，三点を通る円に関する問題解決の際，Mary は Katya の誤りを検討する中で，二点を通る円は無数にあり，その円の中心の軌跡は直線になることを発見して，大きな驚きを示している様子が描かれている。

（6）複雑さを避けるため，平面 $R^2$ 上の場合で，ユークリッド距離とマンハッタン距離を説明する。二点 $P_1=(x_1, y_1)$，$P_2=(x_2, y_2)$ について，二点 $P_1$，$P_2$ 間の距離を次の $d_1$，$d_2$ で定義するとき，それぞれの距離をユークリッド距離，マンハッタン距離と言う。

$$d_1=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$
$$d_2=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

（7）この問いと図2はいずれも梅川（2002）を参考とした。

（8）同様の結果は，小学校の一斉授業に限らず，中学生のペアを対象とした Balacheff（1988）の教授実験によっても報告されている。

## 引用・参考文献

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics (translated by Pimm, D.). In Pimm, D. (eds.). *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics through Inquiry.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Error.* Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing, 2nd Edition.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会（2006）．*審議経過報告*．http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/06021401/all.pdf.（参照 2008-09-21）

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

江森英世（1997）．数学コミュニケーション．日本数学教育学会（編）．*日本の算数・数学教育1997 学校数学の授業構成を問い直す*（pp. 33－47）．東京：産業図書．

Fawcett, H. P. (1938). *The Nature of Proof: A Description and Evaluation of Certain Procedures Used in a Senior High School to Develop an Understanding of the Nature of Proof* (The Thirteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). New York, NY: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

Hadas, N. & Hershkowitz, R. (1998). Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. In Olivier, A. & Newstead, K. (eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 25-32). University of Stellenbosch.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

小松孝太郎（2007a）．学校数学における action proof の概念規定．*筑波数学教育研究，26*，29－38．

小松孝太郎（2007b）．学校数学における証明の機能「説明」に関する一考察：数理哲学における議論に着目して．*日本数学教育学会第40回数学教育論文発表会論文集*（pp. 637－642）．千葉：東京理科大学．

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

宮崎樹夫（2002）．中学校数学において，生徒が証明の発見機能を活用するための諸条件に関する研究．*科学教育研究，26*（5），358－369．

文部科学省（2008）．*中学校学習指導要領解説総則編*．東京：ぎょうせい．

文部省（1991）．*小学校算数指導資料 指導計画の作成と学習指導*．東京：東洋館出版社．

中原忠男（1994）．数学教育における構成主義の展開：急進的構成主義から社会的構成主義へ．*日本数学教育学会誌 数学教育，76*（11），302－311．

新村出（編）（2008）．*広辞苑第６版*．東京：岩波書店．

Polya, G. (1957/2004). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method, 2nd Edition* (with a New Foreword by Conway, J. H.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

清水静海（1994a）．論証．中学校数学科教育実践講座（編）．*CRECER 第６巻 図形と論証*（pp. 204－236）．東京：ニチブン．

清水静海（1994b）．証明の指導の真の根拠を問い直す：幾何の指導を通じて児童・生徒は何を学習すべきか．*日本科学教育学会第18回年会論文集*（pp. 77－78）．栃木：宇都宮大学．

清水静海（2008）．知識・技能の活用で高める言語活動．*中等教育資料，864*，14－19．

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

杉山吉茂（1986）．*公理的方法に基づく算数・数学の学習指導*．東京：東洋館出版社．

梅川貢司（2002）．数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：Action Proof を選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から．*上越数学教育研究，17*，67－78．

von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. In Davis, R. B., Maher, C. A. & Noddings, N. (eds.). *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-29). Reston, VA: NCTM.

# What Proving should be in School Mathematics: Focusing on Mathematical Inquiry

Kotaro KOMATSU

The purpose of this study is to elaborate what proving should be in school mathematics, especially focusing on mathematical inquiry. First, according to "a humanistic inquiry approach" to school mathematics, which Raffaella Borasi discusses, viewpoints for grasping mathematical inquiry are specified. Next, based on literature on proving and problem solving, proof and phases of proving are examined. Last, by analyzing the phases of proving from the viewpoints for grasping mathematical inquiry, three points on what proving should be in school mathematics are elaborated as follows, and the significance of each point is discussed.

- Pupils conjecture statements by themselves to which they feel doubt or surprise.
- After constructing proofs, pupils look back at their actions; they check their statements and proofs, and modify them if necessary; they pursue new statements and their proofs.
- Pupils tackle all phases of proving (from conjecturing statements to pursuing new statements and their proofs) interactively and actively.

In the new Japanese National Curriculum, inquiry-based teaching and learning are emphasized more than before. Therefore, when we judge whether a certain proving is mathematical inquiry or not, the above three points could be useful as a basis of this judgment.