（4）「統計的逐次推測理論とその応用」に関する研究報告

On the inequality of Kshirsagar

筑波大学数学系　　小池 健一

1．はじめに

X を σ-有限測度 μ に関する密度関数 $f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1)$ を持つ確率変数とする．密度の台を $S(\theta) := \{x : f(x,\theta) > 0\}$ と表す．g を恒等的に定数とはならない Θ 上の連続関数，$\hat{g}(X)$ を $E_\theta\{\hat{g}(X)^2\} < \infty$ を満たす $g(\theta)$ の不偏推定量とする．Bhattacharyya 型の不等式は，ある正則条件の下で，

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \left(g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta)\right) W^{-1}(\theta) \left(g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta)\right)' =: B_k(\theta)$$

となることを示している．但し，$g^{(i)}(\theta) = \frac{d^i g(\theta)}{d\theta^i}$, $W(\theta) := \{w_{ij}(\theta)\}_{i,j=1,\ldots,k}$ $w_{ij}(\theta) := E_\theta\left\{\frac{\partial^i f(X,\theta)}{\partial\theta^i}\frac{\partial^j f(X,\theta)}{\partial\theta^j} f^{-2}(X,\theta)\right\}$ $(i,j = 1,\ldots,k)$ とおく．良く知られているように $B_1(\theta)$ は Cramér-Rao 型の下界に一致し，$\theta \in \Theta$ について，この下界はその次数を大きくすれば単調に増大，すなわち$B_{k+1}(\theta) \geq B_k(\theta)$ $(k \geq 1)$ が成り立つ．

一方，「フィッシャー情報量が発散する」，「密度関数が未知母数に関して微分可能でない」等，Cramér-Rao 型や Bhattacharyya 型の不等式が成立しないような非正則な場合にも，上のような不等式が，Chapman and Robbins [CR51] 等により示されている．

最近，Kshirsagar [Ks00] により，Chapman-Robbins 型の不等式を Bhattacharyya 型の不等式を得る場合の手法を用いて拡張した次のような不等式が示された：$\psi_r := \frac{f(x,\phi_r)-f(x,\theta)}{f(x,\theta)}$ $(r = 1,2,\ldots,k)$ とおくと，Kshirsagar の不等式は

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \sup_\phi \mathbf{w}\Sigma^{-1}\mathbf{w}' =: K_k(\theta), \quad \text{say.}$$

但し，$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\theta,\phi_1,\ldots,\phi_k) := (g(\phi_1) - g(\theta), \ldots, g(\phi_k) - g(\theta))$,
$\Sigma = \Sigma(\theta,\phi_1,\ldots,\phi_k) = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,k}$ $(\sigma_{ij} = \mathrm{cov}_\theta(\psi_i,\psi_j)$ $(i,j = 1,\ldots,k))$ とし，$S(\phi_k) \subset S(\phi_{k-1}) \subset \cdots \subset S(\phi_1) \subset S(\theta)$ なる $\phi_i \in \Theta$ $(i = 1,\ldots,k)$ で sup をとるものとする．しかし，この論文では不等式が示されただけで，他の不等式との関連などについては全く言及されていない．

ここでは，Chapman-Robbins 型の不等式を，[Ks00] と同様の方法で拡張した別の不等式を示し，得られた不等式を用いて，通常の Bhattacharyya 型の下界との比較を行う．同様の結果は，Akahira et al. [APT86] 等にもあるが，正則条件が違っているため，異なる結果となっている．最後に，得られた不等式の達成に関するいくつかの命題を示す．

2．不偏推定量の分散に対する別の不等式

X を，ある σ-有限測度に関する密度関数 $f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ をもつ確率変数とする．但し，Θ は $\mathbb{R}^1$ の開集合とする．Θ 上で定義された，定数関数でない，ある実数値関数 $g(\theta)$ の不偏推定問題を考える．$S(\theta)$ を $f(x,\theta)$ の台とし，$S(\theta) \supset S(\theta+i\delta)$ $(i = 1,\ldots,k)$ となるように $\theta+i\delta \in \Theta$ $(i = 1,\ldots,k)$ がとれるものとする．ここで $\Psi_i = \Psi_i(x,\theta,\delta) := \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l}(-1)^l \frac{f(x,\theta+l\delta)}{f(x,\theta)}$ $(i = 1,\ldots,k)$, $G_i = G_i(\theta,\delta) := \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l}(-1)^l g(\theta+l\delta)$ $(i = 1,\ldots,k)$, $V =$

$V(\theta,\delta) = \{v_{ij}(\theta,\delta)\}$, $v_{ij}(\theta,\delta) := E_\theta(\Psi_i\Psi_j) \quad (i,j=1,\ldots,k)$ とすると，次の定理を得る．

定理１．$\hat{g}(X)$ を$g(\theta)$ の不偏推定量とすると，

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \sup_{\delta\in\Delta} \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' =: D_k(\theta), \quad \text{say}$$

が成り立つ．但し，$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\theta,\delta) := (G_1,\ldots,G_k)$ かつ $\Delta = \{\delta : S(\theta) \supset S(\theta+i\delta) \quad (i=1,\ldots,k), |V(\theta,\delta)| \neq 0\}$ とし，$\Delta = \emptyset$ のとき，右辺 $=0$ とする．

注．$D_k(\theta) = K_1(\theta) = H(\theta)$ が成り立つ．

定理２．ある $\delta \neq 0$ について，$S(\theta+i\delta) \subset S(\theta)$ $(i=1,\ldots,k)$ となるとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(\theta,\theta+\delta,\ldots,\theta+k\delta)&\{\Sigma(\theta,\theta+\delta,\ldots,\theta+k\delta)\}^{-1}\\ &\cdot \mathbf{w}(\theta,\theta+\delta,\ldots,\theta+k\delta)' = \mathbf{g}(\theta,\delta)\{V(\theta,\delta)\}^{-1}\mathbf{g}(\theta,\delta)'.\end{aligned}$$

が成り立つ．

系３．正則条件の下で次が成り立つ．

$$B_k(\theta) \leq D_k(\theta) \leq K_k(\theta) \qquad (k \geq 1).$$

３．下界の比較に関して

第２節で示した下界の達成について，不等号が等号になるための条件を定理としていくつか得た．これらの定理を用いて，局所最小分散不偏推定量になり，下界を達成するような推定量を構成した．これは，通常の Cramér-Rao 型やBhattacharyya 型の下界を達成しない例である．さらに，自然母数を持つ指数型分布族において，一様最小分散不偏推定量のあるクラスを求めた．最後に，B_2 と D_2 の大小関係については，系３から $B_2 \leq D_2$ が成り立つが，この等号が成り立たない条件を示した．今後，非正則な場合における等号成立条件を考察する必要がある．

参考文献

[APT86] Akahira, M., Puri, M. and Takeuchi, K.: *Ann. Inst. Statist. Math.*, **38**, (1986), 35–44.

[AT87] Akahira, M. and Takeuchi, K.: *Ann. Inst. Statist. Math.*, **39**, (1987), 593–610.

[B46] Bhattacharyya, A.: *Sankhyā*, *8*, (1946), 1–14, 201–218, 315–328.

[CR51] Chapman, D. G. and Robbins, H. E.: *Ann. Math. Statist.*, **22**, (1951), 581–586.

[Ko97] Koike, K.: *J. Japan Statist. Soc.*, **27**, (1997), 65–75.

[Ko99] Koike, K.: *Commun. Statist.-Theory Meth.* **28**, (1999), 857–871.

[Ks00] Kshirsagar, A. M.: *J. Indian Statist. Assoc.*, **38**, (2000), 355–362.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G.: *Theory of Point Estimation* (2nd ed.). Springer, New York, 1998.

[SG76] Sen, P. K. and Ghosh, B. K.: *Ann. Statist.*, **4**, 755–765.

楕円型分布モデルの下での２標本問題における共通平均の推定について

津熊 久幸 (千葉大学大学院 自然科学研究科)
今野 良彦 (千葉大学大学院 自然科学研究科)

Loh (1991) では, 2 つの多変量正規分布の共通の平均ベクトルの推定問題が議論されている. Loh (1991) は Graybill-Deal 型結合推定量を改良する Stein 型の結合推定量の導出を試み, 数値実験により 2 乗損失の下で Stein 型結合推定量が Graybill-Deal 型結合推定量を改良することを示している. 本報告では, 2 つの多変量楕円型分布の共通平均の推定問題を扱い, Loh (1991) の結果の拡張をおこなった.

いま, モデルを

$$\boldsymbol{Y}_1 = \mathbf{1}_N\boldsymbol{\xi}' + \boldsymbol{\epsilon}_1, \qquad \boldsymbol{Y}_2 = \mathbf{1}_N\boldsymbol{\xi}' + \boldsymbol{\epsilon}_2 \tag{1}$$

とする. ただし, $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$, $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$ は $N \times p$ 確率行列, $\mathbf{1}_N$ はすべての成分が 1 である $N \times 1$ ベクトル, $\boldsymbol{\xi}$ は未知の $p \times 1$ ベクトルである. ここで, 確率行列 $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \dots, \boldsymbol{e}_{iN})'$ $(i = 1, 2)$ の各行は独立に同一の楕円型分布に従うとし, その密度関数を

$$|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{-1/2} h(\boldsymbol{e}_{ij}'\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{e}_{ij}), \qquad i = 1, 2,\ j = 1, \dots, N, \tag{2}$$

とする. ただし, $h(\cdot)$ は $[0, \infty)$ 上の未知関数, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は未知の $p \times p$ 正定値対称行列である.

ここで, 問題はモデル (1) の未知パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ を損失関数 $\widetilde{L}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}; \boldsymbol{\xi}) = N(\widehat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})'(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1})(\widehat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})$ のもとで推定することであり, 具体的には Graybill-Deal 型結合推定量の代替推定量を求めることである. その方法としては, まずリスクの不偏推定量に似たリスクの評価式を求め, その評価式から代替推定量の候補を導出する, という手順でおこなうが, 密度関数 (2) の下ではリスクの評価式の導出が困難であるため, 密度関数 (2) を

$$|\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-N/2}|\boldsymbol{\Sigma}_2|^{-N/2} g\big(\operatorname{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_1'\boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_2'\boldsymbol{\epsilon}_2\}\big) \tag{3}$$

におきかえて考えていくことにした. ここで, g は $[0, \infty)$ 上の未知関数である.

ある直交変換より, 次のような (3) の正準形を得る:

$$|\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-N/2}|\boldsymbol{\Sigma}_2|^{-N/2} g\Big(\sum_{i=1}^{2}\big[\operatorname{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\theta})' + \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i\}\big]\Big). \tag{4}$$

ただし, $\boldsymbol{\theta} = \sqrt{N}\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{X}_i$ は $p \times 1$ ベクトル, $\boldsymbol{Z}_i$ は $n \times p$ 行列である $(n = N - 1)$. したがって, (3) の $\boldsymbol{\xi}$ の推定問題を (4) の $\boldsymbol{\theta}$ の推定問題におきかえることができ, $\boldsymbol{\theta}$ の推定問題は損失関数 $L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{\theta}) = (\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})'(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ のもとで考えていくことになる. 上記の記法を用いると, Graybill-Deal 型結合推定量は $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD} = (\boldsymbol{S}_1^{-1} +$

$\boldsymbol{S}_2^{-1})^{-1}(\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2)$ と表すことができる. ここで, $\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i\,(i=1,2)$ である. この推定量を改良するために, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ を一般化した推定量の族

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{B}^{-1}\Phi\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{I}_p - \Phi)\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2 \tag{5}$$

を考えた. ただし, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2)\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{I}_p$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{F} = \mathbf{diag}\,(f_1, \ldots, f_p)$ $(f_1 \geq \cdots \geq f_p)$, Φ は各成分が $\boldsymbol{F}$ の関数である対角行列である.

Kubokawa and Srivastava (1999, 2001) による楕円型分布モデルの下での Stein-Haff identity を用いることにより, 推定量(5) のリスクを評価することにより, 次のような Stein 型結合推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST} = \boldsymbol{B}^{-1}\Phi^{ST}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{I}_p - \Phi^{ST})\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2$ を得ることができた:

$$\Phi^{ST} = \mathbf{diag}\,(\hat{\phi}_1^{ST}, \ldots, \hat{\phi}_p^{ST}), \quad \hat{\phi}_j^{ST} = \frac{\hat{\beta}_j^{ST}/(1-f_j)}{\hat{\beta}_j^{ST}/(1-f_j) + \hat{\alpha}_j^{ST}/f_j} \ (j=1,\ldots,p),$$

$$\hat{\alpha}_j^{ST} = n - p - 1 + 4(1-f_j) + 2\sum_{k\neq j}\frac{f_j(1-f_k)}{f_j - f_k},$$

$$\hat{\beta}_j^{ST} = n - p - 1 + 4f_j - 2\sum_{k\neq j}\frac{(1-f_j)f_k}{f_j - f_k}.$$

数値実験

得られた推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ と $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスクを比較するため, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ は対角行列, $(N, p) = (8, 5), (13, 10)$ の場合の数値実験を行った. 実験では, 誤差項の各行 $\boldsymbol{e}_{ij}\,(i = 1, 2, j = 1, 2, \ldots, N)$ の分布として, 多変量 t 分布と多変量 Kotz 型分布を考え, 次のような結果が得られた:

1. $\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ の各固有値が近い値をとる場合は $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスク改良率は大きくなる傾向にあり, $(N, p) = (13, 10)$ のときは最大 30%の改良がみられた.
2. 逆に, $\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ の各固有値が散らばっている場合には, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスク改良率は小さくなった. また, その固有値が極端に散らばっている場合, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ の改良率が負になるときもあるが $(p = 5)$, その大きさは -1%程度であった.
3. $\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ の各固有値が同じである場合にサンプルサイズ $N-p$ を固定したもとでは, p が増えるごとに $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスク改良率が上がった.
4. 推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ は, 密度関数 (3) のもとで導出したが, これら数値実験から密度関数 (2) のもとでも, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ の改良は有効であることがわかった.

参考文献

Graybill, F.A. and Deal, R.B. (1959). *Biometrics* **15**, 543–550.
Kubokawa, T. and Srivastava, M.S. (1999). *Ann. Statist.* **27**, 600–609.
Kubokawa, T. and Srivastava, M.S. (2001). *J. Multivariate Anal.* **76**, 138–152.
Loh, W.L. (1991). *Ann. Statist.* **19**, 297–313.

平均ベクトル間の多重比較法の保守性について

東京理科大・理　瀬尾　隆
東京理科大・院・理　冨田　真理子

平均に関する多重比較法において，すべてのペアの差(対比較)に関する同時信頼区間を構成する方法の一つに Tukey-Kramer 法 (Tukey(1953), Kramer(1956,1957)) がある．本論では，対比較に対する Tukey-Kramer 法の多変量の拡張である多変量 Tukey-Kramer 法 (Seo, Mano and Fujikoshi(1994)) について，すなわち，p 次元ベクトルのすべてのペアの差の同時信頼領域について，その保守性の程度を議論し，さらに，対照比較の場合に対する保守的な同時信頼領域法について考察する．

$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_k]$ を k 個の p 次元ベクトルの行列とし，$\widehat{\boldsymbol{M}} = [\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k]$ を $\boldsymbol{M}$ の推定量とし，$\mathrm{vec}(\widehat{\boldsymbol{M}})$ は，$\mathrm{N}_{kp}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{M}), \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{\Sigma})$ に従うものとする．ただし，$\boldsymbol{V}$ は $k \times k$ の既知行列で，$\boldsymbol{\Sigma}$ は $p \times p$ の未知行列とする．さらに，$\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{\Sigma}$ の不偏推定行列とし，$\nu\boldsymbol{S}$ は $\widehat{\boldsymbol{M}}$ と独立で $\mathrm{W}_p(\boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ に従うものとする．このとき，多変量 Tukey-Kramer 法による同時信頼領域は，

$$\{\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j - (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)\}'\boldsymbol{S}^{-1}\{\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j - (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)\} \le \frac{1}{2}q^2_{p,k,\nu}(\alpha)d_{ij}, \quad 1 \le i < j \le k$$

として与えられる．ここで，$q_{p,k,\nu}(\alpha)$ は，多変量ステューデント化範囲分布 (パラメータ p, k, 自由度 ν) (例えば，Seo and Siotani(1992) を参照) の上側 100α% 点である．この同時信頼係数は，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$ のとき，正確に $1-\alpha$ である．

このとき，多変量の場合の一般化 Tukey 予想 (Seo, Mano and Fujikoshi(1994) を参照) は次のように与えられる．

$$\Pr\left\{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j) \in \left[\boldsymbol{a}'(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j) \pm q_{p,k,\nu}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}d_{ij}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}\ \right] \right.$$
$$\left. 1 \le i < j \le k, \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^p - \{\boldsymbol{0}\}\right\} \ge 1 - \alpha.$$

すなわち，すべての i, j $(1 \le i < j \le k)$ に対して，同時信頼区間が常に保守的になるということである．

この予想については，$k = 3$ のときに成り立つことが理論的に Seo, Mano and Fujikoshi(1994) によって示され，その証明のアイデアを利用して保守性の程度を議論する．準備として，$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j, 1 \le i < j \le k\}$ とし，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})$ を

$\mathrm{N}_{kp}(\mathbf{0}, \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{\Sigma})$ に従うとする．ただし，$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k]$. このとき，次のような確率を考える．

$$Q(t, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) = \Pr\{\, (\boldsymbol{Xc})'(\nu \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{Xc}) \le t(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{Vc}) \text{ for any } \boldsymbol{c} \in \mathcal{C} \,\},$$

ただし，t は任意の固定された定数とする．この確率を考えるとき，一般性を失うことなく $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}$ であり，この確率は，$t = t_p = q^2_{p,k,\nu}(\alpha)/(2\nu)$ のとき，多変量 Tukey-Kramer 法の coverage probability と一致する．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$1 - \alpha \le Q(t_p, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) < Q(t_p, \boldsymbol{V}_0, \mathcal{C}),$$

ここに，$\boldsymbol{V}_0$ は，$\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{13}} + \sqrt{d_{23}}$, または，$\sqrt{d_{13}} = \sqrt{d_{12}} + \sqrt{d_{23}}$, または，$\sqrt{d_{23}} = \sqrt{d_{12}} + \sqrt{d_{13}}$ を満足する行列である．

同様に対照比較の場合，次の不等式が成り立つ．

$$1 - \alpha = Q(t_c, \boldsymbol{V}_1, \mathcal{D}) \le Q(t_c, \boldsymbol{V}, \mathcal{D}) < Q(t_c, \boldsymbol{V}_2, \mathcal{D}),$$

ここに，$t_c = t_c(\alpha; p, k, \nu, \boldsymbol{V}_1)$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1$ のときの $T^2_{\max\cdot c}$ の上側 $100\alpha\%$ 点であり，

$$T^2_{\max\cdot c} = \max_{1 \le i \le k-1} \left\{ (\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_k})'(d_{ik}\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_k}) \right\},$$

また，$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_k, 1 \le i \le k-1\}$ であり，$\boldsymbol{V}_1$ は，$d_{12} = d_{13} + d_{23}$ を満足し，$\boldsymbol{V}_2$ は，$\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{13}} - \sqrt{d_{23}}$, または，$\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{23}} - \sqrt{d_{13}}$ を満足する行列である．

最後に数値実験として，実際にどの程度保守的であるか調べるために，いくつかのパラメータの場合について，多変量 Tukey-Kramer 法である対比較と対照比較について，それぞれの統計量の上側パーセント点と同時信頼係数をシミュレーションにより求め，保守性の程度を考察した．

参考文献

[1] Kramer, C. Y. (1956), "Extension of Multiple Range Tests to Group Means With Unequal Number of Replications," *Biometrics,* 12, 307–310.

[2] Kramer, C. Y. (1957), "Extension of Multiple Range Tests to Group Correlated Adjusted Means ," *Biometrics,* 13, 13–18.

[3] Seo, T., Mano, S. and Fujikoshi, Y. (1994), "A generalized Tukey conjecture for multiple comparisons among mean vectors," *Journal of the American Statistical Association,* 89, 676–679.

[4] Seo, T. and Siotani, M. (1992), "The Multivariate Studentized Range and Its Upper Percentiles," *Journal of the Japan Statistical Society,* 22, 123–137.

[5] Tukey, J. W. (1953), "The Problem of Multiple Comparisons," unpublished manuscript, Princeton University.

多変量時系列における相関構造の検定について

新潟大学　経済　松田 安昌
東京大学　経済　矢島 美寛

1　はじめに

多変量定常時系列 $\{\mathbf{Z}_t = (Z_{1t}, \ldots, Z_{rt})', t = 0, \pm 1, \ldots\}$ を分析する場合、その相関構造

$$\mathrm{Cov}(Z_{as}, Z_{bt}) = \sigma_a \sigma_b \rho(a, b, t-s), \quad a, b = 1, \ldots, r,$$

を同定しなければならない。ここで σ_a^2 と σ_b^2 はそれぞれ Z_{at} と Z_{bt} の分散である。多変量自己回帰モデルが相関構造のモデル化によく使われるが、次元 r が大きい場合にはパラメータ数が飛躍的に増えてしまい推定が不安定になるという欠点がある。

次元 r が高いデータに対しては、可分相関 (separable correlation)

$$\mathrm{Cov}(Z_{as}, Z_{bt}) = \sigma_a \sigma_b \rho_1(a, b) \rho_2(t-s), \tag{1}$$

を仮定する方法がある (例えば Haslett and Raftery (1989), Martin(1990), Katanoda, Matsuda and Sugishita (2002) 等)。separable correlation を用いれば、時間方向の相関構造と空間方向の相関構造を別々に同定出来るため、非常に使いやすくなる。ところがその反面、この方法は相関構造に強い制限を加えるため、現実に適用するためにはその妥当性をよく検討する必要がある。

そこで、本報告では多変量時系列の相関構造を separable correlation で表現することができるか否かを検定する検定法を提案する。

2　検定統計量

仮説 (1) を帰無仮説とする separability の検定統計量を提案する。$Z_1, \ldots, Z_n$ を観測したとして、Z_t の有限フーリエ変換を $W(\lambda_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{s=1}^{n} Z_s \exp(-is\lambda_t)$ として、λ_t におけるピリオドグラムを $I_{Z,t} = W(\lambda_t) W(\lambda_t)^*$ と定義しておく。$\hat{f}_{U,t}$ はピリオドグラム $I_{Z,t}$ をスムージングして得られる通常の推定量でその (ab) 成分の値 $\hat{f}_{ab,t}$ は、

$$\hat{f}_{U,ab,t} = \begin{cases} \frac{1}{m/2+t} \sum_{j=-t+1}^{m/2} I_{Z,ab,t+j}, & 0 < t \le m/2, \\ \frac{1}{m+1} \sum_{j=-m/2}^{m/2} I_{Z,ab,t+j}, & m/2 < t \le [n/2] - m/2, \\ \frac{1}{[n/2]+m/2-t+1} \sum_{j=-m/2}^{[n/2]-t} I_{Z,ab,t+j}, & [n/2] - m/2 < t \le [n/2], \\ \overline{\hat{f}_{ab,-t}}, & t < 0. \end{cases}$$

で与えられる。

さて、帰無仮説 (1) の下で有効な推定量 $\hat{f}_{R,t}$ を構成する。帰無仮説の下では、$f(\lambda)$ は、$g(\lambda)$ を $\rho_2(h) = \int \exp(ih\lambda) g(\lambda) d\lambda$ を満たすものとして、

$$f_{ab}(\lambda) = \sigma_a \sigma_b \rho_1(a, b) g(\lambda) \tag{2}$$

となることを利用して次のように定義する。

$$\hat{f}_{R,t} = \hat{V}\hat{g}_t,$$

但し、

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{ab} &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_{at}Z_{bt},\\
\hat{g}_t &= \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r}\frac{\hat{f}_{U,aa,t}}{\hat{V}_{aa}}\\
&= \frac{1}{r}\mathrm{tr}\left[\hat{f}_{U,t}\hat{\Sigma}^{-1}\right],\\
\hat{\Sigma} &= \mathrm{diag}(\hat{V}_{11},\ldots,\hat{V}_{rr})
\end{aligned}$$

である。

$I_{Z,t}$ と $\hat{f}_{R,t}$ は帰無仮説の下ではその差は0に近いことが期待できる。両者の差異を

$$C_0(I_Z,\hat{f}_R) = \frac{1}{n}\sum_{t=-[n/2],t\neq 0}^{[n/2]}\mathrm{tr}(I_{Z,t}\hat{f}_{R,t}^{-1}) - r. \tag{3}$$

により数値化したものを検定に利用する。以下の仮定のもとで $C_0(I_Z,\hat{f}_R)$ の帰無仮説の下での漸近分布が求まる。

(A1) Z_t はガウス過程で $\int \log\det f(\lambda)d\lambda > -\infty$.

(A2) $f(\lambda)$ は $\lambda\in[-\pi,\pi]$ において、2階連続微分可能、

(A3) $f_{aa}(\lambda) > 0$、$a=1,\ldots,r,\ \ -\pi\leq\lambda\leq\pi$.

(A4) $m = O(n^\beta)$, $1/2<\beta<3/4$.

Theorem 1. 仮定 *(A1)-(A4)*、帰無仮説 *(1)* のもとで、$n^{1/2}C_0(I_Z,\hat{f}_R)$ は平均 *0*、分散 $S_0 = 4\pi\int\mathrm{tr}[\alpha_0(\lambda)f(\lambda)\alpha_0(\lambda)f(\lambda)]d\lambda$ の漸近正規性を持つ。ここで、

$$\alpha_0(\lambda) = \left\{\frac{1}{2\pi} - g(\lambda)\right\}\left[f^{-1}(\lambda) - (\Sigma g(\lambda))^{-1}\right].$$

次に、C_0 とは別の尺度を用いることにより、別の検定統計量を構成できる。ここでは、以下の統計量を考える。

$$C_K(\hat{f}_U,\hat{f}_R) = \sum_{t=-[n/2],t\neq 0}^{[n/2]} K(\hat{f}_{U,t}\hat{f}_{R,t}^{-1}) - K(I_r), \tag{4}$$

ここで $K(\cdot)$ は、C^{r^2} 上の正則関数である。

Theorem 2. 仮定 *(A1)-(A4)*、帰無仮説 *(1)* のもとで、$n^{1/2}C_K(\hat{f}_U,\hat{f}_R)$ は平均 *0*、分散 $S_K = 4\pi\int\mathrm{tr}[\alpha_K(\lambda)f(\lambda)\alpha_K(\lambda)f(\lambda)]d\lambda$ の漸近正規性を持つ。ここで、

$$\begin{aligned}
\alpha_K(\lambda) &= \left\{\frac{1}{2\pi} - g(\lambda)\right\}\left[f^{-1}(\lambda)\tilde{K}' - \frac{\mathrm{tr}(\tilde{K})}{r}(\Sigma g(\lambda))^{-1}\right],\\
\tilde{K} &= \left.\frac{\partial K(M)}{\partial M}\right|_{M=I_r}.
\end{aligned}$$

Sequential point estimation of a function of the exponential scale parameter

秋田大学・教育文化学部　宇野　力
新潟大学・理学部　磯貝 英一

1. 序

$X_1, X_2, X_3, \cdots$ は次の確率密度関数をもつ指数分布に従う独立な確率変数の列とする:

$$f_\sigma(x) = \sigma^{-1}\exp(-x/\sigma), \quad x > 0$$

ここで, 尺度母数 $\sigma \in (0,\infty)$ は未知である. 関数 θ: $(0,\infty) \to (0,\infty)$ は 3 回連続微分可能であるとし, 第 1 次導関数について $\theta^{'}(x) \neq 0, x > 0$ であるとする. 以下では, θ の第 2 次導関数と第 3 次導関数を, それぞれ, $\theta^{''}$ と $\theta^{(3)}$ で表記する. 本報告では, 尺度母数の関数 $\theta = \theta(\sigma)$ の推定を考える. 大きさ n の無作為標本 $X_1, \cdots, X_n$ に対して, $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とするとき, θ を $\hat{\theta}_n = \theta(\overline{X}_n)$ で推定する. 損失関数として

$$L(\hat{\theta}_n) = (\hat{\theta}_n - \theta)^2 + cn, \quad c > 0$$

を考える. ここで, c は既知定数であり, 単位標本当たりの抽出費用を意味する. このとき, リスクを $R_n = E\{L(\hat{\theta}_n)\}$ とする.

$\theta(\overline{X}_n) - \theta(\sigma) = (\overline{X}_n - \sigma)\theta^{'}(\zeta_n)$ を満たす σ と $\overline{X}_n$ の間にある確率変数 ζ_n に関して, 次の条件を仮定する:

(A0)　ある $a > 2$ に対して, $\sup_{n \geq m} E|\theta^{'}(\zeta_n)|^a < \infty$

ここで, m は初期標本数である. このとき,

$$E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = E\{(\overline{X}_n - \sigma)\theta^{'}(\zeta_n)\}^2 = \sigma^2\{\theta^{'}(\sigma)\}^2 n^{-1} + o(n^{-1}) \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$

となるので, リスクは

$$R_n = \sigma^2\{\theta^{'}(\sigma)\}^2 n^{-1} + cn + o(n^{-1})$$

となる. $o(n^{-1})$ の項を除けば, リスク R_n は標本数が

$$n_0 \approx c^{-1/2}\sigma|\theta^{'}(\sigma)| = n^* \quad (\text{とおく})$$

のとき最小となり, $R_{n_0} \approx 2cn^*$ となる.

σ は未知であるので, n_0 を用いることはできない. そこで, 逐次推測を試みる. 本報告では次の停止規則を提案する:

$$N = N_c = \inf\left\{n \geq m:\ n \geq c^{-1/2}\overline{X}_n|\theta^{'}(\overline{X}_n)|\right\}.$$

θ を $\hat{\theta}_N = \theta(\overline{X}_N)$ で推定するとき, この逐次方式のリスクは $R_N = E(\hat{\theta}_N - \theta)^2 + cE(N)$ で与えられる. 逐次方式の良さは, リグレット $R_N - 2cn^*$ によって測られる.

2. 主結果

$$h(x) = \frac{1}{x\sqrt{\{\theta^{'}(x)\}^2}}, \quad x > 0$$

とするとき, 停止規則 N は次のように表すことができる:

$$N = \inf\{n \ge m:\ Z_n \ge n^*\} \qquad ここで,\quad Z_n = n\,\frac{h(\overline{X}_n)}{h(\sigma)}\ である.$$

$Y_i = (X_i/\sigma) - 1,\quad i = 1, 2, \cdots$ とし, $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i,\quad \overline{Y}_n = n^{-1}S_n$ とおく.

$$h(\overline{X}_n) = h(\sigma) + h'(\sigma)(\overline{X}_n - \sigma) + \tfrac{1}{2}(\overline{X}_n - \sigma)^2 h''(\eta_n)$$

を満たす σ と $\overline{X}_n$ の間にある確率変数 η_n を考えると, $Z_n = n + \alpha S_n + \xi_n$ と表せる. ただし,

$$\alpha = -\left(1 + \frac{\sigma\theta''(\sigma)}{\theta'(\sigma)}\right),\quad \xi_n = n(\overline{X}_n - \sigma)^2\frac{h''(\eta_n)}{2h(\sigma)}$$

であり,

$$h''(x) = \frac{\theta'(x)}{|\theta'(x)|}\left\{2\frac{\{\theta'(x) + x\theta''(x)\}^2}{x^3\{\theta'(x)\}^3} - \frac{2\theta''(x) + x\theta^{(3)}(x)}{x^2\{\theta'(x)\}^2}\right\}$$

である. 次の条件を考える.

(A1)　ある $\varepsilon \in (0,1)$ に対して, $\left\{\left[\left(Z_n - \frac{n}{\varepsilon}\right)^+\right]^3,\ n \ge m\right\}$ は一様可積分である.

　ここで, $x^+ = \max(x, 0)$ である.

(A2)　次の (i), (ii) のうち, 少なくとも一方が成り立つ.

　(i)　$h''(\eta_n) \ge 0,\quad n \ge m.$

　(ii)　ある $b > 2$ に対して, $\sup_{n\ge m} E|h''(\eta_n)|^b < \infty.$

<u>定理 1.</u> (A1) と (A2) が成り立つならば, $c \to 0$ のとき,

$$E(N) = n^* + \rho - l + o(1)$$

である. ただし,

$$l = 1 + \frac{\sigma\theta''(\sigma)}{\theta'(\sigma)} + \frac{\sigma^2\{\theta''(\sigma)\}^2}{\{\theta'(\sigma)\}^2} - \frac{\sigma^2\theta^{(3)}(\sigma)}{2\theta'(\sigma)},$$

$$\rho = \frac{E(t + \alpha S_t)^2}{2\,E(t + \alpha S_t)},\quad t = \inf\{n \ge 1:\ n + \alpha S_n > 0\}\quad である.$$

次に, リスクについて調べる.

$$\theta(\overline{X}_N) - \theta(\sigma) = \theta'(\sigma)(\overline{X}_N - \sigma) + \tfrac{1}{2}\theta''(\sigma)(\overline{X}_N - \sigma)^2 + \tfrac{1}{6}(\overline{X}_N - \sigma)^3\theta^{(3)}(\phi_c)$$

を満たす σ と $\overline{X}_N$ の間にある確率変数 ϕ_c を考え, 次の条件を課す:

(A3)　$0 < c \le c_0$ に対して, $n^* \ge 1$ とする. ある $a > 1,\ u > 1$ に対して,

$$\sup_{0<c\le c_0} E|(n^*)^{\frac{1}{2}}\overline{Y}_N|^{4au} < \infty \quad かつ \quad \sup_{0<c\le c_0} E|\theta^{(3)}(\phi_c)|^{2au/(u-1)} < \infty.$$

<u>定理 2.</u> (A1), (A2), (A3) が成り立つならば, $c \to 0$ のとき,

$$R_N - 2cn^* = \left\{3 + 2\frac{\sigma\theta''(\sigma)}{\theta'(\sigma)} + \frac{7\sigma^2\{\theta''(\sigma)\}^2}{4\{\theta'(\sigma)\}^2} - \frac{\sigma^2\theta^{(3)}(\sigma)}{\theta'(\sigma)}\right\}c + o(c).$$

DICHOTOMIZATION REDUNDANT RANDOMIZED PLAY THE WINNER RULE FOR CONTINUOUS TREATMENT RESPONSES IN CLINICAL TRIALS

Gopaldeb Chattopadhyay
Bureau of Applied Economics and Statistics
Government of West Bengal
Burdwan
India

Aditya Chattopadhyay*
Department of Statistics
The Uninversity of

Burdwan 713104,
WB, India*

Plan of talk:

Sequential method for testing the identity of two univariate continuous distribution functions in various applications in statistics is a well-known problem. Clinical trial is one such field where the experimenters are interested in the comparison of two treatments (placebo versus new drug or between two newly launched drugs). The classical approaches are based on either fixed (or random) number of observations drawn from both the samples or a fixed number of observation drawn from one sample and a random number of observations drawn from another sample, without paying adequate attention to the problem of allocation of treatment to patients. But, if the patients enter into the system one-by-one i. e. sequentially, the problem of allocating a treatment to the patient gets much importance, especially in the case of human beings where ethically one should treat lesser number of patients by the inferior treatment as the trial progresses. With this objective several researchers have shown interest in the data dependent allocation technique to tackle the problem and the corresponding designs are known as adaptive designs. Zelen (1969), for this purpose, introduced the play-the-winner rule for dichotomous responses. Later on Wei and Durham (1978) and Wei (1979) introduced randomized play-the-winner rule. For the sake of clarity we illustrate this rule by an urn model:

Start with an urn having two types of balls A and B, 'a' number of balls of each type. When a patient enters into the system, draw a ball at random with replacement from the urn and allocate treatment A to the patient provided the ball drawn is of type A else allocate treatment B to the patient. Now, observe the response of the patient. If the response is 'success' add additional 'b' number of balls of the same type in the urn else, add additional 'b' number of balls of the opposite type in the urn. Draw another ball at random with replacement from the urn to allocate treatment to the next patient. Proceed in this way to allocate treatments to all patients. This rule is denoted by RPW(a,b). On an average, this rule allows lesser number of patients to be treated by the inferior treatment.

Wei's (1979) procedure is applicable only when the responses from the treatments are dichotomous i.e. can be categorized as 'success' or 'failure'. Biswas and Basu (2001) mentioned that Wei's(1979) technique has been adopted by many authors for continuous treatment responses after dichotomizing the data by setting an appropriate threshold value (see Bandyopadhyay and Biswas, 1996, 1997a, 1997b) and discussed a robust adaptive design for continuous treatment responses in a decision theoretic setup.

In the present talk we will start with some issues of clinical trials along with certain constraints towards implementation of the concerned methods. Then we will try to provide a suitable sequential technique based on randomized play-the-winner rule when observations drawn from both samples (we will be concerned with comparison of two treatments) are of continuous type and need / can not be categorized either as 'success' or 'failure'. In the sequel we will propose an urn model along with a Mann-Whitney type test statistic for the testing procedure. Some interesting probability distributions and related results concerned with the test procedure will also be taken up. Asymptotic null distribution and various asymptotic properties of the test will be discussed. An alternative test will be proposed and some of its properties will be explored. To establish the superiority of the present test; the talk will end up with some numerical computations of the power of the proposed test as against the competing test along with the ASN studies for three parametric families of density functions.

Sequential estimation of the powers of normal and exponential scale parameters

新潟大学・理学部　磯貝 英一
新潟大学・自然科学　Ali Muktar
秋田大学・教育文化学部　宇野　力

1. 序

$X_1, X_2, X_3, \cdots$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う独立な確率変数の列とする。ここで，平均 $\mu \in (-\infty, \infty)$，分散 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ は未知である。本報告では、任意に与えられた $r \neq 0$ に対して σ^r の推定問題を考える。大きさ n の無作為標本 $X_1, \cdots, X_n$ に対して，$\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$，$\sigma_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ とするとき，σ^r を σ_n^r で推定する。損失関数として $L_n = (\sigma_n^r - \sigma^r)^2$ を考え、リスクを $R_n = E(L_n)$ とする。目的は、任意に与えられた $w > 0$ に対して、制約条件 $R_n \leq w$ を満たす最小の標本数 n_0 を用いて $\sigma_{n_0}^r$ で σ^r を推定したい。この問題は有界危険問題とよばれている。このとき、$R_n = \frac{1}{2}r^2\sigma^{2r}n^{-1} + O(n^{-2})$ $(n \to \infty)$ がわかるので、次のような不等式を考える。

$$\tfrac{1}{2}r^2\sigma^{2r}n^{-1} \leq w, \quad \text{or equivalently,} \quad n \geq \frac{r^2}{2w}\sigma^{2r} = n^* \quad (\text{とおく}).$$

簡単のために n^* は自然数であるとすると、n^* は漸近的に最適な固定標本数である。しかし、σ は未知であるので n^* は使用できない。また、制約条件を満たす固定標本による手法は存在しないことが知られている。そこで、この問題を逐次手法を用いて解くことにする。本報告では次の停止規則を提案する:

$$N = N_w(r) = \inf\left\{n \geq m : \ n \geq \frac{r^2}{2w} l_n \sigma_n^{2r}\right\}.$$

ただし、m は初期標本数で $m > \max\{1, -2r+1\}$ を満たし、l_x は $(0, \infty)$ で定義された実数値関数で

$$l_x = 1 + \frac{l_0}{x} + o(\tfrac{1}{x}) \quad (x \to \infty)$$

を満たし、l_0 は定数である。$P(N_w(r) < \infty) = 1$ が示されるので、標本抽出が停止したら、σ^r を σ_N^r で推定する。このとき、リスクは $R_N = E\{(\sigma_N^r - \sigma^r)^2\}$ で与えられる。

2. 主結果

上の有界危険問題に対して以下の結果が得られる。

平均標本数の２次の漸近展開.

<u>定理 1.</u>　もし $m > m_1(r)$ ならば、$w \to 0$ として

$$E(N) = n^* + \rho + l_0 - r(r+1) + o(1)$$

である。ただし、

$$m_1(r) = \begin{cases} 1 + 6r & \text{if} \quad r > 0 \\ 1 - 2r & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}$$

で、ρ は $0 \le \rho \le \frac{1}{2} + r^2$ を満たす定数である。

リスクに関する２次の漸近展開.

定理 2. もし $m > m_2(r)$ ならば、$w \to 0$ として

$$n^* (R_N/w - 1) = -\rho - l_0 + 5r^2 + 11r - 3 + \tfrac{1}{8}(r-2)(7r-22) + o(1)$$

である。ただし、

$$m_2(r) = \begin{cases} \max\{1+10r,\ 13+8r\} & \text{if} \quad r > 0 \\ 13 - 14r & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}$$

である。

註１. 定理１と定理２より次のことがわかる。ρ の近似値がわからないので、もし

$$l_0 > (5r^2 + 11r - 3) + \tfrac{1}{8}(r-2)(7r-22),$$

を満たす定数 l_0 を選べば、十分小さい $w > 0$ に対して、$R_N < w$ となり、制約条件が満たされる。従って、定数 l_0 の選択は重要である。また、$E(N)$, R_N はそれぞれ l_0 の増加関数、減少関数である。

次に偏りについて考える。もし $m > m_3(r)$ ならば、$w \to 0$ として

$$E(\sigma_N^r) - \sigma^r = -\tfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sign}(r)(3r+2)(n^*)^{-1/2} w^{1/2} + o(w)$$

がわかるので、偏りを補正した推定量として、

$$\hat{\sigma}_N^r = \sigma_N^r + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sign}(r)(3r+2)N^{-1/2} w^{1/2}$$

を考える。ここに、$\operatorname{sign}(r) = 1 (r>0), = -1 (r<0)$.

$$m_3(r) = \begin{cases} \max\{1+6r,\ 5+3r\} & \text{if} \quad r > 0 \\ 5 - 5r & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}$$

である。このとき、リスクは $\hat{R}_N = E\{(\hat{\sigma}_N^r - \sigma^r)^2\}$ で与えられる。ここで、２つの推定量のリスクを比較する。

定理 3. もし $m > m_2(r)$ ならば、$w \to 0$ として

$$n^*(\hat{R}_N - R_N)/w = -\tfrac{1}{8}(3r+2)(7r+2) + o(1).$$

である。

註２. 定理３より次のことがわかる。$r < -\frac{2}{3}$、または、$r > -\frac{2}{7}$ ならば、リスクを小さくするという意味で偏り補正は漸近的に有効であるが、$-\frac{2}{3} < r < -\frac{2}{7}$ ならば、漸近的に有効ではない。

回帰係数のLinex lossの下での逐次推定

長尾　壽夫（大阪府立大・工学研究科）

1. 序

Linex loss function の下で，線形回帰モデルの回帰ベクトルの逐次推定を考える．errorは平均 0 分散 σ^2 の正規分布に従うとする．Linex loss はVarian ('75) によって初めて導入され，彼は漸近的に自乗loss と同等であることを示した. Zellner('86) は非対称loss での問題を考えた. Takada and Nagao ('01) は共分散行列が未知の時，多次元正規分布の平均ベクトルのLinex loss での逐次推定を考えた. ここでは通常の回帰係数ベクトルの最小自乗推定量はLinex loss の下では漸近的にadmissible でないことを示す．すなわち，改良する推定量が存在することを示す.

2. 線形回帰モデル

線形回帰モデル$y_i = x_i'\beta + \epsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n)$. x_i は$p \times 1$の既知ベクトル，$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_p)'$ は未知ベクトル，ϵ_iは独立な確率変数 平均 0 分散 σ^2 の正規分布に従う. $X_n = (x_1, \cdots, x_n)'$ のrank は$p(\leq n)$ と仮定. loss function として

$$L(d^{(n)}, \beta) = \sum_{i=1}^{p} b_i\{\exp(a_i^{(n)}(d_i^{(n)} - \beta_i)) - a_i^{(n)}(d_i^{(n)} - \beta_i) - 1\},$$

$(X_n'X_n)^{-1} = (w_{ij,n})$, $a_i^{(n)} = a_i/(nw_{ii,n})^{1/2}$ $(i = 1, \cdots, p)$. なお $b_i > 0$, $a_i \neq 0$ は既知である. $d^{(n)} = (d_1^{(n)}, \cdots, d_p^{(n)})'$ はnヶの標本に基づくβ の推定量である. σ^2 が既知のとき，$d^{(n)} = \hat{\beta}_n - \dfrac{\lambda_n}{2n}$. ただし, $\hat{\beta}_n = (X_n'X_n)^{-1}X_n'Y_n$ $\lambda_n = \sigma^2(a_1(nw_{11,n})^{1/2}, \cdots, a_p(nw_{pp,n})^{1/2})'$. $Y_n = (y_1, \cdots, y_n)'$.

$\mathrm{E}L(d^{(n)}, \beta) = \sum_{i=1}^{p} b_i \dfrac{a_i^2\sigma^2}{2n}$, また$\mathrm{E}L(\hat{\beta}_n, \beta) = \sum_{i=1}^{p} b_i\{\exp(\dfrac{a_i^2\sigma^2}{2n}) - 1\}$. これより，$\mathrm{E}L(d^{(n)}, \beta) < \mathrm{E}L(\hat{\beta}_n, \beta)$, $\hat{\beta}_n$ はadmissible ではない. σ^2が未知の時. $\tilde{\beta}_n = \hat{\beta}_n - \dfrac{\hat{\lambda}_n}{2n}$, ただし，$\hat{\lambda}_n = \hat{\sigma}_n^2(a_1(nw_{11,n})^{1/2}, \cdots, a_p(nw_{pp,n})^{1/2})'\hat{\sigma}_n^2 = \dfrac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i'\hat{\beta}_n)^2$.

$$\mathrm{E}L(\tilde{\beta}_n, \beta) = \sum_{i=1}^{p} b_i \mathrm{E}\{\exp(\frac{a_i^2}{2n}(\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2)) + \frac{a_i^2\sigma^2}{2n} - 1\}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} b_i\{\exp(\frac{a_i^2\sigma^2}{2n})(1 + \frac{a_i^2\sigma^2}{n(n-p)})^{-(n-p)/2} + \frac{a_i^2\sigma^2}{2n} - 1\}.$$

$\nu > 0$に対して，$(1 + \dfrac{a_i^2\sigma^2}{2n\nu})^{-\nu} \leq (1 + \dfrac{a_i^2\sigma^2}{2n})^{-1}$ であるから，

$$\mathrm{E}L(\hat{\beta}_n, \beta) - \mathrm{E}L(\tilde{\beta}_n, \beta) \geq \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\ell_i}{1 + \ell_i}\{\exp(\ell_i) - \ell_i - 1\} \geq 0$$

ただし，$\ell_i = \dfrac{a_i^2\sigma^2}{2n}$. よって，$\hat{\beta}_n$ は admissible ではない.

3. 逐次推定

β の推定問題でたとえ逐次問題ととらえても最小自乗推定量は他の推定量によって，漸近的に改良されることを示す. $R_n = \mathrm{E}L(d^{(n)},\beta)+cn$ を最小にさせる標本数n. $c>0$は1ヶの標本のcost. $R_n = \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{a_i^2\sigma^2}{2n} + cn$，最小にさせる標本数$n_c$は$n_c = (\frac{\sigma^2}{2c}\sum_{i=1}^{p} b_i a_i^2)^{1/2} = (\frac{A}{2c})^{1/2}\sigma$. $A = \sum_{i=1}^{p} b_i a_i^2$. $R_{n_c} = 2cn_c$.　σ^2 は未知,

$$T_c = \inf\{n \geq m \mid n \geq \ell_n(\frac{A}{2c})^{1/2}\hat{\sigma}_n\},$$

ただし，$m>p$，$\ell_n = 1 + \frac{\ell}{n} + o(n^{-1})$.　$T_c = n$ のとき，β を $\tilde{\beta}_n = \hat{\beta}_n - \frac{\hat{\lambda}_n}{2n}$. で推定する. $R_{T_c} = \mathrm{E}\{L(\tilde{\beta}_{T_c},\beta) + cT_c\}$ とおく. regret $R_{T_c} - R_{n_c}$ を評価する. 次に$W>0$を既知な 値とする. $\mathrm{E}(d^{(n)},\beta) \leq W$ としたい. すると，$n_W = \frac{A}{2W}\sigma^2$. この問題は有界なrisk 問題 という. すると，$m>p$ として，

$$T_W = \inf\{n \geq m \mid n \geq \ell_n \frac{A}{2W}\hat{\sigma}_n^2\}.$$

この２つのstopping rule に対して、Woodroofe('77) を適用して初期標本数mについての条件を求める。また有界なrisk問題に対して、適当にℓ_nを定めることにより、ここでの条件を満たすものが得られた。また、最小自乗推定量はcおよびWを小さく取ると$\tilde{\beta}_n$によって取って代わられてinadmisibleであることが示される。詳しくは、Scientiae Mathematicae Japonicae (to appear) を参照。

参考文献

[1] Takada, Y. and Nagao, H. (2001). Sequential point estimation of a multivariate normal mean vector under a linex loss function. Submitted for publication.

[2] Varian, H.R. (1975). A Bayesian approach to real estate assessment, in" Studies in Bayesian Econometric and Statistics in honor of Leonard J. Savage" (S. E. Fienberg and A. Zellner, Ed.), 195-208, North Holland, Amsterdam.

[3] Woodroofe, M. (1977). Second order approximations for sequential point and interval estimation, Ann. Statist., 5, 984-995.

[4] Zellner, A. (1986). Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions, Jour. American Statist. Assoc., 81, 446-451.

ブートストラップ法による2つの母集団分布の有意差検定

北大・工　桜井 裕仁
筑波大・数学　髙橋 邦彦

1. はじめに

最近, 外国 (欧米) で既に使用が承認されている医薬品を日本でこれから使用可能か審査する場合に, 海外で得られている大規模な臨床データを利用しようという試みが行われており, 最近, 臨床薬理学の分野ではブリッジング・スタディ(bridging study) と呼ばれる重要な研究の 1 つとなっている. この問題は, 統計の問題としては, 互いに独立な 2 つの分布 F, G のそれぞれから抽出された 2 組の標本に基づいて, 2 つの分布が等しいか否かを検定する 2 標本問題と捉えることができる. この問題に対するノンパラメトリック検定法の中でも, Kolmogorov-Smirnov 検定はよく知られているが, ブリッジング・スタディにおけるように 2 群の標本数が極端に異なる場合の挙動の詳細についてはあまり知られていない. そこで本論ではブートストラップ法による 2 つの母集団分布の有意差検定法を提案し, 主として 2 群のデータの標本数が極めてアンバランスな場合の検定のサイズ, 検出力の検討を数値的に行った.

2. 問題設定

$\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ を互いに独立にそれぞれ連続な分布 F, G から得られた標本とする. ただし, $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F$, $Y_1, \ldots, Y_m \overset{i.i.d.}{\sim} G$ とする. このとき, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ に基づいて, 2 つの分布が等しいという仮説 $H_0 : F \equiv G$ を検定する 2 標本問題を考える. ここでは対立仮説として $H_1 : F \not\equiv G$ をとる 2 つの母集団分布の有意差検定を考える. このような 2 標本問題におけるノンパラメトリック検定の中でも, 2 標本における Kolmogorov-Smirnov 統計量

$$T(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}_n(x) - \hat{G}_m(x)| \tag{1}$$

を用いた Kolmogorov-Smirnov 検定 (以下では, K-S 検定と略す) は有名である. ただし, $\hat{F}_n(x)$, $\hat{G}_m(x)$ は経験分布関数を表し $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i \le x\}$, $\hat{G}_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} I\{Y_j \le x\}$ ($I\{\cdot\}$ は定義関数) である. そこで本論では, この検定統計量 (1) を用い, その H_0 のもとでの分布 (以下では, 帰無分布と呼ぶ) をブートストラップ法によって近似した K-S 検定法を提案した.

3. ブートストラップ検定

本節では, 大別して 2 種類のブートストラップ検定法を提案する. ブートストラップ法による 2 群の平均値の有意差検定を行う場合に, 帰無分布の近似に用いられる代表的な方法として

(A) 平均調整をした個々のサンプルからリサンプリングする方法 (Efron and Tibshirani (1993))

(B) 2 標本を混合し, 混合した標本からリサンプリングを抽出する方法 (汪・田栗 (1996))

がある. そこで本論では, これらの手法を 2 つの母集団分布の有意差検定の場合に適用し, (A), (B) にそれぞれ対応する検定法を提案する. ただし, 有意水準 α は最初に設定するものとする.

Algorithm 1 (位置調整ブートストラップ検定)

1. 初期標本 $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\boldsymbol{y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ に基づき, 検定統計量の実現値 $t_{obs} = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を計算する.
2. $\tilde{\boldsymbol{x}} = \{x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}\}$, および $\tilde{\boldsymbol{y}} = \{y_1 - \bar{y}, \ldots, y_m - \bar{y}\}$ を計算する. ただし, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$, $\bar{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j/m$ である.
3. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ から大きさ n のリサンプル $\boldsymbol{x}^{*b} = \{x_1^{*b}, \ldots, x_n^{*b}\}$ を, $\tilde{\boldsymbol{y}}$ から大きさ m のリサンプル $\boldsymbol{y}^{*b} = \{y_1^{*b}, \ldots, y_m^{*b}\}$ を無作為復元抽出し, $t^{*b} = T(\boldsymbol{x}^{*b}, \boldsymbol{y}^{*b})$ $(b = 1, \ldots, B)$ を計算する.
4. 手順 3 を B 回繰り返し,

$$H_0: \text{ reject} \quad (\text{if } \widehat{\mathrm{ASL}}_{boot} \le \alpha), \qquad H_0: \text{ accept} \quad (\text{if } \widehat{\mathrm{ASL}}_{boot} > \alpha) \tag{2}$$

により, 帰無仮説の棄却, 採択を決定する. ただし, $\widehat{\mathrm{ASL}}_{boot} = \sum_{b=1}^{B} I\{t^{*b} \geq t_{obs}\}/B$ は達成有意水準 (achieved significance level) である.

Algorithm 2 (位置・尺度調整ブートストラップ検定)

Algorithm 1 の手順 1, 4 は同様にし, 手順 2, 3 を以下のように変更する.

2° $\tilde{\boldsymbol{x}}' = \{(x_1 - \bar{x})/s_x, \ldots, (x_n - \bar{x})/s_x\}$, および $\tilde{\boldsymbol{y}}' = \{(y_1 - \bar{y})/s_y, \ldots, (y_m - \bar{y})/s_y\}$ を計算する. ただし, $s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1)}$, $s_y = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2/(m-1)}$ である.

3° $\tilde{\boldsymbol{x}}'$ から大きさ n のリサンプル $\boldsymbol{x}^{*b} = \{x_1^{*b}, \ldots, x_n^{*b}\}$ を, $\tilde{\boldsymbol{y}}'$ から大きさ m のリサンプル $\boldsymbol{y}^{*b} = \{y_1^{*b}, \ldots, y_m^{*b}\}$ を無作為復元抽出し, $t^{*b} = T(\boldsymbol{x}^{*b}, \boldsymbol{y}^{*b})$ $(b = 1, \ldots, B)$ を計算する.

Algorithm 3 (混合ブートストラップ検定 (Præstgaard, 1995))

1. 初期標本 $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\boldsymbol{y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ に基づき, 検定統計量の実現値 $t_{obs} = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を計算する.
2. 2 つの初期標本 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を混合し, $\tilde{\boldsymbol{w}} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ とおく.
3. $\tilde{\boldsymbol{w}}$ から大きさがそれぞれ n と m のリサンプル $\boldsymbol{x}^{*b} = \{x_1^{*b}, \ldots, x_n^{*b}\}$, $\boldsymbol{y}^{*b} = \{y_1^{*b}, \ldots, y_m^{*b}\}$ を無作為復元抽出し, $t^{*b} = T(\boldsymbol{x}^{*b}, \boldsymbol{y}^{*b})$ $(b = 1, \ldots, B)$ を計算する.
4. 手順 3 を B 回繰り返し, (2) と同様にして, 帰無仮説の棄却, 採択を決定する.

Algorithm 4 (位置調整混合ブートストラップ検定)

Algorithm 3 の手順 1, 4 は同様にし, 手順 2, 3 を以下のように変更する.

2′. $\tilde{\boldsymbol{x}}' = \{x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}\}$, および $\tilde{\boldsymbol{y}}' = \{y_1 - \bar{y}, \ldots, y_m - \bar{y}\}$ を計算し, $\tilde{\boldsymbol{w}}' = \{x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}, y_1 - \bar{y}, \ldots, y_m - \bar{y}\}$ とおく.

3′. $\tilde{\boldsymbol{w}}'$ から大きさがそれぞれ n と m のリサンプル $\boldsymbol{x}^{*b} = \{x_1^{*b}, \ldots, x_n^{*b}\}$, $\boldsymbol{y}^{*b} = \{y_1^{*b}, \ldots, y_m^{*b}\}$ を無作為復元抽出し, $t^{*b} = T(\boldsymbol{x}^{*b}, \boldsymbol{y}^{*b})$ $(b = 1, \ldots, B)$ を計算する.

Algorithm 5 (位置・尺度調整混合ブートストラップ検定)

Algorithm 3 の手順 1, 4 は同様にし, 手順 2, 3 を以下のように変更する.

2″. $\tilde{\boldsymbol{x}}'' = \{(x_1 - \bar{x})/s_x, \ldots, (x_n - \bar{x})/s_x\}$, および $\tilde{\boldsymbol{y}}'' = \{(y_1 - \bar{y})/s_y, \ldots, (y_m - \bar{y})/s_y\}$ を計算し, $\tilde{\boldsymbol{w}}'' = \{(x_1 - \bar{x})/s_x, \ldots, (x_n - \bar{x})/s_x, (y_1 - \bar{y})/s_y, \ldots, (y_m - \bar{y})/s_y\}$ とおく.

3″. $\tilde{\boldsymbol{w}}''$ から大きさがそれぞれ n と m のリサンプル $\boldsymbol{x}^{*b} = \{x_1^{*b}, \ldots, x_n^{*b}\}$, $\boldsymbol{y}^{*b} = \{y_1^{*b}, \ldots, y_m^{*b}\}$ を無作為復元抽出し, $t^{*b} = T(\boldsymbol{x}^{*b}, \boldsymbol{y}^{*b})$ $(b = 1, \ldots, B)$ を計算する.

以上の各検定法, 従来の手法である統計数値表による検定 (2 通り) を比較するためシミュレーションを行った. その結果統計数値表による検定は, それぞれ検定のサイズを過小評価, 過大評価する傾向のあることが分かった. また本論で提案した各群のデータからリサンプリングする検定法, すなわち, Algorithm 1, 2 に関しても検定のサイズを過小評価する傾向が見られた. 一方, 2 群のデータを混合した標本からリサンプリングする検定法 (Algorithm 3〜5) では, 上記のすべての場合について, 名目上の検定のサイズを維持する傾向が見られた. したがって, 2 群のデータが極めてアンバランスな場合には, Algorithm 3〜5 を適用すると安定した結果を得られる可能性のあることが示唆されるが, この点については, 今後更なる検討が必要であると考えている.

参考文献

[1] Præstgaard, J. T. (1995). Permutation and bootstrap Kolmogorov-Smirnov tests for the equality of two distributions. *Scand. J. Statist.*, **22**(3), 305–322.

[2] Sakurai, H. and Takahashi, K. (2002). Bootstrap tests for the equality of two distributions using Kolmogorov-Smirnov statistic. *Proceedings of the 6th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Vol.XVI, Computer Science III*, 318–323.

ALLOCATION OF OBSERVATIONS IN MULTIPLE COMPARISONS WITH A CONTROL

筑波大学・理工・大学院　上村泰儀
筑波大学・数学　青嶋　誠

1. INTRODUCTION

Suppose that there are $k+1$ populations $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$ where observations from π_i are distributed as $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(0 \le i \le k)$ with μ_i's and σ_i's unknown. In this paper, π_0 is considered as a control population and $\pi_1, \ldots, \pi_k$ are considered as treatment populations. We consider simultaneous inference on the k paired differences of means with the control. Let $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ and $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. Taking a sample $X_{01}, \ldots, X_{0n_0}$ of size n_0 from π_0 and a sample $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ of size n_i from π_i $(i = 1, \ldots, k)$, we define

$$R_{\boldsymbol{n}} = \{\boldsymbol{\mu} \in R^{k+1} : \mu_i - \mu_0 \in (\overline{X}_{i(n_i)} - \overline{X}_{0(n_0)} - d,\ \overline{X}_{i(n_i)} - \overline{X}_{0(n_0)} + d),\quad i = 1, \ldots, k\}, \tag{1.1}$$

where $\boldsymbol{n} = (n_0, n_1, \ldots, n_k)$ and $\overline{X}_{i(n_i)} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$. Then, for given d (> 0) and α $(0 < \alpha < 1)$, the goal of this paper is to construct a simultaneous confidence interval $R_{\boldsymbol{n}}$ satisfying the requirement that

$$P(\boldsymbol{\mu} \in R_{\boldsymbol{n}}) \ge 1 - \alpha \ \text{ for all } (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}). \tag{1.2}$$

2. AN OPTIMAL ALLOCATION

In this section, we assume that σ_i^2 $(0 \le i \le k)$ is known. Let us consider a rule for allocation of observations such that

$$\sigma_0^2/n_0 = \delta^2 \sigma_i^2/n_i \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.1}$$

for chosen $\delta(> 0)$ which is motivated by Bechhofer and Turnbull (1971). Then, for given (k, α, r), we can show that an optimal allocation of sample sizes to satisfy requirement (1.2) is given by

$$n_0 = \left[\frac{b^2\sigma_0^2}{d^2}(1 + r\delta^2)^{-1}\right] + 1, \quad n_i = \left[\frac{b^2\sigma_i^2}{d^2}(1 + r\delta^2)^{-1}\delta^2\right] + 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

where $r = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2/\sigma_0^2$, $[x]$ denotes the largest integer less than x and (δ, b) are chosen as the solutions meeting the simultaneous equations

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(\delta(z + A_r(\delta)b)) - \Phi(\delta(z - A_r(\delta)b))\}^k d\Phi(z) = 1 - \alpha, \tag{2.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(z) - \Phi(z - 2\delta A_r(\delta)b)\}^{k-1} \phi(\frac{z}{\delta} - A_r(\delta)b)(z - A_r^3(\delta) r\delta^3 b) d\Phi(z) = 0 \tag{2.3}$$

with $A_r(\delta) = (1 + r\delta^2)^{-1/2}$.

3. TWO-STAGE PROCEDURE

For fixed m (≥ 2), first take an initial sample of size m from each π_i ($i=0,1,\ldots,k$). Calculate $S^2_{i(m)} = \sum_{j=1}^{m}(X_{ij} - \overline{X}_{i(m)})^2/(m-1)$ for each π_i. Estimate r by $\widehat{r} = \sum_{i=1}^{k} S^2_{i(m)}/S^2_{0(m)}$ and compute (δ, b) values for given $(k, \alpha, \widehat{r})$ by the way given in Section 2. Let us call those values $(\widehat{\delta}, \widehat{b})$. Then, define

$$N_0 = \max\left\{ m,\ \left[\frac{\widehat{b}^2 S^2_{0(m)}}{d^2}(1+\widehat{r}\widehat{\delta}^2)^{-1}\right] + 1 \right\}, \tag{3.1}$$

$$N_i = \max\left\{ m,\ \left[\frac{\widehat{b}^2 S^2_{i(m)}}{d^2}(1+\widehat{r}\widehat{\delta}^2)^{-1}\widehat{\delta}^2\right] + 1 \right\} \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{3.2}$$

Next, according to (3.1)-(3.2), take an additional sample of size $N_i - m$ from each π_i. By combining the initial sample and the additional sample, compute $\overline{X}_{i(N_i)} = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}/N_i$ for each π_i and define $R_{\boldsymbol{N}}$ by (1.1) with $\boldsymbol{N} = (N_0, N_1, \ldots, N_k)$. It can be shown that $R_{\boldsymbol{N}}$ satisfies requirement (1.2) approximately when m is large.

4. EFFICIENCY

Under the assumption that $m = m(d)$ such that $m \to \infty$, $md^2 \to 0$ as $d \to 0$, it can be shown that

$$\lim_{d\to 0} \frac{E(\sum_{i=0}^{k} N_i)}{E(\sum_{i=0}^{k} n_i)} = 1. \tag{4.1}$$

We can also show that the proposed procedure is asymptotically more efficient than Dudewicz and Dalal (1983) and Hyakutake (1996)

References

[1] Bechhofer, R. E. and Turnbull, B. W. (1971). Optimal allocations when comparing several treatment with a control, III, Statistical Decision Theory and Related Topics I (Eds. Gupta and Yackel), Academic Press, 41-78

[2] Dudewicz, E. J. and Dalal, S. R. (1983). Multiple-comparisons with a control when variances are unknown and unequal. Amer. J. Math. Management Sci., 3, 275-295.

[3] 百武 (1996). 科研費シンポジウム講演報告集,1.1-1.5

Proportional Reduction in Variation Measure for Two-Way Contingency Tables with Ordered Categories

東京理科大学・理工　湯川智仁
東京理科大学・理工　富澤貞男

説明変数 X と,応答変数 Y からなる 2 元分割表において, X の値が与えられたときの Y の条件付分布に対する変動が, Y の周辺分布に対する変動よりもどの程度小さくなっているかを測る尺度 (proportional reduction in variation (PRV) 尺度) は, 一般に

$$\frac{V(Y)-E[V(Y|X)]}{V(Y)}$$

のように与えられる (Agresti, 1990, p.24). ここに $V(Y)$ は Y の周辺分布に対する変動を表し, $E[V(Y|X)]$ は X の分布に関して取られた条件付変動の平均である. Goodman and Kruskal (1954) は,変動の指標 $V(\cdot)$ に Gini concentration を用いた concentration coefficient と呼ばれる PRV 尺度 τ を導入し, Theil (1970) は,変動の指標に Shannon entropy を用いた uncertainty coefficient と呼ばれる PRV 尺度 U を導入した. また, Tomizawa, Seo and Ebi (1997) は, τ と U を含む一般化した PRV 尺度 $T^{(\lambda)}(\lambda>-1)$ を導入した. ここに尺度 τ, U, $T^{(\lambda)}$ は, X と Y に順序のないカテゴリを持つ分割表に適用される. 一方,矢島・宮本・富澤 (2001) は, X に順序がなく Y に順序があるカテゴリを持つ 2 元分割表において, PRV 尺度 $\psi^{(\lambda)}(\lambda>-1)$ を導入した. 本講演の目的は, X と Y の両方に順序があるカテゴリを持つ 2 元分割表において, PRV 尺度を導入することである.

2 元 $R\times C$ 分割表において, $\Pr(X=i,Y=j)=p_{ij}, \Pr(X=i)=p_{i\cdot}, \Pr(Y=j)=p_{\cdot j}(i=1,2,...,R;j=1,2,...,C)$ とする. すべての i と j に対して, $p_{i\cdot}>0$, $p_{\cdot j}\neq 1$ を仮定して, X のカテゴリに正の既知のスコア, $u_1\le u_2\le\cdots\le u_R$(あるいは $u_1\ge u_2\ge\cdots\ge u_R$) を割り振ることが可能とする. このとき, PRV 尺度を次のように導入する: $\lambda>-1$

に対して,

$$\phi^{(\lambda)}=\frac{\sum_{j=1}^{C-1}[1-\sum_{k=1}^{2}(G_{\cdot j}^{(k)})^{\lambda+1}]-\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{C-1}p_{i\cdot}^{*}[1-\sum_{k=1}^{2}(G_{ij}^{(k)}/p_{i\cdot}^{*})^{\lambda+1}]}{\sum_{j=1}^{C-1}[1-\sum_{k=1}^{2}(G_{\cdot j}^{(k)})^{\lambda+1}]},$$

ただし, $\phi^{(0)}=\lim_{\lambda\to 0}\phi^{(\lambda)}$,

$$p_{ij}^{*}=u_i p_{ij}/\mu,\quad \mu=\sum_{s=1}^{R}u_s p_{s\cdot},\quad p_{i\cdot}^{*}=\sum_{j=1}^{C}p_{ij}^{*},\quad p_{\cdot t}^{*}=\sum_{s=1}^{R}p_{st}^{*},$$

$$G_{ij}^{(1)}=\sum_{t=1}^{j}p_{it}^{*},\ \ G_{ij}^{(2)}=\sum_{t=j+1}^{C}p_{it}^{*},\ \ G_{\cdot j}^{(1)}=\sum_{t=1}^{j}p_{\cdot t}^{*},\ \ G_{\cdot j}^{(2)}=\sum_{t=j+1}^{C}p_{\cdot t}^{*},$$

である. 特に $u_1=u_2=\cdots=u_R$ のとき, $\phi^{(\lambda)}$ は矢島・宮本・富澤 (2001) の尺度 $\psi^{(\lambda)}$ と一致することに注意する. また $\phi^{(\lambda)}$ は, Power-divergence を用いて表すこともできる. この尺度に用いた変動の指標は Patil and Taillie (1982) の diversity index の和である. 尺度は $0\le\phi^{(\lambda)}\le 1$ であり, 任意の $\lambda(>-1)$ に対して (i) $\phi^{(\lambda)}=0$ であるための必要十分条件は, X と Y が独立であり, (ii) $\phi^{(\lambda)}=1$ であるための必要十分条件は, 各 i に対して $p_{ij}/p_{i\cdot}=1$ となる j が存在することである. 尺度の信頼区間などはシンポジウムにて発表した.

参考文献

Agresti (1990). *Categorical Data Analysis*, Wiley.

Goodman and Kruskal (1954). *Journal of the American Statistical Association*, **49**, 732-764.

Patil and Taillie (1982). *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 548-561.

Theil (1970). *American Journal of Sociology*, **76**, 103-154.

Tomizawa, Seo and Ebi (1997). *Behaviormetrika*, **24**, 193-201.

矢島, 宮本, 富澤 (2001). 日本数学会年会統計数学分科会講演アブストラクト, 111-112.

Measure of Departure from Diagonals-Parameter Symmetry for Square Contingency Tables with Ordered Categories

加藤義行　　東京理科大学・理工
富澤貞男　　東京理科大学・理工

行と列が同じ分類からなる $r\times r$ 正方分割表において (i,j) セル確率を p_{ij} とする. Diagonals-parameter symmetry (D) モデルは

$$p_{ij}=\Delta_{j-i}p_{ji}\qquad (i<j),$$

によって定義される (Goodman,1979) . 特に $\{\Delta_{j-i}=1\}$ と $\{\Delta_{j-i}=\Delta\}$ のときが, Symmetry (S) モデルと Conditional symmetry (CS) モデルである. D モデルは本質的に $p_{ij}=\Delta_{j-i}p_{ji}$ $(i<j;j-i\neq r-1)$ と表せるので, 特に $\Delta_1=\cdots=\Delta_{r-2}=1$ とおいたモデルを Sub-symmetry (SS) モデルと呼ぶことにする. また, Marginal diagonal sub-symmetry (MDSS) モデルを次のように定義する;

$$p^{+}_{(d)}=p^{-}_{(d)}\ (d=1,\cdots,r-2),$$

ただし,

$$p^{+}_{(d)}=\sum_{j-i=d}\sum p_{ij}\ ,\ p^{-}_{(d)}=\sum_{j-i=d}\sum p_{ji}.$$

本講演の目的は, (1) D モデルからの隔たりを測る尺度,Φ_D, を提案すること, また (2) SS モデルと MDSS モデルからの隔たりを測る尺度,Φ_{SS}とΦ_{MDSS} を導入し, 3 つの尺度の関連性を示すことである.

今, $\{p_{ij}+p_{ji}\neq 0\}$, $\{p^{+}_{(d)}\neq 0\}$, $\{p^{-}_{(d)}\neq 0\}$ を仮定して, 尺度 Φ_D を次のように導入する:

$$\Phi_D=\frac{1}{\log 2}\ I(\{p^{**}_{ij}\};\{p^{D}_{ij}\}),$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
I(\cdot;\cdot) &= \sum\sum_{|j-i|\neq 0,r-1} p_{ij}^{**}\log\frac{p_{ij}^{**}}{p_{ij}^{D}}, \qquad p_{ij}^{**}=\frac{p_{ij}}{\delta^{*}},\\
\delta^{*} &= \sum\sum_{|j-i|\neq 0,r-1} p_{ij}, \qquad p_{(d)}=p_{(d)}^{+}+p_{(d)}^{-},\\
p_{ij}^{D} &= \frac{p_{(d)}^{+}}{p_{(d)}}\left(p_{ij}^{**}+p_{ji}^{**}\right) \quad (i<j; j-i=d),\\
&= \frac{p_{(d)}^{-}}{p_{(d)}}\left(p_{ij}^{**}+p_{ji}^{**}\right) \quad (i>j; i-j=d).
\end{aligned}
$$

このとき,次の定理が成り立つ.

定理 1. $\Phi_{SS}=\Phi_{MDSS}+\Phi_{D}$ が成り立つ.
定理 2. $\Phi_{SS}\geq\Phi_{MDSS}$ が成り立つ. 等号は, D モデルが成り立つときに限る.

ここに, $0\leq\Phi_{D}\leq 1$ (また, $0\leq\Phi_{SS}\leq 1$, $0\leq\Phi_{MDSS}<1$) である. また, (1) $\Phi_{D}=0$ であるための必要十分条件は, D モデルが成り立つことであり, (2) $\Phi_{D}=1$ であるための必要十分条件は, $\Phi_{SS}=1$ かつ $\Phi_{MDSS}=0$ であること; すなわち, (部分的) 完全非対称 ($|j-i|\neq 0, r-1$ に対して $p_{ij}=0$ (このとき $p_{ji}>0$) または, $p_{ji}=0$ (このとき $p_{ij}>0$)) と (部分的) 周辺対角対称 ($p_{(d)}^{+}=p_{(d)}^{-}$, $d=1,\cdots,r-2$) の両方が同時に成り立つことである.

参考文献

Goodman, L.A.(1979). *Biometrika* **66**, 413-418.

Tomizawa, S. and Saitoh, K. (1999). *Calcutta Statistical Association Bulletin* **49**, 31-39.

多変量正規分布の平均ベクトルの推定 -ある推定量の性質-

丸山 祐造
東京大学・空間情報科学研究センター

統計的決定理論の枠組みで推定問題を考えるとき，もっとも興味深いトピックの一つはスタイン現象の解明である．スタイン現象とは自然な推定量(MLE，UMVUE，MREなど)が非許容的である現象のことであり，Stein(1956)がp次元正規分布の平均ベクトルの推定問題で，ミニマクス推定量でもある最尤推定量が$p \geq 3$のとき非許容的であることを示したことに端を発している．

統計的決定理論の立場からは，非許容的な推定量があればそれを改良することが重要なテーマである．また許容的な推定量，あるいは推定量のクラスを構成することもまた重要なテーマである．我々が興味があるのは，非許容的な推定量を改良していてかつ許容的な推定量を提案することである．このことは推定問題に対して，最後まで責任をとるという意味で非常に重要である．なぜならば非許容的な推定量を改良する推定量を提案しても，またその推定量が非許容的であれば再びその推定量を改良するべきで，その意味では数学的により難しい問題を作り出しただけだからである．

我々は，Stein(1956)の設定，つまりXがp-変量正規分布$N(\theta, I_p)$に従うとき，損失関数$L(\delta, \theta) = \|\delta - \theta\|^2$のもとで平均ベクトル$\theta$の推定問題を考える．以下では，簡単にレビューをする．上に述べたSteinの証明は，改良する推定量を構成するやり方ではなかったので，改良する推定量(ミニマクス推定量)の具体的な構成に興味が持たれた．James-Stein(1961)は，改良する推定量

$$\delta^{JS} = (1 - (p-2)/\|X\|^2)X \tag{1}$$

(James-Stein推定量と呼ばれる．本稿ではJSEと略す．)を提案した．しかしJSEは$\|X\|^2 < p-2$のとき，Xの符号を逆転させてしまう不合理な推定量である．これを最も簡単に修正した推定量が，James-Stein positive-part推定量(JSPPEと略す．)

$$\delta_{+}^{JS} = \max(0, 1 - (p-2)/\|X\|^2)X \tag{2}$$

であり，Baranchik(1964)は，JSPPEがJSEを改良することを示した．しかし，さらにJSPPEもまた，後にBrown(1971)によって示される完備類定理によって非許容的であることがわかる．

さて最初に述べた目標からは，次のような性質を持つ推定量を導出することに我々は興味がある．

I. X を改良 (ミニマクス) し，かつ許容的な推定量

II. JSE を改良し，かつ許容的な推定量

III. JSPPE を改良し，かつ許容的な推定量

もちろんこれらの中で数学的に導出が一番難しい問題は III であり，未解決な問題として知られている．本報告ではそのような推定量を実際に提案することは出来ないが，その候補となるような推定量のクラスを提案することにする．その基礎となるのは Stein(1973) のアイデアである．Stein(1973) は，Stein Identity を提案したことで有名な論文であるが，実は興味深い一般化ベイズ推定量を与えてもいる．彼は密度関数が $||\theta||^{2-p}$ で与えられる分布と $\theta = 0$ の一点分布の重み付き分布に対する一般化ベイズ推定量を，JSE や JSPPE を改良している可能性がある推定量として提案した．この予想は密度関数が $||\theta||^{2-p}$ で与えられる事前分布に対する一般化ベイズ推定量が JSE を改良することが，Kubokawa(1991) によって示されるので，一点分布の重みが小さい場合には，的を得た予想である．ところで，決定理論的な結果について，許容性の証明は非常に簡単である．しかし改良に関する結果は，Stein(1973) 以後，JSE や JSPPE の改良はもちろんのこと，ミニマクス性 (X の改良) でさえも証明されていなかった．

我々は，Stein(1973) の事前分布を一般化し，確率 $1/(1+\beta)$ for $\beta > 0$ で球面対称な尺度混合正規分布

$$(2\pi)^{-p/2} \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^{p/2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}||\theta||^2\right) \lambda^{-a} h(\lambda) d\lambda, \tag{3}$$

を事前分布としてとり，確率 $\beta/(1+\beta)$ で $\theta = 0$ の一点分布をとるような重み付き分布を考える．このとき一般化ベイズ推定量 $\delta_\beta(X)$ は $\delta_\beta(X) = (1 - \phi_\beta(||X||^2)/||X||^2)X$ (ここで

$$\phi_\beta(w) = w \frac{\beta \int_0^1 \lambda^{p/2-a+1} h(\lambda) \exp(-w\lambda/2) d\lambda + \exp(-w/2)}{\beta \int_0^1 \lambda^{p/2-a} h(\lambda) \exp(-w\lambda/2) d\lambda + \exp(-w/2)} \tag{4}$$

である．) で与えられる．この推定量 δ_β について，許容性とミニマクス性の十分条件を与えることができる．さらに JSPPE を改良するための必要条件を考えたとき，推定量 $\delta_\phi = (1 - \phi(||X||^2)/||X||^2)X$ の ϕ の挙動が単調でなく極値を二つ持つことが要求される．これまでに知られていた一般化ベイズ推定量でそのような性質を持つ推定量はなかったが，我々は β と球面対称分布に適当な条件を仮定した下で極値を二つ持つ推定量を構成することが出来る．