

(2)「ファイナンスへの統計理論，時系列解析及びそれらの応用」に関する研究報告

柿沢佳秀（北海道大学大学院経済学研究科）：Bernstein polynomial estimation of a spectral density	115
塩浜敬之（阪大・基礎工）：複数の変化点を持つ時系列回帰モデルの漸近理 論	117
田中勝人（一橋大学大学院経済学研究科）：ノイズを含む長期記憶過程の推 測問題に対するウェーブレットの方法	119
S. AJAY CHANDRA（Osaka University）：MULTI-SAMPLE PROBLEM FOR ARCH RESIDUAL EMPIRICAL PROCESSES	121
Aditya Chattopadhyay（Chatterjee）（University of Burdwan and Hiroshima University）：A Numerical Bayesian Approach to Time Series in Space	123
甫喜本 司（北海道大学大学院水産科学研究科），藤井光昭：確率構造の変 化の速度が局所定常なスペクトルの推定に及ぼす影響について	125
松田安昌（新潟大学・経済），矢島美寛（東京大学・経済）：多変量時系列に おける相関構造の検定について	127
国友直人（東京大学・経済学部）：経験尤度推定法の改善	129
瀧本太郎，細谷雄三（東北大学・経）：非定常時系列の推定と共和分検定の 3段階アルゴリズム	131
細谷雄三（東北大学・経）：分数和分過程の不変性原理	133
増田弘毅（東京大学大学院数理科学研究科博士課程）：Asymptotic expansion in Ornstein-Uhlenbeck-based stochastic volatility models	135
内田雅之（九州大学大学院数理学研究院）：離散観測による小さな拡散過程 のパラメータ推定	137
井上昭彦（北海道大学・理）：Incorporation of memory into the Black-Scholes- Merton theory and estimation of volatility（with V. V. Anh and C. Pesee）	139
浅井 学，渡部敏明（東京都立大学）：Stock Return Volatility and Trading Volume：A Bayesian Impulse Response Analysis	141
渡部敏明（東京都立大学・経）：GARCHオプション価格付けモデルの計量分 析	143

Bernstein polynomial estimation of a spectral density

北海道大学大学院経済学研究科 柿沢 佳秀

1. はじめに

確率分布 (密度) 関数, 回帰関数, スペクトル分布 (密度) 関数推定はある意味で共通点があり, Rosenblatt (1956) と Parzen (1962) 以後, 特にカーネル法による平滑化の研究が双方の分野間で刺激を与えつつ理論発展してきた. 一方, 分布の台が分かっている場合 Vitale (1975) は次のような確率分布 (密度) 関数推定法を提案し, カーネル型密度推定量と類似した漸近バイアス, 分散, MSE を求めた. Vitale の動機は古典的な Weierstrass の近似定理にある: 有界閉区間 $[x_0, x_0 + \Delta]$ で連続な関数 $G(x)$ は m 次の Bernstein 多項式

$$B(x; m, G) = \sum_{j=0}^m G\left(x_0 + \frac{j\Delta}{m}\right) b_{jm}\left(\frac{x - x_0}{\Delta}\right)$$

で一様に近似できる (一般性を失うことなく $[0, 1]$ を考えるのが普通であるが, スペクトル推定の場合 $[0, \pi]$ を念頭に説明した). もし G が分布関数ならば $B(x; m, G)$ はベータ分布の混合分布になっており, その密度が

$$B'(x; m, G) = \frac{m}{\Delta} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ G\left(x_0 + \frac{(j+1)\Delta}{m}\right) - G\left(x_0 + \frac{j\Delta}{m}\right) \right\} b_{j,m-1}\left(\frac{x - x_0}{\Delta}\right)$$

として得られる (\mathbf{R} or \mathbf{R}^+ or \mathbf{R}^- を分布の台とすることが既知ならばデータの適当な変換をとればよい). $B(x; m, G)$ あるいは $B'(x; m, G)$ において G を経験分布関数に置き換えたとき Vitale の分布 (密度) 推定量である. Ghosal (2001) や Babu et al. (2002) は Vitale の密度推定量について強一致性と漸近正規性を示した. なお, 回帰モデルにおける回帰関数推定に対してカーネル型推定量と類似した漸近バイアス, 分散, MSE 等を求めた文献もある.

2. 推定量

本報告では上記のアプローチを定常時系列のスペクトル推定問題について考察する. (正規) 定常過程 $\{Y_t : t \in \mathbf{Z}\}$ は平均 0 で自己共分散関数 $\gamma(h) = E(Y_t Y_{t+h}) = \gamma(-h)$ をもつとする. 仮定 $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ の下で連続なスペクトル

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-ih\lambda} = \frac{1}{2\pi} \gamma(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \cos(h\lambda)$$

が定義される. 周期性と原点对称性のためスペクトル推定問題では累積スペクトル H^+ とその自然な推定量 \widehat{H}_T^+ が重要である:

$$H^+(\alpha) = 2 \int_0^\alpha f(\lambda) d\lambda, \quad \widehat{H}_T^+(\alpha) = 2 \int_0^\alpha I_T(\lambda) d\lambda \quad (\alpha \in [0, \pi]).$$

我々は H^+ に関する m 次の Bernstein 多項式近似を動機として $f(\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi]$ に対する 1 つのスペクトル推定量

$$\hat{f}_{T,m}(\alpha) = \frac{m}{2\pi} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \widehat{H}_T^+ \left(\frac{(j+1)\pi}{m} \right) - \widehat{H}_T^+ \left(\frac{j\pi}{m} \right) \right\} b_{j,m-1} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)$$

を提案する. また周期性と原点对称性から, もし $\alpha = \omega + 2\pi\nu$ ($\omega \in [-\pi, \pi] = \Pi$, $\nu \in \mathbf{Z}$) ならば $\hat{f}_{T,m}(\alpha) = \hat{f}_{T,m}(|\omega|)$ とする.

上記では Bernstein 多項式近似を土台としてピリオドグラム I_T を生で使用した自然な推定量 $\hat{f}_{T,m}$ を説明したが, Daniell スペクトル推定量

$$\hat{f}_{T,M}^{\text{Daniell}}(\alpha) = \frac{M}{2\pi} \int_{\alpha-\pi/M}^{\alpha+\pi/M} I_T(\lambda) d\lambda$$

の線形結合としても導入できる: $\alpha = \omega + 2\pi\nu$ ($\omega \in \Pi$, $\nu \in \mathbf{Z}$) のとき

$$\hat{f}_{T,m}(\alpha) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{f}_{T,2m}^{\text{Daniell}}(x_j) \binom{m-1}{j} \left(\frac{|\omega|}{\pi} \right)^j \left(1 - \frac{|\omega|}{\pi} \right)^{m-1-j}.$$

この解釈を通じて, 適当なスペクトルウィンドウ関数

$$K_M(\lambda) = M \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} K\{M(\lambda + 2\pi\nu)\}$$

による通常のスペクトル推定量

$$\hat{f}_{T,M}^K(\alpha) = \int_{\Pi} K_M(\alpha - \lambda) I_T(\lambda) d\lambda$$

を一般化した推定量

$$\hat{f}_{T,m}^{\text{BGK}}(\alpha) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{f}_{T,2m}^K(x_j) \binom{m-1}{j} \left(\frac{|\omega|}{\pi} \right)^j \left(1 - \frac{|\omega|}{\pi} \right)^{m-1-j}$$

を提案することができる. ここに, 台を $\Pi = [-\pi, \pi]$ とする (非負) 原点对称な関数 $K(x)$ は $\int_{\Pi} K(\nu) d\nu = 1$, 及び, $|K(x) - K(y)| \leq C|x - y|$ ($x, y \in \Pi$) を満たす.

3. $\hat{f}_{T,m}^{\text{BGK}}$ と $\hat{f}_{T,M}^K$ の比較

$f \in C^2$ を仮定する. 通常のカーネルスペクトル推定量 $\hat{f}_{T,M}^K$ の漸近バイアス, 漸近分散, 漸近正規性等の漸近的性質はよく知られており, 対応する漸近的性質を一般化 Bernstein スペクトル推定量 $\hat{f}_{T,m}^{\text{BGK}}$ についても考察した. 両者の漸近的な比較は次の MISE

$$\text{MISE}(\hat{f}_T) = E \left[\int_{\Pi} w(x) \{ \hat{f}_T(x) - f(x) \}^2 dx \right]$$

の主要項 AMISE による. ここに, \hat{f}_T は $\hat{f}_{T,M}^K$ あるいは $\hat{f}_{T,m}^{\text{BGK}}$ である. $M = M(T)$ と $m = m(T)$ をそれぞれの AMISE 最小化により定めるとき, そのときの AMISE のオーダーが両者とも $O(T^{-4/5})$ であり, 漸近的には同等であることが示された.

複数の変化点を持つ時系列回帰モデルの漸近理論

阪大・基礎工 塩浜敬之

1 序

時系列回帰モデルにおいてそのトレンド関数の回帰係数がある未知時点で変化するときその変化点を推定する問題はとても重要である。時系列回帰モデルで表すことのできる様々な経済指標や地震波や音声データ等において、トレンド項が観測される期間すべてにおいて一定であることはまれなことであり、この場合に変化点モデルを当てはめることが考えられる。観測値が自己相関している時系列モデルに対してある未知の時点で、平均がシフトする問題、またスペクトル密度関数に変化が起きる問題についての研究報告は数多くあり、いくつかの変化点推定量が提案されその漸近分布や一致性が議論されてきた。

変化点推定の漸近理論のほとんどは一致性と漸近分布を扱ったものであるが、Shiohama, Taniguchi and Puri (2002) では循環的な正規自己回帰移動平均型の攪乱項を持つ時系列回帰モデルに対して、ある未知時点で回帰係数が変化するときの変化点推定の問題を考えた。そして、モデルの未知母数である回帰係数と変化点の最尤推定量とベイズ推定量を定義し、その漸近理論を明らかにし、漸近有効な推定量について議論した。本論文は複数の変化点を持つ時系列回帰モデルに対する変化点推定量の漸近理論を議論した。

2 モデルと尤度比過程

次のような時系列回帰モデルを考える。

$$\begin{aligned} y_t &= \{\beta'_1 \chi(t/n \leq \tau_1) + \cdots + \beta'_{m+1} \chi(t/n > \tau_m)\} z_t + u_t \\ &= r_t(\beta_1, \dots, \beta_{m+1}, \tau) + u_t, \quad (\text{say}), \quad t = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ここで $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ は未知の回帰係数, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ は未知の変化点, χ は定義関数, u_t は平均 0 でスペクトル密度関数 $f(\lambda)$ を持つ正規循環 ARMA 過程とする。また z_t には Grenander 条件を課す。このモデルに対して母数列

$$\beta_i^{(n)} = \beta_i + D_n^{-1} b_i, \quad \text{and} \quad \tau^{(n)} = \tau + n^{-1} \rho$$

と $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)' \in \mathbb{R}^m$ を考える, ここで $D_n = \text{diag}(\sqrt{a_{11}^n(0)}, \dots, \sqrt{a_{qq}^n(0)})$, $a_{ii}^n(0) = \sum_{t=1}^n z_{it}^2$, $b_i \in \mathbb{R}^q$ for $i = 1, \dots, m+1$ である。この局所系列に対する尤度比過程は

$$\begin{aligned} Z_n(b_1, \dots, b_{m+1}, \rho) &\equiv \frac{L_n(\beta_1^{(n)}, \dots, \beta_{m+1}^{(n)}, \tau^{(n)})}{L_n(\beta_1, \dots, \beta_{m+1}, \tau)} \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k)^{-1/2} \left\{ d_n(\lambda_k) A(\lambda_k) + \overline{d_n(\lambda_k)} \overline{A(\lambda_k)} \right\} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |A(\lambda_k)|^2 \right] \end{aligned}$$

で表される, ここで $d_n(\lambda_k) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n u_t e^{it\lambda_k}$ であり

$$\begin{aligned} &A(\lambda_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi f(\lambda_k)}} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{s=[\tau_j n]+1}^{[\tau_{j+1} n]+\rho_j} (\beta_{j+1} - \beta_j)' z_s e^{-is\lambda_k} - \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{s=[\tau_{j-1} n]+1}^{[\tau_j n]+\rho_j} b_j' D_n^{-1} z_s e^{-is\lambda_k} \right\} \\ &= A_1(\lambda_k) + A_2(\lambda_k) \quad (\text{say}). \end{aligned}$$

である。

まず、この尤度比過程の漸近表現を求めた。

3 推定理論

次に最尤推定量 (MLE) とベイズ推定量 (BE) の漸近的な振る舞いを調べる. MLE

$\hat{\theta}^{(ML)'} = (\hat{b}_1^{(ML)'}, \dots, \hat{b}_{m+1}^{(ML)'}, \hat{\tau}^{(ML)'})$ と二乗損失関数に対する BE $\tilde{\theta}^{(B)'} = (\tilde{b}_1^{(B)'}, \dots, \tilde{b}_{m+1}^{(B)'}, \tilde{\tau}^{(B)'})$ は次式で定義する

$$L(\hat{b}_1^{(ML)}, \dots, \hat{\theta}_{m+1}^{(ML)}, \hat{\tau}^{(ML)}) = \max_{b_1, \dots, b_{m+1}, \tau \in \Theta} L(b_1, \dots, b_{m+1}, \tau)$$

また

$$\tilde{\theta}^{(B)} = \int_{\Theta} \theta q(\theta|Y_n) d\theta, \quad q(\theta|Y_n) = \frac{\pi(\theta) L_n(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(v) L_n(v) dv},$$

である, ここで $\pi(\theta)$ は事前分布である. さらに $Z(u), u = (b_1, \dots, b_{m+1}, \tau)$ に対して 2 つの確率変数

$$Z(\hat{u}) = \sup_{u \in \mathbb{R}^{q \times (m+1) + m}} Z(u), \quad \hat{u} = \frac{\int_{\mathbb{R}^{q \times (m+1) + m}} u Z(u) du}{\int_{\mathbb{R}^{q \times (m+1) + m}} Z(v) dv}.$$

を定義する. 以下の漸近的な結果が得られた.

Theorem 3.1. パラメータ集合 Θ は be an open subset of $\mathbb{R}^{q \times (m+1) + m}$ の閉部分集合とする. すると MLE は $(b_1, \dots, b_{m+1}, \tau) \in \Theta$ 上で一様に,

$$P \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}^{ML} = \theta$$

一様性を持ち,

$$\mathcal{L}_{\theta} \left\{ \mathcal{A}_n(\hat{\theta}^{(ML)} - \theta) \right\} \xrightarrow{D} \mathcal{L}(\hat{u}),$$

の分布に収束する, ここで $\mathcal{A}_n = \text{diag}(\underbrace{D_n, \dots, D_n}_{m+1}, \underbrace{n, \dots, n}_m)$ である. また任意の連続な損失関数に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\theta} w(\mathcal{A}_n(\hat{\theta}^{(ML)} - \theta)) = Ew(\hat{u})$$

が成り立つ.

Theorem 3.2. ベイズ推定量 $\tilde{\theta}^{(B)}$ は $\theta \in \Theta$ 上で一様に

$$P \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\theta}^{(B)} = \theta$$

一様性を持ち,

$$\mathcal{L}_{\theta} \left\{ \mathcal{A}_n(\tilde{\theta}^{(B)} - \theta) \right\} \xrightarrow{D} \mathcal{L}(\tilde{u}).$$

の分布に収束する. また任意の連続な損失関数に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\theta} w(\mathcal{A}_n(\tilde{\theta}^{(B)} - \theta)) = Ew(\tilde{u}).$$

が成り立つ.

参考文献

Shiohama, T. Taniguchi, M and Puri, M. L. (2002). Asymptotic estimation theory of change-point problems for time series regression models with its applications. Preprint.

ノイズを含む長期記憶過程の推測問題に対するウェーブレットの方法

一橋大学大学院経済学研究科 田中勝人

1. はじめに

信号にノイズが加わったモデル

$$y_t = x_t + u_t, \quad \{u_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \rho\sigma^2), \quad (1-L)^d x_t = \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (1)$$

に関連した推測問題を考察する．ここで，信号 $\{x_t\}$ は，定常あるいは非定常な長期記憶過程に従い，ノイズ $\{u_t\}$ は独立過程に従う．さらに，信号とノイズは互いに独立であると仮定する．

このとき，ノイズの有無に関する検定問題

$$H_0: \rho = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \rho > 0$$

に対するラグランジュ乗数検定は，

$$S_T = \sqrt{T} \sum_{i=1}^{T-1} \hat{\alpha}_i r_i / \left(\sum_{i=1}^{T-1} \hat{\alpha}_i^2 - \frac{6}{\pi^2} \left(\sum_{i=1}^{T-1} \frac{1}{i} \hat{\alpha}_i \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

が大きいときに H_0 を棄却する検定となる．ここで，

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \text{Cov}(z_t, z_{t-i}) / \sigma^2 \\ &= \frac{\Gamma(i-d) \Gamma(1+2d)}{\Gamma(-d) \Gamma(1+d) \Gamma(1+i+d)} \end{aligned}$$

であり， $z_t = (1-L)^d \varepsilon_t$ は， $x_t = (1-L)^{-d} \varepsilon_t$ に対する逆過程である．また， r_i は残差過程である．

ラグランジュ乗数検定の検出力は，信号が定常の場合，すなわち， $0 < d \leq 1/2$ の場合に非常に低くなる．この欠点を克服するために，ウェーブレットの方法に基づいて，信号過程に含まれる階差パラメータを推定するいくつかの方法を考察する．さらに，提案した推定量間の優劣をシミュレーション実験により比較する．

そもそも，ウェーブレット解析は，関数の近似の観点から，フーリエ解析を超える，あるいは，その欠点を補う方法として開発された．ウェーブレット解析の特長は，データを時間とスケール（周波数）という2つの観点から眺めることである．いわば，森だけでなく，木も見ることである．

本報告は，ウェーブレットの方法を，時系列がノイズで汚染されている状況に適用するものであり，そのようなデータから信号をいかに抽出したらよいかを考察した．信号としては，特に，長期記憶過程に従うものを取り上げた．そして，定常な場合だけでなく，非定常な場合についても考察した．

ここで強調したいことは、本報告の目的はデータのスムージングにあるのではなく、推定や検定などの推測を行うことである。

2. 最小 2 乗推定と最尤推定

確率過程 $\{y_t\}$ からのサイズ $T = 2^J$ の標本 $y = (y_1, \dots, y_T)'$ に対するレベル j の DWT (離散ウェーブレット変換) を W_j とする ($j = 1, \dots, J$). W_j は, $T/2^j \times 1$ のベクトルであり, その第 t 要素を $W_{j,t}$ とする. ゆるやかな条件のもとで, 各 j ごとに, $\{W_{j,t}\}$ は定常過程となり, さらに, 無相関過程となることが示される. したがって, レベル j のウェーブレット分散は t に依存しないので, これを $\sigma_j^2 = \text{Var}(W_{j,t})$ とおく.

このとき, ウェーブレット変換の帯域制限的な特性により, ウェーブレット分散は,

$$\sigma_j^2 \approx \text{positive const.} \times 4^{jd} + \rho \sigma^2 \quad (3)$$

のように近似できる. このことから, σ^2 を推定量で置き換えて, 非線形最小 2 乗法により, d を推定することが可能となる.

他方, 正規性の仮定のもとで, 対数尤度は

$$\begin{aligned} L(\rho, d, \sigma^2) &= -\frac{T}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \log |\Sigma(d) + \rho I_T| - \frac{1}{2\sigma^2} y' (\Sigma(d) + \rho I_T)^{-1} y \\ &\approx -\frac{T}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J+1} T_j \log(C_j(d) + \rho) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{J+1} \frac{W_j' W_j}{C_j(d) + \rho} \end{aligned}$$

のように近似できる. ここで,

$$\sigma_j^2 = \text{Var}(W_{j,t}) = \sigma^2 (C_j(d) + \rho)$$

である. この最大化により擬似最尤推定量が得られる.

3. DWT および DWPT に基づく MRA

DWT および DWPT (離散ウェーブレットパケット変換) は, 直交変換であるから, 逆変換により, 元のデータを復元することができる. このとき,

$$y = \sum_{j=1}^J D_j + S_J \quad (4)$$

のように表現でき, MRA (多重解像度解析) が可能となる. ここで, D_j はレベル j のウェーブレット・ディテール, S_J はレベル J のウェーブレット・スムーズと呼ばれる. ノイズの影響は, ウェーブレット・ディテールの j が小さいところに現れるので, これらを除去することにより, 信号抽出 (推定) ができる. そうすれば, 上述の (3) 式において右辺第 2 項を 0 とみなすことができ, 対数線形の回帰式から d を推定することが可能となる.

DWPT に基づく MRA も, 同様にして考えることができる.

MULTI-SAMPLE PROBLEM FOR ARCH RESIDUAL EMPIRICAL PROCESSES

S. AJAY CHANDRA

Osaka University, October 2002

c -sample rank order statistics and results. This article gives the asymptotic theory of a class of rank order statistics for c -sample problem pertaining to empirical processes based on the squared residuals from a class of ARCH models.

Let us consider the c independent random samples from the following ARCH(p) models

$$X_{i,t} = \begin{cases} \sigma_{i,t}\varepsilon_{i,t}, & \sigma_{i,t}^2 = \theta_i^0 + \sum_{l=1}^{p_i} \theta_i^l X_{i,t-l}^2 \quad \text{for } t = 1, \dots, n_i, \\ 0 & \text{for } t = -p_i + 1, \dots, 0, \quad i = 1, \dots, c, \end{cases}$$

where the $\varepsilon_{i,t}$ are i.i.d.(0,1) random variables with corresponding fourth-order cumulants $\kappa_4^{(i)}$, $\theta_i = (\theta_i^0, \theta_i^1, \dots, \theta_i^{p_i})^T \in \Theta \subset \mathbb{R}^{p_i+1}$, and $\varepsilon_{i,t}$ are independent of $X_{i,s}$, $s < t$. It is assumed that $\theta_i^0 > 0$, $\theta_i^l \geq 0$, $l = 1, \dots, p_i$, $i = 1, \dots, c$, and $\theta_i^1 + \dots + \theta_i^{p_i} < 1$. Denote by $F_i(x)$ the distribution function of $\varepsilon_{i,t}^2$ and we assume that $f_i(x) = F_i'(x)$ exists and is continuous on $(0, \infty)$.

In the following, we are concerned with the c -sample problem of testing $H_0 : F_1(x) = \dots = F_c(x)$ for all x against $H_A : F_i(x) \neq F_j(x)$ for some x , and $i \neq j$. Write $Y_{i,t} = X_{i,t}^2$, $\zeta_{i,t} = (\varepsilon_{i,t}^2 - 1)\sigma_{i,t}^2$ and $Z_{i,t} = (1, Y_{i,t}, \dots, Y_{i,t-p_i+1})^T$. Then the autoregressive representation is $Y_{i,t} = \theta_i^T Z_{i,t-1} + \zeta_{i,t}$. We first consider the estimation of θ_i . Now define the conditional least squares estimators of θ_i by $\hat{\theta}_{i,n_i} = \arg \min_{\theta_i} \mathcal{Q}_{n_i}(\theta_i)$, where $\mathcal{Q}_{n_i}(\theta_i) = \sum_{t=2}^{n_i} (Y_{i,t} - \theta_i^T Z_{i,t-1})^2$, $i = 1, \dots, c$ (see Tjøstheim (1986)). Then empirical squared residuals are given by $\hat{\varepsilon}_{i,t}^2 = X_{i,t}^2 / \hat{\sigma}_{i,t}^2$, where $\hat{\sigma}_{i,t}^2 = \hat{\theta}_{i,n_i}^T Z_{i,t-1} + \hat{\varepsilon}_{i,t}^2$, $i = 1, \dots, c$.

In the setting of Puri and Sen (1993), let $N = \sum_{i=1}^c n_i$ and $\lambda_{i,N} = n_i/N$, $i = 1, \dots, c$. For $\hat{\varepsilon}_{i,t}^2$, the size N is assumed to be such that $0 < \lambda_0 \leq \lambda_{1,N}, \dots, \lambda_{c,N} \leq 1 - \lambda_0 < 1$ hold for some $\lambda_0 \leq 1/c$. Then the combined distribution is defined by $H(x) = \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} F_i(x)$. Likewise, if $\hat{F}_{n_i}^{(i)}(x)$ denotes the empirical distribution function of $\hat{\varepsilon}_{i,t}^2$, the corresponding empirical distribution is $\hat{H}_N(x) = \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} \hat{F}_{n_i}^{(i)}(x)$. Write $\hat{B}_{n_i}^{(i)}(x) = n_i^{1/2}(\hat{F}_{n_i}^{(i)}(x) - F_i(x))$. Then $\hat{B}_{n_i}^{(i)}(x) = n_i^{-1/2} \sum_{t=1}^{n_i} [I(\hat{\varepsilon}_{i,t}^2 \leq x) - F_i(x)]$, $i = 1, \dots, c$. From the result by Horváth *et al* (2001) in the case of $c = 1$, we observe that $\hat{B}_{n_i}^{(i)}(x) = \mathcal{E}_{n_i}^{(i)}(x) + A_i x f_i(x) + \eta_{n_i}^{(i)}(x)$, where $\mathcal{E}_{n_i}^{(i)}(x) = n_i^{-1/2} \sum_{t=1}^{n_i} [I(\varepsilon_{i,t}^2 \leq x) - F_i(x)]$, $A_i = \sum_{l=0}^{p_i} n_i^{1/2}(\hat{\theta}_{i,n_i}^l - \theta_i^l)\tau_{i,l}$, $i = 1, \dots, c$, and $\sup_x |\eta_{n_i}^{(i)}(x)| = o_p(1)$ with $\tau_{i,0} = E[1/\sigma_{i,t}^2]$ and $\tau_{i,l} = E[\sigma_{i,t-l}^2 \varepsilon_{i,t-l}^2 / \sigma_{i,t}^2]$, $1 \leq l \leq p_i$. Denote by $F_{n_i}^{(i)}(x) = n_i^{-1} \sum_{t=1}^{n_i} I[\varepsilon_{i,t}^2 \leq x]$ the usual empirical distribution function of $\varepsilon_{i,t}^2$. Hence, from the preceding arguments, $\hat{H}_N(x)$ becomes $\hat{H}_N(x) = H_N(x) + \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N}^{-1/2} \lambda_{i,N} A_i x f_i(x) + \xi_N(x)$, where $H_N(x) = \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} F_{n_i}^{(i)}(x)$ and $\xi_N(x) = \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N}^{-1/2} \lambda_{i,N} \eta_{n_i}^{(i)}(x)$.

Let $S_{N,i}^{(j)} = 1$, if the i th smallest one in the combined residuals $\hat{\varepsilon}_{1,1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{1,n_1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{c,1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{c,n_c}^2$ is from $\hat{\varepsilon}_{j,1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{j,n_j}^2$, and otherwise let $S_{N,i}^{(j)} = 0$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, c$. Then consider the rank order statistics $T_{N,j} = n_j^{-1} \sum_{i=1}^N \mathcal{S}_{N,i} S_{N,i}^{(j)}$, $j = 1, \dots, c$, where the $\mathcal{S}_{N,i}$ are given constants. An equivalent representation of $T_{N,j}$ is $T_{N,j} = \int J_N[N(N+1)^{-1} \hat{H}_N(x)] d\hat{F}_{n_j}^{(j)}(x)$, $j = 1, \dots, c$, where $\mathcal{S}_{N,i} = J_N(i/(N+1))$. For typical examples of $\mathcal{S}_{N,i}$, see Puri and Sen (1993).

We now impose the following regularity conditions.

Assumption 1. (i) $J(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(u)$ exists, is not constant and has a continuous derivative $J'(u)$ on $(0,1)$; (ii) $\int \{J_N[N(N+1)^{-1} \hat{H}_N(x)] - J[n(N+1)^{-1} \hat{H}_N(x)]\} d\hat{F}_{n_j}^{(j)}(x) = o_p(N^{-1/2})$ for all $j = 1, \dots, c$; (iii) $|d^i J(u)/du^i| \leq K[u(1-u)]^{-i-\frac{1}{2}+\delta}$ for $i = 0, 1$ and some $\delta > 0$ and K any constant which does not depend on n_1, \dots, n_c , $F_1(x), \dots, F_c(x)$ and N ; (iv) $x f_j(x)$ and $x f_j'(x)$ are uniformly bounded continuous, and integrable functions on $(0, \infty)$ for all $j = 1, \dots, c$; (v) there exist constants $d_j > 0$ such that $F_j(x) \geq d_j \{x f_j(x)\}$ for all $x > 0$, $j = 1, \dots, c$.

We also require the following regularity condition.

Assumption 2. $E(Y_{i,t}^4) < \infty$, $i = 1, \dots, c$ (see Giraitis *et. al* (2000)).

In order to elucidate the asymptotics of $T_{N,j}$, $j = 1, \dots, c$, we require further settings. Recalling $\mathcal{Q}(\theta_i)$ and using the notation $\sigma_{i,t}^2(\theta_i) = \theta_i^0 + \theta_i^1 Y_{i,t-1} + \dots + \theta_i^{p_i} Y_{i,t-p_i}$, $i = 1, \dots, c$, we notice that $\partial \mathcal{Q}_{n_i} / \partial \theta_i^0 = -2 \sum_{t=2}^{n_i} (\varepsilon_{i,t}^2 - 1) \sigma_{i,t}^2(\theta_i) \equiv -2 \sum_{t=2}^{n_i} \phi_i(\varepsilon_{i,t}^2) \vartheta_i^0$, $\partial \mathcal{Q}_{n_i} / \partial \theta_i^l = -2 \sum_{t=2}^{n_i} (\varepsilon_{i,t}^2 - 1) \sigma_{i,t}^2(\theta_i) Y_{i,t-l} \equiv -2 \sum_{t=2}^{n_i} \phi_i(\varepsilon_{i,t}^2) \vartheta_i^l$, $1 \leq l \leq p_i$, $i = 1, \dots, c$, where $\phi_i(u) = u - 1$. Write $\mathcal{R}_i = 2E[\sigma_{i,t}^4(\theta_i) Z_{i,t-1} Z_{i,t-1}^T]$, and $\mathcal{U}_i = E[Z_{i,t-1} Z_{i,t-1}^T]$ and $\vartheta_i = (\vartheta_i^0, \dots, \vartheta_i^{p_i})^T$, $i = 1, \dots, c$. Then, using standard arguments, it seen that the l th component of each $\hat{\theta}_{i,n_i}$, $i = 1, \dots, c$ admits the representation $\hat{\theta}_{i,n_i}^l - \theta_i^l = n_i^{-1} \sum_{t=1}^{n_i} U_i^l \phi_i(\varepsilon_{i,t}^2) + o_p(n_i^{-1/2})$, $0 \leq l \leq p_i$, $i = 1, \dots, c$, where U_i^l is the l th component of each $\mathcal{U}_i^{-1} \vartheta_i$. Write $\alpha_i^l = E(U_i^l)$, $0 \leq l \leq p_i$ and $\tau_i = (\tau_{i,0}, \dots, \tau_{i,p_i})^T$, $i = 1, \dots, c$. Then, we have the following result.

Theorem 1. Suppose that Assumptions 1 and 2 hold and that, in addition, $\hat{\theta}_{i,n_i}$, $i = 1, \dots, c$, are the respective conditional least squares estimators of θ_i , $i = 1, \dots, c$ satisfying $\|\hat{\theta}_{i,n_i} - \theta_i\| = \mathcal{O}_p(n_i^{-1/2})$. If \mathcal{U}_i and \mathcal{R}_i ; $i = 1, \dots, c$, are positive definite matrices with bounded elements, then $N^{1/2}(T_{N,j} - \mu_{N,j})^T \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$, where $\mu_{N,j} = \int J[H(x)] dF_j(x)$ and $\Sigma = ((\sigma_{N,jk}))$ with $\sigma_{N,jj} = \sigma_{1N,jj} + \sigma_{2N,jj} + \sigma_{3N,jj} + \gamma_{N,jj}$, where $\sigma_{1N,jj} = 2[\sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} \iint_{x < y} A_i(x, y) dF_j(x) dF_j(y) + \lambda_{N,j}^{-1} \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N}^2 \iint_{x < y} A_j(x, y) dF_i(x) dF_i(y) + \lambda_{N,j}^{-1} \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} \sum_{k=1}^c \lambda_{k,N} [\iint_{x < y} A_j(x, y) dF_i(x) dF_k(y) + \iint_{y < x} A_j(y, x) dF_i(x) dF_k(y)]$, $\sigma_{2N,jj} = \omega_j^T \mathcal{U}_j^{-1} \mathcal{R}_j \mathcal{U}_j^{-1} \omega_j$, $\sigma_{3N,jj} = \sum_{i=1}^c \nu_i^T \mathcal{U}_i^{-1} \mathcal{R}_i \mathcal{U}_i^{-1} \nu_i$, and $\gamma_{N,jj} = 2[\sum_{i=1}^c \sum_{l=0}^{p_i} \lambda_{i,N} \tau_{i,l} \int h_i^l(x) \psi_i(x, y) dF_j(x) dF_j(y) + \lambda_{N,j}^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{l=0}^{p_j} \lambda_{i,N}^2 \tau_{j,l} \int h_j^l(x) \psi_j(x, y) dF_i(x) dF_i(y)]$, and $\sigma_{N,jj'} = \sigma_{1N,jj'} + \sigma_{2N,jj'}$, with $\sigma_{1N,jj'} = -\sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} [\iint_{x < y} A_j(x, y) dF_i(x) dF_{j'}(y) + \iint_{y < x} A_j(y, x) dF_i(x) dF_{j'}(y)] - \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} [\iint_{x < y} A_{j'}(x, y) dF_i(x) dF_j(y) + \iint_{y < x} A_{j'}(y, x) dF_i(x) dF_j(y)] + \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} [\iint_{x < y} A_i(x, y) dF_j(x) dF_{j'}(y) + \iint_{y < x} A_i(y, x) dF_j(x) dF_{j'}(y)]$ and $\sigma_{2N,jj'} = -\sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} \{ \sum_{l=0}^{p_j} \tau_{j,l} \int h_j^l(x) \psi_j(x, y) dF_i(x) dF_{j'}(y) + \sum_{l=0}^{p_{j'}} \tau_{j',l} \int h_{j'}^l(x) \psi_{j'}(x, y) dF_i(x) dF_j(y) + \sum_{l=0}^{p_i} \tau_{j,l} \int h_j^l(y) \psi_j(y, x) dF_i(x) dF_{j'}(y) + \sum_{l=0}^{p_{j'}} \tau_{j',l} \int h_{j'}^l(y) \psi_{j'}(y, x) dF_i(x) dF_j(y) \}$, where $A_j(u, v) = F_j(u)[1 - F_j(v)]J'[H(u)]J'[H(v)]$, $\omega_j = -\lambda_{N,j}^{-1/2} \sum_{i=1}^c \lambda_{i,N} \int x f_j(x) J'[H(x)] dF_i(x) \times \tau_j$, $\nu_i = \lambda_{i,N}^{1/2} \int x f_i(x) J'[H(x)] dF_j(x) \times \tau_i$, $\psi_j(u, v) = v f_j(v) J'[H(u)]J'[H(v)]$, $h_j^l(v) = \alpha_j^l \int_0^v \phi_j(u) f_j(u) du$.

Observe that the terms $\sigma_{2N,jj}$, $\sigma_{3N,jj}$, $\gamma_{N,jj}$ and $\sigma_{2N,jj'}$ depend on the volatility estimators $\hat{\theta}_{i,n_i}$, $i = 1, \dots, c$. Hence, the asymptotics of $\{T_{N,j}, i = 1, \dots, c\}$ are greatly different from those for i.i.d. case.

By virtue of Theorem 1, the c -sample analogues of some tests, like Mood's two-sample and Klotz's two-sample normal scores tests can be proposed.

REFERENCES

- [1] Chandra, S. A. and Taniguchi, M. (2002). Preprint Series S-62, Department of Mathematical Science, Osaka University.
- [2] Giraitis, L., Kokoszka, P. and Leipus, R. (2000). *Econometric Theory*, **16**, 3-22.
- [3] Horváth, L., Kokoszka, P. and Teyssi re, G. (2001). *Ann. Statist.*, **29**, 445-469.
- [4] Puri, M. L. and Sen, P. K. (1993). Textbook, Wiley, New York.
- [5] Tj stheim, D. (1986). *Stoch. Proc. Appl.*, **21**, 251-273.

A Numerical Bayesian Approach to Time Series in Space

Aditya Chattopadhyay (Chatterjee)

Department of Statistics

The University of Burdwan

Burdwan, West Bengal India

- Foreign Visiting Scientist
- Department of Mathematics (Statistics Research Group)
- Faculty of Science
- Hiroshima University, Japan.

Various concepts and notions of time series analysis may be applied to the analysis of spatial data and vice-versa owing to their inherent similarity because both are offsprings of stochastic process. More mathematically speaking let $s \in R_d$ be a generic data location in d – dimensional Euclidean space and suppose the potential datum $Z(s)$ at spatial location s is a random quantity. Now let s vary over index set $D \subset R_d$ so as to generate the multivariate random field (or random process) $[Z(s): s \in D]$. In the parlance of spatial data analysis such variables are known as regionalized variable

Investigators in diverse field of scientific investigations have long been engaged towards the study of regionalized variables. In such situations it becomes apparent to estimate the value of certain measures or functional based on data collected at n data point. Let the random data points be s_1, s_2, \dots, s_n and the data are used to perform inference on the process, here, to predict some known functional $[g(Z(s)): s \in D]$. Sometimes the interest is not on $Z(\cdot)$, but in a noiseless version of it. Suppose $Z(s) = T(s) + N(s)$, $s \in D$, where $T(\cdot)$ is the true random process and $N(\cdot)$ is a white noise measurement error process. In such cases one is interested to predict a known functional $g(T(\cdot))$ of the noiseless random function $T(\cdot)$.

Spatial prediction refers to predicting either $g(Z(\cdot))$ or $g(T(\cdot))$ from data $z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_n)$ that are realization of $Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_n)$ observed at known but random spatial locations s_1, s_2, \dots, s_n . Naturally the terminology encompasses the temporal notions of *smoothing* (or interpolation), *filtering* and *prediction* that rely on time ordering for their distinction. It is well known that if temporal data are available from the past upto and including the present, smoothing refers to prediction of $g(T(\cdot))$ at time points in the past, filtering

refers to prediction of $g(T(.))$ at the present and prediction refers to prediction of $g(T(.))$ at time points in the future. In case of spatial data the corresponding analogy is missing owing to the absence of concepts like past, present and future that are the consequences of unidirectional movement of time.

In the present paper one specific form of functional will be considered that represents the total volume in space, or average of a process over a block. More mathematically speaking, in such class of problems in spatial data analysis one faces the evaluation of an integral

$$\int_D Z(s) ds$$

on the basis of data $z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_n)$, where D is a highly irregular bounded domain. As an example the z -values may be conceived as the thickness of some accumulate at random spatial locations and the functional may be considered to be the total volume of the accumulate. Another example of z -values may be grade values of ore at several three dimensional locations of an ore-body and the functional may be the average grade value of that block.

A numerical Bayesian method based on Gibbs sampling approach has been applied to solve this class of problems, which is capable of being tuned to various investigations dealing with regionalized variables. Several numerical examples based on computer simulations and one real life problem of estimation of ejecta volume based on meteorite data at Lonar Crater, Maharashtra, India will be discussed.

1. 序

データ解析の様々な局面で、確率構造が時間と共に緩やかに変化すると考えられる時系列データを取り扱う必要に迫られることがある。本報告では、波浪が発達する際の海面変動の観測データをモチーフにしてこのような性質をもつ非定常な自己回帰過程、及びその非定常なスペクトル密度関数を定義し、これらを局所的に定常とみなして自己回帰モデルをあてはめて推定する際の誤差に関する性質等について統計的観点から考察する。

2. 緩やかな構造変化を有する自己回帰過程

$\{X_n; n = 0, \pm 1, \dots\}$ は振動過程 (Priestley(1981)) に従い、かつ以下の時変係数型の自己回帰過程に従う非定常な確率過程とする;

$$X_n - \varphi_{1,n}X_{n-1} - \dots - \varphi_{p,n}X_{n-p} = \theta_n \varepsilon_n^{(n)} \quad (1)$$

$$\varphi_{i,n} = \varphi_i(t_n) \quad (i = 1, \dots, p), \quad \theta_n = \theta(t_n), \quad t_n = n\Delta T$$

ただし、 $\{\varepsilon_j^{(n)}\}$ は時点 n にて観測される独立同一分布に従う確率変数列で、 $E(\varepsilon_j^{(n)}) = 0$, $E((\varepsilon_j^{(n)})^2) = 1$, $E((\varepsilon_j^{(n)})^4) = \eta\sigma_{(n)}^4 < \infty$ を満たす。また、 $\varphi_i(\cdot)$ と $\theta(\cdot)$ は連続な時間 t の上で定義された関数、 $\Delta T > 0$ はサンプリングの時間間隔とする。ここで以下の仮定をおく。

(A1) $\phi_n(z) \equiv 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_{j,n}z^j \neq 0$ が $|z| \leq 1$ となる任意の $z \in \mathbb{C}$ で成立する。

(A2) 任意の n_0 において、以下の条件を満たすような正整数 $M(n_0)$ が存在する;

(i) $\varphi_i(t)$ と $\theta(t)$ が $t \in [t_{n_0-M(n_0)}, t_{n_0+M(n_0)}]$ なる任意の t にて連続となる。

(ii) $\varphi_i(t)$ と $\theta(t)$ は $t \in (t_{n_0-M(n_0)}, t_{n_0+M(n_0)})$ の範囲において、連続な 1 次の導関数 $\varphi'_i(t)$ と $\theta'(t)$ が存在する。

次に、 $\{X_n\}$ のスペクトル構造を定義する。振動過程に従う仮定の下で、 $\{X_n\}$ の非定常なスペクトル表現が (Priestley(1981))

$$X_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi\lambda n} A_n(\lambda) dZ_\varepsilon^{(n)}(\lambda), \quad A_n(\lambda) = A(t_n, \lambda)$$

と表現できることになる。ここで、 $\{Z_\varepsilon^{(n)}(\lambda)\}$ は時点 n において得られた $\{\varepsilon_j^{(n)}\}$ より構成される直交増分過程であり、 $A(\cdot, \cdot)$ は連続時間 t と周波数 λ の上で定義された関数で、以下の仮定を満たすものとする。

(A3) $A(t, \lambda) \equiv \theta(t)/(1 + \varphi_1(t)e^{-i2\pi\lambda} + \dots + \varphi_p(t)e^{-i2\pi p\lambda})$

(A4) 任意の n と l に対して、 $\{Z_\varepsilon^{(n)}(\lambda)\}$ と $\{Z_\varepsilon^{(n+l)}(\lambda)\}$ との直交性が保たれる。すなわち、

$$E(Z_\varepsilon^{(n)}(\lambda) \overline{Z_\varepsilon^{(n+l)}(\lambda')}) = 0 \quad (\lambda' \neq \lambda), \quad E(Z_\varepsilon^{(n)}(\lambda) \overline{Z_\varepsilon^{(n+l)}(\lambda)}) = f_\varepsilon^{(n+l)}(\lambda) \quad (\lambda' = \lambda)$$

特に $l = 0$ で、 $f_\varepsilon^{(n)}(\lambda) \equiv E(Z_\varepsilon^{(n)}(\lambda) \overline{Z_\varepsilon^{(n)}(\lambda)})$ は $\{\varepsilon_j^{(n)}\}$ の定常なスペクトル密度関数。

これらの仮定の下、 $\{X_n\}$ の 2 次までのモーメントは有限で、非定常なスペクトル密度関数 $f(\lambda, n)$ が存在する。そして、 $\{X_n\}$ の自己相関関数 $R(h, n) \equiv E(X_{n+h} \overline{X_n})$ に対して、以下を仮定する。

(A5) 任意の n に対して、 $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |R(h, n)| < \infty$ を満足する。

3. 局所時間幅の変動に定常自己回帰モデルをあてはめた際の最小2乗推定量の漸近分布

いま、 $[t_{n_0-M(n_0)+1}, t_{n_0+M(n_0)}]$ の時間幅の範囲に $\{X_{n_0-M(n_0)+j}; j = 1, \dots, 2M(n_0)\}$ のサンプルがあるものとする。この変動が定常性をもつと考え、定常な自己回帰モデル

$$X_n - \phi_1 X_{n-1} - \dots - \phi_p X_{n-p} = \kappa \varepsilon_n^{(n)}, \quad \varepsilon_n^{(n)} \sim IID(0, 1)$$

をあてはめた際に最小2乗推定量のもつ漸近的性質を調べることにする。本稿では、一次の自己回帰モデルについて、上記の推定量 $\hat{\phi}$ を用いて、(1) の時点 n_0 における値 φ_{n_0} を推定する場合を考える。上記の時間幅にあたる $2M(n_0)\Delta T$ を $2N(n_0)\Delta t$ に分割し、 $N(n_0) \rightarrow \infty$ (あるいは $\Delta t \rightarrow 0$) と細かく分割した場合の極限分布について、仮定 (A1)~(A5) の下で以下の結果が得られる。

$$\sqrt{2N(n_0)} \left(\hat{\phi} - \varphi_{n_0} - \frac{\zeta_{n_0}(M(n_0))}{\xi(M(n_0))} \right) \xrightarrow{D} N \left(0, \frac{c(0, A_{n_0}(\lambda), A'_{n_0}(\lambda)) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} c(-l, A_{n_0}(\lambda), A'_{u_A}(\lambda))}{c(0, A_{n_0}(\lambda), A'_{u_A}(\lambda))} \right)$$

バイアス項である $\frac{\zeta_{n_0}(M(n_0))}{\xi(M(n_0))}$ の分子、分母はテイラー展開よりそれぞれ以下の関数で近似できる。

$$\begin{aligned} \zeta_{n_0}(M(n_0)) &\simeq \frac{(\Delta T)^2}{3} (4S_3(1) - \varphi_{n_0} S_3(0)) M^2(n_0) - (\Delta T)^2 S_3(1) M(n_0) - \frac{(\Delta T)}{2} S_2(1) M^{-1}(n_0) \\ &\quad + K(\Delta T, S_i(\cdot), \varphi_{n_0}) + (1 - \frac{1}{2M(n_0)}) S_0(1) \\ \xi(M(n_0)) &\simeq \frac{(\Delta T)^2}{3} S_3(0) M^2(n_0) + \frac{(\Delta T)^2}{6} S_3(0) + \frac{(\Delta T)}{2} \{S_1(0) + S_2(0)\} + (1 - \frac{1}{2M(n_0)}) S_0(0) \\ K(\Delta T, S_i(\cdot), \varphi_{n_0}) &= \frac{(\Delta T)^2}{6} S_3(1) + (\Delta T) S_2(1) - \frac{(\Delta T)^2}{6} \varphi_{n_0} S_3(0) - \frac{(\Delta T) \varphi_{n_0}}{2} (S_1(0) + S_2(0)) \\ S_0(k-l) &= \int e^{i2\pi\lambda(k-l)} |A_{n_0}(\lambda)|^2 d\lambda, \quad S_1(k-l) = \int e^{i2\pi\lambda(k-l)} A_{n_0}(\lambda) \overline{A'_{u_A}(\lambda)} d\lambda, \\ S_2(k-l) &= \int e^{i2\pi\lambda(k-l)} A'_{u_A}(\lambda) \overline{A_{n_0}(\lambda)} d\lambda, \quad S_3(k-l) = \int e^{i2\pi\lambda(k-l)} |A'_{u_A}(\lambda)|^2 d\lambda \end{aligned}$$

また、 $c(-l, A_{n_0}(\lambda), A'_{n_0}(\lambda))$ は

$$\begin{aligned} &\int e^{-i2\pi\lambda l} |A_{n_0}(\lambda)|^2 d\lambda + \left\{ \int e^{-i2\pi\lambda l} (\overline{A_{n_0}(\lambda)} A'_{u_A}(\lambda) + A_{n_0}(\lambda) \overline{A'_{u_A}(\lambda)}) d\lambda \right\} M(n_0) \\ &+ \frac{4}{3} \left(\int e^{-i2\pi\lambda l} |A'_{u_A}(\lambda)|^2 d\lambda \right) M^2(n_0) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A'_{u_A}(\lambda)$ は φ_n や θ_n の変化のスピード (φ'_n, θ'_n) に依存する関数であり、バイアス項や極限分散がこれらに関して上記の形で変化していくことがわかる。

4. 構造変化の速度とスペクトルの推定誤差との関係

さて、 $\{X_n\}$ の時点 n_0 における非定常スペクトル密度関数 $f(\lambda, n_0)$ を下記を用いて推定する；

$$\hat{f}_L(\lambda | n_0, M(n_0)) = \frac{\hat{\kappa}^2}{1 - 2\hat{\phi} \cos 2\pi\lambda + \hat{\phi}^2}$$

このとき、推定誤差の2乗は次の形で近似できる。

$$S^2(\lambda | n_0, M(n_0)) \simeq \left[\frac{\frac{1}{2N(n_0)} \sum_{i=1}^{2N(n_0)-1} \left\{ X_{i+1} - \left(\varphi_{n_0} + \frac{\zeta_{n_0}(M(n_0))}{\xi(M(n_0))} \right) X_i \right\}^2}{1 - 2 \left(\varphi_{n_0} + \frac{\zeta_{n_0}(M(n_0))}{\xi(M(n_0))} \right) \cos 2\pi\lambda + \left(\varphi_{n_0} + \frac{\zeta_{n_0}(M(n_0))}{\xi(M(n_0))} \right)^2} - f_X(\lambda, n_0) \right]^2$$

参考文献

Priestley, M.B., *Spectral Analysis and Time Series*, Vol.2. Academic Press (1981).

多変量時系列における相関構造の検定について

新潟大学 経済 松田 安昌
東京大学 経済 矢島 美寛

1 はじめに

多変量定常時系列 $\{Z_t = (Z_{1t}, \dots, Z_{rt})', t = 0, \pm 1, \dots\}$ を分析する場合、その相関構造

$$\text{Cov}(Z_{as}, Z_{bt}) = \sigma_a \sigma_b \rho(a, b, t - s), \quad a, b = 1, \dots, r,$$

を同定しなければならない。ここで σ_a^2 と σ_b^2 はそれぞれ Z_{at} と Z_{bt} の分散である。多変量自己回帰モデルが相関構造のモデル化によく使われるが、次元 r が大きい場合にはパラメータ数が飛躍的に増えてしまい推定が不安定になるという欠点がある。

次元 r が高いデータに対しては、可分相関 (separable correlation)

$$\text{Cov}(Z_{as}, Z_{bt}) = \sigma_a \sigma_b \rho_1(a, b) \rho_2(t - s), \quad (1)$$

を仮定する方法がある (例えば Haslett and Raftery (1989), Martin(1990), Katanoda, Matsuda and Sugishita (2002) 等)。separable correlation を用いれば、時間方向の相関構造と空間方向の相関構造を別々に同定出来るため、非常に使いやすくなる。ところがその反面、この方法は相関構造に強い制限を加えるため、現実に応用するためにはその妥当性をよく検討する必要がある。

そこで、本報告では多変量時系列の相関構造を separable correlation で表現することができるか否かを検定する検定法を提案する。

2 検定統計量

仮説 (1) を帰無仮説とする separability の検定統計量を提案する。 Z_1, \dots, Z_n を観測したとして、 Z_t の有限フーリエ変換を $W(\lambda_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{s=1}^n Z_s \exp(-is\lambda_t)$ として、 λ_t におけるピリオドグラムを $I_{Z,t} = W(\lambda_t)W(\lambda_t)^*$ と定義しておく。 $\hat{f}_{U,t}$ はピリオドグラム $I_{Z,t}$ をスムージングして得られる通常の推定量でその (ab) 成分の値 $\hat{f}_{ab,t}$ は、

$$\hat{f}_{U,ab,t} = \begin{cases} \frac{1}{m/2+t} \sum_{j=-t+1}^{m/2} I_{Z,ab,t+j}, & 0 < t \leq m/2, \\ \frac{1}{m+1} \sum_{j=-m/2}^{m/2} I_{Z,ab,t+j}, & m/2 < t \leq [n/2] - m/2, \\ \frac{1}{[n/2]+m/2-t+1} \sum_{j=-m/2}^{[n/2]-t} I_{Z,ab,t+j}, & [n/2] - m/2 < t \leq [n/2], \\ \hat{f}_{ab,-t}, & t < 0. \end{cases}$$

で与えられる。

さて、帰無仮説 (1) の下で有効な推定量 $\hat{f}_{R,t}$ を構成する。帰無仮説の下では、 $f(\lambda)$ は、 $g(\lambda)$ を $\rho_2(h) = \int \exp(ih\lambda)g(\lambda)d\lambda$ を満たすものとして、

$$f_{ab}(\lambda) = \sigma_a \sigma_b \rho_1(a, b) g(\lambda) \quad (2)$$

となることを利用して次のように定義する。

$$\hat{f}_{R,t} = \hat{V} \hat{g}_t,$$

但し、

$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{at} Z_{bt}, \\ \hat{g}_t &= \frac{1}{r} \sum_{a=1}^r \frac{\hat{f}_{U,aa,t}}{\hat{V}_{aa}} \\ &= \frac{1}{r} \text{tr} [\hat{f}_{U,t} \hat{\Sigma}^{-1}], \\ \hat{\Sigma} &= \text{diag}(\hat{V}_{11}, \dots, \hat{V}_{rr})\end{aligned}$$

である。

$I_{Z,t}$ と $\hat{f}_{R,t}$ は帰無仮説の下ではその差は 0 に近いことが期待できる。両者の差異を

$$C_0(I_Z, \hat{f}_R) = \frac{1}{n} \sum_{t=-[n/2], t \neq 0}^{[n/2]} \text{tr}(I_{Z,t} \hat{f}_{R,t}^{-1}) - r. \quad (3)$$

により数値化したものを検定に利用する。以下の仮定のもとで $C_0(I_Z, \hat{f}_R)$ の帰無仮説の下での漸近分布が求まる。

(A1) Z_t はガウス過程で $\int \log \det f(\lambda) d\lambda > -\infty$.

(A2) $f(\lambda)$ は $\lambda \in [-\pi, \pi]$ において、2 階連続微分可能、

(A3) $f_{aa}(\lambda) > 0$, $a = 1, \dots, r$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$.

(A4) $m = O(n^\beta)$, $1/2 < \beta < 3/4$.

Theorem 1. 仮定 (A1)-(A4)、帰無仮説 (1) のもとで、 $n^{1/2}C_0(I_Z, \hat{f}_R)$ は平均 0、分散 $S_0 = 4\pi \int \text{tr}[\alpha_0(\lambda)f(\lambda)\alpha_0(\lambda)f(\lambda)]d\lambda$ の漸近正規性を持つ。ここで、

$$\alpha_0(\lambda) = \left\{ \frac{1}{2\pi} - g(\lambda) \right\} [f^{-1}(\lambda) - (\Sigma g(\lambda))^{-1}].$$

次に、 C_0 とは別の尺度を用いることにより、別の検定統計量を構成できる。ここでは、以下の統計量を考える。

$$C_K(\hat{f}_U, \hat{f}_R) = \sum_{t=-[n/2], t \neq 0}^{[n/2]} K(\hat{f}_{U,t} \hat{f}_{R,t}^{-1}) - K(I_r), \quad (4)$$

ここで $K(\cdot)$ は、 C^{n^2} 上の正則関数である。

Theorem 2. 仮定 (A1)-(A4)、帰無仮説 (1) のもとで、 $n^{1/2}C_K(\hat{f}_U, \hat{f}_R)$ は平均 0、分散 $S_K = 4\pi \int \text{tr}[\alpha_K(\lambda)f(\lambda)\alpha_K(\lambda)f(\lambda)]d\lambda$ の漸近正規性を持つ。ここで、

$$\begin{aligned}\alpha_K(\lambda) &= \left\{ \frac{1}{2\pi} - g(\lambda) \right\} \left[f^{-1}(\lambda) \tilde{K}' - \frac{\text{tr}(\tilde{K})}{r} (\Sigma g(\lambda))^{-1} \right], \\ \tilde{K} &= \left. \frac{\partial K(M)}{\partial M} \right|_{M=I_r}.\end{aligned}$$

経験尤度推定法の改善

東京大学・経済学部 国友直人

August 2002

1. この研究では計量経済モデル (econometric models) における単一構造方程式 (single structural equation) の推定方法として最大経験尤度法 (maximum empirical likelihood method、略して MEL 法) の修正法を提案した。経験尤度法は Owen (1990) により提案されたノンパラメトリック (・セミパラメトリック) 最尤推定法として近年注目を浴びている推定法であるが、Owen (2001) が詳しく説明している。

この研究で提案した修正推定量 (modified maximum empirical likelihood、略して MMEL) は MEL 推定量よりも、漸近バイアスは $O(1/n)$ のオーダー、漸近平均二乗誤差は $O(1/n^2)$ のオーダーで同時に改善していることが分かった。(ここで n は標本数を表している。) さらに、推定方程式法 (EMM) による推定量 (あるいは計量経済学では一般化モーメント法 (GMM) と呼ばれている推定量) と比較すると、特に制約条件の数が多い場合には極めて良好な性質を持つことも分かった。近年の計量経済分析では制約条件が多い場合も扱うことがあるのでこの面でも有益な結果であろう。

また若干のモンテカルロ実験によれば、漸近的な高次の理論的結果を裏付けることも分かったので、計量分析上での実用的にも有用な方法であると考えられる。また、この推定方法は方程式誤差に不均一分散が存在する場合や推定される方程式が非線形の場合にも付加的な仮定の下で拡張可能である。

なお、研究の詳しい内容は短い紙面では報告できないので、近日中に英文の論文 (東京大学経済学部国際経済共同研究センターの Discussion Paper) としてまとめて報告する予定である。この研究に関連する文献について以下で挙げておく。

2. 参考文献

- [1] Anderson, T.W., N. Kunitomo, and T. Sawa (1982), "Evaluation of the Distribution Function of the Limited Information Maximum Likelihood Estimator," *Econometrica*, Vol. 50-4, 1009-1027.
- [2] Anderson, T.W., N. Kunitomo, and K. Morimune (1986), "Comparing Single Equation Estimators in a Simultaneous Equation System," *Econometric Theory*, Vol. 2, 1-32.

- [3] Fujikoshi, Y., K. Morimune, N. Kunitomo, and M. Taniguchi (1982), "Asymptotic Expansions of the Distributions of the Estimates of Coefficients in a Simultaneous Equation System," *Journal of Econometrics*, Vol. 18, 2, 191-205.
- [4] Kitamura, Y. G. Tripathi, and H. Ahn (2001), "Empirical Likelihood-Based Inference in Conditional Moment Restriction Models," Unpublished Manuscript.
- [5] Newey, W. K. and R. Smith (2001), "Higher Order Properties of GMM and Generalized Empirical Likelihood Estimator," Unpublished Manuscript.
- [6] Owen, A. B. (1990), "Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions," *The Annals of Statistics*, Vol. 22, 300-325.
- [7] Owen, A. B. (2001), *Empirical Likelihood*, Chapman and Hall.
- [8] Qin, J. and Lawless, J. (1994), "Empirical Likelihood and General Estimating Equations," *The Annals of Statistics*, Vol. 22, 300-325.

非定常時系列の推定と共和分検定の3段階アルゴリズム

東北大学・経 瀧本太郎・細谷雄三

1. 序

非定常な VAR モデルに関する推定の議論は Johansen(1995)をはじめ、様々な方法が提案されているが、非定常な VARMA モデルでは Yap and Reinsel(1995)や Lutkepohl and Claessen(1997) などあまり多くはない。両者ともに時間領域で推定を行っている。Hannan and Medougall(1988) では尤度関数を時間領域で最適化するとほとんど繰り返し計算が行われないことが報告されている。Takimoto(2001)で尤度関数の最適化を時間領域と周波数領域の双方で行い、モンテカルロシミュレーションを用いて比較したところ、周波数領域では繰り返し計算の回数が時間領域より多いため、より効率的な推定値が得られることが多いことがわかった。また計算時間や推定の容易さから本研究では Hannan and Rissanen(1982)の方法を拡張し、ウィットル型尤度関数に基づく非定常な ARMA モデルの同定、推定、検定を一連のプロセスで行うアルゴリズムを提案し、実行するためのプログラムを開発した。また本研究では ARMA モデルを採用しているため直接ウィットル尤度比を用いた検定を提案している。これらの漸近的な性質に関しては Hosoya(2002)において展開されている。本研究では Hosoya(1989)に基づいて共和分ランクの同時検定も提案している。さらに Hosoya and Taniguchi(1982)の公式に基づいて漸近分散を評価するアルゴリズムを開発し、その使用例を示している。最後に本研究で提案している方法を用いての実証例についても検討する。

2. 漸近分散評価のアルゴリズム

Hosoya and Taniguchi (1982)の公式に基づいて漸近分散を評価するアルゴリズムを開発した。以下の ARMA モデルの漸近分散を真の値周りとウィットル推定量周りで評価し比較すると、ほぼ同じ値で符号も一致している。

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ -0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(t-1) \\ Z_2(t-1) \end{bmatrix},$$

$$Z(t) \sim i.i.d. N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0.71 \\ 0.71 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

もう一つの計算例として非正規分布の場合を取り上げている。結果は理論通り、モデルの係数の共分散行列にはほとんど影響がなく正規分布の場合とほとんど同じ値になっている。漸近分散の評価ができるようになると、検定が行えるため本アルゴリズムは大変有用である。

3. 非定常時系列

非定常時系列の推定と検定のアルゴリズムを提案する。第3段階でウィットル型尤度関数を用いている点が先行研究にない特色である。p 次元プロセス $\{Z_t(t)\}$ は以下のように生成されていると仮定する。:

$$\Delta(L)Z_t(t) = \Pi Z_t(t-1) + \sum_{k=1}^{a-1} \Gamma(k)\Delta(L)Z_t(t-k) + \Gamma g(t) + \sum_{l=0}^b \Theta(l)\varepsilon(t-l)$$

ただし $\{\varepsilon(t)\}$ は $i.i.d.(0, \Omega)$ で Ω は正値定符号で $E\{\varepsilon_i(t)\}^4 < \infty$ とする。 $\det\left\{\sum_{l=0}^b \Theta(l)z^l\right\} = 0$ の

根と $\det\left\{\Delta(z) - \Pi z - \sum_{k=1}^{a-1} \Gamma(k)\Delta(z)z^k\right\} = 0$ の根はそれぞれ 1 より大きく共通しないとする。帰無

仮説として $\text{rank}(\Pi) = r$ 、対立仮説として $\text{rank}(\Pi) = p$ を考える。

第1段階：目的は観察不可能な攪乱項の推定値を得ることである。反転可能性から無限次の AR モデルで表すことができる。ここでは AIC を用いて高次の AR で近似して残差を得る。

第2段階：第1段階で得た残差を用いて様々な ARMA の次数を当てはめ、BIC により次数の推定値を決定する。ここまでは Hannan and Rissanen(1982)とほとんど同じである。

第3段階：ウィットル型尤度関数を準ニュートン法を用いて最大化し、ウィットル推定量を得る。本研究では2種類のウィットル尤度関数を提案している。

ウィットル尤度比検定：ウィットル尤度比 $L_{i,j} = T\{\hat{Q}(i) - \hat{Q}(j)\}$ を直接計算し、Reinsel and Ahn(1992)で計算されている表を用いて検定する。

共和分ランクの同時検定：帰無仮説 $\text{rank}(\Pi) = r$ 、対立仮説 $\text{rank}(\Pi) = r+1, \dots, p$ の同時検定を考える。まずウィットル尤度比 $L_{i,j}$ の p-値を p_j として $p^* = \min_{r+1 \leq j \leq p} p_j$ を求める。次にこの検定に

対応する p-値を $P(p^*) = \Pr\{\tilde{p}^* \leq p^* | H_0\}$ としてモンテカルロシミュレーションで評価する。た

だし $\tilde{p}^* = \min_{r+1 \leq j \leq p} \tilde{p}_j$ 、 \tilde{p}_j は Hosoya and Takimoto(2000)のアルゴリズムを用いて計算される。

4. 実証例

- ・ 1960年1月から1979年12月までのアメリカのフェデラルファンドレート、90日国債、1年国債を用いて推定。同じデータを分析した Reinsel and Ahn (1992)や Yap and Reinsel(1995)より小さい共分散を持つ推定値を得た。少なくとも共和分ランクは1という結論は先行研究と整合的。同時検定を行っても結論は同じ。
- ・ 1982年1月4日から2002年2月4日までのトピックス、ニューヨーク複合株価指数、日米為替レートを用いて推定。ARMA(1,0)、ARMA(2,0)、ARMA(1,1)いずれのモデルで推定しても共和分ランクは0、つまり長期均衡関係はなく単位根が3の仮説を採択。同時検定を行っても結論は同じ。

参考文献

- [1] Hannan, E.J. and McDougall, A.J.: *Journal of the American Statistical Association*, 83, 490-498 (1988)
- [2] Hannan, E.J. and Rissanen, J.: *Biometrika*, 69, 81-94 (1982)
- [3] Hosoya, Y.: *Journal of the Royal Statistical Society*, B51, 435-447 (1989)
- [4] Hosoya, Y.: *Annual Report of the Economic Society*, Tohoku University, forth-coming (2002)
- [5] Hosoya, Y. and Takimoto, T.: *Annual Report of the Economic Society*, Tohoku University, 61, 615-635 (2000)
- [6] Hosoya, Y. and Taniguchi, M.: *The Annals of Statistics*, 10, 132-153 (1982) Correction, 21, 1115-1117 (1993)
- [7] Johansen, S.: *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models* (1995)
- [8] Lutkepohl, H. and Claessen, H.: *Journal of Econometrics*, 80, 223-239 (1997)
- [9] Takimoto, T.: *Annual Report of the Economic Society*, Tohoku University, 63, 199-224 (2001)
- [10] Takimoto, T. and Hosoya, Y. mimeo (2002)
- [11] Reinsel, G.C. and Ahn, S.K.: *Journal of Time Series Analysis*, 13, 353-375 (1992)
- [12] Yap, S.F. and Reinsel, G.C.: *Journal of the American Statistical Association*, 90, 253-267 (1995)

分数和分過程の不変性原理

東北大学・経 細谷 雄三

非定常長期従属時系列データについては、統計的推測に関わる統計量の漸近的性質はしばしば分数ブラウン運動を含む。 $d = (d(1), \dots, d(p))$ を分数指数 $d(\alpha), 1/2 < d(\alpha) < 3/2$ から構成される p -ベクトルとする。 $W(r, s, d)$ はその α 対角要素が

$$W_{\alpha\alpha}(r, s, d) = (r - s)^{d(\alpha)-1}$$

で与えられる対角行列とする。また $\{B(u), u \geq 0\}$ を初期値 $B(0) = 0$ 、共分散行列

$$E\{B(1)B(1)'\} = \Omega.$$

の p 次元ブラウン運動とする。このときタイプ 分数ブラウン運動 $Z(u), u \geq 0$ は典型的に

$$\begin{aligned} Z(u) &= \int_0^u W(u, s, d)dB(s) \quad \text{if } u > 0 \\ &= 0 \quad \text{if } u = 0. \end{aligned}$$

と定義される。いま p -ベクトル過程 $\{X(t), t \in \mathcal{Z}^{0+}\}$ が初期値 $X(0) = 0$ であり $t \geq 1$ については

$$X(t) = \sum_{l=0}^{t-1} \Phi(l)\varepsilon(t-l),$$

として与えられているとする。ここで $\Phi(l)$ はその α 対角要素が $\Gamma(l+d(\alpha))/\{\Gamma(d(\alpha))\Gamma(l+1)\}$ である $p \times p$ 対角行列とする。また $\{\varepsilon(t), t \in \mathcal{Z}\}$ は平均 0、共分散行列 Ω の 2 次定常過程とする。

本論文は $\{\varepsilon(t)\}$ が漸近的にのみマーティンゲール差分性と条件付等分散性を満足するとき、 $X(t), t = 1, \dots, T$ の標準化した和について中心極限定理が成立し、部分和過程について不変性原理が成立することを示す。これは Hosoya and Taniguchi (1982, 93) 及び Findley and Wei (1992) のアプローチを拡張したものである。すなわち $\{\varepsilon_\alpha(t)\}$ に次の仮定を置く。

(i) 正定数 γ_1 が存在して、

$$\text{Var}\{E(\varepsilon_\alpha(t+l)|\mathcal{F}_t)\} = O(l^{-2-\gamma_1}), \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

(ii) $\gamma_2 > 0$ が存在して、 t に関して一様に

$$E|E\{\varepsilon_\alpha(l)\varepsilon_\beta(m)|\mathcal{F}_t\} - E\{\varepsilon_\alpha(l)\varepsilon_\beta(m)\}| = O[\{(l-t)(m-t)\}^{-(1/2+\gamma_2)}]$$

ここで $l, m > t$.

(iii) $s_{T,\alpha}(a) \equiv \sum_{j=1}^T a_j \varepsilon_\alpha(j)$ と置くとき、 $\varepsilon > 0$ が与えられたとき正数 c_ε, γ_3 が存在して、 a と T に関して一様に

$$E[s_{T,\alpha}(a)^2 1\{|s_{T,\alpha}(a)| > \varepsilon\}] \leq c_\varepsilon \{\text{Var}(s_{T,\alpha}(a))\}^{1+\gamma_3}.$$

(iv) $\varepsilon > 0$ が与えられたとき、正数 d_ε, γ_4 が存在して

$$Pr\{|s_{T,\alpha}(a)| > \varepsilon\} \leq d_\varepsilon [Var(s_{T,\alpha}(a))]^{\gamma_5(\alpha)}$$

ここで $\gamma_5(\alpha) = (1 + \gamma_3) \max\left(1, \frac{1}{2d(\alpha)-1}\right)$.

\bar{D}_T はその α 対角要素が $\frac{1}{\Gamma(d(\alpha))} T^{d(\alpha)-1/2}$ となる対角行列とする。

定理 A. 仮定 (i), (ii), (iii) が成立するとき、 $\bar{D}_T^{-1} \sum_{t=1}^T X(t)$ は漸近的に平均 0、共分散が

$$\int_0^1 W(1, u, d) \Omega W(1, u, d) du.$$

の正規分布に従う。

定理 B. 仮定 (i), (ii), (iii), (iv) の下で、過程 $\{X_T(u), 0 \leq u \leq 1\}$ は $\{Z(u), 0 \leq u \leq 1\}$ に空間 $D[0, 1]$ において弱収束する。ここで $X_T(u) = \bar{D}_T^{-1} \sum_{t=1}^{[uT]} X(t)$.

References.

- Hosoya, Y. (1993).** Limit theorems for statistitcal inference on stationary processes with strong dependence. *Statistical Sciences and Data Analysis, Proceedings of the Third Pacific Area Statistical Conference* (K. Matsusita et al eds.), Interscience, Utrecht, 151-163.
- Hosoya, Y. (1996).** The quasi-likelihood approach to statistical inference on multiple time-series with long-range dependence. *J. of Econometrics*, vol.73, 217-36.
- Hosoya, Y., (1997a).** A limit theory for long-range dependence and statistical inference on related models. *The Annals of Statistics*, vol.25, no.1, pp.105-37.
- Hosoya, Y. and Taniguchi, M. (1982).** A central limit thorem for stationary processes and the parameter estimation of linear processes. *Ann. Statist.*, vol.10, 132-53: Correction, 1993, *Ann. Statist.*, vol.21, 115-7.

Asymptotic expansion in Ornstein-Uhlenbeck-based stochastic volatility models

東京大学大学院数理科学研究科博士課程 増田 弘毅

◆ 本報告内容は、東大数理の吉田朋広氏との共同内容である (現在準備中)。

近年, Barndorff-Nielsen and Shephard[1] において以下の 2 つの 1 次元 SDE の組で定義される確率的ボラティリティモデル (BN-S SVM) が提案され, 様々な実証分析がなされた:

$$\begin{cases} dX_t &= -\lambda X_t dt + dZ_{\lambda t}, \\ dY_t &= (\mu + \beta X_t) dt + \sqrt{X_t} dw_t + \rho dZ_{\lambda t}. \end{cases}$$

X は観測されない, 即ちデータとして利用することのできない潜在ボラティリティ過程, Y は離散的に観測される対数資産価格過程を表す. ここで Z は subordinator (単調増加 Lévy 過程), w は Z と独立な標準 Wiener 過程であり, また $\mu, \beta \in \mathbf{R}$, $\rho \leq 0$ 及び $\lambda > 0$ は定数である. [5] において, このモデルに基づいたヨーロッパ型オプションの価格付けの問題が議論されている. ここではボラティリティ過程 X が

$$X_t = e^{-\lambda t} X_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dZ_{\lambda s}$$

で与えられる Ornstein-Uhlenbeck 型過程 (OUP) によって記述されているが, この確率過程の固有の性質により, BN-S SVM は様々な解析的利点を持つことが知られている (cf. [1], [2]). 特に X 自身に関して, その SDE はその係数が線形に固定されているにも関わらず, Z を様々に変えることによって非常に緩い正則条件の下で \mathbf{R}_+ を台に持つような任意の自己分解可能分布をその不変測度 (以下これを F と書く) として持ち得ることが知られている. また F の如何に関わらず, 1 次元の場合には X の自己相関関数は $r(t) = \exp(-\lambda t)$ で与えられる (多次元の場合は F に依存する). OUP の理論的な詳細については [7] を参照されたい. 本発表においては一貫して X は強定常であるとする. これは実際 [1] でもなされている仮定であり, F の具体例としては例えば tempered stable 分布 (逆ガウス分布を含む) が挙げられる. 更に, Y の SDE に含まれる項 $\rho dZ_{\lambda t}$ は, いわゆる **leverage-effect** (volatility の上昇に伴って資産価格が下落する現象) を表現するためのものである.

$\rho = 0$ とする. $T > 0$ に対し, 期間 $[0, T]$ にわたる対数資産収益 $Y_T - Y_0$ について以下の事実が知られている (e.g. [1], [2]):

- (i) T が非常に小さい時, 即ち Y の高頻度なデータを対象とする時は, $\mathcal{L}(T^{-1/2}(Y_T - Y_0))$ は近似的に F による正規尺度平均混合に従う ([1], [2] の他, 多くの論文においてその実証がなされている).
- (ii) T が非常に大きい時, martingale CLT の適用によって $T \rightarrow \infty$ のもとで

$$T^{-1/2} \left(Y_T - Y_0 - T\mu - \beta \int_0^T X_s ds \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, m_F)$$

が成り立つ (ここで $m_F := \int xF(dx)$ の存在は仮定する). これは **Aggregational Gaussianity** とよばれている.

以上の2つの事実を踏まえ, 本発表では [8] (または [3], [6]) で与えられている一般論を援用し, ある正則条件のもとで BN-S SVM における期間 $[0, T]$ にわたる対数資産収益の分布の高次の漸近展開 (形式的 Edgeworth 展開) の公式を紹介する. より具体的には, $H_T := Y_T - Y_0 - E[Y_T - Y_0]$ に対して $T^{-1/2}H_T$ の $T \rightarrow \infty$ なる漸近手法のもとでの展開を得る. この目的の為に OUP X の mixing 性が本質的に要求されるが, 最近 [4] において mixing rate も込めてその為の十分条件が与えられたのでここではそれを直接用いる.

ここで扱う漸近展開は F のモーメント条件の下で任意に高次まで保証される為, あらゆる T に対して効果を持つと思われる. 更に, BN-S SVM の SDE の形により, その係数の計算は簡単かつ系統的になることを紹介する. 特に $\rho = 0$ の場合においては, [2] において詳しく議論されている **integrated volatility** $X_t^* := \int_0^t X_s ds$ の特別な性質が役立つ. 大雑把には以下の通り: 展開の各係数には $T^{-1/2}H_T$ の r -次 ($r \geq 2$) キュムラント $\chi_{T,r}(u)$ を計算することになるのであるが, これは BN-S SVM の構造から, $r \geq 2$ に対するキュムラント関数が

$$\chi_{T,r}(u) = (\partial_\epsilon)_0^r \log E \left[\exp \left\{ i \left(\frac{u\epsilon\beta}{T^{1/2}} + i \frac{u^2\epsilon^2}{2T} \right) X_T^* \right\} \right]$$

で与えられるため, X_T^* のそれに帰着させることができる. 更に X_T^* と F の k -次キュムラント (各々 $\kappa_{X_T^*}^{(k)}$, $\kappa_F^{(k)}$ と書く) の間には著しい関係, $\kappa_{X_T^*}^{(j)} = j\kappa_F^{(j)} I_{j-1}(t)$ が成り立つ. ここで $I_k(t)$ は $I_k(t) = \lambda^{-k}t - \lambda^{-(k+1)} \sum_{l=1}^k l^{-1}(1 - e^{-\lambda t})^l$, $k \geq 1$, かつ $I_0(t) = t$ で順次定義される関数である. このように最終的には F のキュムラントの計算に帰着させることができ, F のモーメント条件のもとで任意の高次項まで展開が可能となる.

発表当日は簡単な数値実験結果を提示する.

参考文献

- [1] Barndorff-Nielsen, O.E. and Shephard, N. (2001): *Journal of the Royal Statistical Society, Series B.* **63**, 167-241.
- [2] Barndorff-Nielsen, O.E. and Shephard, N. (2002): *Scand. J. of Statist.*, To appear.
- [3] Kusuoka, S. and Yoshida, N. (2000): *Probab. Theory Related Fields*, **116**, 457-484.
- [4] Masuda, H. (2002) On the multidimensional Ornstein-Uhlenbeck process driven by a Lévy process. Preprint.
- [5] Nicolato, E. and Venardos, E. (2002): Option pricing in stochastic volatility models of the Ornstein-Uhlenbeck type. To appear in *Mathematical Finance*.
- [6] Sakamoto, Y. and Yoshida, N. (2002): Higher order asymptotic expansion for a functional of a mixing process with applications to diffusion processes. Preprint.
- [7] Sato, K. and Yamazato, M. (1983): *Lect. Notes Math.*, **1021**, 541-551, Springer.
- [8] Yoshida, N. (2002): Partial mixing and Edgeworth expansion. Preprint.

etc.

離散観測による小さな拡散過程のパラメータ推定

内田 雅之 九州大学大学院数理学研究院

1 序

離散観測に基づく拡散過程のパラメータ推定は、応用上重要であり、近年精力的に研究されている分野である。しかしながら、離散観測に基づいた小さな拡散をもつ拡散過程のパラメータ推定についての研究はあまり多くない。Genon-Catalot [2] と Laredo [4] は拡散係数が既知という仮定の下で一致性、漸近正規性および漸近有効性をもつドリフトパラメータの推定量について考察した。Sørensen [5] はデータ数 n を固定した下でマルチンゲール推定関数を導出し、ドリフトパラメータと拡散係数パラメータにおける推定量の一致性および漸近正規性を示した。上記の3つの論文 [2, 4, 5] を考慮して、本研究では小さな拡散をもつ拡散過程のパラメータ推定に焦点を絞って、一致性、漸近正規性及び漸近有効性をもつ推定量について考察する。

2 最小コントラスト推定量

この節では、次の確率微分方程式によって定義される d -次元拡散過程を考える。

$$dX_t = b(X_t, \alpha)dt + \varepsilon\sigma(X_t, \beta)dw_t, \quad X_0 = x_0, \quad t \in [0, 1], \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad (1)$$

ここで $(\alpha, \beta) \in \bar{\Theta}_\alpha \times \bar{\Theta}_\beta$ であり、 Θ_α と Θ_β はそれぞれ、 \mathbf{R}^p と \mathbf{R}^q の有界で凸な開部分集合とする。さらに、 x_0 と ε は既知の定数、 b は $\mathbf{R}^d \times \bar{\Theta}_\alpha$ 上で定義された \mathbf{R}^d -値関数、 σ は $\mathbf{R}^d \times \bar{\Theta}_\beta$ 上で定義された $\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r$ -値関数、 w は r -次元の標準 Wiener 過程である。ドリフト b と拡散係数 σ はパラメータ α と β 以外は既知であるとする。取り扱うデータは区間 $[0, 1]$ 上で等間隔に観測された離散データとする。つまり、 $(X_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$, $t_k = k/n$ である。極限については断りがなければ、 $\varepsilon \rightarrow 0$ かつ $n \rightarrow \infty$ の下で考える。 $\alpha_0, \beta_0, \theta_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ はそれぞれ、 $\alpha, \beta, \theta = (\alpha, \beta)$ の真値とする。 X_t^0 は方程式 (1) において $\varepsilon = 0$ に対応する以下の常微分方程式の解とする： $dX_t^0 = b(X_t^0, \alpha_0)dt$, $X_0^0 = x_0$ 。 $\bar{C}_\dagger^\infty(\mathbf{R}^d \times \Theta; \mathbf{R}^m)$ を以下の2つの条件を満たす関数 f の空間とする：(i) $f(x, \theta)$ は $\mathbf{R}^d \times \Theta$ 上で定義された \mathbf{R}^m -値関数で、 (x, θ) について滑らか。(ii) すべての $|\mathbf{n}| \geq 0, |\nu| \geq 0$, x に対して $\sup_{\theta \in \Theta} |\delta^\nu \partial^{\mathbf{n}} f| \leq C(1 + |x|)^C$ となる $C > 0$ が存在する。ここで、 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ と $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$ は multi-index であり、 $l = \dim(\Theta)$, $|\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_d$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_l$, $\partial^{\mathbf{n}} = \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $i = 1, \dots, d$, $\delta^\nu = \delta_1^{\nu_1} \dots \delta_l^{\nu_l}$, $\delta_j = \partial/\partial \theta^j$, $j = 1, \dots, l$ とする。

モデル (1) について、次の仮定をおく。

[A1] $[0, 1]$ 上で方程式 (1) の強い解が一意的に存在する。

[A2] すべての $m > 0$ に対して、 $\sup_t E[|X_t|^m] < \infty$ 。

[A3] $b(x, \alpha) \in \bar{C}_\dagger^\infty(\mathbf{R}^d \times \bar{\Theta}_\alpha; \mathbf{R}^d)$, $\sigma(x, \beta) \in \bar{C}_\dagger^\infty(\mathbf{R}^d \times \bar{\Theta}_\beta; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r)$ 。

$$[A4] \inf_{x,\beta} \det[\sigma\sigma^*](x, \beta) > 0, [\sigma\sigma^*]^{-1}(x, \beta) \in \bar{C}_+^\infty(\mathbf{R}^d \times \bar{\Theta}_\beta; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d).$$

$$[A5] \alpha \neq \alpha_0 \Rightarrow b(X_t^0, \alpha) \neq b(X_t^0, \alpha_0), \beta \neq \beta_0 \Rightarrow \sigma\sigma^*(X_t^0, \beta) \neq \sigma\sigma^*(X_t^0, \beta_0).$$

さらに, ε と n に対して以下の仮定をおく.

$$[B2] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} (\varepsilon\sqrt{n})^{-1} < \infty.$$

コントラスト関数を構成するために, Kessler [3] と同様に推移確率密度関数の正規近似を考える. Florens-Zmirou [1] の Lemma 1 を使うことによって, 以下のコントラスト関数を得る. $U_{\varepsilon,n}(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n \{\log \det \Xi_{k-1}(\beta) + \varepsilon^{-2} n P_k^*(\alpha) \Xi_{k-1}(\beta)^{-1} P_k(\alpha)\}$, ここで $P_k(\alpha) = X_{t_k} - X_{t_{k-1}} - \frac{1}{n} b(X_{t_{k-1}}, \alpha)$, $\Xi_k(\beta) = [\sigma\sigma^*](X_{t_k}, \beta)$. また,

$$I(\theta_0) = \begin{pmatrix} (I_b^{i,j}(\theta_0))_{1 \leq i,j \leq p} & 0 \\ 0 & (I_\sigma^{i,j}(\theta_0))_{1 \leq i,j \leq q} \end{pmatrix},$$

ここで

$$\begin{aligned} I_b^{i,j}(\theta_0) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} b(X_s^0, \alpha_0) \right)^* [\sigma\sigma^*]^{-1}(X_s^0, \beta_0) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_j} b(X_s^0, \alpha_0) \right) ds, \\ I_\sigma^{i,j}(\theta_0) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta_i} [\sigma\sigma^*] \right) [\sigma\sigma^*]^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_j} [\sigma\sigma^*] \right) [\sigma\sigma^*]^{-1}(X_s^0, \beta_0) \right] ds. \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_{\varepsilon,n} = (\hat{\alpha}_{\varepsilon,n}, \hat{\beta}_{\varepsilon,n})$ を以下で定義された最小コントラスト推定量とする: $U_{\varepsilon,n}(\hat{\theta}_{\varepsilon,n}) = \inf_{\theta \in \bar{\Theta}} U_{\varepsilon,n}(\theta)$. P_θ を方程式 (1) の解の法則とし, \xrightarrow{P} は確率収束を, \xrightarrow{d} は分布収束を表す.

Theorem 1 [A1]-[A5], [B2] を仮定する. この時, P_{θ_0} の下で, $\hat{\theta}_{\varepsilon,n} \xrightarrow{P} \theta_0$. さらに, もし $\theta_0 \in \Theta$ で $I(\theta_0)$ が正則ならば, P_{θ_0} の下で, $(\frac{\varepsilon^{-1}(\hat{\alpha}_{\varepsilon,n} - \alpha_0)}{\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\varepsilon,n} - \beta_0)}) \xrightarrow{d} N(0, I(\theta_0)^{-1})$.

参考文献

- [1] Florens-Zmirou, D.: Approximate discrete time schemes for statistics of diffusion processes. *Statistics* **20**, 547-557 (1989)
- [2] Genon-Catalot, V.: Maximum contrast estimation for diffusion processes from discrete observations. *Statistics* **21**, 99-116 (1990)
- [3] Kessler, M.: Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations. *Scand. J. Statist.* **24**, 211-229 (1997)
- [4] Laredo, C. F.: A sufficient condition for asymptotic sufficiency of incomplete observations of a diffusion process. *Ann. Statist.* **18**, 1158-1171 (1990)
- [5] Sørensen, M.: Small dispersion asymptotics for diffusion martingale estimating functions. Preprint No. 2000-2, Department of Statistics and Operations Research, University of Copenhagen. submitted (2000)

**Incorporation of memory into the Black–Scholes–Merton
theory and estimation of volatility**
(with V. V. Anh and C. Pesee)

北海道大学・理 井上昭彦

A well-known drawback of the Black–Scholes model is that it does not explain the difference between historical volatility HV and implied volatility IV. In Anh and Inoue [AI], a dynamic model of complete financial markets was introduced, in which the prices of European calls and puts are given by the Black–Scholes formula but HV and IV may be different. The price process $(S(t) : t \in \mathbf{R})$ of this model is defined via an AR(∞)-type equation for the log-price process $Z(t) := \log S(t)$. In the simplest case, this equation takes the form

$$\frac{dZ}{dt}(t) - m = - \int_{-\infty}^t p e^{-q(t-s)} \left\{ \frac{dZ}{dt}(s) - m \right\} ds + \sigma \frac{dW}{dt}(t), \quad (1)$$

where $m \in \mathbf{R}$, $\sigma, q \in (0, \infty)$, $p \in (-q, \infty)$ and $(W(t) : t \in \mathbf{R})$ is a one-dimensional standard Brownian motion on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) . We can solve (1) explicitly to obtain, for $t \in \mathbf{R}$,

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ mt - \sigma \int_0^t \left(\int_{-\infty}^s p e^{-(p+q)(s-u)} dW(u) \right) ds + \sigma W(t) \right\}. \quad (2)$$

Compared with the Black–Scholes model, the model defined by (1) has two additional parameters p and q which describe the *memory of the market*. When $p = 0$, Eq. (2) produces the Black–Scholes price process given by

$$S(t) = S(0) \exp (mt + \sigma W(t)). \quad (3)$$

The log-price process $(Z(t) : t \in \mathbf{R})$ of (1) is a Gaussian process with stationary increments which has memory. In view of some recent studies, it is unlikely that observed stock prices and stock indices are log-normal. However, we neglected in [AI] such a consideration, recalling the fact that, after all, the Black–Scholes model, which is log-normal, is still dominant among a large number of market models used by practitioners. Our intention was to incorporate a crucial aspect, namely, memory, into the Black–Scholes model, without losing its usefulness and simplicity, particularly, the *Black–Scholes formula*. We show evidence indicating that markets have memory and that the model defined by (1) can capture some movement of stock indices reasonably well.

By [AI], the constant σ of (1) is equal to the implied volatility of the model, defined via the Black–Scholes formula. Notice that, in the model defined by (1), the prices of European calls and puts are given by the Black–Scholes formula as in the Black–Scholes model. We now define

$$\text{HV}(t-s) := \sqrt{\frac{\text{Var}\{\log(S(t)/S(s))\}}{t-s}} \quad (t > s \geq 0). \quad (4)$$

If $(S(t))$ is Black–Scholes, then we have $HV(t) = \sigma$ for every $t > 0$. However, in the present model, we have $HV(t) = f(t)$, where the function $f(t)$ is given by

$$f(t) = \sigma \sqrt{\frac{q^2}{(p+q)^2} + \frac{p(2q+p)}{(p+q)^3} \cdot \frac{(1 - e^{-(p+q)t})}{t}} \quad (t > 0) \quad (5)$$

(see [AI]). We see that if $p > 0$, then $f(t)$ is decreasing, while if $p < 0$, then $f(t)$ is increasing. We estimated $HV(t)$ ($t = 1, 2, 3, \dots$) from real market data such as closing values of S&P 500 index. Our finding is that $HV(t)$ is not constant, and very often reveals features in agreement with those described above. We fitted the function $f(t)$ by using nonlinear least squares, and found that $f(t)$ approximates $HV(t)$ rather well when the market is stable.

This model suggests a new method for historical estimation of implied volatility. In fact, in the traditional method, it is $HV(1)$ that is regarded as the historical estimate of volatility. The choice of time lag 1 (day) has been adopted because it can be conveniently computed from closing data; after all, in the Black–Scholes model, $HV(t)$ is constant, whence the choice of t is not so relevant. Thus, in this traditional method, only one value of $HV(t)$ is used to estimate volatility. However, as stated above, since observed market data show that $HV(t)$ is not constant, such a method would give only a partial description of the market. We propose a new method for the estimation of implied volatility based on the model defined by (1), in which we use several values of $HV(t)$. As stated above, we can fit $f(t)$ to $HV(t)$ rather well by using nonlinear least squares, and in so doing we obtain estimated values of σ , p and q . Since σ is equal to the implied volatility in the model defined by (1), this estimated value of σ is *our historically estimated value of implied volatility*.

We found that our estimated value of σ for real data such as S&P 500 index is almost always larger than the traditional value of HV , that is, $HV(1)$. Since we have $IV > HV(1)$ much more often than $IV < HV(1)$ in real markets, this has the effect of narrowing the gap between HV and IV , and making the Black–Scholes–Merton theory more consistent with empirical data.

参考文献

- [AI] V. V. Anh and A. Inoue, Dynamic models of asset prices with memory, submitted, <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~inoue/>
- [AIC] V. V. Anh, A. Inoue and C. Pesee, Incorporation of memory into the Black–Scholes–Merton theory and estimation of volatility, submitted, <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~inoue/>

Stock Return Volatility and Trading Volume: A Bayesian Impulse Response Analysis

東京都立大学 浅井 学・渡部敏明

1 はじめに

多くの金融経済学者が、株価収益率と取引量の関係を分析してきた。本研究の目的は、インパルス応答関数を使って、株価収益率 y_t のボラティリティと取引量 v_t の分析を行うことにある。推定には、確率的ボラティリティ変動モデルの分析でよく使われるベイジアン MCMC を用いる。

2 モデル

2.1 ボラティリティと取引量の VAR による特定化

Gallant, Rossi, and Tauchen (1992) などの先行研究を踏まえれば、ボラティリティは、それ自身の過去の値と過去の取引量の関数としてモデル化することができる。この研究では、単純化のため、ボラティリティと取引量の主要素が多変量自己回帰過程に従うようなモデルを考える。

$$r_t = \varepsilon_{1t} \exp(\alpha_{1t}/2), \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

$$v_t = \alpha_{2t} + \sigma_v \varepsilon_{2t}, \quad \varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})' \sim N(0, I_2), \quad (2)$$

$$\alpha_t = \mu + A_1 \alpha_{t-1} + \dots + A_p \alpha_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \Sigma), \quad (3)$$

ただし u_t と ε_t は独立であると仮定する。ここで y_t と v_t だけが観測できる変数であることに注意されたい。VAR が定常であれば、インパルス応答関数を求めることができる。ベイジアン MCMC では、このインパルス応答関数の経験事後分布を、直接求めることができるので、その 95 パーセント区間の構築も容易である。

2.2 観測される変数が多変量のときの MMS

Shephard and Pitt (1997) は、いわゆる「マルチ・ムーブ・サンプラー (MMS)」と呼ばれる方法、すなわち非線形・非正規の状態空間モデルの潜在変数ベクトルを、パラメータを所与としてその事後密度関数から生成する方法を提案した。この方法は、非常に効率的であり、MCMC 収束のスピードも著しく速くなる方法であるが、ブロックの分割数を増やすと推定

バイアスも深刻なほど増加してしまう。Watanabe and Omori (2001) は、この問題を修正した MMS を提案している。残念ながら、もとの MMS も修正した MMS も観測される変数が単変量の場合を考えて構築されているため、本研究のモデルには使えない。この研究では、MMS を観測される変数が多変量のときにも使えるように拡張した。

3 推定方法

ここでは、ベイジアン MCMC を用いて、パラメータの事後分布を推定する。パラメータの事前分布として、正規-ウィッシュャート型の分布を仮定する。ただし、定常性の条件を満たすようにパラメータ空間は切断されている。このとき、各パラメーターと潜在変数について、条件付き密度関数を用いてそれらの標本を生成し、マルコフ連鎖を構築する。マルコフ連鎖が定常状態に入れば、この標本は、事後分布から生成した標本とみなすことができる。各パラメータの標本を生成する際は M-H または A-R/M-H アルゴリズムを使い、 $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ の生成には拡張 MMS を使う。

4 実証分析

データは、東京証券取引所で取引されている TOPIX（東証平均株価指数）の日次収益率と取引量のデータを用いる。期間は 1974 年 1 月 4 日から 1990 年 2 月 27 日までである。この研究では、データを 2 分割した。すなわち、(Data1) 1974 年 1 月 4 日から 1984 年 12 月 28 日まで ($T = 3428$) と、(Data2) 1985 年 1 月 4 日から 1990 年 2 月 27 日まで ($T = 3372$) である。トレンドやカレンダー効果（曜日効果など）を除去するために、Gallant, Rossi, and Tauchen (1992) の 2 段階調整法を適用した。

参考文献

- [1] Gallant, A.R., P.E. Rossi, and G. Tauchen, 1992, Stock prices and volume, *The Review of Financial Studies*, 5, 199–242.
- [2] Shephard, N. and M. Pitt, 1997, Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series, *Biometrika* 84, 653–667.
- [3] Watanabe, T., and Y. Omori, 2001, Multi-move sampler for estimating non-Gaussian time series models: Comments on Shephard and Pitt (1997), unpublished manuscript, Department of Economics, Tokyo Metropolitan University.

GARCH オプション価格付けモデルの計量分析

東京都立大学・経 渡部敏明

1 はじめに

オプション価格の導出に用いられる Black/Scholes (1973) モデルでは、ボラティリティと呼ばれる原資産価格変化率の 2 次のモーメントは満期まで一定であると仮定する。ところが、近年、ボラティリティは日々確率的に変動するという考えが主流になってきており、そうしたボラティリティの変動を明示的に定式化するボラティリティ変動モデルに注目が集まっている。ボラティリティ変動モデルの代表的なものに、Bollerslev (1986) によって提案された GARCH モデルがある。このモデルは最尤法によって簡単に推定できることから、資産価格に関する多くの実証分析に応用されてきた。本論文は、そうしたモデルを使うことにより、現実のオプション価格の変動をよりうまく捉えることができるようになるかどうかを日経 225 オプション価格データを用いて実証分析したものである。

2 ボラティリティ変動の定式化

株式市場では株価が上がった日より下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られている。GARCH モデルはこうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えられないので、その後、こうした現象を考慮に入れたモデルがいくつか提案されている。そうしたモデルの代表的なものには、Glosten/Jagannathan/Runkle (1993) によって提案された GJR モデルと Nelson (1991) によって提案された EGARCH (exponential GARCH) モデルがある。本論文では、こうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮に入れたモデルを使うことにより現実のオプション価格変動もうまく捉えられるようになるかどうか分析を行っている。

3 期待収益率の定式化

オプション価格を導出する際には、ボラティリティだけでなく、期待収益率の定式化も重要になる。投資家が危険中立的であるならば、期待収益率は安全資産の収益率に等しくなる。危険中立的でない場合には、期待収益率と安全資産とは乖離する。その場合には、危険中立確率測度を導出し、満期におけるオプション価格の期待値はこの危険中立確率測度の下で求めなければならない。Duan (1995) は局所危険中立性という仮定を置くことにより、現実の GARCH モデルを危険中立確率測度の下でのモデルに変換する方法を提案している。本論文は、こうした期待収益率と安全資産の収益率とが乖離する可能性、特に、期待収益率が過去の収益率やボラティリティに依存する可能性を考慮に入れた分析も行っている。

4 誤差項の分布

資産収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことが古くから知られている。GARCH モデルの誤差項は通常正規分布に従うと仮定されるが、そうした仮定の下でも、ボラティリティが日々変動するなら、収益率の無条件分布は裾が厚くなる。しかし、それは GARCH モデルの誤差項の分布が正規分布でよいことを意味しているわけではなく、実際、最近の研究で、収益率の分布の裾の厚さはボラティリティの変動だけでは完全に説明することはできず、誤差項の分布にもスチューデントの t 分布のような裾の厚い分布を当てはめた方がフィットが良いことが明らかになってきている。そこで、誤差項が t 分布に従うモデルを使った分析も行っている。

5 結論

本論文で得られた主な結論は以下の通りである。

1. 株式市場では価格の下がった日の翌日にボラティリティが上昇する傾向があることが知られているが、日経 225 変化率のボラティリティの変動にもそうした非対称性が存在するので、非対称性を捉えられない GARCH モデルよりもボラティリティ変動の非対称性を考慮した GJR, EGARCH モデルを使った方が、より現実の動きに近いオプション価格を導出できる。
2. 日経 225 変化率の期待収益率と安全資産収益率として用いた 1ヶ月物のコールレートとの差は統計的に有意ではないため、それらが乖離する可能性を考慮に入れ、Duan (1995) の方法によってオプション価格を求めても現実のオプション価格の動きをうまく捉えられるようにはならない。
3. 日経 225 変化率でも GARCH モデルの誤差項の分布を t 分布にした方がフィットが良くなるが、誤差項の分布を t 分布にしたモデルを使っても現実のオプション価格の動きをうまく捉えられるようにはならない。

参考文献

- [1] Black, F. and Scholes, M.: *Journal of Political Economy*, **81**, 673–659 (1973)
- [2] Bollerslev, T.: *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327 (1986)
- [3] Duan, J.-C.: *Mathematical Finance*, **5**, 13–32 (1995)
- [4] Glosten, L. R. , Jagannathan, R. and Runkle, D.: *Journal of Finance*, **48**, 1779–1801 (1993)
- [5] Nelson, D. B.: *Econometrica*, **59**, 347–370 (1991)