(12)「統計的推定方式に関する理論とその応用」に関する研究報告

Worcester's log-linear model for three-dimensional contingency table

関東学院大学経済学部　布能 英一郎

1. Introduction　$I \times J \times K$ の 3 次元分割表 $\{m_{ijk}\}$ に対し、

$$\ln m_{ijk} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} + u_{3(k)} + u_{12(i,j)} + u_{13(i,k)} + u_{23(j,k)} + u_{123(i,j,k)}$$

なる統計モデル (log-linear model) を当てはめる。u は total effect,　$u_{1(i)}$ は i^{th} main effect,　$u_{12(ij)}$ は ij^{th} second factor effect,　$u_{123(ijk)}$ は ijk^{th} third factor effect　と理解できる。このように、log-linear model は分散分析的な考え方に基づいているので、$u, u_1, u_2, u_3, u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{123}$ の間に階層構造を仮定する。たとえば、$u_1 = 0$ ならば、$u_{12} = u_{13} = u_{123} = 0$.

他方、Worcester(1971) は、$2 \times 2 \times 2$ の 3 次元分割表 $\{m_{ijk}\}_{i,j,k=0,1}$ に対して、

$$\ln m_{ijk} = w + \delta_i w_1 + \delta_j w_2 + \delta_k w_3 + \delta_{ij} w_{12} + \delta_{ik} w_{13} + \delta_{jk} w_{23} + \delta_{ijk} w_{123} \tag{1}$$

$$\text{where} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1, \\ 0 & \text{if } i = 0, \end{cases} \qquad \delta_{ij} = \delta_i \delta_j, \qquad \delta_{ijk} = \delta_i \delta_j \delta_k$$

なるモデルを当てはめることを考えた。上記のモデルを $(2 \times 2 \times 2)$ Worcester's log linear model と呼ぶ。このモデルの意味を、次のように説明できる：(0) $w = \ln m_{000}$ を base の値と仮定, (1) $j = k = 0$ の下で、第一変量の index i が 1 なら、w_1 の上乗せ効果あり, index i が 0 なら上乗せ効果なし, (2) 全く同様に、w_2 は第二変量単独の上乗せ効果, (3) w_{12} は、w, w_1, w_2 に上乗せした効果, $\cdots$.

Theorem 1. (Bishop, Fienberg, Holland(1975))　Worcester's log linear model (1) が $w_{13} = w_{23} = 0$, $w_{123} \neq 0$ である場合、尤度方程式は

$$\hat{m}_{111} = x_{111}, \quad \hat{m}_{1++} = x_{1++}, \quad \hat{m}_{+1+} = x_{+1+}, \quad \hat{m}_{++1} = x_{++1}, \quad \hat{m}_{+++} = x_{+++}$$

である。この方程式は、代数的に解くことができる。答は、すなわち $\hat{m}_{ijk}$ は、次の通り：

$$\hat{m}_{11k} = x_{11k}, \quad k = 0, 1, \qquad \hat{m}_{ijk} = (x_{++k} - x_{11k}) x_{ij+} / (N - x_{11+}) \quad \text{if} \quad (i,j) \neq (1,1)$$

本稿は、Worcester's log linear model を $I \times J \times K$ の 3 次元分割表に拡張する。

2. Worcester's log linear model for Worcester's log-linear model for three-dimensional contingency table

一般の 3 次元分割表 $\{m_{ijk}\}$ に対し (1) の自然な拡張は

$$\begin{aligned} \ln m_{ijk} = {} & w + \sum_{a=1}^{I} \delta_i^{[a]} w_1^{[a]} + \sum_{b=1}^{J} \delta_j^{[b]} w_2^{[b]} + \sum_{c=1}^{K} \delta_k^{[c]} w_3^{[c]} + \sum_{a=1}^{I} \sum_{b=1}^{J} \delta_{ij}^{[ab]} w_{12}^{[ab]} \\ & + \sum_{a=1}^{I} \sum_{c=1}^{K} \delta_{ik}^{[ac]} w_{13}^{[ac]} + \sum_{b=1}^{J} \sum_{c=1}^{K} \delta_{jk}^{[bc]} w_{23}^{[bc]} + \sum_{a=1}^{I} \sum_{b=1}^{J} \sum_{c=1}^{K} \delta_{ijk}^{[abc]} w_{123}^{[abc]} \end{aligned} \tag{2}$$

where

$$\delta_i^{[a]} = \begin{cases} 1 & \text{if } a \le i, \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad \delta_{ij}^{[ab]} = \begin{cases} 1 & \text{if } a \le i \text{ and } b \le j \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

$$\delta_{ijk}^{[abc]} = \begin{cases} 1 & \text{if } a \le i,\ b \le j, \text{ and } c \le k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

と考えられる。さて、Theorem 1 では、$w_{13} = w_{23} = 0$ を仮定したが、この仮定を自然に拡張することで、次の theorem を得る。

Theorem 2. $w_{13}^{[ab]} = w_{23}^{[ab]} = 0$ for all $a, b \ge 1$ すなわち、$w_{13} \equiv 0,\ w_{23} \equiv 0$ ならば

$$\hat{m}_{ijk} = x_{ijk} \quad \text{if } i, j \ge 1, \qquad \hat{m}_{ijk} = \frac{x_{ij+}(x_{+0k} + x_{0+k} - x_{00k})}{x_{+0+} + x_{0++} - x_{00+}} \quad \text{if } i \text{ or } j = 0$$

Worcester's log linear model は、要因効果を上乗せしてゆくモデルであるから、上乗せ方法を変えると、それに伴って興味ある MLE が出現する。

Theorem 3. $3 \times 3 \times 3$ 分割表にて、$w_{13} \equiv 0,\ w_{23} \equiv 0$ かつ、$w_{123}^{[121]} = w_{123}^{[122]} = w_{123}^{[211]} = w_{123}^{[212]} = 0$ を仮定すると

$$\hat{m}_{22k} = x_{22k} \quad \text{for all } k,$$

$$\hat{m}_{ijk} = \frac{x_{ij+}(x_{21k} + x_{11k} + x_{12k})}{x_{21+} + x_{11+} + x_{12+}} \quad \text{if } i, j \ge 1,\ \ (i,j) \ne (2,2), \quad k = 0,1,2$$

$$\hat{m}_{ijk} = \frac{x_{ij+}(x_{+0k} + x_{0+k} - x_{00k})}{x_{+0+} + x_{0++} - x_{00+}} \quad \text{if } i \text{ or } j = 0, \quad k = 0,1,2$$

Theorem 4 $w_{13} \equiv 0,\ w_{23} \equiv 0$ および $w_{123}^{[abc]} = 0$ for all $(a,b) \ne (1,1)$ の仮定の下では

$$\hat{m}_{ijk} = \frac{x_{ij+}(x_{+0k} + x_{0+k} - x_{00k})}{x_{+0+} + x_{0++} - x_{00+}} \quad \text{if } i \text{ or } j = 0$$

であり、$i, j \ge 1,\ k \ge 0$ に関しては、(i,j) と k が独立。

Theorem 5 $w_{13} \equiv 0,\ w_{23} \equiv 0,\ w_{12}^{[ab]} = 0$ for all $a \ge 2,\ b \ge 2,$ および $w_{123}^{[abc]} = 0$ for all (a,b,c) except $(a,b) \ne (1,1)$ の仮定の下では、$i = 0$ or $j = 0$ の場合の $\hat{m}_{ijk}$ は Theorem 4 に同じであり、$i, j \ge 1,\ k \ge 0$ に関しては、$i, j\, k$ が独立。

Theorem 6 Suppose $w_{13} \equiv 0,\ w_{23} \equiv 0,\ w_{12}^{[ab]} = 0$ for all $a \ge 2,\ b \ge 2,$ および $w_{123}^{[abc]} = 0$ for all $a \ge 2,\ b \ge 2.$ の仮定の下では、$i = 0$ or $j = 0$ の場合の $\hat{m}_{ijk}$ は Theorem 4 に同じであり、$i, j \ge 1,\ k \ge 0$ に関しては、各 k に関して i, j が独立。

参考文献 [1] Bishop, Fienberg and Holland. (1975). *Discrete Multivatiate Analysis : Theory and Practice.* The MIT Press. [2] Worcester, J. (1971). The relative odds in the 2^3 contingency tables. *American Journal of Epidemiology* **93** 145-149.

On the conservative multivariate Tukey-Kramer type procedures for multiple comparisons among mean vectors

東京理科大・院・理　西山　貴弘
東京理科大・院・理　岩原　香織
東京理科大・理　瀬尾　隆

平均ベクトルに関する多重比較法において，すべてのペアの差 (対比較) に関する同時信頼区間を構成する方法の一つに多変量 Tukey-Kramer 法 (Seo, Mano and Fujikoshi(1994)) がある．本報告では，対照比較の場合も含めた多変量Tukey-Kramer type の方法の保守性の程度について考察する．

$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_k]$ を k 個の p 次元平均ベクトルの行列とし，$\widehat{\boldsymbol{M}} = [\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k]$ を $\boldsymbol{M}$ の推定量とし，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}})$ は，$\mathrm{N}_{kp}(0, \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{\Sigma})$ に従うものとする．ただし，$\boldsymbol{V}$ は $k \times k$ の既知行列で，$\boldsymbol{\Sigma}$ は $p \times p$ の未知行列とする．さらに，$\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{\Sigma}$ の不偏推定行列とし，$\nu\boldsymbol{S}$ は $\widehat{\boldsymbol{M}}$ と独立で $\mathrm{W}_p(\boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ に従うものとする．このとき，多変量 Tukey-Kramer 法による同時信頼領域は，

$$\{\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j - (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)\}'\boldsymbol{S}^{-1}\{\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j - (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)\} \le \frac{1}{2}q^2_{p,k,\nu}(\alpha)d_{ij}, \quad 1 \le i < j \le k$$

として与えられる．ここで，$q_{p,k,\nu}(\alpha)$ は，多変量スチューデント化範囲分布 (パラメータ p, k, 自由度 ν) (例えば，Seo and Siotani(1992) を参照) の上側 100α% 点である．この同時信頼係数は，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$ のとき，正確に $1-\alpha$ である．

このとき，多変量の場合の一般化 Tukey 予想 (Seo, Mano and Fujikoshi(1994) を参照) は次のように与えられる．

$$\Pr\left\{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j) \in \left[\boldsymbol{a}'(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j) \pm q_{p,k,\nu}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}d_{ij}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}\ \right] \quad 1 \le i < j \le k, \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^p - \{0\}\right\} \ge 1 - \alpha.$$

すなわち，すべての i, j $(1 \le i < j \le k)$ に対して，同時信頼区間が常に保守的になるということである．

この予想については，$k = 3$ のときに成り立つことが理論的に Seo, Mano and Fujikoshi(1994) によって示され，その証明のアイデアを利用すると, 次の不等式が成り立つ．

$$1 - \alpha \le Q(t_p, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) < Q(t_p, \boldsymbol{V}_0, \mathcal{C}),$$

ここに, $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j, 1 \le i < j \le k\}$, $t^2 = t_p^2 = q_{p,k,\nu}^2(\alpha)/(2\nu)$, $\boldsymbol{V}_0$ は, $\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{13}} + \sqrt{d_{23}}$, または, $\sqrt{d_{13}} = \sqrt{d_{12}} + \sqrt{d_{23}}$, または, $\sqrt{d_{23}} = \sqrt{d_{12}} + \sqrt{d_{13}}$ を満足する行列で, $Q(t, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) = \Pr\{ (\boldsymbol{X}\boldsymbol{c})'(\nu\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}) \le t(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{c}) \text{ for any } \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}\}$ である (t は任意の固定された定数). 同様に対照比較の場合, 次の不等式が成り立つ.

$$1 - \alpha = Q(t_c, \boldsymbol{V}_1, \mathcal{D}) \le Q(t_c, \boldsymbol{V}, \mathcal{D}) < Q(t_c, \boldsymbol{V}_2, \mathcal{D}),$$

ここに, $t_c = t_c(\alpha; p, k, \nu, \boldsymbol{V}_1)$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1$ のときの $T^2_{\max\cdot c}$ の上側 $100\alpha\%$ 点であり,

$$T^2_{\max\cdot c} = \max_{1 \le i \le k-1} \left\{ (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k)'(d_{ik}\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k) \right\},$$

また, $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_k, 1 \le i \le k-1\}$ であり, $\boldsymbol{V}_1$ は, $d_{12} = d_{13} + d_{23}$ を満足し, $\boldsymbol{V}_2$ は, $\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{13}} - \sqrt{d_{23}}$, または, $\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{23}} - \sqrt{d_{13}}$ を満足する行列である.

前述の行列 $\boldsymbol{V}_0$ は半正定値であり, $\mathrm{N}_{kp}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{V}_0 \otimes \boldsymbol{\Sigma})$ は非正則な多変量正規分布になっている. そこで実際には, $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ とおいて数値実験を行った. ただし, $\boldsymbol{u} \sim \mathrm{N}_r(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{D}_{\sqrt{\lambda}}$, $\boldsymbol{H}_1$ は直交行列 $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H}_1\ ,\ \boldsymbol{H}_2)$ の $kp \times r$ 行列 $(\boldsymbol{H}_1'\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{I}_r)$, $\boldsymbol{D}_{\sqrt{\lambda}} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r})$ で, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ は $\boldsymbol{V}_0 \otimes \boldsymbol{\Sigma}$ の固有値である. また, 対照比較の場合も同様な変形を考え, 数値実験を行った.

本報告では, $k = 3$ として, いくつかのパラメータの場合について, 対比較と対照比較それぞれの統計量の上側パーセント点と coverage probability をシミュレーションにより求め, 保守性の程度を考察した.

参考文献

[1] Kramer, C. Y. (1956), "Extension of multiple range tests to group means with unequal number of replications," *Biometrics,* 12, 307–310.

[2] Kramer, C. Y. (1957), "Extension of multiple range tests to group correlated adjusted means ," *Biometrics,* 13, 13–18.

[3] Seo, T. (2003), "On the conservatism of multiple comparisons procedures among mean vectors," *京都大学 数理解析研究所講究録,* 1334, 87–94.

[4] Seo, T., Mano, S. and Fujikoshi, Y. (1994), "A generalized Tukey conjecture for multiple comparisons among mean vectors," *Journal of the American Statistical Association,* 89, 676–679.

[5] Seo, T. and Siotani, M. (1992), "The multivariate studentized range and its upper percentiles," *Journal of the Japan Statistical society,* 22, 123–137.

[6] Tukey, J. W. (1953), "The problem of multiple comparisons," unpublished manuscript, Princeton University.

Simultaneous confidence intervals for multiple comparisons in the intraclass correlation model with missing data

東京理科大・院・理　小泉 和之
東京理科大・院・理　國本 征史
東京理科大・理　瀬尾　隆

次のような単調欠測データをもつ two-components mixed linear model を考える.

$$X_{ij} = \mu_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, \cdots, p_j\ ,\ j = 1, \cdots, n)$$

ただし，$\alpha_j \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ で互いに独立であると仮定する．本報告では，帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_p$ $(p = p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n)$ として，平均成分の同等性の検定問題，および平均成分のコントラストに対する同時信頼区間について考える.

まず，$\boldsymbol{x}_j = (X_{1j}, \cdots, X_{p_j j})'$ とおくと，$\boldsymbol{x}_j \sim N_{p_j}(\boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\Sigma}_j)$ で互いに独立である．ただし，$\boldsymbol{\mu}_j = (\mu_1, \cdots, \mu_{p_j})'$, $\boldsymbol{\Sigma}_j = \sigma^2\{(1-\rho)\boldsymbol{I}_{p_j} + \rho \boldsymbol{1}_j \boldsymbol{1}_j'\}$, $\sigma^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2$, $\rho = \sigma_\alpha^2/\sigma^2$, $\boldsymbol{I}_{p_j}$ は $p_j \times p_j$ の単位行列，$\boldsymbol{1}_j = (1, \cdots, 1)'$ の $p_j \times 1$ の列ベクトルであるような intraclass correlation model を考える．ここでは Bhargava and Srivastava(1973) のアイデアを利用した次のような変換を考える.

$$\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{C}_j \boldsymbol{x}_j \quad \boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{I}_{p_j} - \frac{\nu_j}{p_j}\boldsymbol{1}_j\boldsymbol{1}_j' \quad \nu_j \equiv 1 \pm (1-\rho)^{\frac{1}{2}}(1 + (p_j - 1)\rho)^{-\frac{1}{2}}$$

このような変換によって，$\boldsymbol{z}_j \sim N_{p_j}(\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{\mu}_j, \gamma^2 \boldsymbol{I}_{p_j})$ で互いに独立となり，$\boldsymbol{z}_j$ の成分 z_{ij} も互いに独立に共通の分散 γ^2 をもつ正規分布に従うことがわかる．ここで $\gamma^2 \equiv \sigma^2(1-\rho)$.

次に，$p \geq s \geq k \geq 1$ として，第 k ブロックを $p^{(k)} \times n^{(k)}$ 行列として，単調欠測データセットを各ブロックが完全データセットになるように s 個に分割する．また第 k ブロックで，$z_{ij}^{(k)}$ を (i, j) 成分，$\overline{z}_{i\cdot}^{(k)}$ を第 i 行の標本平均，$\overline{z}_{\cdot j}^{(k)}$ を第 j 列の標本平均，$\overline{z}_{\cdot\cdot}^{(k)}$ を全体の標本平均として，$x_{ij}^{(k)}, \overline{x}_{i\cdot}^{(k)}, \overline{x}_{\cdot j}^{(k)}, \overline{x}_{\cdot\cdot}^{(k)}$ も同様に定義し，$p^* = \sum_{k=1}^{s}(p^{(k)} - 1), f = \sum_{k=1}^{s} f^{(k)}, f^{(k)} = (n^{(k)} - 1)(p^{(k)} - 1)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}^{(k)^2} &\equiv \frac{1}{f^{(k)}} \sum_{i=1}^{p^{(k)}} \sum_{j=1}^{n^{(k)}} (z_{ij}^{(k)} - \overline{z}_{i\cdot}^{(k)} - \overline{z}_{\cdot j}^{(k)} + \overline{z}_{\cdot\cdot}^{(k)})^2 \\
&= \frac{1}{f^{(k)}} \sum_{i=1}^{p^{(k)}} \sum_{j=1}^{n^{(k)}} (x_{ij}^{(k)} - \overline{x}_{i\cdot}^{(k)} - \overline{x}_{\cdot j}^{(k)} + \overline{x}_{\cdot\cdot}^{(k)})^2
\end{aligned}$$

となり，検定統計量は，

$$\frac{\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{p} n^{(k)}(\overline{x}_{i\cdot}^{(k)} - \overline{x}_{\cdot\cdot}^{(k)})^2/p^*}{\sum_{k=1}^{s} f^{(k)}\hat{\gamma}^{(k)^2}/f}$$

で与えられ，この検定統計量は帰無仮説 $\boldsymbol{H}_0$ の下で，自由度 p^*, f の F 分布に従う．

さらに，$\overline{\boldsymbol{z}} = (\overline{z}_{1\cdot}, \ldots, \overline{z}_{p\cdot})'$, $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}_{1\cdot}, \ldots, \overline{x}_{p\cdot})'$ とおくと，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{a}'1 = 0, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^p - \{0\})$ に対する Scheffé 型の同時信頼区間は有意水準 α で，

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \pm \sqrt{\frac{p^*}{f} F_{p^*,f,\alpha} \sum_{k=1}^{s} f^{(k)}\hat{\gamma}^{(k)^2} \boldsymbol{a}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{a}}$$

のように与えられる．ここで $\boldsymbol{V}$ は対角成分が n_i^{-1} $(i = 1, 2, \ldots, p)$ の対角行列で，$F_{p^*,f,\alpha}$ は自由度 p^*, f の F 分布の上側 100α % 点である．

同様にして，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ に対する Tukey 型の近似同時信頼区間は有意水準 α で，

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \pm q_{p^{**},f,\alpha} \sum_{i=1}^{p} \frac{|a_i|}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{s} \frac{f^{(k)}\hat{\gamma}^{(k)^2}}{f} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i|a_i|} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i|}\right)^{-1}}$$

のように与えられる．ここで $p^{**} = \sum_{k=1}^{s} p^{(k)}$ で，$q_{p^{**},f,\alpha}$ はパラメータ p^{**}, f のステュデント化された範囲の分布の上側 100α % である．

数値実験については Scheffé 型と Tukey 型の同時信頼区間について，欠測が生じた場合の本報告で提案する方法，完全データのもとでの Bhargava and Srivastava(1973) の方法，欠測が生じた場合での欠測を無視した Bhargava and Srivastava(1973) の方法を数値的に比較してみた．具体的には，データは擬似乱数を利用し，いくつかのパラメータの場合についてモンテカルロシミュレーションを行い，これらの同時信頼区間を与えた．

これからの課題として，他の構造への応用，Seo and Srivastava(2000) で議論されているような反復法や EM アルゴリズムなどとの比較，多変量多重比較への拡張，対照比較 (Dunnett の方法) などを考えている．

参考文献

[1] Bhargava, R. P. and Srivastava, M. S. (1973), "On Tukey's Confidence Intervals for the Contrasts in the Means of the Intraclass Correlation Model," *J.Royal.Statist.Soc*, **B35**, 147–152.

[2] 菊地 淳, 瀬尾 隆 (2003) , "On Multiple Comparisons of Mean Components in the Intraclass Correlation Model with Missing Data," 科研費シンポジウム「データ解析のための統計科学理論」講演予稿集.

Second Order Asymptotic Properties of a Class of Test Statistics under the Existence of Nuisance Parameters

早稲田大学大学院理工学研究科　D3　玉置　健一郎

母数 $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (\theta^1, \ldots, \theta^p, \theta^{p+1}, \ldots, \theta^{p+q})$ に対して、仮説検定 $H : \theta_1 = \theta_{10}$ を考える。まず、よく知られている検定統計量を含むクラスを紹介する。一般的に、検定の size や power は局外母数の真値に影響される。本報告では、検定統計量の高次の asymptotics が局外母数の影響をどのようにうけるか、種々のセッティングで明らかにする。このために、$\theta = \theta_0 + c_n^{-1}\varepsilon$ $(\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}), \varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{p+q}))$ のもとでの検定統計量の漸近展開を与える。ここに、$\{c_n\}$ は、$n \to \infty$ のとき無限大に発散する適当な列である。Mukerjee は second-order local maximinity の意味で尤度比統計量よりも良い検定統計量を提案している。この検定統計量が、クラスにおいて、optimal であることが示される。

$Z_\alpha(\theta) = c_n^{-1}\partial_\alpha l_n(\theta)$、$Z_{\alpha\beta}(\theta) = c_n^{-1}[\partial_\alpha\partial_\beta l_n(\theta) - E_\theta\{\partial_\alpha\partial_\beta l_n(\theta)\}]$ (ここに、$\partial_\alpha = \partial/\partial\theta^\alpha$, $l_n(\theta)$ はモデルの対数尤度) は

$$
\begin{aligned}
E_\theta\{Z_\alpha(\theta)Z_\beta(\theta)\} &= I_{(\alpha\beta)}(\theta) + O(c_n^{-2}),\\
E_\theta\{Z_\alpha(\theta)Z_{\beta\gamma}(\theta)\} &= J_{\alpha,\beta\gamma}(\theta) + O(c_n^{-2}),\\
E_\theta\{Z_\alpha(\theta)Z_\beta(\theta)Z_\gamma(\theta)\} &= c_n^{-1}K_{\alpha,\beta,\gamma}(\theta) + O(c_n^{-3}),
\end{aligned} \tag{1}
$$

を満たすとする。また、Fisher 情報行列 $I(\theta) = \{I_{(\alpha\beta)}(\theta)\}$ を分割し、

$$
I(\theta) = \begin{pmatrix} I_{11}(\theta) & I_{12}(\theta) \\ I_{21}(\theta) & I_{22}(\theta) \end{pmatrix}, \quad g(\theta) = \{g_{\alpha\beta}(\theta)\} = \begin{pmatrix} I_{11\cdot 2}(\theta) & I_{12}(\theta) \\ 0 & I_{22}(\theta) \end{pmatrix}
$$

とする。ここに、$I_{11}(\theta) : p \times p$, $I_{22}(\theta) : q \times q$, $I_{11\cdot 2}(\theta) = I_{11}(\theta) - I_{12}(\theta)\{I_{22}(\theta)\}^{-1}I_{21}(\theta)$ である。

仮説検定 $H : \theta_1 = \theta_{10}$ に対して、以下の検定統計量のクラス $\mathscr{S}$ を考える。

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S} = \{T \mid T = {}& g^{ij}W_iW_j + c_n^{-1}a_1 g^{i\alpha}g^{j\beta}W_{\alpha\beta}W_iW_j + 2c_n^{-1}g^{i\alpha}g^{rs}W_{\alpha r}W_iW_s \\
&+ c_n^{-1}a_2^{ijk}W_iW_jW_k - c_n^{-1}g^{i\alpha}g^{j\beta}g^{rs}K_{\alpha,\beta,r}W_iW_jW_s \\
&- c_n^{-1}g^{i\alpha}g^{rt}g^{su}(K_{\alpha,r,s} + J_{\alpha,rs})W_iW_tW_u + c_n^{-1}a_3^iW_i + o_p(c_n^{-1}), \\
&a_1, a_2^{ijk}, a_3^i \text{は定数.}\quad \text{各関数は}\theta = \theta_0\text{での値.}\},
\end{aligned} \tag{2}
$$

ここで、W_α, $W_{\alpha\beta}$ は、Z_α と $Z_{\alpha\beta}$ を直交化したものである。$I^{\alpha\beta}$ と $g^{\alpha\beta}$ はそれぞれ I と g の逆行列の (α, β) 成分である。さらに、アインシュタインの簡約法を用いており、例えば、ローマ字 $\{i, j, k, \ldots, q\}$ は、興味のある母数の部分での和を表している。このクラス $\mathscr{S}$ は係数が a_1 と a_2^{ijk} と a_3^i の 3 箇所だけであるが、Rao's score や Wald や尤度比統計量等の、一般に良く知られている検定統計量や Mukejee で提案されている統計量を含む十分広いクラスである。

$G_{\mu,\nu}(z)$ を自由度 μ で非心度 ν の非心 χ^2 の分布関数とする。適当な正則条件のもとで、以下の定理が成り立つ。

定理 1. $\theta = \theta_0 + c_n^{-1}\varepsilon$ のもとでの $T \in \mathscr{S}$ の分布関数は次のように漸近展開できる。

$$
P_{\theta_0 + c_n^{-1}\varepsilon}[T < z] = G_{p,\Delta}(z) + c_n^{-1}\sum_{j=0}^{3} m_j G_{p+2j,\Delta}(z) + o(c_n^{-1}),
$$

ここに、$\Delta = g_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j$ であり、係数 m_j は (1) で与えられているスコア関数のモーメントと検定統計量の係数 a_1、a_2^{ijk}、a_3^i と ε で表される。

定理 1 において、係数 m_j は、ε の局外母数の部分である ε_2 に依存するので、検出力の 2 次の項は正確には求まらない。よって、一般的には、検出力の比較も困難である。次の定理は (2) で与えられている検定統計量のクラスでは、検出力の比較が可能であることを示している。

定理 2. 検定統計量 $T \in \mathscr{S}$ に対して、T の分布関数の局外母数の影響は次式で表される。

$$\begin{aligned} &P_{\theta_0 + c_n^{-1}\varepsilon}[T < z] - P_{\theta_{10}+c_n^{-1}\varepsilon_1, \theta_{20}}[T < z] \\ &= \frac{1}{2}c_n^{-1}(K_{\alpha,\beta,r} + J_{\alpha,\beta r} + J_{\beta,\alpha r})d^\alpha d^\beta \varepsilon^r \\ &\qquad \times \{G_{p+2,\Delta}(z) - G_{p,\Delta}(z)\} + o(c_n^{-1}). \end{aligned}$$

系 1. 次の等式が成り立つとする。

$$g_{ii'}g^{i'\alpha}g_{jj'}g^{j'\beta}(K_{\alpha,\beta,r} + J_{\alpha,\beta r} + J_{\beta,\alpha r}) = 0 \tag{3}$$

このとき、T の分布関数は 2 次の項まで ε_2 に依存しない。

直交化 Fisher 情報行列 $g_{ij}(\theta)$ が局外母数 θ_2 と無関係であれば、(3) が成り立つ。

定理 2 は T の分布関数の局外母数の影響は 2 次の項まで等しいことを示している。これより、一般的には検出力の正確な値は求まらないが、比較は可能である。系 1 は (3) が成り立てば、検出力が 2 次の項まで正確に求めることが出来ることを示している。つまり、局外母数の推定量の値で検出力を比較すれば、その優越が真値でも成り立つ。

これらの定理に基づいて、高次の検出力比較、高次の不偏検定の構成とそれらの検出力等について発表で述べる。また、諸結果の例としては種々の多変量モデル、時系列モデルをあげ、数値例も発表で紹介する。

検出力の比較に関しては、Mukerjee が提案している尤度比統計量の 2 次の項を修正した検定統計量 LR* の optimal properties が示される。$\theta_0 + c_n^{-1}\varepsilon$ の下で、$T \in \mathscr{S}$ の検出力関数を $P^T(\varepsilon) = P_1(\varepsilon_1) + c_n^{-1}P_2^T(\varepsilon) + o(c_n^{-1})$ とする。さらに、固定された Δ に対して、

$$P_{\varepsilon_2}^T(\Delta) = \min P_2^T(\varepsilon), \quad P_{\varepsilon_2}^{\mathrm{LR}^*}(\Delta) = \min P_2^{\mathrm{LR}^*}(\varepsilon),$$

とする。ここに、min は $g_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j = \Delta$ を満たす ε_1 上でとられる。このとき、

定理 3. $T \in \mathscr{S}$ の係数が $z(a_2^{ijk}[3]g_{jk} + g^{i\alpha}B^{\beta\gamma}K_{\alpha,\beta,\gamma}) + (p+2)\{a_3^i - g^{i\alpha}g^{rs}(K_{\alpha,r,s} + J_{\alpha,rs})\} = 0$ を満たすとする。(LR* の係数は $a_2^{ijk}[3]g_{jk} = -g^{i\alpha}B^{\beta\gamma}K_{\alpha,\beta,\gamma}$ と $a_3^i = g^{i\alpha}g^{rs}(K_{\alpha,r,s} + J_{\alpha,rs})$ を満たす。) このとき、$\Delta_0 > 0$ が存在して、$0 < \Delta < \Delta_0$ を満たす Δ に対して

$$P_{\varepsilon_2}^T(\Delta) < P_{\varepsilon_2}^{\mathrm{LR}^*}(\Delta)$$

が成り立つ。

正方分割表における準対称モデルとブラッドリーテリーモデルからの隔たりを測る尺度

東京理科大学・理工学研究科　田畑　耕治
東京理科大学・理工　宮本　暢子
東京理科大学・理工　富澤　貞男

行と列が順序のついていない同じ分類からなる $R \times R$ 正方分割表において，(i,j) セル確率を p_{ij} とする $(i=1,2,\ldots,R; j=1,2,\ldots,R)$. 準対称 (QS) モデルは次のように定義される (Caussinus, 1965):

$$p_{ij} = \alpha_i \beta_j \psi_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,R; j=1,2,\ldots,R),$$

ただし，$\psi_{ij} = \psi_{ji}$. 特に，$\{\alpha_i = \beta_i\}$ とおいたモデルは対称 (S) モデル (Bishop, Fienberg and Holland, 1975, p.282) である.

観測値がセル (i,j) または (j,i) に入るという条件のもとで，セル (i,j) に入る条件付き確率は,

$$p^c_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ij}+p_{ji}} \quad (i \neq j),$$

で与えられる. このとき QS モデルは次のようにも表される:

$$Q_{ijk} = Q_{kji} \quad (i < j < k),$$

ただし,

$$Q_{ijk} = p^c_{ij} p^c_{jk} p^c_{ki}, \; Q_{kji} = p^c_{kj} p^c_{ji} p^c_{ik}.$$

さらに, QS モデルは次のように表されてもよい:

$$p^c_{ij} = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_j} \quad (i \neq j).$$

ここに, QS モデルは, 本質的にブラッドリーテリー (BT) モデル (Bradley and Terry, 1952) と同値である.

Tomizawa, Seo and Yamamoto (1998) そして Tomizawa, Miyamoto and Hatanaka (2001) は，カテゴリに順序がない場合と順序がある場合のそれぞれに対して，S モデルからの隔たりの程度を測る尺度を導入した. 本講演では, カテゴリに順序のない同じ分類からなる正方分割表において, QS モデルと BT モデルからの隔たりの程度を測る尺度を提案した.

$R \times R$ 正方分割表において，任意の $i<j<k$ に対して，$Q_{ijk}+Q_{kji} \neq 0$ を仮定して，QS モデルからの隔たりの程度を測る尺度を次のように導入する:
$\lambda > -1$ に対して，

$$\Phi_{QS}^{(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2^{\lambda}-1} I^{(\lambda)}\left(\left\{Q_{ijk}^{*}\right\};\left\{C_{ijk}^{*}\right\}\right),$$

ただし，

$$I^{(\lambda)}(.;.) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i<j<k} \left[Q_{ijk}^{*}\left\{\left(\frac{Q_{ijk}^{*}}{C_{ijk}^{*}}\right)^{\lambda}-1\right\} + Q_{kji}^{*}\left\{\left(\frac{Q_{kji}^{*}}{C_{kji}^{*}}\right)^{\lambda}-1\right\}\right],$$

$$\Delta = \sum_{i<j<k}\left(Q_{ijk}+Q_{kji}\right),\ Q_{ijk}^{*} = \frac{Q_{ijk}}{\Delta},\ C_{ijk}^{*} = C_{kji}^{*} = \frac{1}{2}\left(Q_{ijk}^{*}+Q_{kji}^{*}\right).$$

そして，$\Phi_{QS}^{(0)} = \lim_{\lambda\to 0} \Phi_{QS}^{(\lambda)}$ と定義する.

同様に BT モデルからの隔たりを測る尺度 ($\Phi_{BT}^{(\lambda)}$ によって記す) を提案した (詳細は当日報告した)．尺度の値 $\Phi_{QS}^{(\lambda)}$ と $\Phi_{BT}^{(\lambda)}$ (以後 $\Phi^{(\lambda)}$) は $0 \leq \Phi^{(\lambda)} \leq 1$ であり，任意の $\lambda > -1$ に対して，(i) QS (BT) モデルが成り立つための必要十分条件は $\Phi^{(\lambda)}=0$ であり，(ii) QS (BT) モデルからの隔たりが最大 [これは任意の $i<j<k$ に対して，$Q_{ijk}^{c}=0$ (そのとき $Q_{kji}^{c}=1$) または，$Q_{kji}^{c}=0$ (そのとき $Q_{ijk}^{c}=1$) のときと定義する] であるための必要十分条件は $\Phi^{(\lambda)}=1$ のときである.

尺度の信頼区間, 例などの詳細は当日報告した.

参考文献

Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E. and Holland, P.W. (1975). *Discrete Multivariate Analysis*, The MIT Press.

Bradley, R.A. and Terry, M.E. (1952). *Biometrika* **39**, 324-345.

Caussinus, H. (1965). *Ann. Fac. Sci. Uni. Toulouse* **29**, 77-182.

Tomizawa, S., Seo, T. and Yamamoto, H. (1998). *Journal of Applied Statistics* **25**, 387-398.

Tomizawa, S., Miyamoto, N. and Hatanaka, Y. (2001). *Australian and New Zealand Journal of Statistics* **43**, 335-349.

順序カテゴリ正方分割表における累積確率に対する線型対角線パラメータ対称モデルと準対称モデル

東京理科大学・理工学研究科　大塚　渉
東京理科大学・理工　宮本　暢子
東京理科大学・理工　富澤　貞男

行と列が順序のある同じ分類からなる $r \times r$ 正方分割表において, (i,j) セル確率を p_{ij} とする $(i=1,2,\ldots,r; j=1,2,\ldots,r)$. 対角パラメータ対称 (DPS) モデル (Goodman, 1979) は, 次のように定義される:

$$p_{ij} = \begin{cases} \delta_{j-i}\psi_{ij} & (i<j), \\ \psi_{ij} & (i \geq j), \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. 特に $\{\delta_{j-i} = 1\}$ とおいたモデル (1) は対称 (S) モデル (Bishop et al., 1975) である. そして, $\{\delta_{j-i} = \delta\}$ とおいたモデル (1) は, 条件付対称 (CS) モデル (McCullagh, 1978) である. また, 線型対角パラメータ対称 (LDPS) モデル (Agresti, 1983) は次のように定義される:

$$p_{ij} = \begin{cases} \theta^{j-i}\psi_{ij} & (i<j), \\ \psi_{ij} & (i \geq j), \end{cases}$$

ただし, $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. 準対称 (QS) モデル (Caussinus, 1965) は次のように定義される:

$$p_{ij} = \alpha_i \beta_j \psi_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,r; j=1,2,\cdots,r),$$

ただし, $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. ここで, 累積確率 $\{G_{ij}\}$, $i \neq j$, を

$$G_{ij} = \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=j}^{r} p_{st} \quad (i<j),$$

$$G_{ij} = \sum_{s=i}^{r} \sum_{t=1}^{j} p_{st} \quad (i>j),$$

のように定義する. このとき, S, CS モデルは, $\{p_{ij}\}$ を $\{G_{ij}\}$ に置き換えて同様な乗積モデルとして表すことができる. しかし, DPS, LDPS, および QS モデルは $\{p_{ij}\}$ を $\{G_{ij}\}$ に置き換えて同様な乗積モデルとして表すことはできない. Tomizawa

(1993) は, $\{G_{ij}\}$ に対して, DPS と同様な乗積型をもつ新しいモデル (CDPS モデル) を次のように提案した:

$$G_{ij} = \begin{cases} \Delta_{j-i}\Psi_{ij} & (i < j), \\ \Psi_{ij} & (i > j), \end{cases} \qquad p_{ii} = \Psi_{ii},$$

ただし, $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$. このモデルは, DPS モデルと形は似ているが, 全く違うモデルである.

本講演では, $\{G_{ij}\}$ に対して, LDPS, QS と同様な乗積型をもつ新しいモデルを提案する. 累積線型対角パラメータ対称 (CLDPS) モデルを次のように提案する:

$$G_{ij} = \begin{cases} \Theta^{j-i}\Psi_{ij} & (i < j), \\ \Psi_{ij} & (i > j), \end{cases} \qquad p_{ii} = \Psi_{ii},$$

ただし, $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$. 累積準対称 (CQS) モデルを次のように提案する:

$$G_{ij} = \alpha_i \beta_j \Psi_{ij} \quad (i \neq j), \quad p_{ii} = \Psi_{ii},$$

ただし, $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$.

これら CLDPS, CQS モデルは, LDPS, QS モデルと形は似ているが, 全く違うモデルである. そして, これらのモデルは, LDPS, QS モデルの下では得ることのできない順序カテゴリデータの解析に極めて有用な性質が得られる. それらの詳細, 適用例などは当日報告した.

参考文献

Agresti, A. (1983). *Statistics and Probability Letters* **1**, 313-316.

Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E., and Holland, P.W. (1975). *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice.* The MIT Press.

Caussinus, H. (1965). *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* **29**, 77-182.

Goodman, L.A. (1979). *Biometrika* **66**, 413-418.

McCullagh, P. (1978). *Biometrika* **65**, 413-418.

Tomizawa, S. (1993). *Biometrics* **49**, 883-887.

TWO-SAMPLE FIXED WIDTH CONFIDENCE INTERVALS FOR A FUNCTION OF EXPONENTIAL SCALE PARAMETERS

Daisy Lou Lim, Eiichi Isogai
Niigata University

Chikara Uno
Akita University

Several researchers have dealt with the sequential estimation of specific functions of exponential scale parameters. Mukhopadhyay and Chattopadhyay [2] considered the difference between means while Uno [3], Isogai and Futschik [1] focused on the ratio between the scale parameters. Other functions of the exponential scale parameters are of interest, such as the generalization to any power r of the ratio parameter considered by Uno [3]. Thus, in this paper, a fully sequential method for the interval estimation of functions of the scale parameters from two exponential populations is considered. This work is an extension of the work of Uno, et al. [4] who studied functions of the exponential scale parameter in the one-sample case.

Let $h(x,y)$ be a positive, real-valued and three-times continuously differentiable function defined on $\mathbb{R}_+^2$ with $h_x^2(x,y) + h_y^2(x,y) > 0$, h_x and h_y are the first partial derivatives of h. Let $X_1, X_2, \cdots$ and $Y_1, Y_2, \cdots$ be independent observations from two exponential populations, Π_1 and Π_2, each determined by the scale parameters, σ_1 and σ_2, respectively. Given $d > 0$ and $\alpha \in (0,1)$, the focus of the paper is to construct a confidence interval I_n for $\theta = h(\sigma_1, \sigma_2)$ with length $2d$ and coverage probability $1-\alpha$, based on samples of size n from Π_1 and Π_2. Set $n^* = (a^2/d^2)\, g(\sigma_1, \sigma_2)$. This sample size is the asymptotically smallest sample size that satisfies

$$P\{\theta \in I_n\} \geq 1 - \alpha.$$

Since σ_1 and σ_2 are both unknown, so is n^*. Thus, the following stopping rule is proposed:

$$N = N_d = \inf\left\{ n \geq m : n \geq \frac{a^2}{d^2} g(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) \right\},$$

where $m \geq 2$ is the initial sample size. Once sampling is stopped after taking N observations from populations Π_1 and Π_2, respectively, the confidence interval $I_N = [\,\hat{\theta}_N - d,\, \hat{\theta}_N + d\,]$, where $\hat{\theta}_N = h(\bar{X}_N, \bar{Y}_N)$, is used for θ. Now, $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ is shown to be asymptotically normal with mean 0 and variance $g(\sigma_1, \sigma_2)$ where the function g on $\mathbb{R}_+^2$ is defined as $g(\sigma_1, \sigma_2) = h_x^2(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_1^2 + h_y^2(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_2^2$. This result is useful in showing the asymptotic consistency of the confidence intervals $\{I_N\}$ as stated in Theorem 1.

Theorem 1 (Asymptotic Consistency)

$$\lim_{d \to 0} P\{\theta \in I_N\} = 1 - \alpha.$$

A second-order approximation of the expected sample size is given in the next theorem under the following assumptions:

(A1) $\left\{ \left[\left(Z_n - \frac{n}{\epsilon_0} \right)^+ \right]^3, n \geq m \right\}$ is uniformly integrable for some $0 < \epsilon_0 < 1$, where $x^+ = \max(x, 0)$.

(A2) $\sum_{n=m}^{\infty} nP\{\xi_n < \epsilon_1 n\} < \infty$ for some $0 < \epsilon_1 < 1$.

Theorem 2 *If (A1) and (A2) hold, then*

$$E(N) = n^* + \rho - \nu + o(1), \quad \textit{as} \quad d \to 0,$$

for some ρ and ν defined in the paper.

Taking as an example the ratio parameter $\theta = h(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1/\sigma_2$, the second-order approximation of the expected sample size is $E(N) = n^* + \rho - 4 + o(1)$, as $d \to 0$. Estimating ρ by 2.03 through simulation, another stopping random variable is proposed as follows:

$$N^* = N_d^* = \inf \left\{ n \geq m : \ n \geq L(n) \frac{2a^2 \overline{X}_n^2}{d^2 \overline{Y}_n^2} \right\} \quad \text{where } L(n) = 1 + \frac{1.97}{n},$$

which is shown to be asymptotically efficient. Isogai and Futschik [1] has computed a measure for the asymptotic bias of the estimate $\hat{\theta}_N$. Thus, in addition to the intervals, I_N and I_N^*, the following bias-corrected sequential intervals are given:

$$I_N^\dagger = [\, \hat{\theta}_N^\dagger - d, \ \hat{\theta}_N^\dagger + d \,] \quad \text{and} \quad I_{N^*}^\dagger = [\, \hat{\theta}_{N^*}^\dagger - d, \ \hat{\theta}_{N^*}^\dagger + d \,],$$

where $\hat{\theta}_N^\dagger = \hat{\theta}_N + (3d)/(a\sqrt{2N})$ and $\hat{\theta}_{N^*}^\dagger = \hat{\theta}_{N^*} + (3d)/(a\sqrt{2N^*})$.

Simulation results using a coverage probability set at $1 - \alpha = 0.95$ and pilot sample size at $m = 13$, show that there seems to be no significant difference in the performance of I_N and I_N^*. However, the bias-corrected intervals $I_N^\dagger$ and $I_{N^*}^\dagger$, are more effective than the ordinary ones, I_N and I_{N^*}, in the sense that their coverage probabilities converge faster to $1 - \alpha$.

References

[1] E. Isogai and A. Futschik, Sequential point estimation of the ratio of two exponential scale parameters, 2004 (to appear).

[2] N. Mukhopadhyay and S. Chattopadhyay, Sequential methodologies for comparing exponential mean survival times, Sequential Analysis, 10 (1991), 139-148.

[3] C. Uno, Sequential estimation of the ratio of scale parameters in the exponential two-sample problem, J. Japan Statist. Soc., 33 (2003), 231-244.

[4] C. Uno, E. Isogai and D.L. Lim, Sequential point estimation of a function of the exponential scale parameter, Austrian J. of Statist., to appear.

The wavelet estimation for hidden periodic model in spatial series.

早稲田大学理工学部　蛭川　潤一

隠れた周期の検出問題は、多くの著者によって考えられて来た。He (1987) は、隠れた周期の数が未知の場合の隠れた周期の検出に、ペリオドグラムの方法を用いて強一致推定量を与えた。Li and Xie (1997) は、この方法に代えてウェーブレットの方法を用いて隠れた周期の数と隠れた周期の強一致推定量を与えた。しかしながら、彼らの方法はサンプリング間隔が大きすぎるために、必ずしもうまく働かない。例えば、隠れた周期の一つが $\lambda_l = -\frac{\pi}{3}$ である時、$I(\lambda_l, 2^{-2j}) = \{k : |\frac{k}{2^j}2\pi - \pi - \lambda_l| < 2^{-2j}\ or\ |\frac{k}{2^j}2\pi - \pi - \lambda_l| > 2\pi - 2^{-2j}, k \in I_j\}$, $I_j = \{0, 1, \ldots, 2^j - 1\}$ が空集合になってしまうため、周期 λ_l を検出することが出来ない。

本報告では、Li and Xie (1997) の方法を常にうまく働くように修正を加え、さらに、２次元のランダムフィールドの隠れた周期の検出問題に拡張する。隠れた周期の数、隠れた周期、振幅についての推定量を提案し、それらの強一致性を示す。

２次元の隠れた周期モデル

$$Y_{n,m} = \sum_{r=1}^{q} A_r \exp(in\lambda_r + im\mu_r) + X_{n,m}, \quad (n,m) \in \mathbb{N}^2 \tag{1}$$

を考える。ここに、$(\lambda_r, \mu_r) \in [-\pi, \pi)$, $r = 1, \ldots, q$ は、定数ベクトルで隠れた周期と呼ぶ。q は未知の非負整数。簡単のため、$\lambda_{r_1} < \lambda_{r_2}$ または ($\lambda_{r_1} = \lambda_{r_2}$ かつ $\mu_{r_1} < \mu_{r_2}$) のとき $r_1 < r_2$ とし、全ての振幅 $A_r, r = 1, \ldots, q$ は、正の定数とする。

$\{X_{n,m}\}$ は線形定常ノイズランダムフィールド $X_{n,m} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} d(k,l)W_{n-k,m-l}$ で与えられるとする。ここに、$d(k,l)$ は実定数係数で $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)|d(k,l)| < \infty$ を満たし、$\{W_{n,m} : (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ は、２次元実ホワイトノイズで次の仮定を満たす。

仮定 1. $\{W_{n,m}\}$ は、強定常1/4マルチンンゲール差分ホワイトノイズで、$E[W_{0,0}\log|W_{0,0}|]^2 < \infty$, $E(W_{0,0}^2|\mathcal{F}_{(-\infty,0)}) = E(W_{0,0}^2|\mathcal{F}_{(0,-\infty)}) = \sigma^2$ を満たす。ここに、$\mathcal{F}_{(-\infty,0)} = \cap_{k_1<0}\mathcal{F}_{(k_1,0)}$, $\mathcal{F}_{(0,-\infty)} = \cap_{k_2<0}\mathcal{F}_{(0,k_2)}$ である。

ふたつの正の整数 $s^{(i)}, i = 1,2$ の２進表現を $\epsilon_0^{(i)}\epsilon_1^{(i)}\ldots\epsilon_{J-1}^{(i)}$ とする。固定した j について、$\zeta_j^{(i)}$ と $\eta_j^{(i)}$ をそれぞれ、２進表現 $\epsilon_0^{(i)}\epsilon_1^{(i)}\ldots\epsilon_{j-1}^{(i)}$、$\epsilon_j^{(i)}\epsilon_{j+1}^{(i)}\ldots\epsilon_{J-1}^{(i)}$ を持つ整数とする。従って、$s^{(i)} = 2^{J-j}\zeta_j^{(i)} + \eta_j^{(i)}$ である。２つのウェーブレットと対応するスケーリング関数 $\psi^{(i)}, \phi^{(i)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $i = 1,2$ は適当な条件を満たすとし、

$$\phi_{j,k}^{(i,s^{(i)})per}(t) \equiv \phi_{j,k}^{(i)per}(t - \frac{2\pi}{2^J}\eta_j^{(i)}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi_{j,k}^{(i)}(\frac{t+\pi}{2\pi} + n - \frac{\eta_j^{(i)}}{2^J}) \tag{2}$$

$$\psi_{j,k}^{(i,s^{(i)})per}(t) \equiv \psi_{j,k}^{(i)per}(t - \frac{2\pi}{2^J}\eta_j^{(i)}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi_{j,k}^{(i)}(\frac{t+\pi}{2\pi} + n - \frac{\eta_j^{(i)}}{2^J}), \tag{3}$$

と定義する。それぞれの $s^{(i)} \in \{0, 1, \ldots, 2^J - 1\}$, $i = 1,2$ について $\{1, \psi_{j,k}^{(i,s^{(i)})per}\}_{j\geq 0, k=0,\ldots,2^j-1}$ は、$L_2[-\pi, \pi)$ の正規直交基底を形成する。$\phi_{j,k}^{(i,s^{(i)})per}$, $\psi_{j,k}^{(i,s^{(i)})per}$ は $\eta_j^{(i)}$ を通してのみ $s^{(i)}$ に依存しているので、$(\phi_{j,k}^{(i,\eta_j^{(i)})per}, \psi_{j,k}^{(i,\eta_j^{(i)})per})$ と記す。さらに、$(\eta_j) \equiv (\eta_j^{(1)}, \eta_j^{(2)})$ として、

$$f_{1\,(j,k,l)}^{(\eta_j)per}(t_1, t_2) \equiv \psi_{j,k}^{(1,\eta_j^{(1)})per}(t_1) \cdot \psi_{j,l}^{(2,\eta_j^{(2)})per}(t_2)$$

$$f_{2\,(j,k,l)}^{(\eta_j)per}(t_1,t_2) \equiv \psi_{j,k}^{(1,\eta_j^{(1)})per}(t_1) \cdot \phi_{j,l}^{(2,\eta_j^{(2)})per}(t_2)$$
$$f_{3\,(j,k,l)}^{(\eta_j)per}(t_1,t_2) \equiv \phi_{j,k}^{(1,\eta_j^{(1)})per}(t_1) \cdot \psi_{j,l}^{(2,\eta_j^{(2)})per}(t_2)$$
$$\phi_{(j,k,l)}^{(\eta_j)per}(t_1,t_2) \equiv \phi_{j,k}^{(1,\eta_j^{(1)})per}(t_1) \cdot \phi_{j,l}^{(2,\eta_j^{(2)})per}(t_2) \tag{4}$$

と定義する。それぞれの$(s^{(1)},s^{(2)})$について、$\{1, f_{i\,(j,k,l)}^{(\eta_j)per}(t_1,t_2)\}_{j\geq 0,k,l=0,\ldots,2^j-1,i=1,2,3}$は$L_2[-\pi,\pi)^2$の正規直交基底を形成する。$\tau_1 = 2^{J-j}k+\eta_j^{(1)}$, $\tau_2 = 2^{J-j}l+\eta_j^{(2)}$と置くと、$\tau_1,\tau_2 \in \{0,1,\ldots,2^J-1\}$である。

$\tilde{\lambda}_{\tau_1} = \frac{2\pi}{2^J}\tau_1 - \pi$, $\tilde{\mu}_{\tau_2} = \frac{2\pi}{2^J}\tau_2 - \pi$と定義する。$\{Y_{n,m}\}$のペリオドグラム$J_Y(\lambda,\mu,N,M) = \frac{1}{4NM\pi^2}\left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} Y_{n,m}\exp(-in\lambda)\exp(-im\mu)\right|^2$のウェーブレット係数

$$\beta_{J_Y}^{(\eta_j)}(j,k,l) \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{(j,k,l)}^{(\eta_j)per}(\lambda,\mu) J_Y(\lambda,\mu,N,M)d\lambda d\mu$$
$$= \frac{2\pi}{2^j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1,x_2) J_Y(\frac{2\pi}{2^j}x_1 + \tilde{\lambda}_{\tau_1}, \frac{2\pi}{2^j}x_2 + \tilde{\mu}_{\tau_2}, N, M)dx_1dx_2 \equiv \beta_{J_Y}(j,\tilde{\lambda}_{\tau_1},\tilde{\mu}_{\tau_2}) \tag{5}$$

を隠れた周期の検出のためのツールとして用いる。経験ウェーブレット係数と呼ぶ。以下では、$\lim_{N,j\to\infty}\frac{2^j}{N} = 0$, $\lim_{M,j\to\infty}\frac{2^j}{M} = 0$, $\lim_{N,M,j\to\infty}\frac{(NM\log NM)^{\frac{1}{4}}}{2^j} = 0$とする。

固定したjについて集合

$$\Sigma = \{(\tau_1,\tau_2) : 2^{-j}|\beta_{J_Y}(j,\tau_1,\tau_2)| \geq T_0,\ \tau_1,\tau_2 = 0,1,\ldots,2^J-1\} \tag{6}$$

を考える。ここに、$T_0 = \frac{A}{(2\pi)^2}\int_{-C}^{C}\int_{-C}^{C}\widehat{\phi}(\omega_1,\omega_2)d\omega_1 d\omega_2$, $0 < A < |A_r|^2$, $r = 1,\ldots,q$である。

Σが空の時$\widehat{q} = 0$とする。Σが空でない時はΣを$\tilde{q}(N,M,2^j)$個の部分集合に分割できて$\Sigma = \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_{\tilde{q}(N,M,2^j)}$となる。$\widehat{q} = \tilde{q}(N,M,2^j)$とする。$(\bar{\tau}_{1,d},\bar{\tau}_{2,d})$を$\Sigma_d$, $d = 1,\ldots,\widehat{q}$の中で$|\beta_{J_Y}(j,\tilde{\lambda}_{\tau_1},\tilde{\mu}_{\tau_2})|$の最大値を与える点とする。$(\tilde{\lambda}_{\bar{\tau}_{1,d}},\tilde{\mu}_{\bar{\tau}_{2,d}}) = (\bar{\lambda}_d,\bar{\mu}_d)$として、$(\bar{\lambda}_d,\bar{\mu}_d)$を適切に、並び替えて、$(\widehat{\lambda}_r,\widehat{\mu}_r)$, $r = 1,\ldots,\widehat{q}$とすると、以下の結果が成り立つ。

定理 1. 仮定1が成り立つとする。

1.

$$\lim_{N,M,j\to\infty}\widehat{q} = q \quad a.s. \tag{7}$$

2.

$$|\widehat{\lambda}_r - \lambda_r| \leq \frac{2\pi}{2^{j(1+\bar{\theta})}} \quad and \quad |\widehat{\mu}_r - \mu_r| \leq \frac{2\pi}{2^{j(1+\bar{\theta})}} \quad a.s. \tag{8}$$

ここに、$\bar{\theta} > 0$は

$$\lim_{N,M,j\to\infty}\frac{2^{j\bar{\theta}}}{2^{\frac{j}{2}}} = 0, \lim_{N,j\to\infty}\frac{2^{j\bar{\theta}}}{(\frac{N}{2^j})^{\frac{1}{2}}} = 0, \lim_{M,j\to\infty}\frac{2^{j\bar{\theta}}}{(\frac{M}{2^j})^{\frac{1}{2}}} = 0, \lim_{N,M,j\to\infty}\frac{2^{j\bar{\theta}}}{\frac{2^j}{(NM\log NM)^{\frac{1}{4}}}} = 0 \tag{9}$$

を満たす。

その他、振幅の推定も報告する。いくつかの数値例を与える。

References

1. He Shuyuan, 1987. On estimating the hidden periodicities in linear time series models. *Acta Math. Appl. Sin.* **3** 168-179.

2. Yuan Li, Zhongjie Xie, 1997. The wavelet detection of hidden periodicities in time series. *Statist. Probab. Lett.* **35** 9-23.

Confidence Regions in Nonlinear Repeated Measurements

九州大学 数理学府　馬場 裕子
九州大学 数理学府　山崎 利紗
九州大学数理学研究院　百武 弘登

1. はじめに

繰り返し測定値の観測ベクトルを $\boldsymbol{y}_i = (y_{i1}, \cdots, y_{ip})'$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする。y_{ij} は個体iの時点t_j における観測値であり、これに対してモデル

$$y_{ij} = f(t_j; \boldsymbol{\beta}_i) + \varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

を仮定する。ただし、fは非線形既知関数、ε_{ij}は誤差、$\boldsymbol{\beta}_i$はq次元未知パラメータ $(q < p)$ である。$f(t; \boldsymbol{\beta}_i)$ としては、たとえば、薬物動態モデル $f(t; \boldsymbol{\beta}_i) = \dfrac{\beta_{1i}}{\beta_{2i} - \beta_{3i}}(e^{-\beta_{3i}t} - e^{-\beta_{2i}t})$, $(\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i})')$ や成長モデル $f(t; \boldsymbol{\beta}_i) = \beta_{0i} + \beta_{1i}t - e^{\beta_{2i}+\beta_{3i}t}$, $(\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{0i}, \beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i})')$ などが挙げられる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{\beta}_i) = (f(t_1; \boldsymbol{\beta}_i), \cdots, f(t_p; \boldsymbol{\beta}_i))'$ とおけば、(1.1) は

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{\beta}_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{1.2}$$

と書ける。ただし、$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \cdots, \varepsilon_{ip})'$である。ここで、$\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{b}_i$ と仮定し、$\boldsymbol{\phi}$の信頼領域(区間)について考える。$\boldsymbol{b}_i$はランダム効果であり、$\boldsymbol{\varepsilon}_i$と独立とする。また、$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ は互いに独立にp変量正規分布 $N_p(\mathbf{o}, \sigma^2 I_p)$ に、$\boldsymbol{b}_i$は互いに独立にq変量正規分布 $N_q(\mathbf{o}, \Psi)$ に従うとする。ランダム効果をもつ場合においては、研究の多くがモデル選択や推定方法に関するものであり、検定や区間推定に関しては近似的に行わなければできないということもあってか、それほど議論されていない。Vonesh (1992) が期待予測区間について、Ogliari and Andrade (2001) はモデルにブロック効果を入れてその検定について近似的に(周辺分布による)t分布を適用して推測しているが、その導出過程が詳述されていない部分がある。また、Nagahisa and Hyakutake (2003) は$\boldsymbol{\phi}$の同時信頼区間を推定量の漸近正規性を用いて与えた。しかしながら、繰り返し測定データは標本数がそれほど大きくないことがあるので、これもあまり良い近似とはいえない。

2. パラメータの推定

パラメータの推定法としては、推定一般化最小二乗推定(EGLS)、最尤法(ML)や制約つき最尤法(REML)などが用いられるが、ここではEGLSにより推定する。$\boldsymbol{b}_i = \mathbf{o}$での1次のテーラー展開による(1.4)の近似は

$$\boldsymbol{y}_i \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}; \phi) + Z(\phi)\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{2.1}$$

となる。ただし、$Z(\phi) = \partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{b}_i'|_{\boldsymbol{b}_i'=\mathbf{0}}$である。これより、観測値の共分散行列は$V(\boldsymbol{y}_i) = Z\Psi Z' + \sigma^2 I_p (= W^{-1}(\Psi, \sigma^2))$ で近似できることがわかり、近似的に$\boldsymbol{y}_i \sim N_p(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}; \phi), W^{-1}(\Psi, \sigma^2))$ である。パラメータの推定手順はVonesh (1992) よる方法を用いる。

この推定法によるEGLS$\hat{\phi}$をもとにϕの信頼領域やその関数$g(\phi)$の信頼区間の構成について考える。このために、$\hat{\phi}$の共分散行列をどのように近似するかが問題となるが、そのひとつとして線形の場合の重みつき最小二乗推定量の共分散行列$\Omega = Z'WZ$に Vonesh (1992) による推定量$\hat{\Psi}, \hat{\sigma}^2$を代入した$\hat{\Omega} = \hat{Z}'\hat{W}\hat{Z}$を用いることが多い。ただし、$\hat{Z} = Z(\hat{\phi}), \hat{W}^{-1} = W^{-1}(\hat{\Psi}, \hat{\sigma}^2)$である。しかし、これは過小な分散となっている。なぜなら、$\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \hat{\phi})$ を$\hat{\phi}$に関してϕのまわりで展開し、(2.1) を用いると、$Z(\hat{\phi} - \phi) \approx (Z\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i) - (\boldsymbol{y}_i - \hat{\boldsymbol{f}})$ となって、$\Omega = Z'WZ$はこの第1項のみをもとにした共分散行列となっている。つまり、第2項の変動を考慮していないからである。この推定量がよくないことは、Vonesh (1992) のシミュレーションでも確認できるし、われわれもシミュレーションによる検証をした。そこで、Vonesh (1992) が用いたのは$\hat{\Omega}_R = \hat{\Omega}\hat{Z}'\hat{W}\sum_i\{\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}; \hat{\boldsymbol{\beta}}_i)\}\{\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}; \hat{\boldsymbol{\beta}}_i)\}'\hat{W}\hat{Z}\hat{\Omega}$ であり、その良さはシミュレーションにより、$\hat{\phi}$を100回推定し、その標本共分散行列と比較することで検証した。この推定量$\hat{\Omega}_R$ を用いることによって、ϕの信頼領域は

$$(\hat{\phi} - \phi)'\hat{\Omega}_R^{-1}(\hat{\phi} - \phi) \leq \frac{q(n-q)}{n-2q+1}F_{q,n-2q+1}(\alpha) \tag{2.2}$$

で近似できる。ただし、$F_{r_1,r_2}(\alpha)$は自由度(r_1, r_2)のF分布の上側α点である。この近似とOLS を用いた場合の近似信頼領域の精度をシミュレーションにより検証し、モデルによってはOLSを用いた方の近似がよい場合があった。

次に、パラメータの非線形関数$g(\phi)$の信頼区間の近似を与える。たとえば、Hyakutake (2003) は薬物動態モデルの特別な場合($\beta_{3i} \to \beta_{2i}$)であるモデル $f(t; \boldsymbol{\beta}_i) = \beta_{1i}te^{-\beta_{2i}t}$ においてランダム効果をもたないときについて応用例を挙げている。そこでは、このモデルの最大値$g(\phi) = \max_t \phi_1 te^{-\phi_2 t} = \phi_1/\phi_2 e$ に関する信頼区間の構成を与えている。Hyakutake (2003) と同様にすると、$g(\phi)$ の近似信頼区間として

$$g(\phi) \in g(\hat{\phi}) \pm t_{n-q}(\alpha/2)\sqrt{\boldsymbol{g}.'\hat{\Omega}_R\boldsymbol{g}.} \tag{2.3}$$

が考えられる。ただし、$t_r(\alpha)$は自由度rのt分布の上側α点で、また、$\boldsymbol{g}. = (\partial g/\partial\phi_1, \cdots, \partial g/\partial\phi_q)'$であり、これは未知パラメータ$\phi$に依存しているので実用にはその推定量を用いる。

この応用例として歯科麻酔後に測定される血漿ヒスタミン値のデータがあり、薬物動態モデルに適合している。アレルギーのある患者はヒスタミン値が高くなり、皮膚反応などがあらわれることがある。そこで、それをおさえるための薬剤を事前に投与した場合のヒスタミン値に対するモデルの最大値の信頼区間を数値例として挙げた。

参考文献

Hyakutake, H. *Biometrical J.* **45**, 772-780 (2003).
Nagahisa, T. and Hyakutake, H. *Bull. Informatics and Cybernetics* **35**, 19-25 (2003).
Ogliari, P.J. and Andrade, D.F. *Comp.Statist. Data Analy.* **36**, 319-332 (2001).
Vonesh, E.F. *Statist. Medicine* **11**, 1929-1954 (1992).

U-統計量の分散推定量の高次比較

九州大学経済学研究院　前園宜彦

統計量のクラスとして有用な U-統計量のいくつかの分散推定量について，漸近表現と漸近平均二乗誤差を求め，これにより分散推定量の高次の比較を可能にした．またジャックナイフ分散推定量を改良すると言われている delete-d ジャックナイフ分散推定量は U-統計量のときは，良くないことを示す不等式を得ることができた．

$X_1, \ldots, X_n$ を $i.i.d.\ F_\theta(x)$ とし，$h(x_1, \cdots, x_r)$ を r 次の対称なカーネルとするとき，U-統計量は

$$\hat{\theta} = U_n = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{C_{n,r}} h(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r})$$

で与えられる．ただし $\sum_{C_{n,r}}$ は $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ とする．この統計量の分散の推定量の漸近表現と漸近平均二乗誤差について議論した．

簡単のために $r = 2$ の場合を考える．このとき，分散 $\sigma_n^2 = V(U_n)$ を n 倍したものは

$$n\sigma_n^2 = 4\xi_1^2 + \frac{1}{n-1}\xi_2^2$$

となる．ここで ξ_1^2，ξ_2^2 はカーネルに依存する定数である．ノンパラメトリックな推定量として代表的なジャックナイフ分散推定量は

$$V_J = n\hat{\sigma}_J^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n}(U_n^{(i)} - U_n)^2$$

で与えられる．ここで $U_n^{(i)}$ は元のデータから X_i を除いて計算される U_n の値である．

また $4\xi_1^2$ の推定の観点から Sen (1960 *Calcutta Stat. Ass. Bull.*, 1977 *A.S.*) は

$$V_S = \frac{4}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(S_i - U_n)^2, \qquad S_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1, \neq i}^{n} h(X_i, X_j)$$

を提案している．

一般にジャックナイフ分散推定量は正のバイアスを持つことが知られており，Hinkley (1978 *B.K.*) はバイアス修正を考慮した推定量を提案しており，U-統計量のときは

$$V_C = V_J - \frac{1}{n+1}\sum_{C_{n,2}} Q_{i,j}^2$$

で与えられる．ただし $Q_{i,j} = nU_n - (n-1)(U_n^{(i)} + U_n^{(j)}) + (n-2)U_n^{(i,j)}$ で，$U_n^{(i,j)}$ は元のデータから X_i と X_j を除いて計算される U_n の値である．ここではバイアスの修正として

$$V_\alpha = (1 - \frac{\alpha}{n})V_J, \quad \alpha \geq 0$$

についても考察した．

さらに Schucany & Bankson (1989 *Austral. J. Stat.*) は $n\sigma_n^2$ の各未知母数に不偏推定量を代入した

$$V_U = 4\hat{\xi}_1^2 + \frac{1}{n-1}\hat{\xi}_2^2$$

を議論している．

これらの5つの分散推定量について Hoeffding-分解を利用すると次の漸近表現が求まる．

[定理 1]. もしある $\varepsilon > 0$ に対して $E|h(X_1, X_2)|^{4+\varepsilon} < \infty$ ならば

$$
\begin{aligned}
&V_J = n\sigma_n^2 + H_J + \frac{b_J}{n} + R_{1;n}, \quad V_S = n\sigma_n^2 + H_S + \frac{b_S}{n} + R_{2;n},\\
&V_\alpha = n\sigma_n^2 + H_\alpha + \frac{b_\alpha}{n} + R_{3;n}, \quad V_C = n\sigma_n^2 + H_C + R_{4;n},\\
&V_U = n\sigma_n^2 + H_C + R_{5;n}
\end{aligned}
$$

ただし $H_{\{\cdot\}}$ は3次の項までの H-分解されたものであり，

$$b_J = 2\xi_2^2, \quad b_S = 2\xi_2^2 - 8\xi_1^2, \quad b_\alpha = 2\xi_2^2 - 4\alpha\xi_1^2$$

で，残差項は

$$E|R_{k;n}|^{2+\frac{\varepsilon}{2}} = O(n^{-4-\varepsilon}) \quad (k = 1, \cdots, 5)$$

を満たす．

これを利用すると漸近平均二乗誤差が次のように求まる．

[定理 2]. もしある $\varepsilon > 0$ に対して $E|h(X_1, X_2)|^{4+\varepsilon} < \infty$ ならば

$$
\begin{aligned}
&E(V_J - n\sigma_n^2)^2 = mse(V_J) + O(n^{-\frac{5}{2}}), \quad E(V_S - n\sigma_n^2)^2 = mse(V_S) + O(n^{-\frac{5}{2}}),\\
&E(V_\alpha - n\sigma_n^2)^2 = mse(V_\alpha) + O(n^{-\frac{5}{2}}), \quad E(V_C - n\sigma_n^2)^2 = mse(V_C) + O(n^{-\frac{5}{2}}),\\
&E(V_U - n\sigma_n^2)^2 = mse(V_C) + O(n^{-\frac{5}{2}})
\end{aligned}
$$

である．$mse(\cdot)$ は n^{-2} のオーダーまでの漸近平均二乗誤差で，n^{-1} の項は共通であるが，n^{-2} の項には差が現れる．

Shao (1989 *J.A.S.A.*), Shao & Wu (1989 *A.S.*) 及び Wu (1990 *A.S.*) は delete-d ジャックナイフ分散推定量の性質を８０年代から９０年代にかけて盛んに論じた．

$d \geq n$ に対して $\mathbf{S}_{n,d}$ を $\{1, \ldots, n\}$ からの大きさ d の部分集合全体で，$\delta = \{i_1, \ldots, i_d\} \in \mathbf{S}_{n,d}$ に対して $\hat{\theta}^{(\delta)}$ を 元のサンプルから $X_{i_1}, \ldots, X_{i_d}$ を除いて計算される $\hat{\theta}$ とおく．このとき $Var(\hat{\theta})$ の delete-d ジャックナイフ分散推定量は

$$\hat{\sigma}_{J(d)}^2 = \frac{n-d}{dN} \sum_\delta (\hat{\theta}^{(\delta)} - \hat{\theta})^2$$

で与えられる．ここで $N = \binom{n}{d}$ で，$\sum_\delta$ はすべての可能な $\mathbf{S}_{n,d}$ の部分集合についての和をあらわす．この delete-d ジャックナイフ分散推定量は，通常のジャックナイフ分散推定量を改良するものとして提案されたが，U-統計量のような滑らかな統計量については次の定理が成り立つ．

[定理 3]. もし元の推定量 $\hat{\theta}$ が，滑らかさの条件を満たすなら，任意の標本点 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対して

$$\hat{\sigma}_{J(d-1)}^2 \leq \hat{\sigma}_{J(d)}^2$$

が成り立つ．ただし $d = 2, 3, \ldots, n-2$ である．ジャックナイフ分散推定量は正のバイアスがあるから，U_n の場合はバイアスの観点から delete-d は勧められない推定量ということになる．

Fixed Size Confidence Regions for Parameters of Stationary Processes Based on a Minimum Contrast Estimator

一橋大・経研　塩濱　敬之

1 Introduction

For parameters of stationary processes with mean zero and spectral density, sequential procedures are proposed for constructing fixed size confidence ellipsoidal regions for unknown parameters using a minimum contrast estimator. The confidence ellipsoids are shown to be asymptotically consistent and the associated stopping rules are shown to be asymptotically efficient as the size of the region becomes small when the assumed parametric model is correct.

We assume that the observations are stationary process with parametric spectral density $f_\theta(\lambda)$ where θ is an unknown parameter. To estimate θ, we use a minimum contrast estimator $\hat{\theta}_n^{(MCE)}$ which minimizes the criterion $D(f_\theta, \hat{f}_n) = \int_{-\pi}^{\pi} K\{f_\theta(\lambda)/\hat{f}_n(\lambda)\}d\lambda$ with respect to θ, where $\hat{f}_n(\lambda)$ is a non-parametric spectral estimator of $f_\theta(\lambda)$ and $K(\cdot)$ is an appropriate function.

2 Stopping Rule and Main Theorem

Let $\{X_t, t \geq 0\}$ be a scalar valued linear process of the form

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

where $\{\varepsilon_t\}$ is a sequence of i.i.d. random variables with $E\{\varepsilon_t\} = 0$ and $E\{\varepsilon_t^2\} = \sigma^2$. Then the process $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ is a second-order stationary process with spectral density $f(\lambda)$. We then define the criterion which measures the nearness of f_θ to f by

$$D(f_\theta, f) = \int_{-\pi}^{\pi} K\{f_\theta(\lambda)/f(\lambda)\}d\lambda.$$

A semiparametric estimator $\hat{\theta}_n^{(MCE)}$ of θ is defined by

$$\hat{\theta}_n^{(MCE)} = \underset{\theta \in \Theta}{\mathrm{argmin}} D(f_\theta, \hat{f}_n(\lambda)). \tag{2.2}$$

The following conditions are imposed.

(A.1) (i) $W_n(\lambda)$ can be expanded as

$$W_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-M}^{M} w\left(\frac{l}{M}\right) e^{-il\lambda}.$$

(ii) $w(x)$ is a continuous, even function with $w(0) = 1$, and satisfies

$$\begin{cases} |w(x)| \leq 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} w(x)^2 dx < \infty, \lim_{x \to 0} \frac{1-w(x)}{|x|^2} = \kappa_2 < \infty. \end{cases}$$

(iii) $M = M(n)$ satisfies

$$n^{1/4}M + M/n^{1/2} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

(A.2) (i) $K(x)$ is a three times continuously differentiable function on $(0, \infty)$, and has a unique minimum at $x = 1$.

(ii) The spectral model $f_\theta(\lambda)$ is three times continuously differentiable with respect to θ, and every component of the second derivative $\partial^2 f_\theta / \partial\theta\partial\theta'$ is continuous in λ.

Suppose that Assumptions (A.1) and (A.2) hold and if $f = f_\theta$, then

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(MCE)} - \theta) \xrightarrow[\mathscr{L}]{} N(\mathbf{0}, F(\theta)^{-1}) \tag{2.3}$$

where

$$F(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(\lambda) \frac{\partial}{\partial\theta'} \log f_\theta(\lambda) d\lambda, \tag{2.4}$$

which is called the Fisher information matrix in time series analysis. For any $d > 0$, let

$$R_n = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^q : (\theta - \hat{\theta}_n^{(MCE)})' F(\hat{\theta}_n^{(MCE)})(\theta - \hat{\theta}_n^{(MCE)}) \leq d^2 \lambda(F(\hat{\theta}_n^{(MCE)})) \right\}, \tag{2.5}$$

where $\lambda(F(\hat{\theta}_n^{(MCE)}))$ is the smallest eigenvalue of $F(\hat{\theta}_n^{(MCE)})$. Then R_n defines an ellipsoid with maximum axis equal to $2d (d > 0)$, and it is in this sense that the size of the ellipsoid is fixed. Moreover, for any $\alpha \in (0, 1)$ and $n_0(d)$ determined by

$$n_0(d) = \text{smallest integer} \geq a^2/d^2 \lambda(F(\theta)) \tag{2.6}$$

where a^2 satisfies $P[\chi^2(q) \leq a^2] = 1 - \alpha$, and $\lambda(F(\theta))$ is the smallest eigenvalue of the covariance matrix $F(\theta)$. We have from (2.5) that for $\theta \in \Theta$

$$\lim_{d \to 0} P(\theta \in R_{n_0(d)}) = 1 - \alpha. \tag{2.7}$$

This result in (2.7) shows that, for small value of d, the sample size $n_0(d)$ yields an ellipsoidal confidence region of fixed size and prescribed coverage probability. However, the sample size $n_0(d)$ cannot be used in practice because it depends on the unknown parameters. To overcome this, we define a stopping rule

$$T_d = \inf \left\{ n \geq m, n \geq a^2/d^2 \lambda(F(\hat{\theta}_n^{(MCE)})) \right\} \tag{2.8}$$

where m is the initial sample size. The confidence ellipsoid R_{T_d} has length of the major axis equal to $2d$. Moreover, we have the following theorems.

Theorem 2.1 *Suppose that Assumptions (A.1) and (A.2) hold, and $\theta \in \Theta$. Then, for the stopping rule T_d defined in (2.8) the following hold:*

$$(i) \quad T_d / n_0(d) \to 1 \quad a.s. \quad as\ d \to 0, \tag{2.9}$$

where $d_0(d)$ is as in (2.6), and

$$(ii) \quad \sqrt{T_d}(\hat{\theta}_{T_d}^{(MCE)} - \theta) \xrightarrow[\mathscr{L}]{} N(\mathbf{0}, F(\theta)^{-1}) \tag{2.10}$$

$$(iii) \quad \lim_{d \to 0} P[\theta \in R_{T_d}] = 1 - \alpha \ (asymptotic\ consistency). \tag{2.11}$$

Theorem 2.2 *Suppose that Assumptions (A.1) and (A.2) holds, and $\theta \in \Theta$. Then, for the stopping rule T_d and $n_0(d)$ defined in (2.8) and (2.6), respectively,the following hold:*

$$(i) \quad \{T_d / n_0(d); 0 < d < 1\} \ \ uniformly\ integrable \tag{2.12}$$

and

$$(ii) \quad \lim_{d \to 0} E(T_d / n_0(d)) = 1 \ \ (asymptotic\ efficiency). \tag{2.13}$$

LINEX 損失関数のもとでの正規分布の平均の多段階推定法

熊本大学・工　高田　佳和

1 序

$X_1, X_2, \cdots$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い，互いに独立な確率変数列とし，μ，σ^2 は未知とする．$X_1, \cdots, X_n$ を観測した後，平均 μ を δ_n で推定したとき，その損失は次の LINEX 損失関数で表されるとする．

$$L(\delta_n, \mu) = \exp[a(\delta_n - \mu)] - a(\delta_n - \mu) - 1$$

ここで，$a(\neq 0)$ は既知の定数．予め与えられた定数 $W(>0)$ に対して

$$E_\theta L(\delta_n, \mu) \leq W \qquad \text{for all } \theta = (\mu, \sigma^2) \tag{1}$$

を満たす標本数 n と推定量 δ_n を定めたい (有界リスク問題)．σ^2 が既知ならば，固定した標本数 n に対しては，LINEX 損失関数のもとでは，μ は標本平均 $\bar{X}_n$ ではなく

$$\delta_n = \bar{X}_n - \frac{a\sigma^2}{2n}$$

で推定される．δ_n は $\bar{X}_n$ よりもリスクが小さく，ミニマックスで許容的であるからである．このときリスクは

$$E_\theta L(\delta_n, \mu) = \frac{a^2\sigma^2}{2n}$$

となり，(1) が満たされるためには，標本数 n は $n \geq n_W = b\sigma^2$ でなければならない．ここで，$b = a^2/(2W)$．しかし，σ^2 は未知であるため最適な固定標本推定方式 δ_{n_W} を用いることはできない．(1) を満たすためには逐次的に標本を取る必要がある．

Takada and Nagao (2004) は，Chattopadhyay (1998) の停止時を修正し，漸近的に (1) を満たす逐次推定法を提案し，その二次の漸近有効性を示した．ここでは，多段階推定法も純逐次推定法と同等の二次の漸近有効性を有することを示す．

2 二段階推定法

スタイン (Stein, 1945) の二段階推定法をこの問題に応用する．$m(\geq 2)$ を第一段階の標本数とし，全標本数 S を次の式で定義する．

$$S = \max\left(m, \left[b\ell_m\hat{\sigma}_m^2\right] + 1\right)$$

ここで，$[x]$ は x を越えない最大の整数，$\hat{\sigma}_m^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_n)^2/(m-1)$，$\{\ell_m\}$ は

$$\ell_m = 1 + \frac{\ell_0}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right), \qquad m \to \infty$$

を満たす正の定数列．$S > m$ ならば第二段階において $S - m$ 個の標本を取る．S 個の標本を用いて，μ を $\hat{\delta}_S$ で推定する．そのときのリスクを

$$R_S = E_\theta L(\hat{\delta}_S, \mu)$$

とする．ここで，$\hat{\delta}_S = \bar{X}_S - a\hat{\sigma}_S^2/(2S)$．二段階推定法が純逐次推定法と同等の二次の漸近有効性を持つためには，σ に対して，正の下限 $\sigma_*(>0)$

$$\sigma > \sigma_*$$

を定める必要がある．この下限をもとに，第一段階の標本数を

$$m = \max\left(m_0, \left[b\sigma_*^2\right] + 1\right) \qquad (m_0 \geq 2)$$

とすると，次の結果が得られる．

定理 1 $\sigma > \sigma_*$ ならば

$$E_\theta(S) = n_W + \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{\sigma_*^2}\ell_0 + o(1) \quad as \quad W \to 0$$

$$R_S = W + \frac{2W^2}{a^2\sigma^2}\left(\frac{(2-\ell_0)\sigma^2}{\sigma_*^2} - \frac{1}{2}\right) + o\left(W^2\right) \quad as \quad W \to 0$$

$\ell_0 \geq 2$ となるように $\{\ell_m\}$ を選ぶと，$\sigma > \sigma_*$ ならば

$$R_S \leq W + o\left(W^2\right) \quad \text{as} \quad W \to 0$$

となり，(1) が漸近的に満たされることがわかる．

3 三段階推定法

Hall (1981) による三段階推定法をこの問題に適用する．$c(0 < c < 1)$ と $\kappa \geq 0$ は既知の定数とし，第一段階の標本数を m とする．二段階までの全標本数を

$$M_1 = \max\left(m, [cb\hat{\sigma}_m^2] + 1\right)$$

とし，$M_1 > m$ ならば，$M_1 - m$ 個の標本を抽出する．M_1 個の標本にもとづき，全標本数を

$$M = \max\left(M_1, [b\hat{\sigma}_{M_1}^2 + \kappa] + 1\right)$$

とする．$M > M_1$ ならば，$M - M_1$ 個の標本を更に抽出する．M 個の標本にもとづき，μ を $\hat{\delta}_M$ で推定する．そのときのリスクを

$$R_M = E_\theta L(\hat{\delta}_M, \mu)$$

とする．ただし，$\hat{\delta}_M = \bar{X}_M - a\hat{\sigma}_M^2/(2M)$．第一段階の標本数 m を

$$m = O\left(W^{-d}\right) \quad \text{as} \quad W \to 0 \qquad (0 < d < 1)$$

のように選ぶと，次の結果を得る．

定理 2

$$E_\theta(M) = n_W + \frac{1}{2} - \frac{2}{c} + \kappa + o(1) \quad as \quad W \to 0$$

$$R_M = W + \frac{2W^2}{a^2\sigma^2}\left(\frac{4}{c} - \frac{1}{2} - \kappa\right) + o\left(W^2\right) \quad as \quad W \to 0$$

定数 κ を

$$\kappa \geq \frac{4}{c} - \frac{1}{2}$$

を満たすように選ぶと

$$R_M \leq W + o\left(W^2\right) \quad \text{as} \quad W \to 0$$

すなわち，漸近的に (1) が満たされることがわかる．

量子Chapman-Robbins不等式

津田美幸　中央大学ＣＯＥ
松本啓史　国立情報学研究所

未知の量子力学系の状態(の関数)を推定する量子推定問題について考える. 状態 ρ_θ や推定すべき量 $g(\theta)$ が母数 θ で微分できるならば, 量子 Cramér-Rao 不等式が不偏推定量の分散の下限を与えることが知られている. この議論は古典的な Cramér-Rao 不等式の量子推定への拡張である. 一方, ρ_θ や $g(\theta)$ が微分できない場合, 古典では Chapman-Robbins 不等式が重要な位置を占めるが, この量子版は全く議論されてこなかった. 我々は, 量子推定における Chapman-Robbins 型不等式を初めて定式化した. また, Koike 型の不等式や大標本の場合についてもいくつかの例を示しながら議論した. 本稿では, 量子 Chapman-Robbins 不等式と例の一部を紹介する.

1　状態と測定

関心がある物理系が d 次元ヒルベルト空間で記述されるとき, その状態は $d \times d$ の非負定値エルミート行列 $\rho(=\rho^\dagger \geq 0)$ でトレース $\mathrm{tr}(\rho)$ が 1 のもので表される. 可測な集合 Ω に値をとる測定は, d 次元単位行列 I_d の分解

$$I_d = \int_{\omega\in\Omega} \Pi(d\omega) \ (\Pi(\omega) = \Pi(\omega)^\dagger \geq 0)$$

で表される. 状態が ρ の時にこのような測定をして, 観測値が $X \subset \Omega$ に入る確率は $\int_{\omega\in X} \mathrm{tr}(\rho\Pi(d\omega))$ となる. 状態が ρ の d_1 次元の系と状態が σ の d_2 次元の系があり互いに独立な場合, 全系の状態はテンソル積 $\rho\otimes\sigma$ で表される.

2　量子 Chapman-Robbins 不等式

系の状態が ρ_θ であるとする. ただし, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ は未知とする. 適切な測定を用いて関数 $g(\theta)$ の値を推定する問題について次が成り立つ.

定理 1 $g(\theta)$ の不偏推定量 $\hat{g}$ の分散 $V_\theta(\hat{g})$ の下限は次のように与えられる:

$$V_\theta(\hat{g}) \geq \frac{(\Delta_\delta g(\theta))}{J^S_{\theta,\delta}} \ (J^S_{\theta,\delta} = \mathrm{tr}(\rho_\theta(L^S_{\theta,\delta})^2)).$$

ただし, Δ_δ は θ の関数に作用する差分作用素

$$\Delta_\delta f(\theta) = \frac{f(\theta+\delta) - f(\theta)}{\delta}$$

で, $L^S_{\theta,\delta}$ は

$$\Delta_\delta \rho_\theta = \frac{\rho_\theta L^S_{\theta,\delta} + L^S_{\theta,\delta}\rho_\theta}{2}, L^S_{\theta,\delta} = (L^S_{\theta,\delta})^\dagger$$

を満たす行列である.

3 例

例 1 (Concurrence の推定) $\Theta = \{\theta \mid |\theta| < 1\}$ で

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ g(\theta) = |\theta|.$$

例 2 (悪魔の階段のモデル) $\Theta = \{\theta \mid 0 < \theta < \sqrt{2}\}$ で

$$\rho_\theta = \int_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} |\xi + \eta i\rangle\langle\xi + \eta i| \frac{\exp(-(\xi - x(\theta))^2 - (\eta - y(\theta))^2)}{\pi} d\xi d\eta$$

$(i = \sqrt{-1})$, $g(\theta) = \theta$. ただし, $|\alpha\rangle$ は複素振幅 α のコヒレントベクトルで, $(x(\theta), y(\theta))$ は $(0,1)\times(0,1)$ で悪魔の階段の形をなす.

例 3 (非可換離散一様分布モデル) $\Theta = \mathbb{N}$ *(自然数)* で

$$\rho_\theta = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \underbrace{\sigma_2 \oplus \cdots \oplus \sigma_2}_{\theta/2} & \theta\text{: 偶数}, \\ \underbrace{\sigma_2 \oplus \cdots \oplus \sigma_2}_{(\theta-1)/2} \oplus \sigma_1 & \theta\text{: 奇数}, \end{cases}$$

$g(\theta) = \theta$. ただし,

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

参考文献

Tsuda, Y. and Matsumoto, K. (2004) Quantum estimation for non-differentiable models. Submitted to *J. Phys. A*. quant-ph/0207150.

未知の尺度母数をもつ非正則な分布に対する位置母数の逐次区間推定について

筑波大学数理物質科学研究科 小池健一
筑波大学数理物質科学研究科 赤平昌文

1. はじめに. 一般に，位置尺度母数をもつ分布の平均に対して，非逐次で固定幅の区間推定をしようとしても，不可能であることがLehmann [L51] により示されている．平均と分散が未知の分布族において，Chow and Robbins [CR65] は，平均に対する固定幅の逐次信頼区間を構成している．この信頼区間は,，その２次の漸近展開を求めるなど多くの研究がある (例えばWoodroofe [W77] など)．区間 $(\theta-(1/2),\theta+(1/2))$ 上の一様分布に関して， Wald [W50] は，補助統計量を用いたある推定方式が，非逐次推定方式よりも優れた逐次推定方式となることを示し，これは，逐次解析の分野では極めて重要とされている．

ここでは，切断分布の位置尺度母数分布族を考え，その位置母数に対する固定幅の信頼区間を，Akahira and Koike [AK04] における方法を参考にして構成することを考える．その結果，台の端点で密度関数が 0 とならない場合には，新しい推定方式が [CR65] の方式より標本数の意味で優れているが，0 となる場合には，新しい推定方式は高々同等であることが分かる．このことは，密度に関する情報を取り入れて推定を行えば，標本数を十分に節約できることを示している．

2. 切断分布における極値の分布の漸近展開

本節では，Akahira and Takeuchi [AT95] と同様にして，切断分布における極値の分布の漸近展開を求める．

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ を，互いに独立にいずれも位置尺度母数をもつ p.d.f. $g\left((x-\theta)/\xi\right)/\xi$ に従う確率変数列とする．ただし，$\theta \in \mathbb{R}, \xi > 0$，$g(x)$ は，その台が開区間 $(-a,a)$ で，$\lim_{z\to -a+0} g(z) = c (>0)$, $\lim_{z\to a-0} g(z) = c'(>0)$, $\lim_{z\to -a+0} g'(z) = h$, $\lim_{z\to a-0} g'(z) = h'$ とする．いま，$Y_i = (X_i-\theta)/\xi\ (i \geq 1)$，$Y_{(1)} := \min_{1\leq i\leq n} Y_i$, $Y_{(n)} := \max_{1\leq i\leq n} Y_i$ とし，$S := n(Y_{(1)} + Y_{(n)})/2$, $T := n(Y_{(1)} - Y_{(n)} + 2a)$ とおくと，(S,T) の漸近 (asymptotic(as.))p.d.f. は，

$$g_{S,T}^{(n)}(s,t) = \begin{cases} 2cc' \exp\{s(-c+c') - t(c+c')\} + o(1) & (t > |s|), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．したがって，これから S, T の漸近周辺 (as. marginal(m.))p.d.f. を求めることができる．

3. 逐次信頼区間の構成とその性質. $0 < \alpha < 1$ なる α に対して，$\frac{c+c'}{cc'}\alpha = \frac{e^{-2cl}}{c} + \frac{e^{-2c'l}}{c'}$ の $l > 0$ での解を l_0，$n^* := l_0\xi/d$ とおく（ξ が既知のときの最小の標本数）．停止則を

$$\tau_1 = \tau\left(\frac{2ad}{l_0}\right) := \inf\left\{ n \geq n_0 \;\middle|\; \frac{R_n}{n-1} \leq \frac{2ad}{l_0} \right\}$$

とおく．ただし，$n_0(\geq 2)$ は初期標本数とする．このとき，次の定理を得る．
定理. 逐次推定方式 $(\tau_1, [M_{\tau_1} - d, M_{\tau_1} + d])$ は次を満たす．
(i) $\lim_{d \to 0+} P\{|M_{\tau_1} - \theta| \leq d\} = 1 - \alpha$ (漸近一致性), (ii) $\tau_1/n^* \overset{\text{a.s.}}{\to} 1 \ (d \to 0+)$.
(iii) $E(\tau_1)/n^* \to 1 \ (d \to 0+)$.

Chow and Robbins [CR65] は，互いに独立にいずれも平均 μ, 分散 σ^2 をもつ分布に従う確率変数列に対して，平均 μ に対する固定幅の信頼区間を次のように構成した．まず，$\bar{X}_n := \sum_{i=1}^n X_i/n$, $s_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$ とし，停止則 τ_2 を

$$\tau_2 := \inf\left\{n \geq n_0 \mid n \geq u_{\alpha/2}^2 d^{-2} s_n^2\right\}$$

とおく．ただし，$u_{\alpha/2}$ は標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点，$n_0(\geq 2)$ は初期標本数とする．このとき，逐次推定方式 $(\tau_2, [\bar{X}_{\tau_2} - d, \bar{X}_{\tau_2} + d])$ は次を満たす ([CR65])．
(i) $\lim_{d \to 0+} P\{|\bar{X}_{\tau_2} - \theta| \leq d\} = 1 - \alpha$ (漸近一致性), (ii) $\tau_2/n^{**} \overset{\text{a.s.}}{\to} 1 \ (d \to 0+)$,
(iii) $E(\tau_2)/n^{**} \to 1 \ (d \to 0+)$.
ただし，$n^{**} = u_{\alpha/2}^2 \sigma^2/d^2$ は，σ^2 が既知のとき漸近的な手法により求めた最小標本数である．

定理から，停止則 τ_1 は，τ_2 より期待標本数の意味で優れているといえる．

一方，台の端点で p.d.f. が 0 になる場合（正確には，台の両端点での片側微分係数が同じ次数まで 0 である場合）を考えると，同様に構成した逐次推定方式は漸近一致性などよい性質を持つが，$d \to 0+$ のとき，Chow-Robbins の方式に比べて期待標本数の意味で同等もしくは劣っていることが分かる．

以上では，p.d.f. の台の両端点での片側微分係数が同じ次数まで 0 である場合を考えたが，次数が端点で異なる場合，もしくは片側の端点のみ 0 となる場合には，$n^\gamma(X_{(1)} - a - \theta)$ と $n^\delta(X_{(n)} - b - \theta)$ とで確率分布に収束するための係数 γ, δ が異なるため，範囲の中央 (midrange) M_n を用いて推測するのは適当でない．

参考文献

[AK04] Akahira, M. and Koike, K. (2004). To appear in *Sequential Analysis.*

[AT95] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation.*

[CR65] Chow, Y. S. and Robbins, H. (1965). *Ann. Math. Statist.*, **36**, 457–462.

[L51] Lehmann, E. L. (1951). *Notes on the Theory of Estimation.*

[W50] Wald, A. (1950). *Statistical Decision Functions.*

[W77] Woodroofe, M. (1977). *Ann. Statist.*, **5**, 984–995.