Ｃ．研究内容・成果

（1）「統計的逐次推測とその関連領域の新展開」に関する研究報告

ON GOTT III'S DELTA t ARGUMENT

JSPS Research Fellow, Institute of Mathematics, University of Tsukuba, MICHIKAZU SATO

1. Introduction

It is usually believed that a good test brings a good confidence interval. An astrophysical scientist Gott III (1993, 1997) proposes delta t argument to estimate a future longevity by interest for application (see also Landsberg, Dewynne, and Please, 1993). His confidence interval is not based on a good test. An essentially unique, uniformly most powerful (UMP) test exists for his argument but it brings the confidence interval with a trivial infimum. We shall investigate this problem from several standpoints.

2. Reformulation and raising a problem

First, using conventional notation and terminology of statistical inference, we shall reformulate the argument by Gott III (1993, 1997). Assume that whatever we are measuring can be observed only in the interval between times $c(= t_{\text{begin}}$ in his notation) and $c + \theta(= t_{\text{end}})$, where c is a known constant and $\theta(> 0)$ is a parameter. If there is nothing special about now, we can consider that it is $c + X(= t_{\text{now}})$ where $X(= t_{\text{past}})$ is a random variable with the uniform distribution on the interval $(0, \theta)$. Fix $\alpha(= 1 - P)$ satisfying $0 < \alpha < 1$, though he lets $\alpha = 0.05$ and $\alpha = 0.5$. For any given $\theta_0(> 0)$, consider testing a (null) hypothesis $\theta = \theta_0$ versus an alternative one $\theta \neq \theta_0$ with level α. He considers a test that we accept the hypothesis if

$$\frac{\alpha\theta_0}{2} < X < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\theta_0,$$

and reject it otherwise. For a given value of X, we can derive a confidence interval of θ with level $1 - \alpha$. This is given by the set of θ_0 where we accept the hypothesis $\theta = \theta_0$. Rewriting θ_0 by θ in the inequality above and solving this with respect to θ, we get

$$\frac{X}{1 - \alpha/2} < \theta < \frac{2X}{\alpha},$$

which is a confidence interval of θ with level $1 - \alpha$. Subtracting X, we obtain

$$\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)^{-1} X < \theta - X < \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) X \tag{2.1}$$

which is a confidence interval of $\theta - X(= t_{\text{future}})$ with level $1 - \alpha$, though it is not conventional to estimate $\theta - X$, not θ or its function.

However, the test above is not good. In fact, the test that we accept the hypothesis if $\alpha\theta_0 < X < \theta_0$ and reject it otherwise, is the essentially unique UMP test. We can derive this by the Neyman–Pearson fundamental lemma. The UMP test, however, brings the following confidence interval:

$$0 < \theta - X < \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) X, \tag{2.2}$$

where $0 < \theta - X$ is trivial.

We shall discuss this problem from several standpoints in the next section.

3. Investigation into the problem from several standpoints

3.1 Evaluating a confidence interval by its length

In this subsection, we shall consider evaluating a confidence interval by its length. From this standpoint, the discussion above is not correct because (2.1) is shorter than (2.2). There is not an essential difference between estimating θ and $\theta - X$ from this standpoint. Generally, the following theorem holds.

THEOREM 1. *Fix* α. *For any given* θ_0, *let* $\varphi_0(\cdot,\theta_0)$ *and* $\varphi(\cdot,\theta_0)$ *be tests of a hypothesis* $\theta=\theta_0$ *versus an alternative one* $\theta\neq\theta_0$ *with level* α. *Assume that* $\varphi_0(\cdot,\theta_0)$ *is UMP. Also assume that* $\varphi_0(\cdot,\cdot)$ *and* $\varphi(\cdot,\cdot)$ *are measurable. Let* $C_0=C_0(X)$ *and* $C=C(X)$ *be the confidence sets based on* φ_0 *and* φ, *respectively. Then, for a* σ*-finite measure* μ *on the parameter space such that* $\mu(\{\theta\})=0$ *for all* θ, *the following inequality holds:*

$$E_\theta[\mu(C_0)]\le E_\theta[\mu(C)].$$

However, it is not adequate to evaluate a confidence interval by its length in this problem because $0<\theta-X$ is trivial. We should avoid letting the infimum of the confidence interval of $\theta-X$ be close to 0.

3.2 Evaluating a confidence interval by an alternative to its length

In this subsection, we shall consider evaluating a confidence interval by an alternative to its length. Let $U:=\theta-X$ and denote a confidence interval by $(\underline{U},\overline{U})$, where $0\le\underline{U}\le\overline{U}\le\infty$. We may include the infimum or the supremum of the confidence interval. We use x for the realization of a random variable X, and we similarly use u, $\underline{u}$, and $\overline{u}$. Consider an alternative to the length, say $L(\underline{u},\overline{u})$, that is independent of θ. Since the distribution of X, which depends on θ, is scale-equivariant, it is natural to take a scale-equivariant L, that is, $L(k\underline{u},k\overline{u})=L(\underline{u},\overline{u})$ for all $k\in(0,\infty)$. Under this assumption, we can rewrite $L(\underline{u},\overline{u})=l(\overline{u}/\underline{u})$ for some $l(\cdot)$ defined on $[1,\infty]$. Furthermore, it is natural to take l such that $l(1)=0$, $l(\infty)=\infty$, and $l(r)$ strictly increases with respect to $r\in[1,\infty]$. A natural selection is $l(r)=\log r$, that is, to evaluate $(\underline{u},\overline{u})$ by the length of $(\log\underline{u},\log\overline{u})$. From this standpoint, it is essentially different to estimate θ and $U(=\theta-X)$.

An interval estimator $(\underline{u}(\cdot),\overline{u}(\cdot))$ is said to be scale-equivariant if $\underline{u}(kx)=k\underline{u}(x)$ and $\overline{u}(kx)=k\overline{u}(x)$ for all positive k and x. It is easy to see that this holds if and only if $\underline{U}=\underline{k}X$ and $\overline{U}=\overline{k}X$ for some constants $\underline{k}$ and $\overline{k}$. In addition, $L(\underline{k}X,\overline{k}X)=\log(\overline{k}/\underline{k})$, which is independent of the realization of X.

THEOREM 2. *Fix* α. *Then (2.1) is the best equivariant nonrandomized confidence interval of* $\theta-X$ *with respect to* $L(\underline{u},\overline{u})=\log(\overline{u}/\underline{u})$ *with level* $1-\alpha$.

3.3 Fisher's fiducial inference

When $X=x$ is observed, from the standpoint of Neyman–Pearson, (2.1) or (2.2) does *not* mean

$$P\left[\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)^{-1}x<\theta-x<\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)x\right]=1-\alpha \tag{3.1}$$

or

$$P\left[0<\theta-x<\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)x\right]=1-\alpha, \tag{3.2}$$

respectively. From the standpoint of Fisher, however, (3.1) and (3.2) hold for all α. By (3.2), we see that the fiducial distribution of $\theta-x$ is $x(u+x)^{-2}du$, $u>0$. This does not contradict (3.1). Therefore, from this standpoint, the interval estimations (2.1) and (2.2), where α is not fixed, are essentially the same.

3.4 The noninformative Bayesian approach

From the standpoint of the noninformative Bayes, since θ is a scale parameter, the noninformative (improper) prior $d\theta/\theta$ is used. It is easy to see that the posterior distribution of $\theta-x$ coincides with the fiducial distribution.

REFERENCES

[1] Gott III, J. R. (1993). Implications of the Copernican principle for our future prospects, *Nature*, **363**, 315–319.

[2] Gott III, J. R. (1997). A grim reckoning, *New Scientist*, pp. 36–39 on Nov. 15, 1997.
[Japanese translation by Ohashi, M. (1998). *SCIaS*, pp. 78–79 on Jan. 2 and 16, 1998.]

[3] Landsberg, P. T., Dewynne, J. N., and Please, C. P. (1993). Rise and fall. *Nature*, **365**, 384.

BOUNDED RISK POINT ESTIMATION OF A PARAMETER OF AN EXPONENTIAL DISTRIBUTION

新潟大学・理　　　　磯貝　英一
新潟大学・自然科学　斎藤　和正
秋田大学・教育文化　宇野　力

$X_1, X_2, X_3, \cdots$は互いに独立で同一の指数分布に従い、次の確率密度関数をもつとする。

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \sigma^{-1}\exp\left\{-(x-\mu)/\sigma\right\}I(x \geq \mu).$$

ただし、$\mu \in (-\infty, \infty)$と$\sigma \in (0, \infty)$は未知である。$a \in (-\infty, \infty)$と$b \in (0, \infty)$が与えられた定数とするとき、$\theta = a\mu + b\sigma$を推定する問題を考える。

$$T_n = \min(X_1, \cdots, X_n), \quad \sigma_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - T_n) \quad (n \geq 2)$$

とおき、θの推定量として$\theta_n = aT_n + b\sigma_n$を用いる。損失関数として２乗損失を考える。このとき、推定量θ_nに対するリスクは次で与えられる。

$$R(\theta_n) = E(\theta_n - \theta)^2 = \frac{b^2\sigma^2}{n-1} + \frac{2a^2\sigma^2}{n^2}.$$

$w > 0$は与えられた定数とするとき、$R(\theta_n) \leq w$を満たす最小の大きさの標本を用いてθを推定したい。$AR(\theta_n) = \dfrac{b^2\sigma^2}{n-1}$とおくと、$R(\theta_n) \approx AR(\theta_n)\ (n \to \infty)$なので、$R(\theta_n) \leq w$の代わりに

$$AR(\theta_n) \leq w \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{b^2}{w}\sigma^2 + 1$$

を考える。$n^* = \dfrac{b^2}{w}\sigma^2$, $n_0 = n^* + 1$とおき、簡単のためにn^*は整数であると仮定する。このとき、n_0は漸近的に$R(\theta_n) \leq w$を満たす最小の標本の大きさである。しかし、n_0には未知母数σが含まれるので、逐次的にθを推定することにする。最初に、停止規則Nを定義する。

$$N = N_w = \inf\left\{n \geq m : \sum_{i=1}^{n}(X_i - T_n) \leq b^{-1}w^{1/2}(n-1)^{3/2}l(n-1)\right\}.$$

ただし、$m \geq 2$は初期標本の大きさで、$l(x)$は$(0, \infty)$上で定義された正数値をとる連続関数で、$l(x) = 1 + \dfrac{l_0}{x} + o(x^{-1})\ \ (x \to \infty)$（$l_0$は定数）を満たし、前もって与えられているとする。このとき、$P(N < \infty) = 1$なので、N回目で標本抽出を

停止し、$(X_1,\cdots,X_N)$ に基づいた推定量$\theta_N = aT_N + b\sigma_N$で$\theta$を推定する。

$R(\theta_N)$の漸近展開は次で与えられる。

定理1.

(1) $m \geq 4$ ならば、$E(N) = n^* + 2\nu - 2l_0 - 2 + o(1) \quad (w \to 0).$

ただし、ν はある既知の定数で、$0 < \nu < 0.747$ を満たす。

(2) $m \geq 11$ ならば、

$$\frac{R(\theta_N)}{w} = 1 + \left\{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) + 19 - 2\nu + 2l_0\right\}(n^*)^{-1} + o\left((n^*)^{-1}\right) \quad (w \to 0).$$

ここで、$l_0 < -\left\{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) + 19 - 2\nu\right\} \Big/ 2$を満たす定数$l_0$を選べば、十分小さい$w > 0$に対して、$R(\theta_N) \equiv E(\theta_N - \theta)^2 < w$が成り立つ。

さて、θ_Nのバイアスは、$m \geq 9$ならば

$$E(\theta_N) - \theta = \frac{a\sigma}{n^*} - \frac{2b\sigma}{n^*} + o\left(\frac{1}{n^*}\right) \quad (w \to 0)$$

で与えられる。この事実を考慮して、次の推定量の族を考える。

$$\theta_N^*(k) = a\left(T_N - \frac{\sigma_N}{N}\right) + b\left(1 + \frac{k}{N}\right)\sigma_N, \quad k \text{は実数である。}$$

このとき、$m \geq 9$ならば、$E(\theta_N^*(k)) = \theta + \frac{k-2}{n^*} b\sigma + o\left(\frac{1}{n^*}\right) \quad (w \to 0)$ が成り立つ。

従って、$k = 2$のとき、$\theta_N^*(2)$は漸近的に2次の不偏推定量である。

$R(\theta_N^*(k))$の漸近展開は次で与えられる。

定理2. $m \geq 11$ならば

$$\frac{R(\theta_N^*(k))}{w} = 1 + \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) + k^2 - 6k + 19 - 2\nu + 2l_0\right\}(n^*)^{-1} + o\left((n^*)^{-1}\right) \quad (w \to 0).$$

ここで、$l_0 < -\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) + k^2 - 6k + 19 - 2\nu\right\} \Big/ 2$を満たす定数$l_0$を選べば、十分小さい$w > 0$に対して、$R(\theta_N^*(k)) < w$が成り立ち、さらに、$k = 3$のとき、上の$l_0$を用いると、$a \neq 3b$となるすべての$a \in (-\infty, \infty)$と$b \in (0, \infty)$に対して、$w > 0$が十分小さければ、$R(\theta_N^*(3)) < R(\theta_N^*(k))$が成り立つ。

群逐次検定方式の開発研究

九州東海大・工　　道家暁幸

1. はじめに

この群逐次決定方式は Pocock(1977) が初めて提案し、正規応答または2値応答の群観測値をもとに2つの母平均の差や2つの母比率の差の検定についての手順を考案している。その他、代表的な O'Brien-Fleming 法 (1979) 、Fleming-Harrington-O'Brien 法 (1979) 、Lan-DeMets 法 (1983) 等があるが、これらの群逐次検定方式は、繰り返し信頼区間の設定方法で特徴づけられる。Jennison-Turnbull(1991) は群逐次検定の特徴を利用した群逐次 t, χ^2, F 統計量を考案し、またその条件付分布を用い繰り返し信頼区間を設定している。これらの方式開発の主な目的は、早い結論を得る、観測個数を期待的に少なくする、検出力を上げる統計量を提案する、標本数の決定手順を開発する等が挙げられる。本研究の主な内容は、標本数の決定手順を開発と Jennison-Turnbull(1991) の統計量を利用した群逐次決定方式の構築にある。これは群観測値をもとに2処置間の効果の差の検定を行うために群逐次統計量を与え、その後、Jennison-Turnbull の考え方を利用した修正群逐次統計量を提案する。ここでは、この2つの群逐次統計量をもとにした群逐次決定方式に関し、繰り返し信頼区間を設定した後、平均観測個数と検出力について2方式を比較検討する。初めに通常の群逐次検定方式を説明し、更に本研究で開発した群逐次検定方式を紹介する。

2. 群逐次検定における各段階での標本数の決定手順

この群逐次検定において、Pocock(1977) は事前に指定された最大検定回数、有意水準と検出力の下で標本数（最大標本数）の決定手順を示しているが、各段階での標本数は全て同一と仮定しているため、あまり実際的でない。このような状況に中で本研究は、検定の途中段階で次段階の検定に必要な標本数を決定する手順を提案する。これは Lan-DeMet 法 (1983) でのアルファ消費関数を用い、有意水準と検出力を各段階へ振り分け、次の段階での標本数を決定するものである。その決定に際し、標本数を減らす方策として、これまでの段階で得られた2処置の標本平均をもとに、2処置間の優劣を表す比率を用い、優位な処置が採択されやすいような信頼限界を設定する手順を提案する。

3. Jennison-Turnbull 法を応用した修正群逐次統計量

ここでは Jennison-Turnbull の統計量を説明するため、初め1変量正規反応の群観測値をもとに2処置間の母平均の差の検定を行うために群逐次統計量を与え、その後、Jennison-Turnbull の考え方を利用した修正群逐次統計量を提案する。ここでは、この2つの群逐次統計量をもとにした群逐次決定方式に関し、繰り返し信頼区間を設定した後、平均観測個数と検出力について比較する。

4. 群逐次 χ^2、T^2 統計量と検出力

最近、臨床医学で問題となる、安全性と有効性の2変量を同時に扱った群逐次検定が Jennison-Turnbull(1993) により研究され、また2つ以上の処置を同時に扱った群逐次検定方式が Lui(1993) により提案されている。Jennison-Turnbull(1991) は1標本問題での多変量群逐次検定において、群逐次検定の特徴を使い新しい群逐次統計量を提案している。この研究では多変量観測値をもとに2処置間の平均ベクトルの差の検定を行う際、分散共分散行列が既知の場合は群逐次 χ^2 統計量を

用いる。更に、検出力を上げる目的で、新しい修正群逐次χ^2統計量を提案する。その２つの統計量をもとにした群逐次決定方式の有効性を、検出力に関して比較する。同様の検定で分散共分散行列が未知で等しい場合は群逐次 T^2統計量と修正群逐次 T^2統計量を提案し、それらを検出力について比較、検討する.

5. 最大標本数の決定手順

今まで、多変量群逐次検定で最大標本数の決定方法に関する研究はあまり見られない。本研究は群逐次χ^2統計量と修正群逐次χ^2統計量ついて、最大標本数の求めるための手順を提案する。最大標本数は最大検定回数 K、反応の数（次元）、第１種の過誤の確率α、第２種の過誤の確率β、平均ベクトルの差、分散共分散行列等によって影響する。この最大標本数の求めるための手順の基本は、初めに最大検定回数 K、α、βを指定し、各段階で共通な標本数 gに任意の値を与え、繰り返し信頼限界、検出力を求め、得られた検出力が $1-\beta$に一致するまで gの値を変え、最大標本数 $n_{max}=gK$を決定する。

6. 変数に重み付けした統計量

多変量群逐次検定で用いられるχ^2, T^2統計量は、２次形式で与えられ、個々の反応の影響や強さを表現できない。そこで、実験者が各反応に重み付けした係数行列を仮定し、その行列を用いた群逐次 T^2統計量と修正群逐次 T^2統計量を導出する。更にこの２つの群逐次統計量を用い、繰り返し信頼区間を設定した後、検出力、平均観測個数に関して、２つの群逐次検定方式の有効性を比較する。

7. 変量の寄与に関する群逐次検定

ここでは、２つの処置の効果が p 種類の反応で測られるものとして、その反応の確率ベクトルが p 変量正規分布に従うものとする。このとき、２つの平均ベクトルの差をもとに、p 反応の中の一部の反応の差の寄与の有無についての群逐次検定を考える。Rao は additional information の検定理論の中で１標本問題での検定統計量を議論している。本研究では２標本問題に拡張し、そこで得られる Hotelling の T^2統計量を新しい群逐次 T^2統計量として提案する。更に、この群逐次 T^2統計量を改良した修正群逐次 T^2統計量を与える。

参考文献

[1] Fleming,T.R., Harrington,D.P. and O'Brien,P.C.(1984). Designs for Group Sequential Tests, Controlled Clinical Trials 5,348-361.

[2] Jennison,C. and Turnbull,B.W.(1991). Exact Calculations for Sequential t, χ^2 and F Tests, Biometrika, 78,1, 133-141.

[3] Jennison,C. and Turnbull,B.W.(1993). Group Sequential Test for Bivariate Response: Interim Analyses of Clinical Trials with Both Efficacy and Safety Endpoints, Biometrics 49, 741-752.

[4] Lan,K.K.G. and DeMets,D.L.(1983). Discrete Sequential Boundaries for Clinical Trials, Biometrika 70, 659-663.

[5] Lui,K.J.(1993). A Simple Generalization of the O'Brien and Fleming Group Sequential Test Procedure to More Than Two Treatment Groups, Biometrics 49, 1216-1219.

[6] O'Brien,P.C. and Fleming,T.R.(1979). A Multiple Testing Procedure for Clinical Trials, Biometrics 35, 549-556.

[7] Pocock,S.J.(1977). Group Sequential Methods in the Design and Analysis of Clinical Trials, Biometrika 64, 191-199.

Boundary Crossing Problem の Finance への応用

一橋大学・経済・高橋　一

1．金融派生証券

金融派生証券とはその価値が他の本源的な資産価格の関数となるものをいう。その意味で株式等も広い意味では派生証券であるが、本稿では所謂株式オプションに話を限定することとする。株式オプションには、買う権利を持つコールオプションと売る権利を保障するプットオプションがある。また権利行使の時点を満期日のみとするヨーロッパ型と満期日までの任意の日に権利行使が可能なアメリカ型の２種類があり、それぞれの組み合わせにより４種類の基本的な形態がある。以下簡単のためヨーロッパ型コールオプションに話を限定することとするがここで、ヨーロッパ＜アメリカ＞型のコール（プット）オプションとはある株式（原資産 :S_u を時点 u における資産価格とする）をある将来の決まった日（満期日 :T）に＜迄に＞、予め決められた価格（行使価格 :K）で一定数量買う（売る）ことのできる権利のことである。ヨーロッパ型コールオプションの満期日における価値は $C_T = \max(S_T - K, 0)$ であり、オプションの所有者 (Holder) は満期時点においては損をすることはない。従ってオプションの発行者 (Writer) は時点 t でオプションの発行に当たり、その対価 (Option Price C_t) を要求できる。そこで、問題はオプション価格をどのように決定したらよいかである。

市場に於ける無裁定 (No Arbitrage) 条件下でのオプション価格は、所謂マルチンゲール測度のもとで C_T の F_t が与えられたときの条件付き期待値を無危険利子率 r で現在価値に割り引かれたもので与えられることが Harrison−Pliska(1981) により示されている。但しマルチンゲール測度のもとでは株価過程 $\{S_u : t \leqq u \leqq T\}$ は以下の伊藤過程に従う；

(1) $$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad W_t \sim BM(0,1)$$

このとき，$\log S_T - \log S_t \sim N((T-t)(r-(1/2)\sigma^2), (T-t)\sigma^2)$ となる。

[定理：Black−Sholes(1972), Harrison−Pliska(1981)] 確率測度 (1) のもとで、

(2) $$C_t = e^{-r(T-t)} E\{C_T \mid F_t\} //$$

これより次の、BS公式を得る。

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2)$$

但し、$d_1 = [\log\{S_t/K\} - (r-\sigma^2/2)(T-t)]/\{\sigma(T-t)^{1/2}\}$, $d_2 = d_1 - \sigma(T-t)^{1/2}$.

2．エキゾチックオプション

ヨーロッパ型オプションの変形にエキゾチックオプションというものがある。例えば、

a。$C_T = \max\{\bar{S}_{T-t} - K, 0\}$,　$\bar{S}_{T-t} = (1/T-t)\int_t^T S_u\, du$

b。$C_T = \max\{Med\{S_u, t \leqq u \leqq T\} - K, 0\}$ or α −percentile Option.

c。Knock out Option: オプションの生存期間中に原資産価格がある一定の範囲に入っていない限り、オプションか失効してしまうもの等が良く知られている。

最後のノックアウトオプションの価格決定問題についての基本的な論文 Kunitomo−Ikeda (1992) がある。彼らは $\log S_u$ に対する時間 u の一次関数からなる（直線）バウンダリーを考え Doob (1947) と Anderson(1961) の結果を利用しノックアウトオプションの価格を計算している。それに対する批判として、Morimoto(1998) は $\log S_u$ のランダム変動は時間

が経過するに従い大きくなることに注目して、時間経過に対しユニフォームなノックアウトオプションを log S_u に対する時間 u の平方根に比例する曲線バウンダリーを考えた。本稿は、その流れの中で、株価過程は対数正規ランダムウォークに従うとの前提でのノックアウトオプションの価格決定問題を考える。

3．離散時間ノックアウトオプションの価格決定。

Let $x_t = \log(S_t/S_{t-1})$, $x_0 = 0$. And assume that x_i's are i.i.d. with $N(\mu, \sigma^2)$, so that $S_u = S_t \exp\{\sum_{i=t}^{u-t} x_i\} = S_t \exp\{X^*_{u-t}\}$, $u = t+1, t+2, \ldots$. Set $X_u = X^*_{t+u}$, $u = 1,2, \ldots$ and $X_0 = 0$. For some $b > 0$ and $a \geqq 0$, the option may be terminated if

$$|\log(S_{t+u}/S_t)| = |X_u| \geqq b\sqrt{(u+a)} \quad \text{for some } u = 1,2,\ldots, T-t = M \text{ (say)}.$$

Let us consider the stopping time $\tau = \inf\{n \geqq 1: |X_n| \geqq b\sqrt{(n+a)}\}$ and set $g_M(x)$ be the density function of S_T given S_t on the set that $\tau \geqq M$. Hence,

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x-K) g_M(x)dx$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x-K) P_0\{\tau \geqq M | S_M = x\} \Pr\{S_M \in dx\}$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x-K) P_0\{\tau \geqq M | X_M = \log x\} P_r\{\exp\{S_M\} \in dx\}$$

Now, $P_0\{\tau \geqq M | X_M = \log x\} = P_0\{\tau \geqq M | X_M = b\sqrt{(M+a)} + (\log x - b\sqrt{(M+a)})\}$

$$= \Psi_b(M, \log x - b\sqrt{(M+a)}) \quad \text{(Say)}$$

If we let, $b \to \infty$ in such a way that $b/M^{1/2} \to \mu_1$ (>0), we have an asymptotic expansion for $\Psi_b(M, \log x - b\sqrt{(M+a)})$ (Takahashi−Woodroofe, 1981). Note,

$$\Psi_b(M, \log x - b\sqrt{(M+a)}) = 1 + o(1/M) \qquad \text{for } y = \log x - b\sqrt{(M+a)} < -\alpha \log b$$

$$\Psi_b(M, \log x - b\sqrt{(M+a)}) = o(1/M) \qquad \text{for } y = \log x - b\sqrt{(M+a)} > \log b$$

And for y in the compacta,

$$\begin{aligned}\Psi_b(M, \log x - b\sqrt{(M+a)}) &= \Psi(\mu_1, y) + (1/M)\{-2y\Psi'(\mu_1, y) \\ &+ [(\Psi'(\mu_1, 0)/\Psi(\mu_1, 0)) + y/2 - 3\mu_1 a/2]\Psi'(\mu_1, y) + \Psi''(\mu_1, y)\} + o(1/M) \quad \text{as } b \to \infty,\end{aligned}$$

where $\Psi(\mu_1, y) = P_0\{X_j \leqq (1/2)\mu_1 j - y, \text{ for all } j \geqq 1\}$ and Ψ', Ψ'' are the derivatives of Ψ with respect to μ. Also it is easily seen that

$$P_r\{\exp\{S_M\} \in dx\} = (1/xM^{1/2})\,\phi((\log x - rM)/M^{1/2})$$

We, then have

$$\begin{aligned}C(t) &= e^{-r(T-t)}/(M^{1/2}) \int_{\log K - b\sqrt{(M+a)}}^\infty (1 - Ke^{-y-b\sqrt{(M+a)}}) \\ &\{\Psi(\mu_1, y) + (1/M)\{-2y\Psi'(\mu_1, y) + [(\Psi'(\mu_1, 0)/\Psi(\mu_1, 0)) + y/2 - 3\mu_1 a/2]\Psi'(\mu_1, y) \\ &+ \Psi''(\mu_1, y)\} + o(1/M)\}\exp\{-(1/2M)(y - b\sqrt{(M+a)} - rM)^2\} e^{y + b\sqrt{(M+a)}} dy/(2\pi)^{1/2}\end{aligned}$$

Now, for $y \leqq 0$ we shall approximate $\Psi(\mu_1, y)$ by,

$$\Psi(\mu_1, y) \fallingdotseq P\{W(t) \leqq (1/2)\mu_1 t - (y+0.583), \text{ for all } t \geqq 0\} \quad W \sim BM(0,1).$$

SELECTING THE COMPONENT BASED ON THE DIFFERENCE OF TWO MULTINORMAL MEANS

九州大学数理学研究科　百武弘登

1. はじめに

2つの多変量正規母集団 $\Pi_i : N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$, $(i = 1, 2)$ において平均の差 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$ が最大となる成分の選択問題を考える。ここで、共分散行列は intraclass correlation model: $\Sigma_i = \sigma_i^2\{(1-\rho_i)I_p - \rho_i \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'\}$, $-1/(p-1) < \rho_i < 1$, $(i = 1, 2)$ とする。

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_p)'$ において、この成分が順序付けされて $\xi_{[p]} > \xi_{[p-1]} \geq \cdots \geq \xi_{[1]}$ と表されるとき、$\xi_{[p]}$ をもつ成分を最良として選択したいとする。ここでは、indifference zone approach による選択問題を考えることにする。

Π_i からの標本数を n_i とし、その標本平均を $\bar{\boldsymbol{x}}_{n_i}, (i = 1, 2)$、また、$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_p)' = \bar{\boldsymbol{x}}_{n_1} - \bar{\boldsymbol{x}}_{n_2}$ とする。このとき、

$$P(CS) = P(y_{[p]} > y_{[j]},\ j = 1, \cdots, p-1) \geq P^*, \quad \text{whenever } \xi_{[p]} - \xi_{[p-1]} > \delta, \tag{1}$$

をみたすような標本数 $n_i, (i = 1, 2)$ を決定したいとする。ただし、$P^*(1/p < P^* < 1)$, $\delta > 0$ は与えられているものとする。また、CS は correct selection で、(1) を P^* condition という。

2. 共分散行列が既知の場合

$(y_{[1]} - y_{[p]}, y_{[2]} - y_{[p]}, \cdots, y_{[p-1]} - y_{[p]})'$ の分布は平均 $(\xi_{[1]} - \xi_{[p]}, \xi_{[2]} - \xi_{[p]}, \cdots, \xi_{[p-1]} - \xi_{[p]})'$ 共分散行列

$$\lambda(I_{p-1} + \mathbf{1}_{p-1}\mathbf{1}_{p-1}'),\ \lambda = (1-\rho_1)\sigma_1^2/n_1 + (1-\rho_2)\sigma_2^2/n_2 = \tau_1^2/n_1 + \tau_2^2/n_2$$

の $(p-1)$ 変量正規分布であり、(1) は

$$\begin{aligned} & P(y_{[j]} - y_{[p]} < 0, j = 1, \cdots, p-1) \\ \geq\ & P(\{(y_{[j]} - y_{[p]}) - (\xi_{[j]} - \xi_{[p]})\}/\sqrt{2\lambda} < \delta/\sqrt{2\lambda}, j = 1, \cdots, p) \end{aligned}$$

となる。このことから、(1) をみたし $n_1 + n_2$ を最小にするのは

$$n_i \geq n_i^* = 2z_{0.5,P^*}^2 \tau_i(\tau_1 + \tau_2), \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

のときである。ただし、$z_{0.5,P^*}$ は分散1、相関係数0.5 の $(p-1)$ 変量正規分布 $N_{p-1}(\mathbf{0}, (I_{p-1}+\mathbf{1}_{p-1}\mathbf{1}'_{p-1})/2)$ の上側 $100P^*$%点であり、数値表は Tong (1990) などにある。

3. 共分散行列が未知の場合 (二段階法)

まず、各母集団から m 個の標本をとり、不偏共分散行列 S_i を計算し、$\hat{\tau}_i^2 = (\mathrm{tr}S_i - \mathbf{1}'_p S_i \mathbf{1}_p)/(p-1)$ とする。$\hat{\tau}_i^2$ は τ_i^2 の不偏推定量であり、$\nu\hat{\tau}_i^2/\tau_i^2$ はχ^2_ν分布に従う。ただし、$\nu=(p-1)(m-1)$ である (see e.g. Siotani, Hayakawa and Fujikoshi, 1985)。ここで、

$$N_i = \max\{m,\ [2b^2\hat{\tau}_i(\hat{\tau}_1+\hat{\tau}_2)/\delta^2]+1\},\quad (i=1,2) \tag{3}$$

と定義する。ただし、$[a]$ は a を越えない最大整数で、b は

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{b\sqrt{w/\nu}} \cdots \int_{-\infty}^{b\sqrt{w/\nu}} 2f(\boldsymbol{z})g_\nu(w)\{1-G_\nu(w)\}d\boldsymbol{z}dw = P^*, \tag{4}$$

をみたす定数であり、f は $N_{p-1}(\mathbf{0}, (I_{p-1}+\mathbf{1}_{p-1}\mathbf{1}'_{p-1})/2)$ の密度関数、g_ν と G_ν はそれぞれ χ^2_ν 分布の密度関数と分布関数である。次に、各母集団から $N_i - m$ 個の標本をとり、計 N_i の標本をもとに$\bar{\boldsymbol{x}}_{N_i}$ を計算して、標本平均が最大となった成分を選択してやれば、(1) をみたす。このことは、(3) と Takada and Aoshima (1996) より

$$\frac{2b^2}{\delta^2}\left(\frac{\tau_1^2}{N_1}+\frac{\tau_2^2}{N_2}\right) \le \frac{\nu}{\min(v_1,v_2)},\quad v_i = \nu\hat{\tau}_i^2/\tau_i^2$$

が得られ、$w=\min(v_1,v_2)$ とすると、

$$\begin{aligned} P(CS) &\ge P\Big(\frac{(y_{[j]}-y_{[p]})-(\xi_{[j]}-\xi_{[p]})}{\sqrt{2\tau_1^2/N_1+2\tau_2^2/N_2}} < b\sqrt{w/\nu},\ j=1,\cdots,p-1\Big) \\ &= E_w\{P(z_j < b\sqrt{w/\nu},\ j=1,\cdots,p-1 \mid w)\} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、$(z_1,\cdots,z_{p-1})'$ は $N_{p-1}(\mathbf{0}, (I_{p-1}+\mathbf{1}_{p-1}\mathbf{1}'_{p-1})/2)$ に従い、右辺は (4) となることから示せる。

また、$\delta \to 0$ のとき、$m\to\infty$, $m\delta^2 \to 0$ であると仮定すれば$\lim_{\delta\to 0} E(N_1+N_2)/(n_1^*+n_2^*)=1$ となり、ここで提案した二段階法が漸近有効であることも示せる。

参考文献

Mukhopadhyay, N. and Solanky, T.K.S. (1994) Multistage Selection and Ranking Procedures, Dekker.

Siotani, M., Hayakawa, T. and Fujikoshi, Y. (1985) Modern Multivariate Statistical Analysis, American Sciences Press.

Takada, Y. and Aoshima, M. (1996) Commun. Statist. -Theo. Meth., **25**, 2371-2379.

Tong, Y.L. (1990) The Multivariate Normal Distribution, Springer.

SECOND-ORDER PROPERTIES OF A TWO-STAGE PROCEDURE FOR SELECTING THE S BEST POPULATIONS

東京学芸大学・教育　　青木　充
東京学芸大学・教育　　青嶋　誠

Location parameter $\mu_i \in \boldsymbol{R}$ と scale parameter $\sigma \in \boldsymbol{R}^+$ をもつ k (≥ 2) 個の独立な母集団 π_i, $i = 1, ..., k$ を仮定する．ここで，すべてのパラメータは未知とし，$\mu_{[1]} \leq ... \leq \mu_{[k]}$ を μ_i, $i = 1, ..., k$ の順序付けとする．Bechhofer (1954) の indifference zone formulation をもちいて，$\mu_{[k]}, ..., \mu_{[k-s+1]}$ をもつ s 個の母集団 (s best populations) を選択する問題を考える．そのとき，与えられる $\delta^\star(>0)$ と $P^\star \in \left(1/\binom{k}{s}, 1\right)$ に対して，

$$P(CS) \geq P^\star \quad \text{whenever} \quad \boldsymbol{\mu} \in \Omega\left(\delta^\star\right) \tag{1.1}$$

なることが要求される．ここで，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_k)'$, $\Omega\left(\delta^\star\right) = \{\boldsymbol{\mu} : \mu_{[k-s+1]} - \mu_{[k-s]} \geq \delta^\star\}$ とし $\Omega^c\left(\delta^\star\right)$ を indifference zone とよぶ．また，“CS” は “Correct Selection” を表す．

本稿の目的は分布として正規分布と二母数指数分布を仮定して，要求 (1.1) に対して一致性をもつ解の２次の漸近有効性を議論することである．

正規分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, ..., k$ に従う母集団 π_i, $i = 1, ..., k$ から，それぞれ独立に大きさ m (≥ 2) の初期標本を抽出し，標本平均 $\overline{X}_{im} = m^{-1}\sum_{j=1}^{m} X_{ij}$, $i = 1, ..., k$ と標本分散 S_m^2 を計算する．ただし，

$$S_m^2 = k^{-1}\sum_{i=1}^{k} S_{im}^2, \quad S_{im}^2 = (m-1)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{ij} - \overline{X}_{im}\right)^2, \; i = 1, ..., k$$

である．二段階法の標本数を

$$N = \max\left\{m, \; \left[\frac{t^2 S_m^2}{\delta^{\star 2}}\right] + 1\right\} \tag{1.2}$$

と定義し，母集団 π_i, $i = 1, ..., k$ から，それぞれ独立に大きさ $N - m$ の追加標本を抽出する．ただし，$[c]$ は c 以下の最大の整数とする．各々の母集団で，初期標本と追加標本を合わせた大きさ N の標本平均 $\overline{X}_{iN} = \sum_{j=1}^{N} X_{ij}/N$, $i = 1, ..., k$ を計算する．そのとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_N : \; & \text{Select } \pi_{i_j} \text{ in the set of } s \text{ best populations if} \\ & \overline{X}_{i_j N} \geq \overline{X}_{[k-sN]}, \; j = 1, ..., s \end{aligned} \tag{1.3}$$

なるセレクションルールを考える．標本数の定義式 (1.2) にある定数 t に $E\left\{H\left(t^2\chi_\nu^2/\nu\right)\right\} = P^\star$ の解を選ぶとき，セレクションルール P_N は要求 (1.1) を満足する．ただし，χ_ν^2 は自由度 ν のカイ二乗分布に従う確率変数で $\nu = k(m-1)$ であり，

$$H(x) = s\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{k-s}\left(y + \sqrt{x}\right)\left(1 - \Phi(y)\right)^{s-1}\phi(y)dy, \quad x > 0 \tag{1.4}$$

である．

二段階法の漸近的性質を調べる際に，次の補題は有効である．

補題　任意の $x > 0$ に対して定義される $Q(x)$ を，$|Q^{(6)}(x)| \leq \sum_{i=1}^{b} a_i x^{\alpha_i}$ なる $a_i > 0$, $|\alpha_i| < \infty$, $i = 1, ..., b$ が存在する分布関数と仮定する．定数 q (> 0) を $Q(x)$ の上 α 点，つまり $Q(q) = P(X \leq q) = 1 - \alpha$ とする．そのとき，$E\left\{Q\left(r\chi_\nu^2/\nu\right)\right\} = 1 - \alpha$ なる定数 r (> 0) は，漸近的に

$$\begin{aligned} r = q & - \nu^{-1}q^2 Q_2 \\ & - \nu^{-2}q^3\left\{q\left(Q_2^3/2 - Q_2Q_3 + Q_4/2\right) + 4Q_3/3 - 2Q_2^2\right\} \\ & + O\left(\nu^{-3}\right) \end{aligned}$$

で与えられる．ここで，$Q_i = Q^{(i)}(q)/Q^{(1)}(q)$，$i = 2, 3, 4$ である．

$\sigma > \sigma_\star$ (> 0) なる既知の値 $\sigma_\star$ の存在を仮定し，初期標本を

$$m \equiv m(\delta^\star) = \max\left\{m_0,\ \left[\frac{z^2\sigma_\star^2}{\delta^{\star 2}}\right] + 1\right\} \tag{1.5}$$

と定義して，補題を用いることで次の定理を得る．ただし，z は $H(z^2) = P^\star$ の解である．

定理 1　$\delta^\star \to 0$ のとき，*(1.2)* と *(1.5)* にもとづく $\boldsymbol{P_N}$ に対して，

a)　$\eta + o(\delta^\star) \leq E\,(N - n^\star) \leq \eta + 1 + o(\delta^\star)$;

b)　$P^\star + o(\delta^{\star 2}) \leq \underset{\boldsymbol{\mu}\in\Omega(\delta^\star)}{Inf}\ P(CS) \leq P^\star + \dfrac{z^2 H^{(1)}(z^2)}{n^\star} + o(\delta^{\star 2})$.

ただし，$n^\star = z^2\sigma^2/\delta^{\star 2}$ であり，$\eta = -(\sigma^2/\sigma_\star^2)k^{-1}z^2 H_2$，　$H_2 = H^{(2)}(z^2)/H^{(1)}(z^2)$ とおく．

二母数指数分布 $e(\mu_i, \sigma)$，$i = 1, ..., k$ に従う母集団 π_i，$i = 1, ..., k$ から，それぞれ独立に大きさ m (≥ 2) の初期標本を抽出し，$\widetilde{X}_{im} = \min(X_{i1}, ..., X_{im})$，$i = 1, ..., k$ と V_m を計算する．ただし，

$$V_m = k^{-1}\sum_{i=1}^{k} V_{im},\quad V_{im} = (m-1)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{ij} - \widetilde{X}_{im}\right),\ i = 1, ..., k$$

である．二段階法の標本数を

$$N = \max\left\{m,\ \left[\frac{rV_m}{\delta^\star}\right] + 1\right\} \tag{1.6}$$

と定義し，母集団 π_i，$i = 1, ..., k$ から，それぞれ独立に大きさ $N - m$ の追加標本を抽出する．各々の母集団で初期標本と追加標本を合わせて，大きさ N の標本にもとづく μ_i の推定量 $\widetilde{X}_{iN} = \min(\widetilde{X}_{im}, X_{im+1}, ..., X_{iN})$，$i = 1, ..., k$ を計算する．そのとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P_N}:\ &\text{Select } \pi_{i_j} \text{ in the set of } s \text{ best populations if}\\ &\widetilde{X}_{i_jN} \geq \widetilde{X}_{[k-sN]},\ j = 1, ..., s\end{aligned} \tag{1.7}$$

なるセレクションルールを考える．標本数の定義式 (1.6) にある定数 r に $E\left\{H\left(r\chi_\nu^2/\nu\right)\right\} = P^\star$ の解を選ぶとき，セレクションルール P_N は要求 (1.1) を満足する．ただし，

$$H(x) = s\int_0^\infty \{1 - \exp(-y - x)\}^{k-s}\exp(-sy)dy,\quad x > 0 \tag{1.8}$$

であり，$\nu = 2k(m-1)$ である．正規分布の場合と同様に，$\sigma > \sigma_\star$ (> 0) なる既知の値 $\sigma_\star$ の存在を仮定し，初期標本を

$$m \equiv m(\delta^\star) = \max\left\{m_0,\ \left[\frac{q\sigma_\star}{\delta^\star}\right] + 1\right\} \tag{1.9}$$

と定義する．補題を用いることで次の定理を得る．ただし，q は $H(q) = P^\star$ の解である．

定理 2　*(1.6)* と *(1.9)* にもとづく $\boldsymbol{P_N}$ に対して，

a)　$\eta + o(\delta^{\star 1/2}) \leq E\,(N - n^\star) \leq \eta + 1 + o(\delta^{\star 1/2})$;

b)　$P^\star + o(\delta^\star) \leq \underset{\boldsymbol{\mu}\in\Omega(\delta^\star)}{Inf}\ P(CS) \leq P^\star + \dfrac{qH^{(1)}(q)}{n^\star} + o(\delta^\star)$.

ただし，$n^\star = q\sigma/\delta^\star$ であり，$\eta = -(\sigma/\sigma_\star)(2k)^{-1}qH_2$，$H_2 = H^{(2)}(q)/H^{(1)}(q)$ とおく．

多次元正規分布の平均に関する推定の stopping rule の Bayes risk について

長尾　壽夫　（大阪府立大学工学部）

はじめに。

ここでは Bickel and Yahav による A.P.O. (asymptotical pointwise optimal) について考える。Nagao (1997a,b) において、次の問題を取り扱っている。多次元正規分布における平均 θ を推定するさい、共分散行列が完全に未知の時 (1997a) と 共分散行列にある構造が入っているとき (1997b) とを取り扱った。これらにconjugate prior を入れる。このとき、stopping rule として A.P.O. rule を定めたとき、平均 θ の推定量として、Bayes 推定を取ったとき、その risk を cost c を0に近ずける形で漸近展開を求め、また最良の stopping time に対しても同様の表現を得た。すると $o(c)$ を除いて両者は同じであることを示した。これにより、A.P.O. rule は最良の rule とそれほど遜色がないことが示せた。しかし通常の推定量は標本平均を取りまた stopping rule は共分散行列を不偏分散で推定することによって得られるものを用いるのが普通である。そこでこの場合 prior を以前の conjugate prior を入れたとき、いかなる risk になるかを求める。

停止則

$X_1,\cdots,X_n,\cdots$ を p 次元正規分布平均 θ 共分散行列 Γ^{-1}に従うとする。それを $N(\theta,\Gamma^{-1})$ と書く。このとき、θ　の推定量は n ヶの標本を用いてその標本数 $\bar{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}X_\alpha$ で推定する。するとそのときの loss $L_n(c)$ は

$$L_n(c)=(\bar{X}_n-\theta)'(\bar{X}_n-\theta)+cn$$

とする。ただし $c>0$ は cost を表す。その平均は、

$$\mathrm{E}L_n(c)=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\Gamma^{-1}+cn$$

であるから、その最小値は、$n_0=\sqrt{\dfrac{1}{c}\mathrm{tr}\Gamma^{-1}}$ の時であるから、stopping time として、

$$N=\inf\{n\geq m\mid n^2\geq\frac{1}{c}\mathrm{tr}S_n\}$$

を定める。ただし、

$$S_n=\frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}(X_\alpha-\bar{X}_n)(X_\alpha-\bar{X}_n)'$$

である。

$$\mathrm{E}L_N(c)=\mathrm{E}\{(\bar{X}_N-\theta)'(\bar{X}_N-\theta)+cN\}$$

$$=\mathrm{E}\{(\bar{\theta}_N-\theta)'(\bar{\theta}_N-\theta)+cN\}$$

$$+\mathrm{E}\{(\frac{r_0}{N+r_0})^2(\bar{X}_N-\mu)'(\bar{X}_N-\mu)\}$$

ただし、$\hat{\theta}_n$ は θ の Bayes estimate であり、Γ をあたえたとき θ の prior は $N(\mu,(r_0\Gamma)^{-1})$ である。ただし μ, r_0 は既知である。また Γ の分布は、ウイシャート分布 $W(\Phi,k)$ で Φ, k は既知である。すると、上式の前者は

$$\mathrm{E}\{2\sqrt{c}V_N+2\sqrt{c}(\frac{W_N}{H_N+V_N})+r_N^{-1}(\sqrt{c}r_N-H_N)^2\}-cr_0$$

で表される。ただし、$V_n=\mathrm{E}(\sqrt{\mathrm{tr}\Gamma^{-1}}|X_1,\cdots,X_n), W_n=\mathrm{E}\{(\sqrt{\mathrm{tr}\Gamma^{-1}}-V_n)^2| X_1,\cdots,X_n)\}, H_n=\{\mathrm{E}(\mathrm{tr}\Gamma^{-1}|X_1,\cdots,X_n)\}^{1/2}$ である。これらを Nagao(1997a) に似た方法で一様可積を示すことにより、上式の $c^{1/2}$ に関する漸近展開が得られる。次に後者を考える。すると θ と Γ をあたえた下で、

$$\frac{1}{c}(\frac{r_0}{N+r_0})^2(\bar{X}_N-\mu)'(\bar{X}_N-\mu)\rightarrow\frac{r_0^2}{\mathrm{tr}\Gamma^{-1}}(\theta-\mu)'(\theta-\mu)$$

また上の左辺は一様可積であることが、N の定義 および$\bar{X}_N$ を考えて示される。このことより次の表現を得る。

$$\mathrm{E}L_N(c)=2\sqrt{c}\mathrm{E}\{(\mathrm{tr}\Gamma^{-1})^{1/2}\}+\frac{c}{2}\mathrm{E}\{\frac{\mathrm{tr}\Gamma^{-2}}{(\mathrm{tr}\Gamma^{-1})^2}\}+o(c).$$

Nagao(1997a) であたえた最良のもの比較すると上式は cr_0 だけ大きくなっていることが分かる。

次にΓ が $\Gamma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_1,\cdots,\sigma_k,\cdots,\sigma_k)$ で表されるとき、平均 θ を標本平均で推定し、停止則を共分散行列 Γ^{-1} を不偏分散で推定し上の N に対応して求める。ただし σ_i の大きさは p_i である。すると次の結果を得る。

$$\mathrm{risk}=2\sqrt{c}E(\sum_{j=1}^{k}p_j\sigma_j^{-1})^{1/2}+\frac{c}{2}E(\sum_{j=1}^{k}p_j\sigma_j^{-2})(\sum_{j=1}^{k}p_j\sigma_j^{-1})^{-2}\}+o(c).$$

参考文献

Bickel, P.J. and Yahav, J.A.(1965). Asymptotically pointwise optimal procedures in sequential analysis. Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1 Univ. of California Press.

Nagao, H.(1997a). Asymptotically pointwise optimal rules for estimating mean in general exponential distributions for squared loss. Sequential Analysis. 16, 155-174.

Nagao, H.(1997b). Asymptotically pointwise optimal rules of sequential estimation of mean vector when an information matrix has some structure in a multivariate normal population. Sequential Analysis. 16, 363-374.

逐次推定のBahadur効率について

筑波大学・数学系　小池健一

1. はじめに

$X_1, X_2, \ldots$を互いに独立に同一の分布P_θ ($\theta \in \Theta(\subset \mathbf{R}^1)$に従う確率変数とする．このとき，$\theta$の一致推定量$T = \{T_n(X_1, \ldots, X_n)\}$と任意の$\varepsilon > 0$に対して，裾確率の漸近展開は

$$\alpha_n(T, \theta, \varepsilon) := P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = \exp\{-n\beta(T, \theta, \varepsilon) + o(1)\} \quad (n \to \infty)$$

で与えられる．ただし，$\beta(T, \theta, \varepsilon)$は正の定数でexponential rateといわれる．ここで，$\alpha_n(T, \theta, \varepsilon)$は小さい，すなわち$\beta(T, \theta, \varepsilon)$は大きい方が良い推定量と考える．Bahadur(1971)は，一致推定量$T = \{T_n(X_1, \ldots, X_n)\}$の漸近的な振る舞いを測る尺度としてこのexponential rateを提案し，Fu(1973)は適当な正則条件の下で，θの一致推定量に対して exponential rateの下界(Bahadur bound)を示した．ここで，特に標本が独立同分布からのもので，最尤推定量のときには，適当な条件の下でこの不等式で等号が成立，すなわち有効となることが知られている(Fu(1975)等).

一方，逐次の場合，標本の大きさが無限大に概収束するような停止則の列に対して，検定統計量の効率がBerk and Brown (1978)等により論じられている．これは非逐次の場合の効率(Bahadur slopeという)が，逐次の場合にも自然に拡張できることを示している．さらに，逐次推定においては，三田(1995)が，exponential classの下で，ある種の停止則を用いたときの裾確率の評価を与え，最尤推定量がその評価式を達成していることを示している．

ここでは，逐次推定の場合に，標本の大きさの期待値が無限大に発散するような停止則の列に対して，一致推定量の列の被覆確率に基づく評価式を与えた．

2. 一致推定量の被覆確率に基づく下界

$\mathbf{X}_{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$を($\sigma$-有限測度$\mu$に関する)密度関数$f^n(x, \theta)$に従う確率変数とする($n \geq 1$)．但し，$\theta \in \Theta(\subset \mathbf{R}^1)$とする．$\{N_k\}$を停止則の列とする．ここでは，任意の$\theta \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$について$E_\theta(N_k) < \infty$とする．以下では簡単のためN_kの代わりにNで表す．

$-\infty \leq t \leq \infty$, $\theta, \theta' \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$に対して

$$C_{k,\theta,\theta'}(t) := \left\{x \,:\, \frac{1}{E_\theta(N)} \log \frac{f^N(x, \theta')}{f^N(x, \theta)} \leq t\right\}$$

とし，任意の$A \in \sigma(\mathbf{X}_{(N)})$について

$$P_\theta^k(A) := \int_A f^N(x, \theta) d\mu, \quad \tilde{K}(\theta', \theta) := \inf\left\{t \,:\, \lim_{k \to \infty} P_{\theta'}^k\{C_{k,\theta,\theta'}(t)\} = 1\right\}$$

とおくと，$0 \leq \tilde{K}(\theta', \theta) \leq \infty$が成り立つ．

定理1. $E_\theta(N) \to \infty$ ($k \to \infty$)を満たす停止則$\{N_k\}$と $\underline{\lim}_{k \to \infty} \int_{A_k} f^N(x, \theta') d\mu > 0$ なる事象列$\{A_k\}$に対して

$$\underline{\lim}_{k \to \infty} \frac{1}{E_\theta(N)} \log \int_{A_k} f^N(x, \theta) d\mu \geq -\tilde{K}(\theta', \theta)$$

が成り立つ．

例1. $X_1, X_2, \ldots$を互いに独立にいずれも(σ-有限測度μに関する)密度関数$f(x, \theta)$に従う確率変数とする．但し，$\theta \in \Theta(\subset \mathbf{R}^1)$とする．停止則の列$\{N_k\}$を，「確率1で $N_k \equiv k$」($k = 1, 2, \ldots$)

とおくと

$$\tilde{K}(\theta',\theta)=K(\theta',\theta)=E_{\theta'}\left\{\log\frac{f(X,\theta')}{f(X,\theta)}\right\}\quad\text{(Kullback-Leibler情報量)}\qquad(1)$$

となることが示される．また，P_θ—$\lim_{k\to\infty}N_k/k=c(>0)$かつ$\lim_{k\to\infty}E_\theta(N_k)/k=c$となるような停止則の列$\{N_k\}$について考えると，$X_i$の密度が$f(x,\theta')$のとき同様にして(1)式が成り立つことが示される．

以下では，$X_1,X_2,\ldots$が互いに独立に同一の分布(密度$f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$) に従う場合のみを考える．θの実数値関数$g(\theta)$の一致推定量$T=\{T_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$と停止則の列$\{N_k\}$に対して，

$$\begin{aligned}
a_k(\varepsilon,\theta)&:=\int_{\{|T_N-g(\theta)|\geq\varepsilon\}}f^N(x,\theta)d\mu,\\
\Delta(\varepsilon,\theta)&:=\{\theta'\in\Theta\ :\ |g(\theta')-g(\theta)|>\varepsilon\},\\
b(\varepsilon,\theta)&:=\begin{cases}\inf\{\tilde{K}(\theta',\theta)\ :\ \theta'\in\Delta(\varepsilon,\theta)\} & (\Delta(\varepsilon,\theta)\neq\emptyset\text{のとき}),\\ \infty & \text{(その他)}\end{cases}
\end{aligned}$$

とおく．このとき次の定理を得る．

定理2. $\{N_k\}$を，P_θ—$\lim_{k\to\infty}N_k=\infty$ ($\theta\in\Theta$)を満たす停止則の列とし，$T=\{T_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$を$\theta$の実数値関数$g(\theta)$の強一致推定量とする．このとき

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{E_\theta(N)}\log a_k(\varepsilon,\theta)\geq -b(\varepsilon,\theta)$$

が成り立つ．

Θが$\mathbf{R}^1$の開区間であり，分布P_θの密度の台$A=\{x\ :\ f(x,\theta)>0\}$が$\theta$と無関係で，$(\partial/\partial\theta)f(x,\theta)$が存在し有限値をとるとする．このとき，$\theta\in\Theta$の関数$I(\theta):=E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_1,\theta)\right\}^2\right]$をFisher情報量と呼ぶ．

定理3. $\{N_k\}$を，P_θ—$\lim_{k\to\infty}N_k/k=c(>0)$ ($\theta\in\Theta$)かつ$\lim_{k\to\infty}E_\theta(N_k)/k=c$となるような停止則の列，$T=\{T_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$を$\theta$の強一致推定量とする．このとき正則条件の下で，

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon^2E_\theta(N)}\log a_k(\varepsilon,\theta)\geq -\frac{I(\theta)}{2}$$

が成立する．特にθの最尤推定量の列$\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}=\{\hat{\theta}_n(\mathbf{X}_{(n)})\}$に対して，正則条件の下で上式において等号が成立する．

参考文献

Bahadur, R. R. (1971). *Some Limit Theorems in Statistics*, SIAM, Philadelphia.

Berk, R. H. and Brown, L. D. (1978). *Ann. Statist.*, **6**, 567–581.

Fu, J. C. (1973). *Ann. Statist.*, **1**, 741–749.

Fu, J. C. (1975). *Ann. Statist.*, **3**, 234–240.

Mita, H. (1995). *J. Japan Statist. Soc.*, **25**, 173–182.

U－統計量の高次のキュムラントの推定について

前園宜彦（九州大学経済学部）

1. はじめに

$X_1, \cdots, X_n$ を互いに独立で同じ分布 F に従う確率変数とする．母数 θ に関連した統計量を $T_n = T_n(X_1, \cdots, X_n)$ とすると T_n の歪度（3次のキュムラント）は

$$\kappa_3 = \frac{\sqrt{n}E[T_n - E(T_n)]^3}{\{Var(T_n)\}^{3/2}},$$

で定義される．この歪度は分布の非対称性を計る尺度であり，正規近似の精密化であるエッジワース展開の $n^{-1/2}$ の項に現れるために，正規近似の改良のときにも重要である．歪度のジャックナイフ推定量について論じる．これまでに，ジャックナイフ歪度推定量は下方のバイアスを持つことが示され，そのバイアスはエッジワース展開に基づいて信頼区間を構成するときに少なからぬ影響を与えることが，シュミレーションの結果として報告されている．本報告では，ジャックナイフ歪度推定量の理論的な性質をU－統計量の場合に議論する．

$h(x_1, \cdots, x_r)$ を成分の入れ替えに関して不変な関数（r 次のカーネル）とする．このとき $n \geq r$ に対してU－統計量は

$$U_n = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{C_{n,r}} h(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r})$$

と定義される．ここで $\sum_{C_{n,r}}$ は $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ の全ての組み合わせについての和を表す．$\theta = E[h(X_1, \cdots, X_r)]$ とおくと，U－統計量は θ の不偏推定量である．U_n の標準化U－統計量の歪度 κ_3 及びスチューデント化U－統計量 $S_n = (U_n - \theta)/\hat{\sigma}_n$ の歪度 κ_3^* のジャックナイフ推定量 $\hat{\kappa}_3$ と $\hat{\kappa}_3^*$ について議論する．ここで $\hat{\sigma}_n^2$ は σ_n^2 の推定量である．

$\hat{\sigma}_n^2$, $\hat{\mu}_n$ を U_n のジャックナイフ分散推定量，中心3次モーメントの推定量とすると，ジャックナイフ歪度推定量 $\hat{\kappa}_3$ は次で与えられる．

$$\hat{\kappa}_3 = \frac{\hat{\mu}_n}{(n\hat{\sigma}_n^2)^{3/2}}$$

同様に，スチューデント化U－統計量の歪度のジャックナイフ推定量 $\hat{\kappa}_3^*$ は

$$\hat{\kappa}_3^* = \frac{\hat{\nu}_n}{(n\hat{\sigma}_n^2)^{3/2}}$$

となる．ここで $\hat{\nu}_n$ は3次のモーメントに関連した母数の推定量である．

2. ジャックナイフ歪度推定量の漸近表現

標準化U－統計量の歪度は

$$\kappa_3 = \frac{e_1 + 3e_2}{\xi_1^3} + \frac{\eta}{n} + O(n^{-2})$$

で与えられ，スチューデント化U－統計量の歪度は

$$\kappa_3^* = n^2 E(U_n^*)^3 = -\frac{2e_1 + 3e_2}{\xi_1^3} + \frac{\eta^*}{n} + O(n^{-2})$$

となる．ここで ξ, e_1, e_2, η, η^* はカーネル h に依存する量である．ジャックナイフ歪度推定量の分母・分子のそれぞれに対して，$ANOVA$-decomposition を適用すると，$n\hat{\sigma}_n^2$, $\hat{\mu}_n$, $\hat{\nu}_n$ の漸近表現を求めることができ，これらを利用して，次の漸近表現が求まる．

[定理]. もしある $\varepsilon > 0$ に対して $E|h|^{10+\epsilon} < \infty$ ならば

$$\hat{\kappa}_3 = \kappa_3 + \frac{2}{n\xi_1^3}\sum_{i=1}^{n}\zeta_1(X_i) + \frac{2}{n(n-1)\xi_1^3}\sum_{C_{n,2}}\zeta_2(X_i, X_j) + \frac{d}{n\xi_1^3} + o_p(n^{-1}),$$

$$\hat{\kappa}_3^* = \kappa_3^* + \frac{2}{n\xi_1^3}\sum_{i=1}^{n}\zeta_1^*(X_i) + \frac{2}{n(n-1)\xi_1^3}\sum_{C_{n,2}}\zeta_2^*(X_i, X_j) + \frac{d^*}{n\xi_1^3} + o_p(n^{-1}).$$

これらはやはり，$ANOVA$-decomposition された形であり，ζ, ζ^*, d, d^* はカーネルに依存して決まる．これを利用して，バイアスの評価，エッジワース展開等が議論できる．

3. 例

母集団分布の分散 $\sigma^2 = Var(X_1)$ の推定を考えよう．2次のカーネルを $h(x,y) = (x-y)^2/2$ とおくと，対応するU－統計量が σ^2 の不偏推定量である．即ち

$$U_n = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{C_{n,2}}\frac{1}{2}(X_i - X_j)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

このときジャックナイフ歪度推定量のバイアスは次の表のようになる．

表

	κ_3	d/ξ_1^3	κ_3^*	d^*/ξ_1^3
正規	$2.83 + n^{-1}1.41$	-54.45	$-5.66 - n^{-1}146.37$	209.22
ロジステック	$5.11 + n^{-1}0.52$	-785.04	$-10.22 - n^{-1}923.78$	1517.35
両側指数	$6.62 + n^{-1}0.68$	-1626.00	$-13.24 - n^{-1}1922.95$	3168.54

バイアスの d/ξ_1^3 と d^*/ξ_1^3 は n^{-1} のオーダーの項である．上記の漸近バイアスはいずれも下方バイアスである．

定理の漸近表現を利用して他の漸近的な性質もいろいろ議論することができる．