(13)「統計的実験における理論的基礎とその応用」に関する研究報告

鳥越規央（東海大・理）・道家暎幸（東海大・理）：付加されたカイ２乗統計量を用いた群逐次検定方法の比較について ……… 473

青木　充（筑波大学・数学）・青嶋　誠（筑波大学・数学）：Some Multiple Decision Procedures with Elimination ……… 475

小池健一（筑波大・数学）：逐次の場合のBhattacharyya型下界の達成について…… 477

布能英一郎（関東学院大経済）：統計的実験におけるMLEとBayes法 ……… 479

成井一能（筑波大・理工・院）・宮島弘志（筑波大・理工・院）・青嶋　誠（筑波大・数学）：Multiple Comparisons with Components of a Linear Function of Mean Vectors ……… 481

Toshio Sakata（Kyushu Institute of Design）・Ryuichi Sawae（Okayama Science University）：Hypergeometric Systems, Weyl Algebra, Creation Operator, and Sequential Conditional Inference of Contingency Tables ……… 483

長尾壽夫（大阪府立大学・工学研）：非対称損失関数の下での多次元正規分布の平均の逐次推定 ……… 485

高田佳和（熊本大学・工）：LINEX損失関数のもとでの正規分布の平均の逐次推定 ……… 487

青嶋　誠（筑波大学・数学系）：二段階標本抽出による統計的推測 ……… 489

髙橋邦彦（筑波大・数学）・赤平昌文（筑波大・数学）：離散型分布における大偏差近似について ……… 491

津田美幸（筑波大・数学）：Bivariate and multivariate bioequivalence test procedures…… 493

磯貝英一（新潟大学理学部）・宇野　力（秋田大学教育文化学部）：Minimum risk point estimation of the powers of a negative exponential scale parameter ……… 495

付加されたカイ2乗統計量を用いた群逐次検定方式の比較について

鳥越規央　（東海大・理）
道家暎幸　（東海大・理）

1. はじめに

統計的逐次検定方式は，2処置間の効果の差の検定に関し，第1種の過誤の確率を保ちながら，早い結論を得る，または観測個数を期待的に少なくする目的でしばしば用いられる．本研究は，Douke (1997) を参考に，2つの処置の効果が p 種類の反応で測られるものとして，その反応の確率ベクトルが p 変量正規分布に従うとき，2つの平均ベクトルの差の群逐次検定を考えた．その際，検定を行う段階毎に2つの平均ベクトルが変化することを仮定した群逐次検定方式を構築するため，群逐次カイ2乗統計量を提案した．更に群逐次検定の性質を用い，現段階までに得られたデータを全て付加した検定統計量を考案した．そして，これら2つの検定統計量を用いて繰り返し信頼限界を設定した後，最大検定回数，各段階の標本の大きさに対し種々の値を与えたときの検出力をもとに2統計量間の有効性を比較検討した．また事前に指定された最大検定回数，有意水準と検出力の下で検定に必要な標本数（最大標本数）の決定手順を示し，2つの検定統計量を最大標本数に関し数値比較を行った．

2. 群逐次検定統計量とカイ2乗統計量

2.1. 群逐次カイ2乗統計量

いま2つの処置（処置1, 処置2）があり，各処置の効果は p 種類の反応で観測される．この群逐次検定方式は最大 K 回の検定を行うものとして，検定を行う段階 $k(k=1,\cdots,K)$ で得られる各処置の群多変量観測値の標本サイズは g であり，段階 k までに得られる標本サイズは $n_k = kg$ である．段階 k における反応の p 次元確率ベクトル $\boldsymbol{x}_{i,k}$ $(i=1,2)$ は p 変量正規分布 $N(c_{i,k}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ に従うものとする．ここで $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{i,1}, \mu_{i,2}, \ldots, \mu_{i,p})'$, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は既知の $p\times p$ 分散共分散行列とする．段階k で得られる$2g$ 個の多変量観測値を $\boldsymbol{x}_{1,k,n_{k-1}+1}, \boldsymbol{x}_{1,k,n_{k-1}+2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{1,k,n_k}$, $\boldsymbol{x}_{2,k,n_{k-1}+1}, \boldsymbol{x}_{2,k,n_{k-1}+2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{2,k,n_k}$ とする．ここで $\delta_k = c_{1,k} - c_{2,k}$ としたとき，各段階での群多変量観測値をもとに仮説検定 $H_0 : \delta_i = 0$ vs $H_1 : \delta_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, K)$ を行う．いま，$\bar{\boldsymbol{x}}_{i,k} = (\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \boldsymbol{x}_{i,k,j})/g$ とおき，ここで群逐次カイ2乗統計量を次に定義する．

$$S_k^{(1)} = (\bar{\boldsymbol{x}}_{1,k} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2,k})'\{(\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)/g\}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{1,k} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2,k}). \tag{2.1}$$

いま，仮説 H_0 の下で $S_k^{(1)}$ は自由度 p のカイ二乗分布 χ_p^2 に従い，また，仮説 H_1 の下で $S_k^{(1)}$ は自由度 p ，非心度 $\lambda_{1,k} = g\delta_k^2 \boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)^{-1}\boldsymbol{\mu}$ の非心カイ二乗分布 $\chi_p^2(\lambda_{1,k})$に従う．

2.2. 群逐次付加カイ2乗統計量

次に k 段階までのデータを全て取り入れた群逐次統計量を前述のカイ2乗統計量を利用して $S_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} S_j^{(1)}$ と定義する．この統計量を群逐次付加カイ2乗統計量と呼ぶことにする．この統計量はカイ2乗確率変数の和の分布に従い，仮説 H_0 の下で $S_k^{(2)}$ は自由度 q_k のカイ二乗分布 $\chi_{q_k}^2$ に従い，また，仮説 H_1 の下で $S_k^{(2)}$ は自由度 q_k，非心度 $\lambda_{2,k}$ の非心カイ二乗分布 $\chi_p^2(\lambda_{2,k})$に従うものとして扱う．ここで $q_k = pk$, $\lambda_{2,k} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{1,j}$ である．

2.3. 繰り返し信頼限界

これらの $S_k^{(1)}, S_k^{(2)}$ を用いて繰返し信頼限界を設定する．繰り返し信頼限界の設定に関してはArmitage法(1969)を利用する．初めに有意水準 α と最大検定回数 Kを定める．いま確率変数 $\chi_k^2(k=1,2,\ldots,K)$ は $S_k^{(1)}$ については χ_p^2 分布そして $S_k^{(2)}$ については $\chi_{q_k}^2$を用いる．$S_k = \sum_{i=1}^{k} \chi_i^2$, とした時，$(S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_K)$ について

$$P(S_1 > b_1) = \alpha_1^*, \ldots, P(S_1 \le b_1, \cdots, S_{k-1} \le b_{k-1}, S_k > b_k) = \alpha_k^*, \ldots,$$
$$P(S_1 \le b_1, \cdots, S_{K-1} \le b_{K-1}, S_K > b_K) = \alpha_K^*. \tag{2.2}$$

の関係が成り立つ条件のもとで，指定された有意水準αに対し $\alpha = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^*$, である様な限界値$(b_1, b_2, \ldots, b_K)$を順次決定する．ここでは，限界値$b_i(i=1,\ldots,K)$の設定に関してLan-DeMets法(1983) での次のアルファ消費関数 $\alpha_k = \alpha \cdot k/K$を用いる．これから$\alpha_k^* = \alpha_k - \alpha_{k-1}$である．

2.4. 検出力

ここで H_1 のもとでのこの検定方式の検出力を定義する．いま第1段階での S_1 の確率密度関数 $f_1(u)$ は $S_k^{(1)}$ については $\chi_p^2(\lambda_{1,1})$ を用い，$S_k^{(2)}$ については $\chi_p^2(\lambda_{2,1})$ を用いる．ここで $\lambda_{2,k}$ は仮説 H_1 のもとでの $S_k^{(2)}$ の非心度である．第1段階での検出力 π_1^* は

$$\pi_1^* = \int_{b_1}^{\infty} f_1(u)du \tag{2.3}$$

で与えられる．次に，第k段階 $(k = 2, 3, \ldots, K)$ での検出力は

$$\pi_k^* = \int_{b_k}^{\infty} \int_0^{b_{k-1}} f_{k-1}(u) \cdot \phi(v-u)dudv \tag{2.4}$$

で与えられる．ただし $f_{k-1}(u)$ は $k-1$ 段階での S_{k-1} の確率密度関数であり，$\phi(v-u)$ は$S_k^{(1)}$ については $\chi_p^2(\lambda_{1,k})$ を用い，$S_k^{(2)}$ については $\chi_{q_k}^2(\lambda_{2,k})$ を用いる．いま $\pi_k = \sum_{i=1}^k \pi_i^*$ とすると，この検出力 π は $\pi = \pi_K$ で与えられる．いま各処置についての平均観測個数は $E(n_k) = \sum_{k=1}^{K-1} n_k\pi_k^* + n_K(1-\pi_{K-1})$ で与えられる．

3. 群逐次カイ2乗統計量による最大標本数の決定方法

この群逐次カイ2乗統計量 $S_k^{(1)}$ と群逐次付加カイ2乗統計量 $S_k^{(2)}$ をもとにした，群逐次検定方式での最大標本数の決定手順を述べる．いま各処置についての最大標本数 $n_{\max} = gK$ の決定は，初めに第1種の過誤の確率α，第2種の過誤の確率β を指定し，各段階で共通な標本数 g に任意の値を与え，繰り返し信頼限界，検出力を求め，得られた検出力が $1-\beta$ に一致するまで g の値を変える．あらかじめ最大検定回数 K，反応の種類の数 p，$\theta = \boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)^{-1}\boldsymbol{\mu}$ の値，収束を判定するための小さな正数 ϵ を指定する．またアルファ消費関数 $\alpha(k) = \alpha \cdot k/K$ を与え，各段階の有意水準 $\alpha^* = \alpha(k) - \alpha(k-1)$ を決定し，それに基づいて各段階での各段階の信頼限界値 $b_1, b_2, \ldots, b_K$ を (2.2) を使って順次決定する．

(Step 1)

反復回数を示す指標 i を1とおく．各段階で共通な標本数の初期値 $g^{(1)}$ を入力する．

(Step 2)

得られた信頼限界値 $b_1, b_2, \ldots, b_K$ をもとに (2.3), (2.4) を使って $\pi_k^{*(i)}$ を求める．

(i) $S_k^{(1)}$ の場合は非心度 $\lambda_{1,k} = g^{(i)}\theta\delta_k^2$ の非心カイ2乗分布 $\chi_p^2(\lambda_{1,k})$ に従う．

(ii) $S_k^{(2)}$ の場合は非心度 $\lambda_{2,k} = g^{(i)}\theta\sum_{j=1}^k \delta_j^2$ の非心カイ2乗分布 $\chi_p^2(\lambda_{2,k})$ に従う．

(Step 3)

検出力 $\pi^{(i)} = \pi_1^{*(i)} + \pi_2^{*(i)} + \cdots + \pi_K^{*(i)}$ を計算する．

(Step 4)

(i) $|\pi^{(i)} - (1-\beta)| < \epsilon$ ならば，最大標本数を $n_{\max} = g^{(i)}K$ とし，計算を終了する．

(ii) $|\pi^{(i)} - (1-\beta)| \geq \epsilon$ ならば，$i = i+1$ とし，改めて $g^{(i)}$ を選び，Step 2 へ戻る．

数値比較の結果，最大標本数の観点からも，群逐次付加カイ2乗統計量 $S_k^{(2)}$ は群逐次カイ2乗統計量 $S_k^{(1)}$ より効果的であることを示した．特に前述の平均観測個数や検出力よりも，その差が顕著であることを示した．

参考文献

[1] Armitage,P., McPherson,C.K. and Rowe,B.C.(1969). Repeated Significance Tests on Accumulating Data, *Journal of Royal Statistical Society, Series A,* **132**, 235-244.

[2] Douke, H. (1997). Group Sequential χ^2 Statistic for Testing the Difference of Two Mean Vectors in Clinical Trials, *Commun. Statist. - Theory Meth.*, **26**, 3015-3029.

[3] Lan,K.K.G. and DeMets,D.L.(1983).Discrete Sequential Boundaries for Clinical Trials, Biometrika 70, 659-663.

[4] Pocock,S.J.(1977). Group Sequential Methods in the Design and Analysis of Clinical Trials, Biometrika 64, 191-199.

Some Multiple Decision Procedures with Elimination

筑波大学·数学　　青木　充
筑波大学·数学　　青嶋　誠

$k\ (\geq 2)$ 個の母集団 $\pi_1, ..., \pi_k$ があるとする. これらの母集団について, さまざまな統計的決定を行なう問題が今まで議論されてきた. それらの問題のなかで, 例えば Selection や Comparison with a control などの問題に対しては, 決定を多段階に分けて各段階で明らかに決定できる母集団についてはその段階で決定し, その後のサンプリングの対象からは外すという Elimination の手法を応用することが考えられる. 本稿では, 次のような Bechhofer (1954) の Indefference-zone approach をもとにした Selection 問題に対する Elimination の手法について述べていく.

母集団 $\pi_i,\ i=1,...,k$ が未知パラメータ $\gamma_i,\ i=1,...,k$ をもつとする. パラメータの順序付けを

$$\gamma_{[1]} \leq \gamma_{[2]} \leq \cdots \leq \gamma_{[k-1]} \leq \gamma_{[k]}$$

と定義し, $\gamma_{[i]},\ i=1,...,k$ をもつ母集団を $\pi_{[i]},\ i=1,...,k$ とする. ここでは, $\gamma_{[k]}$ をもつ母集団 $\pi_{[k]}$ を選択する問題を考える. そのとき, 与えられる $\delta^\star(>0)$ と $P^\star \in (1/k, 1)$ に対して,

$$P(CS) \geq P^\star \quad \text{whenever} \quad \gamma \in \Omega\,(\delta^\star) \tag{1.1}$$

なることが要求される. ここで, $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_k)$, $\Omega\,(\delta^\star)=\{\gamma : \gamma_{[k]}-\gamma_{[k-1]} \geq \delta^\star\}$ とし $\Omega^c\,(\delta^\star)$ を indifference-zone とよぶ. また, "CS" は "Correct Selection" を表す.

Paulson (1964) は母集団分布が正規分布の場合に, 次のような Elimination の手法をもちいた Procedure を提案した.

k 個の正規母集団 $\pi_i:\ N(\gamma_i,\sigma^2),\ i=1,...,k$ があるとする. ただし, 平均 $\gamma_i,\ i=1,...,k$ は未知で, 分散 σ^2 は既知とする. また, $X_{i1}, X_{i2}, ...$ は $N(\gamma_i,\sigma^2),\ i=1,...,k$ に独立に従うとする. ある固定された値 $\lambda\ (0<\lambda<\delta^\star)$ にもとづいて $a_\lambda=\{\sigma^2/(\delta^\star-\lambda)\}\log\{(k-1)/(1-P^\star)\}$, $W_\lambda=[a_\lambda/\lambda]$ と定義する. ここで, $[c]$ は c よりも小さな最大の整数とする. 1 段階目として, 各々の母集団から 1 個づつのサンプリングを行なう. そのとき,

$$X_{j1} < \max\{X_{11}, X_{21}, ..., X_{k1}\} - a_\lambda + \lambda$$

に当てはまる母集団 π_j は eliminate してしまう. もし, この段階で残った母集団が 1 個だった場合, その母集団を選択する. それ以外の場合, 2 段階目に進み, 1 段階目で eliminate されなかった母集団から再び 1 個づつのサンプリングを行ない, 一般に r 段階目においては, $r-1$ 段階目で eliminate されなかった母集団から 1 個づつのサンプリングを行ない, そのとき

$$\sum_{s=1}^{r} X_{js} < \max_{\nu}\left\{\sum_{s=1}^{r} X_{\nu s}\right\} - a_\lambda + r\lambda \tag{1.2}$$

に当てはまる母集団 π_j は eliminate する. ただし, (1.2) における max は $r-1$ 段階目で eliminate されなかった母集団に関してとる. r 段階目で残った母集団が 1 個だった場合, その母集団を選択する. それ以外の場合, $r+1$ 段階目に進む. もし, W_λ 段階目で 1 個以上の母集団が残っていた場合, $W_\lambda+1$ 段階目を行なって, そのときに残っていた母集団を選択する.

Hartmann (1988) では, Paulson (1964) の証明で用いられている不等式の代わりに geometric inequality および Jensen's inequality をもちいることで, Procedure の中に含まれる a_λ を $a_\lambda = -\sigma^2 \log\left\{1-(P^\star)^{1/(k-1)}\right\}/(\delta^\star - \lambda)$ のように求めている. この a_λ をもちいることで, 最終的な決定をするまでの段階数と観測の総数を小さくすることができると Hartmann (1988) で述べられている.

Tamhane and Bechhofer (1977) は, 正規母集団における Selection 問題に対して Elimination の手法を応用した次のような二段階法を提案した.

1 段階目として, 各々の母集団 π_i, $i = 1, ..., k$ から n_1 個の初期標本のサンプリング $X_{ij}^{(1)}$, $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., n_1$ を行ない, 標本平均 $\overline{X}_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_1} X_{ij}^{(1)}/n_1$, $i = 1, ..., k$ を計算する. $\overline{X}_{[k]}^{(1)} = \max_{1\le i\le k} \overline{X}_i^{(1)}$ と定義する. そのとき,

$$I = \left\{ i \;\middle|\; \overline{X}_i^{(1)} \ge \overline{X}_{[k]}^{(1)} - h \right\} \tag{1.3}$$

に属さない母集団は eliminate してしまう. もし, この段階で 1 個の母集団しか残らなかった場合, その母集団を選択する. それ以外の場合は, 2 段階目に進む. 2 段階目として, 1 段階目で eliminate されなかった母集団から n_2 個の追加標本のサンプリング $X_{ij}^{(2)}$, $i \in I$, $j = 1, ..., n_2$ を行なう. π_i, $i \in I$ について初期標本と追加標本を合わせて

$$\overline{X}_i = \left(\sum_{j=1}^{n_1} X_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2} X_{ij}^{(2)} \right) / (n_1 + n_2), \;\; i \in I$$

を計算し, $\max_{i\in I} \overline{X}_i$ なる母集団を選択する.

Paulson (1967) は, 各々の母集団 π_i $(i = 1, ..., k)$ がそれぞれ未知な成功する確率 γ_i, $i = 1, ..., k$ をもっているとき, $\gamma_{[k]}$ を選択する問題に対して, 次のような Procedure を提案している.

ある固定された値 λ $(1 < \lambda < (1+\delta^\star)/(1-\delta^\star))$ と 正の整数 J にもとづいて $a_\lambda = J\{\delta^\star(\lambda^2-1) - (\lambda-1)^2\}/(\lambda \log \lambda)$ と定義し, $\alpha = (1-P^\star)/(k-1)$, $W_\lambda = [(-\log\alpha)/\{a_\lambda \log\lambda\}]$ とする. 1 段階目として, 各々の母集団 π_i, $i = 1, ..., k$ から 1 回づつの試行 X_{i1}, $i = 1, ..., k$ を行なう. そのとき, 成功の回数を S_{ij}, $i = 1, ..., k$, $j = 1, ...$, 失敗の回数を F_{ij}, $i = 1, ..., k$, $j = 1, ...$ としたときに

$$S_{i1} - F_{i1} < \max_{1\le j\le k} \{S_{j1} - F_{j1}\} + \log\alpha/\log\lambda + a_\lambda$$

に当てはまる母集団 π_i は eliminate してしまう. その後は帰納的に, r 段階目においては $r-1$ 段階目で eliminate されなかった母集団から 1 個づつのサンプリングを行ない, そのとき

$$\sum_{\beta=1}^{r} (S_{i\beta} - F_{i\beta}) \le \max_{\nu} \left\{ \sum_{\beta=1}^{r} (S_{\nu\beta} - F_{\nu\beta}) \right\} + \log\alpha/\log\lambda + r a_\lambda \tag{1.4}$$

に当てはまる母集団 π_i は eliminate する. ただし, (5.1) における max は $r-1$ 段階目で eliminate されなかった母集団に関してとる. r 段階目で残った母集団が 1 個だった場合, その母集団を選択する. それ以外の場合, $r+1$ 段階目に進む. もし, W_λ 段階目で 1 個以上の母集団が残っていた場合, $W_\lambda + 1$ 段階目を行なって, そのときに $\sum_{\beta=1}^{W_\lambda+1} (S_{i\beta} - F_{i\beta})$ が最大の母集団 π_i を選択する.

逐次の場合のBhattacharyya型下界の達成について

筑波大・数学　小池健一

1. はじめに　非逐次の場合，未知母数の関数の不偏推定量の分散に対する下界を与える式として，Cramér-Raoの情報不等式があり，さらに，この不等式を精密化したBhattacharyyaの情報不等式が成り立つことが知られている．Cramér-Rao の情報不等式の下界の達成については，Wijsman (1976)やJoshi(1976)がある．一方，Cramér-Rao の情報不等式を逐次推定の場合に拡張したWolfowitzの情報不等式(Wolfowitz (1947))がよく知られているが，この場合にその下界を達成することは非常にまれでありほとんどの場合には達成不可能であることもわかってきた(Ghosh (1987)等)．このことは非逐次の場合には，指数型分布族の下では多くの場合に達成可能であることに比べて顕著な差異のように思われる．一方，逐次推定におけるBhattacharyyaの情報不等式に関する研究はSeth (1949)があるが，そこで与えられた下界は不完全なものとなっている．最近Akahira (1995)により，逐次推定において費用を考慮した場合に推定方式に対する漸近的なBhattacharyya型の下界と，その下界を漸近的に達成する逐次推定方式が示され，このことは，非逐次での推定における結果よりも強い結果を導出できるという意味で意義がある．また，Koike (1997)により，逐次推定の場合にexactな意味でのBhattacharyya型の下界が与えられ，逐次二項標本抽出について考察している．ここでは，仮定する確率分布を自然母数をもつ指数型分布とし，下界の達成について考える．

2. Bhattacharyya型不等式　$X_1, X_2, \ldots$を互いに独立にいずれも(σ-有限測度μに関する)密度関数$f(x,\theta)$に従う確率変数とする．但し，θは実母数とする．ここで$f(x,\theta)$に関して，θに関しての滑らかさや台がθと無関係であるといった正則条件は必要に応じて課すものとする．更に，$\ell(\theta,x) := \log f(x,\theta)$, $\ell^{(k)}(\theta,x) := (\partial^k/\partial\theta^k)\ell(\theta,x)$ $(k=1,2)$とするとき，$I(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^2\right]$, $J(\theta) := E_\theta\left[\ell^{(1)}(\theta,X)\ell^{(2)}(\theta,X)\right]$, $K(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^3\right]$, $L(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^4\right]$, $M(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(2)}(\theta,X)\right\}^2\right] - I^2(\theta)$, $N(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^2\ell^{(2)}(\theta,X)\right] + I^2(\theta)$とする．また，$n=1,2,\ldots$に対して$\mathbf{X}_{(n)} := (X_1,\ldots,X_n)$と表わす．

ここでτを，$E(\tau^3) < \infty$となる停止則としたとき，Bhattacharyya型の情報不等式を正則な逐次推定における場合に拡張し次の定理を得る．

定理1(Koike (1997))**.** $g(\theta)$をΘ上で2回微分可能な関数，T_τを$g(\theta)$の(正則条件を満たす)不偏推定量とする．このとき，T_τの分散$\mathrm{Var}_\theta(T_\tau)$について次の不等式が成り立つ．

$$\mathrm{Var}_\theta(T_\tau) \geq (g'(\theta), g''(\theta))\, V^{-1}\, (g'(\theta), g''(\theta))'$$

但し，$V = V(\theta) := \{V_{ij}(\theta)\}$ $(2\times 2$行列$)$とし，$V_{11}(\theta) = E(\tau)I(\theta)$, $V_{12}(\theta) = V_{21}(\theta) = E(\tau)\{J(\theta)+K(\theta)\} + 2I(\theta)E\left\{\tau\sum_{n=1}^{\tau}\ell^{(1)}(\theta,X_n)\right\}$, $V_{22}(\theta) = E(\tau)\{-3I^2(\theta)+L(\theta)+M(\theta)+2N(\theta)\} - 2E(\tau^2)I^2(\theta) + 4E\left\{\tau\sum_{n=1}^{\tau}\ell^{(1)}(\theta,X_n)\right\}\{J(\theta)+K(\theta)\}$
$+4E\left[\tau\left\{\sum_{n=1}^{\tau}\ell^{(1)}(\theta,X_n)\right\}^2\right]I(\theta)$ とし，$|V| \neq 0$とする．(証明略)

注意. 定理1の特別な場合として，確率1で$\tau \equiv n$となるときを考えると，Vの成分は

$$V_{11}(\theta) = nI(\theta),\ V_{12}(\theta) = V_{21}(\theta) = n(J(\theta) + K(\theta)),$$

$$V_{22}(\theta) = n\{-3I^2(\theta) + L(\theta) + M(\theta) + 2N(\theta)\} + 2n^2 I^2(\theta)$$

となる．このとき，上のVを用いて作られる下界は，通常(非逐次の場合のとき)のBhattacharyya型の下界に等しくなる(Zacks (1971))．

3. Bhattacharyya型下界の達成 $\{P_\theta\}$を$(\Omega, \mathcal{F})$上の確率分布族とする．ただし$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$とする．$X_1, X_2, \ldots$を，互いに独立に同一分布に従う$(\Omega, \mathcal{F})$上の確率変数列とする．$X_1$の可測空間を$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$とする．ただし，$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^1$で，$\mathcal{B}$は$\mathcal{X}$のBorel集合族，$\mu$を$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$上の$\sigma$-有限測度とする．

$X_1, X_2, \ldots$を，互いに独立にいずれも1次元の自然母数をもつ指数型分布族に従う確率変数列とする．すなわち，その密度が

$$\frac{\mathrm{d}P_\theta^X}{\mathrm{d}\mu}(x) = \exp(\theta x - \gamma_\theta), \quad x \in \mathcal{X},\ \theta \in \Theta$$

とする．ただし，$P_\theta(X_1 \in \mathbb{R}^1 - \mathcal{X}) = 0$，$\Theta$は$\int_{\mathcal{X}} \mathrm{e}^{\theta x} \mathrm{d}\mu(x) < \infty$なる最大の開区間，$\gamma_\theta$は$\Theta$上の実数値関数とする．ここでは，$\theta$の実数値関数$g(\theta)$の推定問題を考える．

次の正則条件を仮定する．

(i) $g(\theta)$はΘ上で2回微分可能な定数でないθの関数である．

(ii) 各$\theta \in \Theta$について停止則τは$E_\theta(\tau^3) < \infty$を満たす．

(iii) 推定方式(τ, T_τ)は$g(\theta)$の不偏推定方式で$V_\theta(T_\tau) < \infty$を満たす．

このとき，定理1のBhattacharyya型下界のVは $V_{11} = \gamma_\theta'' E(\tau)$，$V_{12} = V_{21} = \gamma_\theta''' E(\tau) + 2\gamma_\theta'' E\left\{\tau \sum_{n=1}^{\tau} \ell^{(1)}(\theta, X_n)\right\}, V_{22} = \gamma_\theta'''' E(\tau) - 2(\gamma_\theta'')^2 E(\tau^2)$ $+4\gamma_\theta''' E\left\{\tau \sum_{n=1}^{\tau} \ell^{(1)}(\theta, X_n)\right\} + 4\gamma_\theta'' E\left\{\tau \left(\sum_{n=1}^{\tau} \ell^{(1)}(\theta, X_n)\right)^2\right\}$ で与えられる．Koike (1997)より，この下界の達成の必要十分条件は，任意の$n \geq 1$に対し，$\{\tau = n\}$においてほとんどいたるところ

$$T_n(\mathbf{x}_{(n)}) = a_\theta(S_n(\mathbf{x}_{(n)}) - n\gamma_\theta') + b_\theta\{-n\gamma_\theta'' + (S_n(\mathbf{x}_{(n)}) - n\gamma_\theta')^2\} + g(\theta)$$

となることである．ただし，$\mathbf{x}_{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$，$S_n(\mathbf{x}_{(n)}) = \sum_{i=1}^n x_i$とする．ここでは$b_\theta = 0$となる場合を考える．以下では，停止則として狭義の逐次停止則，すなわち任意の$m \in \mathbb{N}$について$P_\theta(\tau = m) < 1$が成り立つとする．

定理2. τを，$I = \{n_1, n_2, \ldots\}$ $(1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots)$でのみ正の確率をとる停止則とする．適当な正則条件の下で，定理1の下界を$\theta = \theta_0 \in \Theta$で達成し，$b_{\theta_0} = 0$となるための必要十分条件は，停止則が$\tau = \inf\{n \in I\ :\ \sum_{i=1}^n X_i = \alpha + \beta n\}$ (α, βはある条件を満たす定数)，被推定関数が$g(\theta) = A + B\alpha(\gamma_\theta' - \beta)^{-1}$，推定量が$T_\tau = A + B\tau$ a.e. P_θ $(^\forall\theta)$である．
(証明略)

統計的実験におけるMLEと Bayes 法

関東学院大経済　布能英一郎

統計的実験において、観測値 $\mathbf{X} = (X_0, X_1, ..., X_m)$ の従う分布が、「自然な母数」そのものではなくて、自然な母数の reparametrization となっている状況がある。本稿は、このような場合に、MLE と Bayes 法による推定方法を議論した。議論の簡略化のため $\mathbf{X} = (X_0, X_1, ..., X_m) \sim Multinomial(n, \zeta)$, $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_m)$, $\sum_{i=0}^{m} \zeta_i = 1$ にて 各 ζ_i が $\zeta_i = \phi_i(\theta)$, $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k)$, $\sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1$ と書き表されていて、$\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k)$ が推定したい未知パラメーターの場合を主に考察した。

0. 二項分布の場合、自乗損失の下で $\hat{\delta}(x) = x/n$ が improper prior $d\pi(\theta) = d\theta/[\theta(1-\theta))]$ に対する generalized Bayes 推定量であることは良く知られている。

ところが、多項分布 $\mathbf{X} = (X_0, X_1, ..., X_k) \sim Multinomial(N, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_k)$ の場合も、二項分布の場合と同じ論法で θ_i の MLE $\hat{\delta}_i(x) = x_i/N$ が自乗損失 $L(\theta, \delta) = \sum_{i=1}^{k}(\theta_i - \delta_i(x))^2$ の下で許容的と証明できるように思えるかもしれないが、そうはゆかない。

Property $d\pi(\theta) = d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_k/\theta_0\theta_1 \cdots \theta_k$ と定める。 $\mathbf{X} = (X_0, X_1, ..., X_k) \sim Multi-nomial(N, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_k)$ にて、任意の推定量 $\delta(x)$ に対して、generalized Bayes risk $\gamma(\delta, d\pi)$ は $+\infty$ となる。

そこで、Alam らは、次のような考え方を示した。$k = 2$ の場合、$\delta_i = x_i/N$ の許容性を示すのに $x_0, x_1, x_2 \geq 1$ の場合と、そうでない場合に分け、前者の場合、$\delta_i = x_i/N$ は impropr prior $d\pi(\theta)$ に対する (risk 有限の) generalized Bayes 推定量、後者の場合は別の処方を行うというものである。このようにして Alam は、$\delta_i = x_i/N$ の許容性を示し、続いて、一般の場合は k に関する induction で証明した。本稿は、このような視点から、$\phi_i(\theta)$ の形が identical でない場合の考察を中心に行う。

1. $m = k$, $\phi_i(\theta) = \theta_i$ で、母数空間に制約のない場合、θ_i の MLE は x_i/n. x_i/n が θ_i の許容的推定量であることは古くから知られている。

2. $\phi_i(\theta)$ の形がほんの僅か複雑になると、MLE を求めるのが困難になることがある。

3. 非許容的な MLE MLE は、必ずしも許容的とは限らない。多項分布の場合、(3 次元以上の) 多次元正規分布に見られるようなスタイン現象は生じていないが、二項分布または多項分布で母数に制限がある場合、自乗損失下で MLE が非許容的となることがある。たとえば、二項分布で母数 θ が $0 \leq \theta \leq \alpha$ 但し $0 < \alpha < 1$ に制限されている場合、θ_{MLE} を優越する推定量を構成することは困難である。しかしながら、Brown による完備性定理を用いると（サンプルサイズ n がある程度大きい場合）自乗損失下で MLE の非許容性が示せる。更に、$\xi_i = \psi_i(\theta)$ とパラメーター変換されている場合、$(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_s)$ には「見かけ上、母数に制限がなくとも、

実際には何らかの制約があり、この制約により」MLE が非許容的となることがある。

4. Bayes 法非許容的な MLE に対しては、MLE を優越し、かつ許容的な推定量に replace することが望ましい。しかしながら、Example 2.1 において、MLE を優越する推定量を見つけられたものの、その許容性については調べられていない。(というより、筆者の能力では、許容性を示す手法が見つからない) Example 3.2, Example 3.3 に至っては、MLE を優越する推定量を明示的に与えることもできていない。「MLE を優越する」ことに目をつぶり、許容的推定量を探す。Bayes 法は、手っ取り早く許容的推定量を求める方法のひとつだろう。Bayes 法は、積分計算が大変と思われるが、$\phi_i(\theta) = \phi_i(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k)$ が $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k$ の多項式で書かれている限り、$(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k) \sim Dirichret(a_0, a_1, ..., a_k)$ に選べば、容易に計算できる。

5. limit Bayes 法, generalized Bayes 法 Bayes 推定量は、事前分布の影響を受ける。事前分布によるバイアスを極力少なくしようと試みるなら、limit Bayes, すなわち、上記の場合、事前分布 $Dirichlet(a_0, a_1, ..., a_k)$ を入れて Bayes 解を計算後、$a_0, a_1, ..., a_k \to 0$ とすることが考えられる。同様に、improper prior $d\pi(\theta) = d\theta_1 \cdots d\theta_m / \theta_0\theta_1 \cdots \theta_m$ を用いた generalized Bayes 推定が考えられる。

自乗損失下での推定では、$\phi_i(\theta) = \theta_i$ の場合、θ_i の MLE は 上記による limit Bayes, generalized Bayes と一致する。しかし、$\phi_i(\theta)$ が θ_i の多項式の場合、一致するとは限らない。それどころか、limit Bayes が存在しないこともあり得るし、$x_i \geq 1$ for all i であっても generalized Bayes が存在しないこともある。

6. stepwise Bayesian procedure による justification limit Bayes が存在しない、$x_i \geq 1$ bfor all i であっても generalized Bayes が存在しないこと状況について、stepwise Bayesian procedure による justification を行った。

7. 母数が制限されているときの limit Bayes, generalized Bayes, stepwise Bayes 自乗損失の下で、母数が制限されているときの limit Bayes, generalized Bayes, stepwise Bayes を考察した。

8. stepwise Bayes 推定量と MLE の関係 について、(Dallel, 1988, Biometrics) の Example を考察し、この一部を一般化して、次の結果を得た。

定理 $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \cdots X_k) \sim Multinonial(n, \zeta)$ にて ζ の reparametrization は, r 個の独立なパラメーターベクトル $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ で与えられているとする。ここで各 θ_i は $\theta_i = (\theta_{i,0}, \theta_{i,1}, ..., \theta_{i,s_i})$, $\sum_{j=0}^{s_i} \theta_{i,j} = 1$, $\theta_{i,j} \geq 0$ を満たす。各 ζ_t が $\theta_{1,0}, \theta_{1,1}, ..., \theta_{1,s_1}, \theta_{2,0}, \theta_{2,1}, .., \theta_{2,s_2}, ..., \theta_{r,0}, \theta_{r,1}, ..., \theta_{r,s_r}$ の単項式で表わされているならば、$(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$ の MLE は自乗損失下で許容的。

Multiple Comparisons with Components of a Linear Function of Mean Vectors

筑波大・理工・院　　成井　一能
筑波大・理工・院　　宮島　弘志
筑波大・数学　　　　青嶋　誠

k 個の独立な $p\ (\geq 2)$ 変量正規母集団 $\pi_i : N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i),\ i = 1, ..., k$ があるとする。推測の目的に応じて定められる係数 $b_i\ (i = 1, ..., k)$ をもつ線形関数 $\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^k b_i \boldsymbol{\mu}_i$ を定義し、$\boldsymbol{\xi}$ の成分 $(\xi_1, ..., \xi_p)$ に関する多重比較を考える。多重比較法として、Tukey (1953) の MCA (all pairwise multiple comparisons)、Hsu (1984) の MCB (multiple comparisons with the best)、Dunnett (1955) の MCC (multiple comparisons with a control) の 3 つを扱う。各 π_i から大きさ n_i の無作為標本 $\boldsymbol{X}_{i1}, ..., \boldsymbol{X}_{in_i}$ を抽出して $\overline{\boldsymbol{X}}_{in_i} = \sum_{j=1}^{n_i} \boldsymbol{X}_{ij}/n_i$ を計算し、$\boldsymbol{Y}_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^k b_i \overline{\boldsymbol{X}}_{in_i}$ を定義する。ここで、$\boldsymbol{n} = (n_1, ..., n_k)$ である。そのとき、$(\xi_1, ..., \xi_p)$ を $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{n}} = (Y_{1\mathbf{n}}, ..., Y_{p\mathbf{n}})$ で推定する。区間幅 $2d\ (> 0)$ を指定するとき、3 つの多重比較法は、それぞれ次の形式の同時信頼区間を与える。

(MCA) $R_{\mathbf{n}} = \{\boldsymbol{\xi} \in R^p : \xi_r - \xi_s \in (Y_{r\mathbf{n}} - Y_{s\mathbf{n}}) \pm d,\ 1 \leq r < s \leq p\}$.

(MCB) $R_{\mathbf{n}} = \{\boldsymbol{\xi} \in R^p : \xi_r - \max_{s \neq r} \xi_s \in \pm(Y_{r\mathbf{n}} - \max_{s \neq r} Y_{s\mathbf{n}} \pm d)^{\pm},\ r = 1, ..., p\}$.
ただし、$+x^+ = \max\{0, x\},\ -x^- = \min\{0, x\}$ とする。

(MCC) $R_{\mathbf{n}} = \{\boldsymbol{\xi} \in R^p : \xi_r - \xi_p \in (Y_{r\mathbf{n}} - Y_{p\mathbf{n}}) \pm d,\ r = 1, ..., p-1\}$.

本報告では、多重比較の区間幅と信頼係数をともに考慮して、与えられる $d\ (> 0)$ と $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$P(\boldsymbol{\xi} \in R_{\mathbf{n}}) \geq 1 - \alpha \quad \text{for} \quad {}^{\forall}(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i),\ i = 1, ..., k \tag{1}$$

なる $R_{\mathbf{n}}$ の構築を目的とする。

$k = 1$ で $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{I}_p$ のとき、Hsu (1989) は $R_{\mathbf{n}}$ の構築にかかる標本数の大きさを議論し、未知の σ を d/σ の形で含んだ積分式で評価している。Hochberg (1974) を応用すれば、共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_i = (\sigma_{(i)rs})$ が spherical model のとき、すなわち、$\sigma_{(i)rs} = 2\varphi_{ir} + \tau_i^2\ (r = s)$ or $\varphi_{ir} + \varphi_{is}\ (r \neq s)$、もしくはそれと同等な表現として、

$$\sigma_{(i)rr} + \sigma_{(i)ss} - 2\sigma_{(i)rs} = 2\tau_i^2 \quad (1 \leq r < s \leq p) \tag{2}$$

なる構造をもつとき、多重比較法は極めて良い性質を有することが分かる。k 個の母集団の共分散行列に (2) を仮定すると、上記の 3 つの多重比較法に対して要求 (1) を満足する。$R_{\mathbf{n}}$ の構築は次の手順に従う。各 π_i から初期標本 $\boldsymbol{X}_{ij} = (X_{ij1}, ..., X_{ijp}),\ j = 1, ..., m\ (\geq 2)$ を抽出し、自由度 $\nu = (p-1)(m-1)$ をもつ τ_i^2 の推定量

$$S_i^2 = \sum_{r=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} (X_{ijr} - \overline{X}_{ij.} - \overline{X}_{i.r} + \overline{X}_{i..})^2/\nu \tag{3}$$

を計算する。ここで、$\overline{X}_{ij.} = \sum_{r=1}^p X_{ijr}/p, \overline{X}_{i.r} = \sum_{j=1}^m X_{ijr}/m, \overline{X}_{i..} = \sum_{r=1}^p \sum_{j=1}^m X_{ijr}/(pm)$ である。各 π_i における二段階法での標本数を、

$$N_i = \max\left\{m, \left[\frac{t^2}{d^2}|b_i|S_i \sum_{j=1}^{k} |b_j|S_j\right] + 1\right\} \tag{4}$$

で定義する。(4) に従って、各 π_i で $N_i - m$ 個の追加標本を抽出し、初期標本と合わせて $\overline{\boldsymbol{X}}_{iN_i} = \sum_{j=1}^{N_i} \boldsymbol{X}_{ij}/N_i$ を計算する。そのとき、$\boldsymbol{N} = (N_1, ..., N_k)$ とおいて $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^k b_i \overline{\boldsymbol{X}}_{iN_i}$

を定義する。上記の (MCA)、(MCB)、(MCC) に $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}} = (Y_{1\mathrm{N}}, ..., Y_{p\mathrm{N}})$ を代入することで、要求 (1) を満たす同時信頼区間 R_{N} を得る。なお、(4) 式の中の t 値は、Takada and Aoshima (1997) と同様の議論により得られる積分方程式をそれぞれの多重比較法ごとに解くことによって定めるとする。決定される t 値を $t = t_a$ (MCA), $t = t_b$ (MCB), $t = t_c$ (MCC) で表せば、$t_b < t_c < t_a$ なる順序が成立し、要求 (1) を満たすために必要となる標本数に MCB < MCC < MCA なる関係があることが分かる。上記の推測において、MCB が通常の indifference–zone selection と subset selection の両方をも考慮していることに注意する。Spherical model (2) は特別な場合として、$\boldsymbol{\Sigma}_i = \sigma_i^2\{(1-\rho_i)\boldsymbol{I}_p + \rho_i \boldsymbol{J}\}$ なる intraclass correlation model を含む。その意味で、上の (MCB) の結果は、$k = 2$ として $\boldsymbol{\Sigma}_i,\ i = 1, 2$ を intraclass correlation model に限定すれば、$(\xi_1, ..., \xi_p)$ に関する indifference–zone selection をこの設定のもとで扱った 百武 (1999) による結果と一致する。

本報告ではさらに、(2) の仮定をはずした任意の $\boldsymbol{\Sigma}_i,\ i = 1, ..., k$ に対しても、要求 (1) を満たす $R_{\mathbf{n}}$ の構築を考える。その場合、$p = 2$ については上記の推測で事足りているので、$p \geq 3$ について扱うことになる。各 π_i から $m\ (> p)$ 個の初期標本を抽出し，自由度 $\nu = m - 1$ の

$$\boldsymbol{S}_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\boldsymbol{X}_{ij} - \overline{\boldsymbol{X}}_{im}\right)\left(\boldsymbol{X}_{ij} - \overline{\boldsymbol{X}}_{im}\right)' / \nu \tag{5}$$

を計算する。$\boldsymbol{S}_i$ の最大固有値 ℓ_i に基づいて、各 π_i における二段階法での標本数を、(4) に換えて

$$N_i = \max\left\{m, \left[\frac{u^2}{d^2}|b_i|\sqrt{\ell_i}\sum_{j=1}^{k}|b_j|\sqrt{\ell_j}\right] + 1\right\} \tag{6}$$

で定義する。それぞれの多重比較法に対する u 値の計算については、MCA、MCC に対しては Sidak の不等式、MCB に対しては Slepian の不等式をそれぞれ用い、Aoshima, Takada and Srivastava (2000) の補題を用いて得られる積分方程式の解として与える。さらに MCA については、Tukey (1953) conjecture との関連から、「Σ_i が spherical model のとき被覆確率が下限をとる」という予想の下で標本数と確率の両面から改良することが出来る。これは、(a) $p = 3$、(b) ある正の定数 a_i's に対して $(Y_{1\mathrm{n}} - Y_{2\mathrm{n}}, ..., Y_{p-1\mathrm{n}} - Y_{p\mathrm{n}})$ の共分散行列 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ の対角成分が $c_{ii} = a_r + a_s \quad (1 \leq r < s \leq p)$ と表せるとき、の 2 つの場合について少なくとも正しいことが言える。一般の k に対しては、大規模なシミュレーション実験により予想の確からしさを検証した。

参考文献

Aoshima, M. Takada, Y and Srivastava, M. S. (2000): *J. Statist. Plan. Inference* , in press.

Dunnett, C. W. (1955). *J. Amer. Statist. Assoc.,50*, 1096–1121.

Hochberg, Y. (1974): *Amer. Statist.,28*, 137–138.

Hsu, J. C. (1984): *Ann. Math. Statist..12*, 1136–1144.

Hsu, J. C. (1989): *Comp. Statist. & Deta Anal.,7*, 79–91.

百武 (1999): 第 *67* 回日本統計学会講演報告集, 246–247.

宮島・成井・青嶋 (2000): 第 *68* 回日本数学会講演報告集, 353–354.

成井・宮島・青嶋 (2000): 第 *68* 回日本統計学会講演報告集, 353–354.

Takada, Y. and Aoshima, M. (1997). *Seq. Anal., 16*, 353–362.

Tukey, J. W. (1953): The Probrem of Multiple Comparisons. Mineographed monograph.

Hypergeometric Systems, Weyl Algebra, Creation Operator, and Sequential Conditional Inference of Contingency Tables

Toshio Sakata Kyushu Institute of Design
Ryuichi Sawae Okayama Science University

Sequential tests have been used frequently in medical statistics because in this field it is very important to obtain a test result as early as possible. If a dose is not useful the experimental test must be stopped as soon as possible. On the other hand the tests of contingency tables, especially the conditional test with fixed marginals, have also been used frequently in the field because the level or the effect of a dose is usually clasified nominally. However the sequential test of contingency tables seems to have not seen in the literature. We propose a new theory of the sequential conditional test for two-way contingency tables. As far as we know, this may be the first attempt of such study. Our work is based on a deep theory of the hypergeometric A-systems of partial differential equations. The system of the partial differential equations is solved by using the theory of the Weyl algebra of partial differential operator, the annihilation operators and their inverse operators, called a creation operator. These were investigated in the studies of Oaku[2], Saito, Strumfels and Takayama[3], Sasaki[7] and so on. Also it was studied in the proof of the identities about hypergeometric functions. These treated the problem from purely mathematical viewpoints. The only exception is the paper of Saito,Strumfels and Takayama[3], dealing with an application to the integer programming. Their paper gave us a strong motivation. The creation operator of the Weyl algebra of differential operators is the key of our study. It is, in general, calculated by using Groebner basis on the non-commutative Weyl algebra. However, for the case of two-way contingency tables it is given in the explicit form by Sasaki[7]. We use his expression in this paper. On the other hand Groebner basis of the toric ideal of polynomial functions was used to generate the Metropolis walk on the contingency tables with fixed marginals by Diaconis and Strumfels[1]. In the litarature it is well-known now that MCMC theory works well for obtaining the p value of a contingency table(for example see Sakata,Nomakuchi and Hayashi[4],Sakata and Sawae[5], Sakata and Yanagawa[6], and Sawae, Sakata and Asagoe[8]). However the p-value obtained by MCMC is an approximation. In stead our procedure can calculate the exact p-value both for the sequential test and non-sequential tests. It is noted that from the viewpoint of calculation time our proposed sequential test mainly works well for the case of sparse data, that is , the case of small marginals. The whole theory is founded on our following finding.

[Finding] Let's assume that we have a contingency table with the row sum vector r and the column sum vector c. Then we can calculate the function

$\Phi(x|r,c)$ characterizing the set $\Omega(r,c)$, of all contingency tables with the same marginals with the sample data. If we get an added sample at the (i,j) cell then apply the creation operator C_{ij} to the function $\Phi(x|r,c)$. Then we get the new function $\Phi(x|r+e_i,c+e_j)$, which is the function Φ corresponding to the set of all the contingency tables, $\Omega(r+e_i,c+e_j)$. This is the set of contingency tables for the conditional test of the next stage with the added sample. Thus, we can obtain the set of contingency tables with the same marginals with the sample data at each step by applying a creation operator depending on each added sample. Thus we can perform the sequential conditional test. In this talk the link of mathematics and statistics was made clear and also some simulation results of the performance of the sequential test was shown for the 2×4 tables.

References

[1] P. Diaconis and B. Sturmfels, Algebraic Algorithms for sampling Conditional Distributions, Ann. of Statistics, **6**,No.1(1998), 363-397.

[2] T. Oaku, An algorithm of computing b-functions, Duke Mathematical Journal, **87**(1997), 115-132.

[3] M. Saito, B. Strumfels and N. Takayama, Hypergeometric Polynomials and Integer Programming(1997), Compositio Mathematica, **115**(1999), 185-204.

[4] T. Sakata, K. Nomakuchi and T. Hayashi, Generalized shift test method and Metropolis Walk, Bulletine ofInformation and Cybernetics, **19**,No1(1997), 1-13.

[5] T. Sakata and R. Sawae. Echelon form and conditional test for three way contingency tables, Proceeding of the 10-th Japan-Korea Statistical Meeting, to be published(2000).

[6] T. Sakata and T. Yanagawa, "Determination of the no-observed adverse-effect-level by controlling over estimation, Statistical research report No.SRR. 007-98(1998), Australian National University.

[7] T. Sasaki, Contiguity relations of Aomoto-Gelfand's hypergeometric functionsand applications to Apell's system F_3 and Goursat's system ${}_3F_2$, SIAM J.of Math. Anal., **22**(1991), 821-846.

[8] R. Sawae, T. Sakata and T. Asaba, Algebraic algorithms for finding a Groebner basis of the ideal generated by contingency tables, ORDAL'99 Montepellier 3rd International Conference on Orders, Algorithms and applications(1999), 230-231.

非対称損失関数の下での多次元正規分布の平均の逐次推定

大阪府立大学　工学研　長尾　壽夫

1. はじめに

$p\times 1$ベクトル$x_1,\cdots,x_n,\cdots$はp次元正規分布$N(\mu,\Sigma)$からの標本とする。Σの構造として

$$\Sigma=\sigma^2\begin{pmatrix}1 & \rho & \cdots & \rho\\ \rho & \ddots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \cdots & \ddots & \rho\\ \rho & \cdots & \rho & 1\end{pmatrix}=(\sigma_{ij})$$

と仮定する。このとき、$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_p)'$の推定のlossとして次を考える。

$$\ell(d,\mu)=\sum_{i=1}^{p}\{\exp(d_i-\mu_i)-(d_i-\mu_i)-1\}.$$

ただし、$d=(d_1,\cdots,d_p)'$はμの推定量である。$p=1$のとき、このlossはlinex loss function と呼ばれている。このlossは非対称であり、多次元の場合、通常は、$\sum_{i=1}^{p}(d_i-\mu_i)^2$などが考えられる。しかし、上の$\ell(d,\mu)$をTaylor展開する事により、$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(d_i-\mu_i)^2+\cdots$となるから、$\sum_{i=1}^{p}(d_i-\mu_i)^2$と全く無関係なlossではない。ここでは適当な推定量dを選んで$\mathrm{E}\ell(d,\mu)\le w$となるような$n$を求めたい。ただし、$w$は既知な正の数である。

2. 推定量

μの推定量として、$\bar{x}_n=(\bar{x}_{n,1},\cdots,\bar{x}_{n,p})'$を考える。ただし、$\bar{x}_n=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i$. すると$\mathrm{E}\ell(\bar{x}_n,\mu)=p\{\exp(\frac{\sigma^2}{2n})-1\}\le w$ より、$n_0=\frac{\lambda}{a}$, ただし、$\lambda=p\sigma^2, a=2p\log(1+\frac{w}{p})$ である。σ^2の推定量として、$\hat{\sigma}_n^2=\frac{1}{p}\mathrm{tr}S_n$となる。ただし、$S_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)(x_i-\bar{x}_n)'$. σ^2 は未知であるから、標本数を

$$N=\inf\{n\ge m|\quad n\ge\frac{\mathrm{tr}S_n}{a}\}$$

でおきかえる。ただし、mは既知な正の定数である。これよりμを$\bar{x}_N$で推定する。

μの推定量として、$\delta_n=\bar{x}_n-b1, 1=(1,\cdots,1)'$を考えると、$\mathrm{E}\ell(\delta_n,\mu)=p\{\exp(\frac{\sigma^2}{2n}-b)+b-1\}$. 特に、$b=\frac{\sigma^2}{2n}$とすることにより、$\sigma^2$が既知なら$\bar{x}_n$は$\delta_n=\bar{x}_n-\frac{\sigma^2}{2n}1$で改良される。そこで、$\mu$の推定量として、$\hat{\delta}_N=\bar{x}_N-\frac{\mathrm{tr}S_N}{2Np}1$で推定する。$\delta_n$を用いた時、$\mathrm{E}\ell(\delta_n,\mu)=\frac{p\sigma^2}{2n}\le w$より

$$N^*=\inf\{n\ge m|\quad n\ge\frac{\mathrm{tr}S_n}{2w}\}$$

で標本数を決めて$\hat{\delta}_{N^*}$でμを推定する。mは既知な正数である。
3.Riskについて
ここでは上の3つの推定量$\bar{x}_N, \hat{\delta}_N, \hat{\delta}_{N^*}$に対するそれぞれのriskを$R_1, R_2, R_3$を計算する。すると、$w \to 0$のとき、結果として次を得る。

$$R_1 \quad = w + \frac{2w^2}{\lambda^2}(\frac{2\tau}{\lambda} - \rho^*) + o(w^2)$$

$$R_2 \quad = w + \frac{2w^2}{\lambda^2}(\frac{2\tau}{\lambda} - \rho^* - \frac{\lambda^2}{4p}) + o(w^2)$$

$$R_3 \quad = w + \frac{2w^2}{\lambda^2}(\frac{2\tau}{\lambda} - \rho^*) + o(w^2)$$

ただし、$\rho^* = \frac{\lambda^2 + \tau^2}{2\lambda} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathrm{E}(S_k^-), \mathrm{E}(S_k^-) = \mathrm{E}(\lambda_1 \chi_{[k(p-1)]} + \lambda_2 \chi_{[k]} - 2\lambda k)^+$.2つの$\chi^2$は独立であり、$y = \lambda_1 U + \lambda_2 V$とおく。ただし、$U, V$は独立であり、それぞれ自由度$(p-1), 1$の$\chi^2$分布である。ただし、$\lambda_1 = \sigma^2(1-\rho), \lambda_2 = \sigma^2(1+\rho\overline{p-1}), \lambda = \mathrm{E}(y), \tau^2 = \mathrm{Var}(y)$である。$R_2$が最小となり、$R_2 = R_3$となる。これより$\hat{\delta}_N$が最良となる。なお、$R_1, R_2, R_3$が$w$以下であるかどうかは、上の結果からでは未定であるが、数値実験が有効のように思われる。
4.別のloss
ここでは別のlossとして、

$$\ell(d, \mu) = a \sum_{i=1}^{p} (d_i - \mu_i)^2 I_{\{d_i \leq \mu_i\}} + b \sum_{i=1}^{p} (d_i - \mu_i)^2 I_{\{d_i > \mu_i\}}$$

ただし、a, bはknownな正数であり$a \neq b$。μの推定量とすると、$\mathrm{E}\ell(\bar{x}_n, \mu) = \frac{A\lambda}{n} \leq w$とする。ただし、$A = \frac{1}{2}(a+b)$.従って停止則は、

$$N = \inf\{n \geq m | \ \ n \geq \frac{A}{w}\mathrm{tr}S_n\}$$

となる。上と同じ考えにより、

$$\mathrm{E}\ell(\bar{x}_N, \mu) = w + \frac{w^2}{A\lambda^2}(\frac{2\tau^2}{\lambda} - \rho^*) + o(w^2)$$

参考文献

Chow,Y.S. and Yu,K.F.(1981). The performance of a sequential procedure for the estimate of the mean. Ann. Statist. 9, 184-188.

Chattopadhyay,S.(1998). Sequential estimation of normal mean under asymmetric loss function with a shrinkage stopping rule. Metrika, 48, 53-59.

Woodroofe, M.(1982). Nonlinear renewal theory in sequential analysis. Soc. Indust. and Applied Math.

LINEX 損失関数のもとでの正規分布の平均の逐次推定

熊本大学・工　高田 佳和

$X_1, X_2, \cdots$ を互いに独立で正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数列とし、μ の逐次推定を考える。推定による損失を LINEX 損失関数

$$L(d, \mu) = \exp(a(d-\mu)) - a(d-\mu) - 1$$

$(a \neq 0)$ とし、1 サンプル当たりのコストを $c(>0)$ とする。もし σ^2 が既知であるならば、標本数 n、推定量

$$\delta_n = \bar{X}_n - \frac{a\sigma^2}{2n}$$

を用いたときのリスクは

$$\begin{aligned} R_n &= E_\theta\{L(\delta_n, \mu) + cn\} \\ &= \frac{a^2\sigma^2}{2n} + cn. \end{aligned}$$

このリスクは $n = n_c = \sqrt{\dfrac{a^2\sigma^2}{2c}}$ のとき最小となり、その最小リスクは $R_{n_c} = 2cn_c$ となる。しかし σ^2 が未知であるので、標本数 n_c、推定量 δ_{n_c} は用いることができないが、その形から、次の逐次推定方式が示唆される。Stopping time を

$$T_c = \inf\{n \geq m; n > b\ell_n\hat{\sigma}_n\}$$

とし、μ を

$$\hat{\delta}_{T_c} = \overline{X}_{T_c} - \frac{a\hat{\sigma}^2_{T_c}}{2T_c}$$

で推定する。ここで、m は初期標本数、$b = \sqrt{\dfrac{a^2}{2c}}$、$\{\ell_n\}$ は、次の条件を満たす定数列

$$\ell_n = 1 + \frac{1}{n}\ell_0 + o(\frac{1}{n}) \quad \text{as } n \to \infty,$$

$\hat{\sigma}^2_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$. この逐次推定方式のリスクは

$$R_{T_c} = E_\theta\left\{L(\hat{\delta}_{T_c}, \mu) + cT_c\right\}$$

となり、リグレットは $R_{T_c} - R_{n_c}$ で定義される。このとき次の結果が示される。

定理 1 $m \geq 7$ ならば、

$$\frac{R_{T_c} - R_{n_c}}{c} = \frac{1}{2} + o(1) \quad as\ c \to 0.$$

次に Stopping time は T_c であるが、μ の推定を標本平均 $\overline{X}_{T_c}$ で行う逐次推定方式について考察しよう。そのリスクを $\tilde{R}_{T_c}$ とするとすると、

定理 2 $m \geq 4$ ならば、

$$\frac{\tilde{R}_{T_c} - R_{n_c}}{c} = \frac{a^2\sigma^2}{4} + \frac{1}{2} + o(1) \qquad as\ c \to 0.$$

これらのことから、purely sequential stopping time の場合でも、標本平均は LINEX 損失のもとで、漸近的に非許容的であることがわかる。

次に、Hall (1983) が提案した accelerated stopping time の場合を考える。最初の内は、逐次的に標本を次の stopping time までとる。

$$N_1 = \inf\left\{n \geq m; n > \rho b \hat{\sigma}_n\right\}.$$

ただし、$0 < \rho < 1$。抽出した標本 $X_1, \ldots, X_{N_1}$ にもとづいて、全標本数 M_c を次の式から定める。

$$N_2 = [b\hat{\sigma}_{N_1} + \kappa] + 1,$$

$$M_c = \max(N_1, N_2).$$

ここで、$\kappa \geq 0$ 、$[u]$ は u を超えない最大の整数。残りの標本 $M_c - N_1$ は一括して抽出し（バッチでとる)、μ を $\hat{\delta}_{M_c}$ で推定する。この逐次推定方式のリスクは、

$$R_{M_c} = E_\theta\left\{L(\hat{\delta}_{M_c}, \mu) + cM_c\right\}.$$

定理 3 $m \geq 7$ ならば、

$$\frac{R_{M_c} - R_{n_c}}{c} = \frac{1}{2\rho} + o(1) \qquad as\ c \to 0.$$

次に Stopping time は M_c であるが、μ の推定を $\overline{X}_{M_c}$ で行う逐次推定方式について考察しよう。そのリスクを $\tilde{R}_{M_c}$ とすると、

定理 4 $m \geq 4$ ならば、

$$\frac{\tilde{R}_{M_c} - R_{n_c}}{c} = \frac{a^2\sigma^2}{4} + \frac{1}{2\rho} + o(1) \qquad as\ c \to 0.$$

これらのことから、accelerated stopping time の場合でも、標本平均は、漸近的に非許容的であることがわかる。

二段階標本抽出による統計的推測

筑波大学 数学系　　青嶋　誠

$X_1, X_2, \ldots$ を p 次元 iid 連続確率ベクトルの列とする。$E(X)=\mu$, $Cov(X)=\Sigma\ (>\mathbf{o})$ とし、さらに、8 次のモーメントまで存在を仮定する。観測された $X_1, \ldots, X_n$ で定義される $\overline{X}_n=\sum_{i=1}^n X_i/n$ をもとに、μ に関する固定された大きさの推測を構築する。「固定された大きさの推測」とは、信頼領域については、与えられる $\alpha\ (0<\alpha<1)$ と $d\ (>0)$ に対して、

(I) 領域が球形の場合

$$P(\mu \in R_n) \geq 1-\alpha$$

なる $R_n=\{\omega \in R^p :\ ||\overline{X}_n-\omega||^2 \leq d^2\}$ をさし、

(I)' 領域が楕円形の場合

$$P(\mu \in R_n') = 1-\alpha$$

なる最大長径が $2d$ 以下の R_n' をさす。ただし、$||X||^2=X'X$ である。点推定については、$L_n=||\overline{X}_n-\mu||^2$ と定義するとき、与えられる $W\ (>0)$ に対して

(II) $E(L_n) \leq W$

なる $\overline{X}_n$ をさす。

母集団分布が多変量正規分布のとき、(I)-(I)' の解は Healy (1956) によって与えられ、(II) の解は Kubokawa (1990) によって与えられた。彼らはいずれも、Stein (1945) の二段階法を多変量に拡張することで、推測の要求を達成している。近年、Healy が与えた (I) の解は標本数の意味で抜本的に改良されることが、Aoshima (2000) によって証明された。Aoshima はさらに、改良された (I) の解は 2 次の漸近有効性が成り立つこと、および、Kubokawa が与えた (II) の解も 2 次の漸近有効性が成り立つことを証明している。母集団が複数個あるとき、共分散行列が互いに異なっていても構わない多変量正規分布の場合で、Aoshima, Takada and Srivastava (2000) は (I) に対する解を、Aoshima and Takada (2000) は (II) に対する解を、それぞれ二段階法で与えている。

本報告では、まず、複数個の多変量正規母集団の場合に Aoshima, Takada and Srivastava (2000) と Aoshima and Takada (2000) が与えた (I)-(II) の解が、2 次の漸近有効になることを証明する。さらに、母集団分布が多変量非正規分布である場合に、(1) 正規性のもとで構築された二段階推測の 3 次・4 次のキュムラントに対する頑健性を理論的に調べ、(2) 非正規性に対して二段階法に妥当な修正を与える。なお、二段階推測の非正規性に対する頑健性の研究は、従来、一変量の場合のシミュレーション実験によるところに留まっていた。

非正規分布のもとで、例えば単一母集団に対する (I)' について、二段階推測を以下のように考える。(詳しくは、青嶋・若木 (2000) を参照のこと。) 初期の標本として大きさ $m\ (>p)$ の $X_1, \ldots, X_m$ を抽出し、

$$S_m=(m-1)^{-1}\sum_{i=1}^m (X_i-\overline{X}_m)(X_i-\overline{X}_m)'$$

の最大固有値 ℓ_m に基づいて

$$N=\max\left\{m,\ \left[\frac{a_m \ell_m}{d^2}\right]+1\right\} \tag{1}$$

を定義する。(1) に従って追加標本 $\boldsymbol{X}_{m+1},\dots,\boldsymbol{X}_N$ を抽出し、初期標本と追加標本を合わせて $\overline{\boldsymbol{X}}_N$ を計算する。そのとき、楕円型信頼領域

$$R'_N = \left\{\omega \in R^p : N(\overline{\boldsymbol{X}}_N - \omega)' S_m^{-1} (\overline{\boldsymbol{X}}_N - \omega) \le a_m\right\} \tag{2}$$

を構築する。正規性のもとでは、統計量 $T_N^2 = N(\overline{\boldsymbol{X}}_N - \boldsymbol{\mu})' S_m^{-1} (\overline{\boldsymbol{X}}_N - \boldsymbol{\mu})$ の分布はホテリングの T^2 分布と一致することが証明できるので、(1) において $a_m = p(m-1)(m-p)^{-1}F_{p,m-p}(\alpha)$ とすれば、R'_N は (I)' の解になる。非正規性のもとでは、$m \to \infty$ で T_N^2 の分布を漸近的に導出する必要がある。標本数が定数になる (従って、推測が「固定された大きさ」をもたない) 場合の、通常のホテリングの T^2 の分布を非正規性のもとで扱った Kano (1995) と Fujikoshi (1997) の結果は、ここで導出される結果の特別な場合になる。次の 4 つを仮定する。

(A0) $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')$ の同時分布に対する Cramér 条件;

(A1) $\boldsymbol{\Sigma}$ の最大固有値 λ が単根;

(A2) $E(||\boldsymbol{X}||^8) < \infty$;

(A3) $\lim_{m\to 0} md^2 = c, \quad 0 < c < a_0\lambda.$

正規性のもとで、(I)' の最適標本数は、$a_0 = \chi_p^2(\alpha)$ を用いた $n^* = a_0\lambda/d^2$ で書けることに注意する。標本数の定義式 (1) にある最大固有値を陰関数の定理を用いて摂動展開し、標本数の整数化に伴う部分は、漸近的にある種の独立性をもつ一様分布で書き換えられることに注意する。比率 $r = N/m$ が摂動展開で与えられ、標本抽出が 2 段階であることに伴う条件付き分布の各種期待値の展開式を計算し、分布の漸近展開式が求まる。(1) における a_mは、パーセント点の Cornish–Fisher 展開

$$a_m = a_0\left(1 + \frac{\widehat{a}_1}{m}\right) \tag{3}$$

で与えられる。ここで、$\widehat{a}_1$ は Σと 3 次・4 次キュムラントの推定量の関数である。そのとき、R'_N は (I)' の非正規性のもとでの漸近的な解になる。

頑健性について、正規分布の a_m を用いたとき、被覆確率が比率 r の関数であることに注意すれば、比率とキュムラントの関係を調べることで、以下の 2 点が確認できる。

(1) 正規分布よりも裾が重い場合、推測の精度が上がることがあり得る。つまり、非正規性に合わせた (3) の修正を施せば、標本数を削減することが可能になる。

(2) 共分散行列が既知であることを想定すると、(3) の修正を施した二段階法は、正規分布よりも裾が重い場合に超有効性をもつ可能性がある。

参考文献

Aoshima, M. (2000): *Commun. Statist.: Theory and Methods,* **29**, 611–622.

Aoshima, M. and Takada, Y. (2000a): *IISA98 Conference Vol.*, in press.

Aoshima, M., Takada, Y. and Srivastava, M.S. (2000): *J. Statist. Plan. Inference*, in press.

青嶋・若木 (2000): 第 68 回日本統計学会講演報告集, 355–356.

Fujikoshi, Y. (1997): *J. Multiv. Anal.,* **61**, 187–193.

Healy, W. C., Jr. (1956): *Ann. Math. Statist.,* **27**, 687–702.

Kano, Y. (1995): *Amer. J. Math. Manage. Sci.,* **15**, 317-341.

Kubokawa, T. (1990): *J. Japan Statist. Soc.,* **20**, 77–87.

Stein, C. (1945): *Ann. Math. Statist.,* **16**, 243–258.

離散型分布における大偏差近似について

筑波大・数学　髙橋 邦彦
筑波大・数学　赤平 昌文

1. はじめに

最近, 我々は独立な離散型確率変数の和の分布に対する大偏差 (原理による) 近似を高次の次数まで求めて, 通常用いられている正規近似, Edgeworth 近似と比較検討し, その近似精度が良いことを確めた ([ATT99]). 実際, 各点における確率関数の近似は分布の裾の部分はもちろん, 中心部分でも良い近似精度を与えた.

本論では, さらにいくつかの分布についてその近似精度を確めるとともに, 裾確率の近似式のさらなる改良を行って, Edgeworth 近似, Lugannani-Rice 近似等との比較を行った. また, その近似式を基にして区間推定等への適用について考察した.

2. 大偏差近似

まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ を互いに独立に, 各 $j=1,2,\cdots$ について X_j が確率関数 $p_j(x)=P\{X_j=x\}$ $(x=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ に従う離散型確率変数列とする. それらの和 $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ の確率関数を $p_n^*(y) := P\{S_n=y\}$ $(y=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ とする. また各 j について, X_j の積率母関数を $M_j(\theta) := E\left[e^{\theta X_j}\right]$ $(\theta\in\Theta)$ とする. ただし Θ は原点を含むある開区間とする. ここで各 j について, 確率関数 $p_{j,\theta}(x) := P_\theta\{X_j=x\} = p_j(x)e^{\theta x}M_j(\theta)^{-1}$ $(x=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ の離散指数型分布族 $\mathcal{P}_j := \{p_{j,\theta}(x) : \theta\in\Theta\}$ を考える. ここで, $p_{j,0}(x)=p_j(x)$ になる. また S_n の確率関数を $p_{n,\theta}^*(y) := P_\theta\{S_n=y\}$ $(y=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ で表わす. ただし $p_{n,0}^*(y)=p_n^*(y)$ とする. このとき

$$p_{n,\theta}^*(y) = p_n^*(y)e^{\theta y}\prod_{j=1}^n M_j(\theta)^{-1}$$

となり,

$$p_n^*(y) = e^{-\theta y}\prod_{j=1}^n M_j(\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=1}^n M_j(\theta+it)\prod_{j=1}^n M_j(\theta)^{-1}e^{-ity}dt$$

になる. ただし, i は虚数単位とする. また $K_n(\theta) := \sum_{j=1}^n \log M_j(\theta)$ とおくと

$$p_n^*(y) = e^{K_n(\theta)-\theta y}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{K_n(\theta+it)-K_n(\theta)-ity}dt$$

になる. さらに各 $\alpha=1,2,\cdots$ について $K_n^{(\alpha)}(\theta)=(d^\alpha/d\theta^\alpha)K_n(\theta)$ とおく. いま, 各 $y=0,\pm1,\pm2,\cdots$ について, $S_n=y$ のとき $K_n^{(1)}(\hat\theta_0)=y$ となる θ の推定量 $\hat\theta_0 := \hat\theta_0(S_n)$ を考える. ここで $K_n^{(\alpha)}(\hat\theta_0)=O(n)$ $(\alpha=2,3,\cdots)$ を仮定する.

定理 1([ATT99]). S_n の確率関数 $p_n^*(y)$ は漸近的に次のように与えられる.

$$p_n^*(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K_n^{(2)}(\hat\theta_0)}}e^{K_n(\hat\theta_0)-\hat\theta_0 y}\left[1+\frac{K_n^{(4)}(\hat\theta_0)}{8\left\{K_n^{(2)}(\hat\theta_0)\right\}^2}-\frac{5\left\{K_n^{(3)}(\hat\theta_0)\right\}^2}{24\left\{K_n^{(2)}(\hat\theta_0)\right\}^3}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

さらに, 裾確率の近似を次のように求めることができる ([TA00]).

定理 2. S_n の上側裾確率は, 漸近的に次のように与えられる.

$$P\{S_n \geq y\} = p_n^*(y) \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{ -k\hat{\theta}_0 - \frac{k^2}{2K_n^{(2)}(\hat{\theta}_0)} - \frac{K_n^{(3)}(\hat{\theta}_0)k}{2\left\{K_n^{(2)}(\hat{\theta}_0)\right\}^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}, \quad y > E(S_n).$$

ここで, $p_n^*(y)$ は定理 1 で与えられたものとする.

同様にして, 下側裾確率の近似も求めることができる.

系. S_n の分布の下側裾確率は, 漸近的に次のように与えられる.

$$P\{S_n \leq y\} = p_n^*(y) \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{ k\hat{\theta}_0 - \frac{k^2}{2K_n^{(2)}(\hat{\theta}_0)} + \frac{K_n^{(3)}(\hat{\theta}_0)k}{2\left\{K_n^{(2)}(\hat{\theta}_0)\right\}^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}, \quad y < E(S_n)$$

ただし, $p_n^*(y)$ は定理 1 で与えられたものとする.

3. 裾確率の近似の精度の数値比較

実際に, 2 項分布, 負の 2 項分布, 対数級数分布などの場合について, 上記の定理から近似値, Edgeworth 近似による近似値を数値計算によりそれぞれ求め, 真値と比較することによって, その近似の精確性を確めた. また, 独立同分布の場合について Jensen([J95]) における各近似値と比較を行い, 定理 2, 系の近似式の良さを確認した.

4. 区間推定への適用

定理 2, 系の応用として, 区間推定への適用を考える. 任意の小さい α $(0 < \alpha < 1)$ について, $P\{S_n \leq y\} = \alpha/2$ となる θ を $\overline{\theta}(y)$ とし, $P\{S_n \geq y\} = \alpha/2$ となる θ を $\underline{\theta}(y)$ とすれば, 区間 $[\underline{\theta}(S_n), \overline{\theta}(S_n)]$ が漸近的に信頼係数 $1-\alpha$ の θ の信頼区間になる. 実際に 2 項分布, ポアソン分布の場合に信頼区間を構成し, 正規近似による信頼区間などと比較し, その精確性を確めた.

表: 2 項分布 $B(20, p)$ の p 対する上側信頼限界 (%) に対する近似式の誤差 (%) の比較
([TF85] p.163, 表 9.1 参照)

x	1	2	5	7	9	12	15	17	18
真値	21.61	28.26	45.56	55.80	65.31	78.29	89.59	95.78	98.19
修正正規	0.88	0.47	−0.01	−0.09	−0.06	0.15	0.59	1.13	1.57
半整数補正	1.36	0.97	0.27	-0.04	−0.27	−0.50	−0.59	−0.49	−0.35
グラム・シャリエ	0.31	0.23	0.14	0.13	0.12	0.14	0.18	0.23	0.24
平方根変換	0.89	0.68	0.35	0.21	0.10	−0.01	−0.05	−0.01	0.04
F 分布の近似	−0.05	−0.03	−0.01	−0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05
LD (定理 2, 系)	0.02	0.04	0.01	−0.03	−0.00	−0.00	−0.03	−0.02	−0.01

参考文献

[ATT99] Akahira, M., Takahashi, K. and Takeuchi, K. (1999). The higher order large-deviation approximation for the distribution of the sum of independent discrete random variables. *Commun. Statist. – Theory Meth.*, **28**(3&4), 705–726.

[J95] Jensen, J. L. (1995). *Saddlepoint Approximations.* Clarendon Press, Oxford.

[TA00] 髙橋邦彦, 赤平昌文 (2000). Higher order approximation for the tail probability of discrete distributions. 京都大学 数理解析研究所講究録 **1161**, 46–77.

[TF81] 竹内啓, 藤野和建 (1981). 2 項分布とポアソン分布. 東大出版会.

Bivariate and multivariate bioequivalence test procedures

筑波大・数学　津田 美幸

1. 多変量離散指数型分布族に対する検定

自然数 p, q $(p \geq q \geq 2)$ を固定する. 集合 Θ は p 次元 Euclid 空間の開集合で, 原点を含むとする. p 次元整数値確率ベクトル $\boldsymbol{X} := {}^t(X_1, \ldots, X_p)$ は $\boldsymbol{\theta} := {}^t(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ $(\boldsymbol{\theta} \in \Theta)$ を自然母数とする指数型分布 $P_{\boldsymbol{\theta}}$ に従うとする. p 次元整数値ベクトル $\boldsymbol{x} := {}^t(x_1, \ldots, x_p)$ に対し, $\boldsymbol{X}$ の確率関数を

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\} \;=\; a(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{x})\exp\left(\sum_{i=1}^{p}\theta_i x_i\right)$$

で定義する. ただし, $b(0) > 0$ とし, $x_i < 0$ となる i $(1 \leq i \leq p)$ が存在するならば $b(\boldsymbol{x}) = 0$ とする. Θ の部分集合 Θ_0, Θ_1 を

$$\Theta_0 := \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta \mid \theta_i \geq 0 \text{ となる } i \ (1 \leq i \leq q) \text{ が存在する.}\},$$

$\Theta_1 := \Theta \backslash \Theta_0$ で定義し, 未知の $\boldsymbol{\theta}$ に対する仮説

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

を有意水準 α $(0 < \alpha < 1/2)$ で検定する問題を考える.

ある i $(1 \leq i \leq q)$ に対して, $\theta_i = 0$ とする. $\boldsymbol{\eta}_i := {}^t(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_p)$ は局外母数であり, $\boldsymbol{Y}_i := {}^t(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_p)$ は $\boldsymbol{\eta}_i$ に対する完備十分統計量である. 仮に, $\phi_1(\boldsymbol{x})$ が不偏検定ならば, $\phi_1(\boldsymbol{x})$ は相似検定であり, Neyman 構造を持つ. すなわち, $P_{\{\theta_i=0\}}\{\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i\} > 0$ となる全ての $\boldsymbol{Y}_i$ の実現値 $\boldsymbol{y}_i$ に対して,

$$E_{\{\theta_i=0\}}\{\phi_1(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i\} \;=\; \alpha \tag{1.1}$$

が成り立つ. しかし, 自明な検定 $\phi_1(\boldsymbol{x}) :\equiv \alpha$ 以外には (1.1) を満たす検定は存在しない (Lehmann (1952)). そこで, bioequivalence 問題に対する Tsuda (2000) の手法を拡張して, 次の性質を満たす検定 $\phi_1(\boldsymbol{x})$ を考える.

性質 1.1. 自然数 i $(1 \leq i \leq q)$ の関数 $s_*(i)$ が存在して, $\sum_{j \neq i} x_j \leq s_*(i)$ かつ $P_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i\} > 0$ ならば (1.1) が成り立つ.

本研究では, 再帰的な手順によって ϕ_1 構成し, ある検定の族 $\mathcal{C}$ の中で許容的であることを示す. また, これらの応用例としては, 負の多項分布, 多変量対数級数分布, 多変量 Poisson 分布などが挙げられる.

2. 2変量正規分布に対する検定

2次元確率ベクトル $\boldsymbol{X} := {}^t(x_1, x_2)$ と確率変数 S は互いに独立で，$\boldsymbol{X}$ は $N_2(\boldsymbol{\theta}, \Sigma)$ に従い，S^2/σ^2 は χ_n^2 に従うとする．ただし，

$$\boldsymbol{\theta} := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma := \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

であり，$\boldsymbol{\theta}$ と σ は未知，ρ は既知の母数とする．このとき，仮説

$$\mathrm{H}_0 : \theta_1 \geq 0 \text{ または } \theta_2 \geq 0 \text{ vs. } \mathrm{H}_1 : \theta_1 < 0 \text{ かつ } \theta_2 < 0$$

を有意水準 $\alpha\,(\leq 1/2)$ で検定する問題を考える．この問題に対して Sasabuchi (1988) は尤度比検定 (intersection-union 検定)

$$\phi_L(\boldsymbol{X}, S) := \begin{cases} 1 & i = 1, 2 \text{ に対して } \sqrt{n}X_i/S < c, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

の性質を調べた．ただし，c は，自由度 n の t-分布 t_n の下側 $100\alpha\%$ 点とする．ϕ_L は尺度不変検定で，ρ が未知の場合でも検定の大きさは α である．ρ, σ^2 が既知の場合については，Liu and Berger (1995) や Tsuda (2000) によって intersection-union 検定よりも検出力が一様に大きい検定が構成されているので，本研究では，同様の方法を用いて，σ^2 が未知の場合に ϕ_L よりも検出力が一様に大きい検定を構成する．

参考文献

[1] Liu, H. and Berger, R. L. (1995). Uniformly more powerful, one-sided tests for hypotheses about linear inequalities. *Ann. Statist.*, **23**, 55-72.

[2] Lehmann, E. L. (1952). Testing multiparameter hypotheses. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 541-552.

[3] Sasabuchi, S. (1988). A multivariate test with composite hypotheses determined by linear inequalities when the covariance matrix has an unknown scale factor. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **42**, 37-46.

[4] Tsuda, Y. (2000). On the bioequivalence problem and a testing hypothesis problem for the bivariate normal distribution. *In press in J. Japan Statist. Soc.*

Minimum risk point estimation of the powers of a negative exponential scale parameter

新潟大学 理学部　　磯貝 英一
秋田大学 教育文化学部　　宇野　力

1. 序

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ は互いに独立な確率変数列で, 次の共通の確率密度関数をもつ指数分布に従うとする:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) I_{(x\geq\mu)},$$

但し, $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma \in (0, \infty)$ はともに未知で, I_A は A の定義関数である. 与えられた定数 $r\,(\neq 0)$ に対して, σ^r の推定問題を扱う.

$$T_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - T_n)$$

とおき, σ^r の推定量 σ_n^r に対し, 損失関数

$$L_n = (\sigma_n^r - \sigma^r)^2 + cn \quad (c > 0 \text{ は既知定数})$$

を考え, リスクを $R_n = E(L_n) = E(\sigma_n^r - \sigma^r)^2 + cn, \quad n > \max\{2,\, 1-2r\}$ とする. 本報告ではリスク R_nを最小にする標本数を用いて σ^r を推定する問題を考える.

リスクは $R_n = r^2\sigma^{2r}n^{-1} + cn + O(n^{-\frac{3}{2}}) \quad (n \to \infty)$ となる. $O(n^{-\frac{3}{2}})$ の項を無視すると, R_n を最小にする標本の大きさ n_0 は

$$n_0 \approx \frac{|r|}{\sqrt{c}}\sigma^r = n^* \text{ (とおく)}$$

で与えられ, 最小のリスクは $R_{n_0} \approx 2cn^*$ となる. ところで, σ は未知であるから n_0 も未知となり, 漸近的に最小の標本数 n_0 を用いることができない. そこで, 逐次推測を試みる.

2. 主結果

本報告では次の標本抽出停止規則を提案する:

$$N = N_c(r) = \inf\left\{n \geq m:\ n \geq \frac{|r|}{\sqrt{c}} l_n \sigma_n^r\right\}$$

但し, m は初期標本数で, $m > \max\{2, 1-2r\}$ をみたし, $l_n = \frac{n}{n-1}$ とする. このとき, すべての $r \neq 0$ と $c > 0$ に対して, $P(N < \infty) = 1$ が成り立つ. 標本抽出を停止したら, σ_N^r で σ^r を推定する. このときのリスクは $R_N = E(\sigma_N^r - \sigma^r)^2 + cE(N)$ で与えられる. 逐次方式の良さはリグレット: $R_N - 2cn^*$ で測ることにする. このとき, 以下の結果を得た.

<u>定理 1</u>　$m > m_1(r)$ ならば

$$E(N) = n^* + \rho - \frac{1}{2}r(r+1) + 1 + o(1) \quad (c \to 0)$$

但し,

$$m_1(r) = \begin{cases} \max\{2,\ 1+3r\} & \text{if} \quad r > 0 \\ \max\{5+2r,\ 1-2r\} & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}$$

であり, ρ はある定数で $0 \le \rho \le \frac{1}{2}(1+r^2)$ となる. □

定理 2 $m > m_2(r)$ ならば

$$R_N = 2cn^* + \left\{\frac{3}{4}(r+1)^2 + 1\right\} c + o(c) \quad (c \to 0)$$

但し,

$$m_2(r) = \begin{cases} \max\{1+5r,\ 7+3r\} & \text{if} \quad r > 0 \\ 7-8r & \text{if} \quad r < 0. \end{cases} \quad \square$$

定理 2 において, $o(c)$ の項を無視すると, $r = -1$ のとき R_N は最小となる.

3. バイアスの修正

逐次推定量 σ_N^r のバイアスについて考える.

定理 3 $m > m_3(r)$ ならば

$$E(\sigma_N^r) = \sigma^r - \frac{\sqrt{c}}{2}(r+1)\mathrm{sgn}(r) + o(\sqrt{c}) \quad (c \to 0)$$

但し,

$$m_3(r) = \begin{cases} \max\{1+3r,\ 3+r\} & \text{if} \quad r > 0 \\ \max\{5+2r,\ 3-3r\} & \text{if} \quad r < 0, \end{cases} \qquad \mathrm{sgn}(r) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad r > 0 \\ -1 & \text{if} \quad r < 0. \end{cases} \quad \square$$

定理 3 より, 別の逐次推定量

$$\hat{\sigma}_N^r = \sigma_N^r + \frac{\sqrt{c}}{2}(r+1)\mathrm{sgn}(r)$$

を考える. このときのリスクは $R_N^* = E(\hat{\sigma}_N^r - \sigma^r)^2 + cE(N)$ で与えられる. $\hat{\sigma}_N^r$ のリスク R_N^* の 2 次近似式に関する次の結果が得られた.

定理 4 $m > m_2(r)$ ならば

$$R_N^* = 2cn^* + \left\{\frac{1}{2}(r+1)^2 + 1\right\} c + o(c) \quad (c \to 0). \quad \square$$

定理 2 と定理 4 より, $m > m_2(r)$ ならば, $R_{N_c(r)} - R^*_{N_c(r)} = \frac{1}{4}(r+1)^2 c + o(c) \quad (c \to 0)$. 従って, r が -1 から離れるほどバイアス修正が有効であることがわかる.

参考文献

Aras, G. and Woodroofe, M. (1993). Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average. *Ann. Statist.* **21**, 503–519.

Lombard, F. and Swanepoel, J.W.H. (1978). On finite and infinite confidence sequences. *South African Statist. J.* **12**, 1–24.