(11)「統計的数理分析、理論と応用」に関する研究報告

Minimum risk point estimation of the powers of normal scale parameter

秋田大学 教育文化学部　宇野　力
新潟大学 理学部　磯貝 英一

1. 序

$X_1, X_2, \ldots$ を正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本とし, $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma \in (0, \infty)$ はともに未知とする. また, $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$,　$S_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ とする. $r \neq 0$ は与えられた定数であるとするとき, σ^r の推定量 S_n^r に対し, 損失関数

$$L_n = (S_n^r - \sigma^r)^2 + cn \quad (c > 0 \text{ は既知定数})$$

を考え, リスクを

$$R_n = E(L_n) = E(S_n^r - \sigma^r)^2 + cn, \quad n > \max\{1, -2r+1\}$$

とする. 本報告では上の損失関数の下で σ^r を推定する問題を考える.

いま, リスクは $R_n = \frac{1}{2}r^2\sigma^{2r}n^{-1} + cn + O(n^{-\frac{3}{2}})$　($n \to \infty$ のとき) となる. $O(n^{-\frac{3}{2}})$ の項を除けば, 上のリスク R_n は標本数が

$$n_0 \approx \frac{|r|}{\sqrt{2c}}\sigma^r = n^* \ (\text{とおく})$$

のとき最小となり, $R_{n_0} \approx 2cn^*$ となる. しかしながら, σ は未知であるので, n_0 を用いることはできない. そこで, 逐次推測を試みる.

2. 主結果

本報告では次の標本抽出停止規則を提案する:

$$N = N_c(r) = \inf\left\{n \geq m : \ n \geq \frac{|r|}{\sqrt{2c}} l_n S_n^r\right\}$$

但し, m は初期標本数で $m > \max\{1, -2r+1\}$ とし, $l_n = \frac{n}{n-1} (> 1)$ とする. S_N^r で σ^r を推定するとき, この逐次方式のリスクは $R_N = E(S_N^r - \sigma^r)^2 + cE(N)$ で与えられる. 逐次方式の良さはリグレット: $R_N - 2cn^*$ によって測られる. このとき, 次の結果を得た.

<u>定理 1</u>　$m > m_1(r) + 1$ ならば, $c \to 0$ のとき,

$$E(N) = n^* + \rho - \frac{r}{4}(r+2) + 1 + o(1)$$

但し,

$$m_1(r) = \begin{cases} \max\{3r, \ 2\} & \text{if} \quad r > 0 \\ \max\{8 + 2r, \ -2r\} & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}$$

であり, ρ はある定数で $0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}r^2$ となる. □

<u>定理 2</u>　$m > m_2(r)+1$ ならば, $c \to 0$ のとき,

$$R_N = 2cn^* + \left\{\frac{3}{8}(r+2)^2 + 1\right\} c + o(c)$$

但し,

$$m_2(r) = \begin{cases} \max\{5r,\ 12+3r\} & \text{if} \quad r > 0 \\ 12-8r & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}$$ である. □

3. バイアスの修正

逐次推定量 S_N^r のバイアスについて, 以下の結果を得た.

<u>定理 3</u>　$m > m_3(r)+1$ ならば, $c \to 0$ のとき,

$$E(S_N^r) = \sigma^r - \frac{\sqrt{2c}}{4}(r+2)\mathrm{sgn}(r) + o(\sqrt{c})$$

但し,

$$\mathrm{sgn}(r) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad r > 0 \\ -1 & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}, \qquad m_3(r) = \begin{cases} \max\{3r,\ 4+r\} & \text{if} \quad r > 0 \\ \max\{8+2r,\ 4-3r\} & \text{if} \quad r < 0 \end{cases}$$

である. □

上の結果を考慮して, σ^r の推定量

$$\hat{\sigma}_N^r = S_N^r + \frac{\sqrt{2c}}{4}(r+2)\mathrm{sgn}(r)$$

を考える. このとき, リスクは $R_N^* = E(\hat{\sigma}_N^r - \sigma^r)^2 + cE(N)$ で与えられる. 定理 3 より, $m > m_3(r)+1$ ならば, $E(\hat{\sigma}_N^r) = \sigma^r + o(\sqrt{c})$ となり, $\hat{\sigma}_N^r$ は σ^r の 2 次漸近不偏推定量である. $\hat{\sigma}_N^r$ のリスクの 2 次近似式について, 以下の結果を得た.

<u>定理 4</u>　$m > m_2(r)+1$ ならば, $c \to 0$ のとき,

$$R_N^* = 2cn^* + \left\{\frac{1}{4}(r+2)^2 + 1\right\} c + o(c)$$ である. □

定理 2 と定理 4 より, $m > m_2(r)+1$ ならば, $R_N^* - R_N = -\frac{1}{8}(r+2)^2 c + o(c)$ となり, $r=-2$ の場合を除けば, バイアスを修正した逐次方式 $\hat{\sigma}_N^r$ の方がもとの逐次方式 S_N^r に比べて漸近的にリスクが小さくなる. このとき, r と -2 の距離が大きくなる程, バイアス修正をした効果が大きくなる.

参考文献

Aras, G. and Woodroofe, M. (1993). Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average. *Ann. Statist.* **21**, 503–519.

Woodroofe, M. (1982). *Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis.* CBMS Monograph No. 39, SIAM Philadelphia.

STUDENTIZED ROBUST STATISTICS IN MULTIVARIATE RANDOMIZED BLOCK DESIGN

横浜市立大学　理学部　白石高章

We consider a multivariate randomized block design with n blocks and J treatments, in which the k-th observation $\boldsymbol{X}_{ijk} = (X_{ijk}^{(1)}, \cdots, X_{ijk}^{(p)})'$ under the j-th treatment in the i-th block is expressed as

$$\boldsymbol{X}_{ijk} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\tau}_j + \boldsymbol{e}_{ijk}, \qquad (i = 1, \cdots, n, k = 1, \cdots, m_j, j = 1, \cdots, J) \tag{0.1}$$

where $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=1}^{J} m_j \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{0}$. In (1.1), $\boldsymbol{\mu}$ is the overall mean response, $\boldsymbol{\beta}_i$ is the block effect, $\boldsymbol{\tau}_j$ is the treatment effect and $\boldsymbol{e}_{ijk}$ is the error term with $E(\boldsymbol{e}_{ijk}) = \boldsymbol{0}$. It is assumed that $\boldsymbol{e}_{ijk}$'s are independent and identically distributed with continuous distribution function $F(x^{(1)}/\sigma^{(1)}, \cdots, x^{(p)}/\sigma^{(p)})$, where $V(e_{ijk}^{(\ell)}) = \{\sigma^{(\ell)}\}^2$ and $e_{ijk}^{(\ell)}$ is the ℓ-th element of $\boldsymbol{e}_{ijk}$. For the respective parameters, the null hypothesis of interest and the alternative are respectively

$$H;\ \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{0} \text{ for } j = 1, \cdots, J \text{ v.s. } A;\ \boldsymbol{\tau}_j \neq \boldsymbol{0} \text{ for some } j.$$

We propose test procedures based on studentized robust statistics for these hypotheses in the model (1.1). We derive their asymptotic properties as the number of blocks n tends to infinity. We also propose robust estimators studentized by scale-estimators for the treatment effects and derive their asymptotic normality.

Multivariate M-tests and M-estimators based on studentized robust statistics were discussed by Singer and Sen (1985) for full rank linear models . Further discussions of studentized M-procedures were done by Koenker and Portnoy (1990) and Jurečková and Sen (1995). The linear models do not include our model (1.1), which is not of full rank. In all of those theoretical discussions, Fisher's consistency: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dF(x) = 0$ was needed. Shiraishi (1990) discussed multivariate M-tests without assuming Fisher's consistency. However Shiraishi's test statistics were not studentized. For many applied models, the scale-parameter of the underlying distribution is unknown and Fisher's consistency does not hold. We need to construct flexible statistical procedures. For the model (1.1), we propose studentized robust tests and computable robust estimators. The asymptotic noncentral χ^2-distributions for the test statistics and asymptotic normality for robust estimators are derived, assuming only the finiteness of Fisher's informations. Fisher's consistency

: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\ell(x^{(\ell)}) dF_\ell(x^{(\ell)}) = 0$ is not assumed. In our discussion, it is verified that the ARE of the proposed tests (proposed estimators) relative to the F-test (least squares estimator (LSE)) goes to the ARE of the Huber's (1964) M-estimators relative to the one-sample sample mean as the block size goes to infinity. By simulation study, even for the small sample sizes, it can be seen that the proposed estimators are more efficient than least squares estimators except for the case where the underlying distribution is normal. Especially the proposed estimators are remarkably efficient for the asymmetric underlying distributions.

参考文献

Good, P. (1993) *Permutation tests,* Springer.

Hampel, F. R., Rousseeuw, P. J., Ronchetti, E. and Stahel, W. (1986) *Robust Statistics: The Approach Based on Influence,* New York: John Wiley.

Hieritier, S. and Ronchetti, E. (1994) Robust bounded-influence tests in general parametric models. *Journal of the American Statistical Association,* **89**, 897-904.

Huber, P. J. (1964) Robust estimation of a location parameter. *Annals of Mathematical Statistics,* **35**, 73-101.

Jurečková, J. and P. K. Sen (1996) *Robust Statistical Procedures: Asymptotics and Interrelations,* New York: John Wiley.

Koenker, R. and Portnoy, S. (1990) M-estimation of multivariate regressions. *Journal of the American Statistical Association,* **85**, 1060-1068.

Muirhead, R. J. (1982) *Aspects of Multivariate Statistical Theory,* New York: John Wiley.

Puri, M. L. and Sen, P. K. (1985) *Nonparametric Methods in General Linear Models,* New York: John Wiley.

Shiraishi, T. (1989) R-estimators and confidence regions for treatment effects in multi-response experiments. *Journal of Multivariate Analysis,* **31**, 30-39.

Shiraishi, T. (1990) M-tests in multivarate models. *Metrika,* **37**, 189-197.

Shiraishi, T. (1996) On scale-invariant M-statistics in multivariate k samples. *Journal of the Japan Statistical Society,* **26**, 241-253.

Singer, J. M. and Sen, P. K. (1985) M-methods in multivariate linear models. *Journal of Multivariate Analysis,* **17**, 168-184.

Wiens, D. (1986) Minimax variance M-estimators of location in Kolmogorov neibourhoods. *Annals of Statistics,* **14**, 724-732.

ASYMPTOTIC COMPARISONS OF U-STATISTICS, V-STATISTICS AND LIMITS OF BAYES ESTIMATES BY DEFICIENCIES

都城高専　(鹿児島大学院理工学研究科 D3)　野町俊文
鹿児島大学理学部　大和　元

1 序

$X_1,\ldots,X_n$を分布 Fからの大きさ n の独立標本とする。分布 Fについて、degree k の対称なカーネル $g(x_1,\ldots,x_k)$ を持つ推定可能な母数$\theta(F)$ の推定を標本に基づいて考える。推定可能な母数の推定量として、U-統計量と V-統計量は、よく知られている。ところで、標本 $X_1,\ldots,X_n$から重複を許してk個取り出す組み合わせは、$\binom{n+k-1}{k}$通りある。そのすべての組について、カーネル gの値の平均を取ると次の統計量が得られる。

$$B_n=\binom{n+k-1}{k}^{-1}\sum_{r_1+\cdots+r_n=k} g(\underbrace{X_1,\ldots,X_1}_{r_1},\ldots,\underbrace{X_n,\ldots,X_n}_{r_n}) \tag{1}$$

ただし、$\sum_{r_1+\cdots+r_n=k}$ は X_jの重複する個数を r_jとするとき、$r_1+\cdots+r_n=k$を満たす非負の整数のすべての組 $r_1,\ldots,r_n$ についての和を表す。この統計量は、Dirichlet プロセスを事前分布とする 2 乗誤差損失に基づく推定可能な母数$\theta(F)$ のベイズ推定量について、Dirichlet プロセスのパラメータを 0 に近づけることにより得られる極限ベイズ推定量でもある。このことから (1) で与えられる統計量を LB-統計量と呼ぶことにする。Nomachi and Yamato (1999) は、次数 2 のカーネルに対応する LB-統計量と U-統計量、V-統計量の比較を MSE と分散を用いて与えている。本報告では、漸近的な比較を考える。カーネルが退化しない場合、これらの統計量の LRE (limiting risk efficiency) は 1 に等しく、違いが見られない。本報告の目的は、LB-統計量と U-統計量あるいは、V-統計量との漸近的な違いを LRD (limiting risk deficiency) を用いて示すことである。

2 LB-統計量の U-統計量による表現

命題 1 関数 $g(x_1,\ldots,x_k)$ を次数 kの対称なカーネルとするとき、対応する LB-統計量は次のように表すことができる。

$$B_n=\binom{n+k-1}{k}^{-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}U_n^{(j)}$$

ただし、$j=1,\ldots,k$ に対して、$U_n^{(j)}$は、カーネル $g_{(j)}(x_1,\ldots,x_j)$、

$$g_{(j)}(x_1,\ldots,x_j)=\binom{k-1}{j-1}^{-1}\sum\nolimits^{+}_{r_1+\cdots+r_j=k} g(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{r_1},\ldots,\underbrace{x_j,\ldots,x_j}_{r_j})$$

に対応する U-統計量である。

命題 1 の表現より、LB-統計量の平均 2 乗誤差を漸近的に導くことができる。さらに V-統計量の平均 2 乗誤差についても同様に漸近的な表現を導くことができる。

3 Deficiency

すべての $j_1, j_2, \ldots, j_k$ $(1 \le j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_k \le k)$ に対して、$E[g^2(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k})] < \infty$ を仮定する。カーネル $g(x_1, \ldots, x_k)$ と $g_{(k-1)}(x_1, \ldots, x_{k-1})$ に対して、関数

$$\begin{aligned} \psi_c(x_1, \ldots, x_c) &= E[g(x_1, \ldots, x_c, X_{c+1}, \ldots, X_k)] \quad c = 1, \ldots, k, \\ \psi_{(k-1),c}(x_1, \ldots, x_c) &= E[g_{(k-1)}(x_1, \ldots, x_c, X_{c+1}, \ldots, X_{k-1})] \quad c = 1, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

とおく。また、これらの分散と共分散と $g_{(k-1)}(X_1, \ldots, X_{k-1})$ の期待値を次のようにおく。

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= Var[\psi_c(X_1, \ldots, X_c)] \quad c = 1, 2, \ldots, k, \\ \zeta_{(k-1),c} &= Cov[\psi_c(X_1, \ldots, X_c),\ \psi_{(k-1),c}(X_1, \ldots, X_c)] \quad c = 1, 2, \ldots, k-1, \\ \mu_{(k-1)} &= E[g_{(k-1)}(X_1, \ldots, X_{k-1})] \end{aligned}$$

命題 2 危険関数として平均 2 乗誤差を用いる。カーネル gは、非退化であると仮定する。g に対応する LB-統計量の U-統計量と V-統計量に関する LRD は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} d(B_n, U_n) &= \frac{k-1}{\sigma_1^2}\{-2k\sigma_1^2 + 2(k-1)\zeta_{(k-1),1} + (k-1)(\mu_{(k-1)} - \theta)^2\}, \\ d(B_n, V_n) &= \frac{k-1}{\sigma_1^2}\{-k\sigma_1^2 + (k-1)\zeta_{(k-1),1} + \frac{3}{4}(k-1)(\mu_{(k-1)} - \theta)^2\}, \\ d(V_n, U_n) &= \frac{k-1}{\sigma_1^2}\{-k\sigma_1^2 + (k-1)\zeta_{(k-1),1} + \frac{1}{4}(k-1)(\mu_{(k-1)} - \theta)^2\} \end{aligned}$$

命題 2 の結果から $d(B_n, U_n) = d(B_n, V_n) + d(V_n, U_n)$ が成り立つ。また、LB-統計量の U-統計量に関する効率を考えるならば、$d(B_n, U_n)$ は $MSE(B_n)/Var(U_n)$ の n^{-1}の係数に等しい。LB統計量の V-統計量に関する効率に対しても、類似した結果が成り立つ。

Example. パラメータとして、分散を考える。LB-統計量は、$B_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n+1)$ である。i 次の中心モーメント μ_i $(i = 2, 4)$ を持ち平均について対称な連続分布に対して、

$$d(B_n, U_n) = \frac{-4(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{\mu_4 - \mu_2^2},\ d(B_n, V_n) = \frac{-2\mu_4 + 5\mu_2^2}{\mu_4 - \mu_2^2},\ d(V_n, U_n) = \frac{-2\mu_4 + 3\mu_2^2}{\mu_4 - \mu_2^2}$$

を得る。特に、正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本に対して、次のようになる。

$$d(B_n, U_n) = -2,\ \ d(B_n, V_n) = -\frac{1}{2},\ \ d(V_n, U_n) = -\frac{3}{2}$$

従って、$B_n \succ V_n \succ U_n$ である。記号 $B_n \succ V_n$は B_nが Deficiency の意味に於いて、V_nより優れていることを表す。 また、一様分布 $U(-\tau, \tau)$ からの標本に対して、

$$d(B_n, U_n) = 1,\ \ d(B_n, V_n) = \frac{7}{4},\ \ d(V_n, U_n) = -\frac{3}{4}$$

を得る。この場合、$V_n \succ U_n \succ B_n$ である。

参考文献

[1] Nomachi, T and Yamato, H. (1999), "The expectation of random functionals with the Dirichlet process and its applications". *Bulletin of Information and Cybernetics*, **32**, 165–178.

Asymptotic properties of LB-statistics and Berry-Esseen bound for V-statistics

鹿児島大理工研Ｄ１　戸田 光一郎
鹿児島大理学部　大和 元

1. 序

次数 k の対称な kernel $g(x_1,...,x_k)$ をもつ estimable parameter $\theta(F)$ を考える. その推定量として, U-統計量 U_n と V-統計量 V_n が良く知られている (例えば, Lee (1990)). 一方, 分布 F の事前分布として $(\mathcal{R},\mathcal{B})$ 上のパラメータ α をもつ Dirichlet process を用いて得られる Bayes 推定量で, $\alpha(\mathcal{R})$ を 0 に近付けることにより極限 Bayes 推定量 B_n が得られる (Yamato (1977)). これを, LB-統計量ということにする. 今, $X_1,...,X_n$ を分布 F からの大きさ n の標本とすると, B_n は次で与えられる:

$$B_n = \binom{n+k-1}{k}^{-1} \sum_{r_1+\cdots+r_n=k} g(\underbrace{X_1,...,X_1}_{r_1},...,\underbrace{X_n,...,X_n}_{r_n}).$$

LB-統計量 B_n と V-統計量 V_n は, U-統計量の線形結合として表わすことができる (例えば, Nomachi and Yamato (2000)):

$$B_n = U_n + R_{1n} = U_n - \frac{k(k-1)}{n}(U_n - U_n^{(k-1)}) + R_{2n},$$
$$V_n = U_n + R_{1n}^* = U_n - \frac{k(k-1)}{2n}(U_n - U_n^{(k-1)}) + R_{2n}^*.$$

但し, $U_n^{(k-1)}$ は kernel $g_{(k-1)}(x_1,...,x_{k-1}) = \{g(x_1,x_1,x_2,...,x_{k-1})+g(x_1,x_2,x_2,x_3,...,x_{k-1})+\cdots+g(x_1,...,x_{k-2},x_{k-1},x_{k-1})\}/(k-1)$ に対応する U-統計量である. また, nR_{1n}, n^2R_{2n}, nR_{1n}^*, $n^2R_{2n}^*$ は, 条件 $E\mid g(X_{j_1},...,X_{j_k})\mid < \infty$ $(1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le k)$ の下で, $n\to\infty$ のとき確率 1 で定数に収束する.

本報告では, LB-統計量 B_n の漸近的性質と V-統計量 V_n の Berry-Esseen bound について紹介する. 以下では, $r\ (\ge 1)$ に対して μ_r, ν_r, C, C_r を分布 F に依存しない正定数とし, $\Phi(x)$ を標準正規分布の分布関数とおく. また, 任意の $j_1,...,j_k$ $(1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le k)$ に対して, Proposition 2.1, 2.7, 3.1, 3.2, 4.5 では $E\mid g(X_{j_1},...,X_{j_k})\mid^r \le \mu_r < \infty$ とし, Proposition 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 4.1, 4.2, 4.4 では $E\mid g(X_{j_1},...,X_{j_k}) - Eg(X_{j_1},...,X_{j_k})\mid^r \le \nu_r$ とする. さらに, $j=1,...,k$ に対して, $\psi_j(x_1,...,x_j) = E\{g(X_1,...,X_k)\mid X_1=x_1...X_j=x_j\}$, $\sigma_j^2 = Var\{\psi_j(X_1,...,X_j)\}$ とおく.

2. LB-統計量に対する Berry-Esseen bound

Proposition 2.1 $E\mid R_{1n}\mid^r \le [2k(k-1)/(n+k-1)]^r\mu_r$.

Proposition 2.2 $E\mid R_{1n}-ER_{1n}\mid^r \le C_1\nu_r n^{-3r/2}$ $(r\ge 2)$,
$E\mid R_{1n}-ER_{1n}\mid^r \le C_2\nu_r n^{-(2r-1)}$ $(1\le r<2)$.

Proposition 2.3 $Var(B_n) \le (k^2\sigma_1^2/n) + (C\nu_2/n^2)$.

Proposition 2.4 $\sigma_1^2>0$, $E\mid g(X_1,...,X_k)-\theta\mid^3 \le \xi$ とする. 但し, ξ は $k\sigma_1^2 \le \nu_2 \le \xi^{2/3}$ を満たす正定数である. このとき, 任意の $n\,(\ge k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(B_n-EB_n)}{k\sigma_1} \le x] - \Phi(x)\mid \le \frac{C\xi}{k^3\sigma_1^3}n^{-1/2}.$$

Corollary 2.5 任意の $n\,(\ge k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(B_n-EB_n)}{\sqrt{Var(B_n)}} \le x] - \Phi(x)\mid \le \frac{C\xi}{k^3\sigma_1^3}n^{-1/2}$$

Proposition 2.6 $\sigma_1^2>0$, $E\mid g(X_1,...,X_k)-\theta\mid^3 \le \xi$ とする. 但し, ξ は $\nu_{3/2} \le \xi^2$ を満たす正定数である. このとき, 任意の $n\,(\ge k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(B_n-EB_n)}{k\sigma_1} \le x] - \Phi(x)\mid \le (\frac{C_1\xi}{k^3\sigma_1^3} + \frac{C_2\nu_{3/2}}{k^{3/2}\sigma_1^{3/2}})n^{-1/2}.$$

Proposition 2.7 $\sigma_1^2 > 0$, $E \mid g(X_1,...,X_k) - \theta \mid^3 = \xi$, $E \mid g(X_1, X_2, ..., X_k) - \theta \mid^{3/2} \leq \eta$, $E \mid g(X_1, X_1, X_2, ..., X_{k-1}) - \theta \mid^{3/2} \leq \eta$ とする. 但し, ξ, η は $2\mu_1 \leq \eta^{2/3}$, $\eta^2 \leq \xi$ を満たす正定数である. このとき, 任意の $n\,(\geq k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(B_n - \theta)}{k\sigma_1} \leq x] - \Phi(x) \mid \leq (\frac{C_1\xi}{k^3\sigma_1^3} + \frac{C_2\eta}{k^{3/2}\sigma_1^{3/2}} + \frac{C_3\mu_1}{k\sigma_1})n^{-1/2}.$$

3. 退化の場合の漸近分布

任意の $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_2(F^k)$ に対して, 内積 $(f_1, f_2) = E\{f_1(X_1,...,X_k)f_2(X_1,...,X_k)\}$ とする.

Proposition 3.1 $E \mid g(X_1,...,X_k) \mid^2 < \infty$ とし, $\sigma_1^2 = 0$, $\sigma_2^2 > 0$ とする. このとき,

$$n(B_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \binom{k}{2} \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}(h^{(2)}, e_{j_1}e_{j_2})\prod_{l=1}^{\infty} H_{r_l(\boldsymbol{j})}(Z_l) - k(k-1)(\theta - \theta^*).$$

但し, $h^{(2)}(x_1, x_2) = \psi_2(x_1, x_2) - \theta$ であり, $r_l(\boldsymbol{j})$ は $\boldsymbol{j} = (j_1, ..., j_d)$ の中で l に等しい添数の個数である.

例えば, $g(x_1, x_2) = x_1x_2$, $EX = 0$, $EX^2 = 1$ のとき,

$$nU_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z^2 - 1,\ \ nY_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z^2,\ \ nB_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z^2 + 1.$$

Proposition 3.2 $E \mid g(X_1,...,X_k) \mid^2 < \infty$, $E \mid g(X_1, X_1, X_2, X_3, ..., X_k) \mid^2 < \infty$ とし, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0$, $\sigma_3^2 > 0$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} n(B_n - \theta) \ \xrightarrow{\mathcal{D}}\ & \binom{k}{3} \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\sum_{j_3=1}^{\infty}(h^{(3)}, e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3})\prod_{l=1}^{\infty} H_{r_l(\boldsymbol{j})}(Z_l) \\ & + k(k-1)^2\sum_{j=1}^{\infty}(h_{(k-1)}^{(1)}, e_j)\prod_{l=1}^{\infty} H_{r_l(\boldsymbol{j})}(Z_l). \end{aligned}$$

但し, $h^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \psi_3(x_1, x_2, x_3) - \theta$, $h_{(k-1)}^{(1)}(x_1) = \psi_{(k-1),1}(x) - \theta$.

例えば, $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$, $EX = 0$, $EX^2 = 1$ のとき,

$$n^{3/2}(U_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_2^3 - 3Z_2,\ \ n^{3/2}(V_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_2^3,\ \ n^{3/2}(B_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_2^3 + 3Z_2.$$

4. V-統計量に対する Berry-Esseen bound

Proposition 4.1

$$E \mid R_{1n}^* - ER_{1n}^* \mid^r \leq C_1\nu_r n^{-3r/2} \quad (r \geq 2),$$
$$E \mid R_{1n}^* - ER_{1n}^* \mid^r \leq C_2\nu_r n^{-(2r-1)} \quad (1 \leq r < 2).$$

Proposition 4.2 Proposition 2.4 と同じ条件の下で, 任意の $n\,(\geq k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(V_n - EV_n)}{k\sigma_1} \leq x] - \Phi(x) \mid \leq \frac{C\xi}{k^3\sigma_1^3}n^{-1/2}.$$

Corollary 4.3 任意の $n\,(\geq k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(V_n - EV_n)}{\sqrt{Var(V_n)}} \leq x] - \Phi(x) \mid \leq \frac{C\xi}{k^3\sigma_1^3}n^{-1/2}.$$

Proposition 4.4 Proposition 2.6 と同じ条件の下で, 任意の $n\,(\geq k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(V_n - EV_n)}{k\sigma_1} \leq x] - \Phi(x) \mid \leq (\frac{C_1\xi}{k^3\sigma_1^3} + \frac{C_2\nu_{3/2}}{k^{3/2}\sigma_1^{3/2}})n^{-1/2}.$$

Proposition 4.5 Proposition 2.7 と同じ条件の下で, 任意の $n\,(\geq k)$ に対して

$$\sup_x \mid P[\frac{\sqrt{n}(V_n - \theta)}{k\sigma_1} \leq x] - \Phi(x) \mid \leq (\frac{C_1\xi}{k^3\sigma_1^3} + \frac{C_2\eta}{k^{3/2}\sigma_1^{3/2}} + \frac{C_3\mu_1}{k\sigma_1})n^{-1/2}.$$

参考文献

[1] Chen, X. (1980). *Scientia Sinica*, **23**, 1079–1091.
[2] Janssen, P. (1981). *Metrika*, **28**, 35–46.
[3] Lee, A.J. (1990), *U-statistics.* Marcel Dekker, New York.
[4] Yamato, H. (1977). *Journal of Japan Statistical Society*, **7**, 57–66.

ベクトル値マルコフ決定過程の状態空間の分類における余因子行列の応用について

宮崎大学教育文化学部　伊喜哲一郎

1. 記号と諸定義

有限マルコフ連鎖の状態数を $N(\geqq 2)$, 状態空間を $S := \{1, 2, \ldots, N\}$ とする。各状態 i において意志決定者の取る行動の選択肢を a_i とし、その集合を A_i とする。さらに $A := \prod_{i \in S} A_i$ とおいて A を意志決定者の行動空間とする。意志決定者は S から A への関数 f によって，行動を選択する。離散時刻 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 上で f は意志決定者によって $\{f, f, f, \ldots\}$ と採用されたときに f^{∞} と表し定常政策という。この報告では定常政策のみを考察の対象としているので f^{∞} を簡単のために f とだけ記して以後は f をもって定常政策を表す事にする。定常政策の全体を F と表しこれを政策空間と呼ぶ。状態 i において意志決定者の行動として $f(i)$ が選択され状態 j へと連鎖が推移するときの、1 段の推移確率を $q_{ij}^{f(i)}$ と表す。f に対応した推移確率行列を $Q(f)$ と表す。その全体を $Q(F) := \{Q(f) | f \in F\}$ とする。p を自然数とする。p 次元ユークリッド空間を R^p とする。各 $f \in F$ に対して 1 段の推移に伴う意志決定者の利得を $r_{ij}^{f(i)}$ とする。これより得られる R^p 値の直接期待利得を $r(f)$, チェザロ極限行列を $Q^*(f)$, 平均型基準値を $u(f) := Q^*(f)r(f)$, 相対値を $v(f)$ とする。

2. 割引を伴うベクトル値のマルコフ決定過程

β $(0 \leqq \beta < 1)$ を割引率因子とする。各定常政策 $f \in F$ に対する総期待利得を

$$I_\beta(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n Q^{(n)}(f) r(f)$$

と定義する。各 $f \in F$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n Q^{(n)}(f) = [I - \beta Q(f)]^{-1}$$

$$\lim_{\beta \to 1-0} (1-\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n Q^{(n)}(f) = Q^*(f)$$

$$Adj[I - \beta Q(f)] = det[I - \beta Q(f)] \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n Q^{(n)}(f)$$

が成立する。 また $e(f)$ によって $Q(f)$ の持つ正再帰部分連鎖の数を表すと

$$\sigma(f) := \lim_{\beta \to 1-0} \sigma_\beta(f) = \lim_{\beta \to 1-0} \frac{|I - \beta Q(f)|}{(1-\beta)^{e(f)}} > 0$$

とできる。任意の $f, g \in F$ に対して

$$L_\beta(g,f) := r(g) + \beta Q(g) I_\beta(f) - I_\beta(f)$$

とおくと

$$det[I - \beta Q(g)]\ [I_\beta(g) - I_\beta(f)] = \text{ Adj } [I - \beta Q(g)] L_\beta(g,f)$$

が成立する。また

$$\Delta(g,f) := Q(g)u(f) - u(f)$$
$$L(g,f) := r(g) + Q(g)v(f) - u(f) - v(f)$$

とおくと $\Delta(g,f) = 0$ ならば

$$\sigma(g)[u(g) - u(f)] = \lim_{\beta \to 1-0} \left(\frac{Adj[I - \beta Q(g)]}{(1-\beta)^{e(g)-1}} \right) L(g,f)$$

が成立する。

3. 余因子行列の応用

(1) 状態空間の分類への応用が可能である。
行列

$$\frac{Adj[I - \beta Q(f)]}{(1-\beta)^{e(f)-1} \sigma_\beta(f)}$$

の各対角要素について, もし $1 - \beta$ を素因数に持てば $Q(f)$ における推移的状態であり, 持たなければ正再帰的状態であると判定できる。これは状態空間の完全な分類を行わなくとも, 各状態が正再帰的であるか推移的であるかの判定が単独に可能となった事を意味する。

(2) 大域的最適性の判定が可能である。

(1) と $\sigma_\beta(g) > 0$ である事に注意すると, $u(f) \preceq u(g)$ となるのは $\Delta(g,f) = 0$ かつ

ある正再帰状態 $i_0 \in C_e(g)$ において $[\frac{Adj[I - \beta Q(g)]}{(1-\beta)^{e(g)-1}} L(g,f)]_{i_0} \in K_1$

となる場合である。これは余因子行列の応用によって大域的最適政策の判定が可能である事を示している。

参考文献

[1] 羽鳥裕久・森　俊夫共著;「有限マルコフ連鎖」, 培風館,(1982).

[2] T.IKI and N.Furukawa; *Vector-valued Markov decision processes with average criterion,* Memoires.Fac.Ed.Miyazaki.Univ.,Vol.54-55,p.1-10,(1984).

[3] T.Iki; *Vector-Valued Finite Markov Decision Processes with the Average Reward Criterion,* Memoires Fac. Ed. Miyazaki Univ., 72, 1-11, (1992).

確率生成母関数の利用

統計数理研究所 平野 勝臣
大阪大学大学院 基礎工学研究科 安芸 重雄

1 はじめに

本報告の目的は確率生成母関数 (pgf) の離散分布への有効な利用法を述べることである．2 章で，系列が iid からマルコフに一般化されたとき，連に関する分布論は pgf を用いて解析することができることを具体例で述べる．また，連に関する問題だけでなく他の問題へ利用できることを示すために，3 章で k-match prblems への利用を述べる．ここでも系列が iid からマルコフに一般化して解析できる．

本報告の 2 章は Hirano and Aki (1999a)，3 章は Hirano and Aki (1999b) に基づいている．紙面の都合で個々の引用は与えていないのでこれらを参照されたい．

2 連に関する分布への利用

2 章では，0 か 1 の値をとる確率変数の系列 $\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$ を扱う．慣例に従って適宜上 X_i を i 番目の試行，X_i が値 1 をとることを成功，値 0 をとることを失敗とも言うことにする．系列が iid であるとき，連続した k 個の成功が起こるまでの試行数の分布を $G_k(p)$ とかき，台を $\{a, a+1, \cdots\}$ にシフトしたときの分布を $G_k(p, a)$ とかく．

Ebneshahrashoob and Sobel (1990) は独立ベルヌーイ試行において，長さ s の成功の連かまたは長さ r の失敗の連のいづれかが起こるまでの試行数の分布と，これらの連のいづれもが起こるまでの試行数の分布を pgf を用いて求めている．前者を sooner problem，後者を later problem ということにする．Aki and Hirano (1993) は，iid 系列をマルコフ系列に拡張し，pgf を用いて sooner problem と later problem を解いた．iid 系列をマルコフ系列のような場合に拡張するとき，組合わせ法の解析に比べて pgf を用いる方法は極めて有用であることがわかる．Uchida and Aki (1995) はこの問題を一般化した sooner and later problem を pgf を用いて解いている．

Hirano, Aki and Uchida (1997) は，m 次マルコフ系列で，長さ k の 1 の連がはじめて起こるまでに長さ $\ell\,(m \le \ell)$ の 1 の連の起こる回数 (overlapping で数える) の分布が $G_{k-\ell}(p_{1\cdots1}, k-\ell+1)$ であること，同様にして，長さ ℓ の成功連の数え方を non-overlapping で数えたときの分布の pgf を与え，また丁度長さ ℓ としたときの分布が $G_1(\alpha, 0)$, $\alpha = {p_{1\cdots1}}^{k-\ell}/({p_{1\cdots1}}^{k-\ell} + q_{1\cdots1})$，長さ ℓ 以上 としたときの分布が $G_1({p_{1\cdots1}}^{k-\ell})$，であることを示した．ただし $p_{1\cdots1} = P(X_i = 1 | X_{i-m} = 1, X_{i-m+1} = 1, \cdots, X_{i-1} = 1)$．

直接 pgf φ を求めるかわりに，φ の生成母関数 Φ を求め，これを基にして φ を求める方法を，Wilf (1994, p.118) は蝦蟇の油法 ("Snake Oil" method) と言っている．蝦蟇の油法を用いることで，Aki and Hirano (1988) はより一般的な拡張されたオーダー k の 2 項分布の pgf を与えている．また，系列がマルコフのとき，Aki and Hirano (1993) はオーダー k の 2 項分布に対応する分布 (試行数 n で，長さ k の 1 の連の起こる回数の分

布) の pgf を陽の形で与えている．この拡張として系列が m 次マルコフのとき，Uchida (1998) は対応する分布の pgf を (蝦蟇の油法を用いることなく) 与えている．

pgf が与えられたとき，この pgf を持つ分布の確率はこの pgf を展開すれば求まる．pgf が有理母関数のとき，この pgf から確率を求めるための漸化式が Stanley (1986, p.205) で与えられている．この結果を用いて，分布の確率を早く求めることができる．

Fu and Koutras (1994) は連の分布を求めるために，finite Markov chain imbedding approach を与えた．この方法は Koutras and Alexandrou (1995), Han and Aki (1999) によってさらに研究され，pgf を求める方法としても有力なものになっている．また，指数型分布族の性質を用いてラプラス変換を求める Stefanov and Pakes (1997) の方法がある．このラプラス変換から pgf を求める方法で彼らは Aki and Hirano (1994, 1995) の結果を確認している．

3 k-match Problems への利用

Arnold (1972) は k-match problem とよばれるつぎのような問題を提案した．壷の中に，相異なる m 色のボールが入っている．1 個ずつ復元抽出で取り出し，色の番号 $1,\cdots,m$ を記録して行く．このようにしてできる $X_1, X_2, \cdots$ は i.i.d. $\{1,2,\cdots,m\}$-値確率変数列である．(1 回の試行でひとつの色が記録される確率は $1/m$ である)．k を正の整数とし，固定する．試行 i において"k-match が起こる" とは，X_i とその直前の k 回の試行結果のうちのどれかが一致することをいう．そこで，はじめて k-match (or duplication) が起こるまでの待ち時間 T の分布を調べた．事実 $P(T > j)$ を厳密に求め，次のような応用を与えている．

m 個の窓口があって，サービスを行っている．1 つのサービスには $k(+1/2)$ 分かかる．1 分に 1 人の割合で 1 人ずつ客が来て，ランダムに窓口を選ぶ．もし選んだ窓口に先客がいれば，客はサービスを受けずに帰ってしまう．このとき，はじめてサービスを受けずに帰る客が出るまでの待ち時間がこの問題である．

k-match problem は，birthday problem ($m = 365$)，surname problem (Mase (1992))，連の待ち時間問題 (Aki (1992)) と関連がある．

試行 i で k-bimatches (k-double matches) が起こるとは，この i 番目の試行結果がその直近の過去 k 回の試行結果のうちのどれかと一致し，且つ，この k 回の試行結果の中に 1 組の同一の試行結果があることである．

ここでは，1st k-match，2nd k-match，1st k-bimatches の待ち時間の厳密分布の pgf が導出され，これによりこれらの厳密分布や平均，分散が考察される．さらに pgf を用いる方法は高次マルコフに対しても適用可能であることが示される．

引用文献

Hirano, K. and Aki, S. (1999a). Use of probability generating function for distribution theory of runs, *Proc. Inst. Statist. Math.*, **47**, 105-118, (in Japanese).

Hirano, K. and Aki, S. (1999b). On k-match problems, *Research Memorandum*, No. 724, Inst. Statist. Math.

Generalized waiting time problems associated with pattern in Polya's urn scheme

大阪大学大学院基礎工学研究科 井上 潔司
安芸 重雄

1 はじめに

$X_1, X_2, \ldots$ は, Polya の壷スキームから得られた確率変数列とする. このとき, $X_1, X_2, \ldots$ の中にパターン $T = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ が初めて現われるまでの待ち時間問題を考察する. ただし, パターンの各成分は $a_i \in \mathcal{B} = \{0, 1, \ldots, m\}$ である. また, ここでの待ち時間問題は, "score" という概念の導入によって一般化されている.

本報告では, probability generating functions (p.g.f.) 法を用いて結果が導出されている. まず, 無限個の条件付確率母関数によって構成される方程式系を導出する. この方程式系は, 解くことは不可能である.

そこで我々は, 無限個の方程式によって構成された方程式系から, 多項式による展開形によって表され, 任意の次数で打ち切られた確率母関数を導出できる新しい方法論を与える.

2 Polya の壷スキーム

Polya の壷スキームについて簡単に説明する (詳しくは Feller 1968 を参照). 壷の中に次のようなボールが入っているとする. すなわち, ラベルが "0" であるボールが α_0 個, ラベルが "1" であるボールが α_1 個, , ... , ラベルが "m" であるボールが α_m 個入っている状態を仮定する. この中からランダムにボールを一つ取り出し, そのボールとともに同じラベルのボールを新たに c 個追加する. そしてこの操作を繰り返す. このとき, 壷の中のボールの数を $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ として表し, ボールの総数を $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ で表す. $\boldsymbol{e}_j$ は $(j+1)$ 成分だけが 1 に等しく, その他の成分がすべて 0 に等しいベクトルとする: $\boldsymbol{e}_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)_{1 \times (m+1)}$, $(j = 0, 1, \ldots, m)$. いま, ラベルが j であるボールが取り出されたとすると, ボールの数は, $\boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{e}_j$ へと変化する.

このような試行を繰り返し, ラベルを記録していけば, Polya の壷スキームによって得られた確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ を得ることができる.

3 一般化された待ち時間問題

初めてパターンが現れるまでの待ち時間問題を "score" という概念を導入することで一般化してみる. ラベルが "j" であるボールには "r_j" という score がついているものとする. ただし, $r_j \in \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $(j = 0, 1, \ldots, m)$ とする. そこで, 確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ の中に初めてパターン T が現れるまでの score の総和の分布について考察する. ただし, すべての score が 1 に等しいときは, パターン T が確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ の中に初めて現れるまでの通常の待ち時間問題に等しい.

壺の中にあるボールの初期状態が, $\boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_{00}, \alpha_{01}, ..., \alpha_{0m})$ であるとき, 確率変数列 $X_1, X_2, ...$ の中に初めてパターン T が現れるまでの score の総和の分布についての確率母関数を $\Phi(t)$ とおく. また, いま T_i, $(i = 0, 1, ..., k-1)$, score n を得ており, そのときのボールの状態が $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m)$ であると仮定する. そして, この時点から初めてパターン T を得るまでの score の総和の分布に関する条件付確率母関数を $\phi(T_i, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t)$, $(i = 0, 1, ..., k-1)$ とおく. このとき次の定理が成立する.

Theorem 3.1 確率母関数 $\Phi(t)$ および, 条件付確率母関数 $\phi(T_i, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t)$, *$(i = 0, 1, ..., k-1)$ は, 次の方程式系を満たしている:*

$$(3.1)\quad \Phi(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_{0j}}{|\boldsymbol{\alpha}_0|}\, t^{r_j}\ \phi(f(T_0, j), \boldsymbol{\alpha}_0 + c\boldsymbol{e}_j, r_j\ ; t),$$

$$(3.2)\quad \phi(T_i, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j}{|\boldsymbol{\alpha}|}\, t^{r_j}\ \phi(f(T_i, j), \boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{e}_j, n + r_j\ ; t),\ \ (i = 0, 1, 2, ..., k-2),$$

$$(3.3)\quad \phi(T_{k-1}, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j}{|\boldsymbol{\alpha}|}\, t^{r_j}\ \phi(f(T_{k-1}, j), \boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{e}_j, n + r_j\ ; t),$$

$$(3.4)\quad \phi(T, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t) = 1,$$

$$\textit{where},\ \ \Phi(t) = \phi(T_0, \boldsymbol{\alpha}_0, 0\ ; t).$$

Theorem 3.2 すべての正の整数 n_0 に対して, 次の方程式系は, 確率母関数 $\Phi(t)$ を適当な次数で打ち切った確率母関数 $\hat{\Phi}(t)$ を導く.

$$(3.5)\qquad \hat{\Phi}(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_{0j}}{|\boldsymbol{\alpha}_0|}\, t^{r_j}\ \hat{\phi}(f(T_0, j), \boldsymbol{\alpha}_0 + c\boldsymbol{e}_j, r_j\ ; t),$$

$$(3.6)\qquad \hat{\phi}(T_i, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j}{|\boldsymbol{\alpha}|}\, t^{r_j}\ \hat{\phi}(f(T_i, j), \boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{e}_j, n + r_j\ ; t),$$

$$(i = 0, 1, ..., k-2),\ \ n \leq n_0,$$

$$(3.7)\qquad \hat{\phi}(T_{k-1}, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j}{|\boldsymbol{\alpha}|}\, t^{r_j}\ \hat{\phi}(f(T_{k-1}, j), \boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{e}_j, n + r_j\ ; t),\quad n \leq n_0,$$

$$(3.8)\qquad \hat{\phi}(T_i, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t) = 0,\qquad (i = 0, 1, ..., k-1),\ \ n > n_0,$$

$$(3.9)\qquad \hat{\phi}(T, \boldsymbol{\alpha}, n\ ; t) = 1.$$

References

Aki, S. and Hirano, K. (1993), *Statistical Sciences and Data Analysis; Proceedings of the Third Pacific Area Statistical Conference* (eds. K. Matusita, M. L. Puri and T. Hayakawa), 467–474, VSP International Science Publishers, Zeist.

Aki, S., Balakrishnan, N. and Mohanty, S. G. (1996), *Ann. Inst. Statist. Math.*,**48**, 773–787.

Ebneshahrashoob, M. and Sobel, M. (1990), *Statst. Probab. Lett.*,**9**, 5–11.

Feller, W. (1968), Vol. I, 3rd ed., Wiley, New York.

Uchida, M.(1998), *Ann. Inst. Statist. Math.*, **50**, 655-671.

パワー・グンベル分布とその応用

高橋 倫也　　　渋谷 政昭
神戸商船大学　　高千穂商科大学

1　序

極値データ（最大値データを考える）に適合させる分布として，グンベル分布がよく用いられてきた．しかし，極値データへの適合を良くするという観点から，最近では一般極値分布が良く用いられるようになっている．

ここでは，一般極値分布に対抗するものとして，パワー・グンベル分布を提案する．すなわち，極値データのベキ変換を考え，グンベル分布の適合を良くすることを試みる．

グンベル分布や一般極値分布を用いるよりも，このパワー・グンベル分布を用いることにより return period の推定精度が良くなる場合があることを示す．

2　パワー・グンベル分布

2.1　定義

極値データに適合させる分布として，次のグンベル分布が良く用いられる：

$$\Lambda(x\,;\,\mu,\,\sigma)=\Lambda((x-\mu)/\sigma),\quad -\infty<x<\infty,$$

ただし，$\Lambda(x)=\Lambda(x\,;\,0,\,1)=\exp(-\exp(-x))$.

ここで，グンベル分布のベキ乗の分布を考える．すなわち，$Z\geq 0$ の確率変数で定数 $\gamma>0$ が存在して

$$P(Z^\gamma\leq x)\doteq\Lambda((x-\mu)/\sigma),\quad x\geq 0,\quad \Lambda(-\mu/\sigma)\ll 1,$$

となるものを考える．このとき，Z の分布関数を $\Lambda(\cdot\,;\,\mu,\,\sigma,\,\gamma)$ とすると，

$$\Lambda(x\,;\,\mu,\,\sigma,\,\gamma)=P(Z\leq x)=P(Z^\gamma\leq x^\gamma)\doteq\Lambda((x^\gamma-\mu)/\sigma),\quad x\geq 0,$$

となる．従って，その密度関数 $\lambda(\cdot\,;\,\mu,\,\sigma,\,\gamma)$ を

$$\lambda(x\,;\,\mu,\,\sigma,\,\gamma)=\frac{\gamma x^{\gamma-1}}{\sigma A(\mu,\,\sigma)}\,\lambda\left(\frac{x^\gamma-\mu}{\sigma}\right),\quad x\geq 0,$$

と考える．ただし，$\lambda(x)=\lambda(x;0,1)=\exp(-x-\exp(-x))$，$A(\mu,\sigma)=1-\Lambda(-\mu/\sigma)$.

この密度関数を持つ分布を，パワー・グンベル (Power-Gumbel) 分布と呼び，$\mathrm{PG}(\mu, \sigma, \gamma)$ で表す．

2.2 性質

グンベル分布の吸引領域に属す端点が有界でない分布の最大値の分布は，またパワー・グンベル分布で近似できる：すなわち，グンベル分布の吸引領域に属す分布 F で，$x(F) = \sup\{x\,;\,F(x) < 1\} = \infty$ となるモノを考えと，

$$F^n(z) \doteq \Lambda(z\,;\,b_n,\,a_n) \doteq \Lambda(z;\,\beta_n,\,\alpha_n,\,\gamma)$$

が成立する．吸引係数 a_n，b_n は $F(x)$ から，α_n，β_n は $G(x) = F(x^{1/\gamma})$ から求まる．

また，パワー・グンベル分布 $\Lambda(\cdot;\,\mu,\,\sigma,\,\gamma)$ はグンベル分布 Λ の吸引領域に属す．

3 パラメータ推定

パワー・グンベル分布 $\mathrm{PG}(\mu, \sigma, \gamma)$ のパラメータ推定について３つの方法を考えた．

方法１として，最尤法を考えた．この場合，非線形連立方程式を準ニュートン法で解いたが推定値が求まらない場合があった．

方法２として，一般極値分布を適用しＰWM法で形状パラメータを推定する．形状パラメータの推定値が 0 に近づくように極値データをベキ変換する．このベキ変換したデータにグンベル分布を適用し，最尤法でパラメータ (μ, σ) を推定する．

方法３として，あらかじめ γ の値の範囲を決める．この範囲の γ でデータをベキ変換しそれにグンベル分布を適用する．最尤法でパラメータを推定し尤度を求める．この尤度が最大になる (μ, σ, γ) を推定値にする．

4 シミュレーション

パワー・グンベル分布からの乱数（ワイブル分布からの極値乱数の近似と考えられる）に対して，return period の推定にグンベル分布，パワー・グンベル分布，そして一般極値分布を適合させる３つの方法を考えた．

シミュレーションを，$\gamma = 0.5$ から 2.15 の範囲で行った．$\gamma = 1$ の近傍ではグンベル分布を適用した方法の精度が一番良かった．それ以外では，パワー・グンベル分布の精度が良かった．また，この範囲ではパワー・グンベル分布を適用するほうが一般極値分布を適用するより精度が良かった．$\gamma \geq 1.75$ ではグンベル分布よりも一般極値分布を適用するほうが精度が良いという penultimate 現象が見られた．

5 データ解析

鋼に含まれる非金属介在部の切断面積を測定したサイズ 400 の極値データと，45 年間の年最大洪水流量データにパワー・グンベル分布を適用した解析例を紹介した．

Pitman 確率分割の有限標本論

渋谷政昭（高千穂商科大学）、大和元（鹿児島大学）

有限集合および数の確率的分割は、応用確率論および統計学の基本的概念であるが、十分には知られていない。数の確率的分割のなかでもっとも基本的なのが Ewens 確率分割系列族である。たとえば Johnson et al. (1997) を参照。Jim Pitman は 1995 年に始まる一連の論文で、1 パラメータの Ewens 確率分割を 2 パラメータに拡張し、本質的な諸概念を明らかにした。本稿では Pitman のモデルを初等的に説明するため、有限モデルから出発して無限モデルを導く。その過程で推測問題を議論する。

1　壷のモデル

一連の番号がついた玉 $B_1, B_2, \ldots$ を、一連の番号がついた壷 $U_1, U_2, \ldots$ に、逐次ランダムに入れる。まず B_1 を確率 1 で U_1 に入れる。玉 $B_1, \ldots, B_n$ が U_j に c_j 個、$c_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ (\sum_{j=1}^{k} c_j = n)$ 入っている条件の下で 、玉 B_{n+1} がそれぞれの壷に入る確率を

$$\text{新しい壷 } U_{k+1} \text{ は } \quad \frac{\theta + k\alpha}{\theta + n} \tag{1}$$

$$\text{古い壷 } U_j \text{ は } \quad \frac{c_j - \alpha}{\theta + n}, \quad 1 \leq j \leq k, \tag{2}$$

であるとする。玉の添字を考えると、$B_1, \ldots, B_n$ の壷への分かれ方は、集合 $N_n = \{1, \ldots, n\}$ の順序ある分割 $(a_1, \ldots, a_k)$ に対応し、その確率が

$$p((a_1, \ldots, a_k); \theta, \alpha) = \frac{1}{\theta^{[n]}} \prod_{j=1}^{k} (\theta + (j-1)\alpha)(1-\alpha)^{[c_j - 1]}, \quad c_j = |a_j| > 0,\ 1 \leq k \leq n, \tag{3}$$

となる。$|a_j|$ は部分集合 a_j の要素数、$x^{[n]} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$、である。

2　分割の表現

表 1: 壷のモデルの分類

	玉に区別がある	玉に区別がない
壷に区別がある	有限集合 $\mathcal{N}_n$ の順序がある分割 $\mathcal{A}_n^o$	自然数 n の順序がある分割 $\mathcal{C}_n^o$
壷に区別がない	有限集合 $\mathcal{N}_n$ の順序がない分割 $\mathcal{A}_n^u$	自然数 n の順序がない分割 $\mathcal{C}_n^u$

壷に区別がある (distinguishable) か区別がないか (undistinguishable) 、玉に区別があるかないかによって壷のモデルが表のように四つの場合に分かれる。それぞれの場合に、可能なすべての分割を記号で表している。分割の上の任意の離散分布が **確率分割** (random partition) である。上記の確率分割 (3) を

$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{A}_n^o)$ で表わし、残りの三つの場合も同様に表わす。$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{A}_n^o)$ で各壷の玉の数を固定し、可能な要素の数を数えると $\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{C}_n^o)$ が得られる。

$$p((c_1,\ldots,c_k);\theta,\alpha)=\frac{n!\theta(\theta+\alpha)\cdots(\theta+(k-1)\alpha)}{\theta^{[n]}}\prod_{i=1}^{k}\frac{(1-\alpha)^{[c_i-1]}}{(\sum_{j=i}^{k}c_j)(c_i-1)!} \tag{4}$$

壷を区別できず、各種の玉の数 $|a_1|,\ldots,|a_k|$ だけが観測できるときにはその順序を無視して $|a_i|=j$ となる i の数 s_j, $j=1,\ldots,n$ （寸法指標）で確率を表わすことになる。$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{A}_n^u)$ は次の通りである。

$$p(\{a_1,\ldots,a_k\};\theta,\alpha)=\frac{1}{\theta^{[n]}}\prod_{i=1}^{k}(\theta+(i-1)\alpha)\prod_{j=1}^{n}\left((1-\alpha)^{[j-1]}\right)^{s_j},\quad k=\sum_{j=1}^{n}s_j. \tag{5}$$

$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{A}_n^o)$ が玉の番号にも壷の番号にも依存しないから、両者を区別しない、数の順序がない分割が十分統計量である。寸法指標 $s=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathcal{C}_n^u$ の確率 $\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{C}_n^u)$ は次の通りである。

$$p(s;\theta,\alpha)=\frac{n!\theta(\theta+\alpha)\cdots(\theta+(k-1)\alpha)}{\theta^{[n]}}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(1-\alpha)^{[j-1]}}{j!}\right)^{s_j}\frac{1}{s_j!},\quad k=\sum_{j=1}^{n}s_j. \tag{6}$$

固定した一つの n ではなく、$n=1,2,\ldots$ という確率過程を考えると、玉に逐次番号が付き、壷には玉が入った順番が付くから、四種の表現が本質的に同じとなる。$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{A}_n^o)$ のように玉、壷の番号によらない確率分割の系列を**交換可能** (exchangeble) と呼ぶ。対称、置換不変と同義であるが、de Finetti がベイズ事前分布のもつべき性質として導入した概念である。

3 有限標本論

主要な課題は次の通りである。

$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{A}_n^o)$ $\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{A}_n^u)$ について
分割の構造と様相、寸法依存確率置換、確率分割の中心、DTG II 分布

$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{C}_n^o)$ について
DTG 分布、残余割り当てモデル、GEM 分布

$\mathcal{P}(\theta,\alpha;\mathcal{C}_n^u)$ について
諸モーメント、分割類の確率分割、極限分布、パラメータ推定

参考文献

[1] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1997) *Discrete Multivariate Distributions*, Wiley

[2] Pitman, J. (1995) Exchangeable and partially exchangeable random partition, *Prob. Theory Relat. Fields.* **102**, 145–158.

[3] Pitman, J. (1996a) Random discrete distributions invariant under size-biased permutation, *Adv. Appl. Prob.* **28**, 525–539.

非正規分布の下での等分散検定統計量の帰無分布の近似について

広島大学大学院理学研究科　冨田 哲治
広島大学大学院理学研究科　若木 宏文

q 個の母集団の比較をする方法として，最も一般的な手法に 1 元配置分散分析モデルがある．今，第 i 母集団 $(i=1,\cdots,q)$ から n_i 個の無作為にとられたデータを y_{ij} $(j=1,\cdots,n_q)$ と表し，$n=n_1+\cdots+n_q$ とすると，1 元配置のモデルは以下のように表せる．

$$y_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij} \qquad i=1,\cdots,q\ ,\ j=1,\cdots,n_i$$

μ_i は第 i 母集団の特性値の平均を表し，ε_{ij} は測定誤差で，通常 $\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$ を仮定する．

1 元配置の標準的な分析法としてよく知られている one-way ANOVA test は，帰無仮説 H_0 : $\mu_1=\cdots=\mu_q$ の検定であり，正規分布の下では帰無分布は F^{q-1}_{n-q} である．

非正規性の下では，Fujikoshi, Ohmae and Yanagihara (1999) により帰無分布の漸近展開が求められており，極限分布は χ^2_{q-1} となることが分かっている．また，等分散の仮定が崩れた場合，正規性の仮定の下では頑健であることが知られているが，非正規性の仮定の下では，Yanagihara(2000) により漸近展開が求められており，極限分布は χ^2_{q-1} で等分散の場合と同じであるが，漸近展開では異なることが分かっており，標本数があまり大きくないとき注意が必要で，非正規の仮定の下で，等分散性を確かめておくことは重要である．

X_{ij} を第 i 母集団 Π_i $(i=1,\cdots,q)$ からの第 j 標本 $(j=1,\cdots,n_i)$ とする．ただし，Π_i の平均は μ_i，分散は σ_i であり，それぞれ未知パラメーターである．考える検定の帰無仮説は $H_0:\sigma_1=\cdots=\sigma_q$ であり，等分散検定統計量として次の T を考える．

$$T=(n-q)\left\{\log\frac{S_e}{n-q}-\frac{1}{n-q}\sum_{i=1}^{q}(n_i-1)\log s_i^2\right\}$$

これは正規分布の下での尤度比基準であり，S_e は郡間平方和，s_i^2 は各グループの標本分散，$\bar{Y}_i$ は各グループの標本平均を表し $S_e=\sum_{i=1}^q(n_i-1)s_i^2$，$s_i^2=(n_i-1)^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2$，$\bar{X}_i=n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$ である．正規分布の下では，T は極限分布が χ^2_{q-1} であることが知られている．Sugiura and Nagao(1969) で正規分布の下での T の帰無分布の漸近展開が求められている．

本報告の目的は，より一般に，非正規分布のもとで T の帰無分布の漸近展開を n^{-1} のオーダーまで導出することである．帰無仮説の下では $Y_{ij}=(X_{ij}-\mu_i)/\sigma$ として，平均 0，分散 1 と考えれるので，$Y_{ij}\sim i.i.d.$ $(j=1,\cdots,n_i\ ;\ i=1,\cdots,q)$，$\mathrm{E}(Y_{ij})=0$，$\mathrm{Var}(Y_{ij})=1$ とする．不偏分散 s_i^2 を基準化した $\boldsymbol{V}=(V_1,\cdots,V_q)'$，$V_i=\sqrt{n_i}(s_i^2-1)$ と，$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\cdots,\rho_q)'$，$\rho_i=\sqrt{n_i/n}$ を用いると、T 摂動展開が以下のように与えられる．

$$T=T_0+\frac{1}{\sqrt{n}}T_1+\frac{1}{n}T_2+O_p(n^{-3/2})$$

$$T_0=\boldsymbol{V}'(I-\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}')\boldsymbol{V}/2,\ T_1=\{(\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{V})^3-(\boldsymbol{\rho}^{-1})'\boldsymbol{V}^3\}/3$$

$$T_2=\{4\boldsymbol{\rho}'(\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}')\boldsymbol{\rho}^{-1}-(\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{V})^4-2q(\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{V})^2+(\boldsymbol{\rho}^{-2})'\boldsymbol{V}^4-2(\boldsymbol{\rho}^{-2})'\boldsymbol{V}^2\}/4$$

ただし，$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_q)'$ に対して，$\boldsymbol{a}^m=(a_1^m,\cdots,a_q^m)'$ とする．

T が $V_1,\cdots,V_q$ の滑らかな関数で表せていることから，Chandra and Ghosh (1979) により Y と n_i に関する *Cramer* 条件などの仮定の下で T の n^{-1} のオーダーまでの展開の Validity は保障される．ゆえに，T の特性関数を求めて反転し T の帰無分布の漸近展開を導出する．

T の特性関数を求めるのに必要な $\boldsymbol{V}$ の密度の漸近展開は以下のように与えられる.

$$f(\boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{0}, m_0 I)\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{n}Q_2(\boldsymbol{v})\right] + o(n^{-1})$$

$$Q_1(\boldsymbol{v}) = \textstyle\sum_{i=1}^{q} \rho_i^{-1} q_1(v_i),\ \ Q_2(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{q} \rho_i^{-2} q_2(v_i) + \sum_{i\neq j}^{q} \rho_i^{-1}\rho_j^{-1} q_1(v_i)q_1(v_j)/2$$

$$q_1(v) = -H_3(m_0^{-1/2}v)/6m_0^{3/2}$$

$$q_2(v) = H_2(m_0^{-1/2}v)/m_0 + m_2 H_4(m_0^{-1/2}v)/24m_0^2 + m_3 H_6(m_0^{-1/2}v)/72m_0^3$$

ただし, $H_k(x)$ は k 次の Hermite 多項式であり, $m_0 \sim m_3$ は 8 次までの Y のキュムラントで表せるものである.

これらを用いて T の特性関数は以下のように展開される.

$$C_T(t) = \varphi^{\frac{1}{2}(q-1)}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} b_j \varphi^j\right] + o(n^{-1})$$

$$b_0 = -J_1 + J_2 - J_5,\ b_2 = -3J_1 + J_2 - J_3 + J_4,\ \ b_1 = 3J_1 - 2J_2 - J_4 + J_5,\ b_3 = J_1 + J_3$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left\{4m_1^2 - 6qm_1^2 - 3q^2(-2m_0^2 + m_1)^2 + 5m_1^2\|\boldsymbol{\rho}^{-1}\|^2\right\}/24m_0^3 \\
J_2 &= m_2(1 - 2q + \|\boldsymbol{\rho}^{-1}\|^2)/8m_0^2 \\
J_3 &= -(m_0^2 - m_1)(-4 + 6q - 5\|\boldsymbol{\rho}^{-1}\|^2)/6m_0 \\
J_4 &= -\left\{(5 + 6_q)m_0^2 - 6m_1 + (m_0^2 - 6m_1)\|\boldsymbol{\rho}^{-1}\|^2\right\}/12m_0 \\
J_5 &= \left\{-2m_0^2 + q(-2 + m_0 + 3m_0^2 - 2m_1) + m_1 - (-2 + m_0)\|\boldsymbol{\rho}^{-1}\|^2\right\}/2m_0
\end{aligned}$$

ここで, $\varphi = (1 - m_0 it)^{-1}$ より T の帰無分布は極限が χ_{q-1}^2 ならないので, ロバストではないことがわかる. 極限が χ_{q-1}^2 となるように $2T/m_0$ と修正してやり, これに関する帰無分布の漸近展開が以下のように与えられる.

$$P\left(\frac{2T}{m_0} \leq x\right) = G_{q-1}(x) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} b_j G_{q-1+2j}(x) + o(n^{-1})$$

ただし, G_f は χ_f^2 の分布関数であり, b_j は上で与えたものである.

本報告では, シミュレーションを行いこの展開の近似の精度についても紹介する.

参考文献

[1] Chandra and Ghosh. (1979). Valid asymptotic expansions for the likelihood ratio statistic and other perturbed chi-square variables. *Sankhyā Ser. A.*, **41**, no. 1-2, 22-47.

[2] Fujikoshi,Y ., Ohmae, M. and Yanagihara, H. (1999). Asymptotic approximations of the null distribution of the one-way ANOVA test satatistic under nononrmality. *J. Japan. Statist. Soc.,* **29**, 147-161.

[3] Sugiura, N. and Nagao, H. (1969). On Bartlett's test and Lehmann's test for homogeneity of variance. *Ann. Math. Statist.* **40** (6), 2018-2032.

[4] Yanagihara, H. (2000). Asymptotic expansion of the null distribution of one-way ANOVA test statistic for heteroscedastic case under nonnnormality. *Commun. Statist. Theory Meth.,* **29** (2), 463-476.

Fractional ARIMA 過程の偏相関関数の漸近挙動

北海道大学・理 井上昭彦

$\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の平均 0 の実弱定常過程とし、その共分散関数を $\gamma(\cdot)$ と書く：

$$\gamma(n) := E[X_n X_0] \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において X_k $(k \in \mathbb{Z})$ 達が張る閉部分空間を H と書く。H は内積

$$(Y_1, Y_2) := E[Y_1 Y_2]$$

とノルム

$$\|Y\| := (Y, Y)^{1/2}$$

に関してそれ自身 Hilbert 空間となる。$n \in \mathbb{N}$ に対して、$X_1, \ldots, X_n$ が H に於いて張る有限次元部分空間を $H_{[1,n]}$ とし、H から $H_{[1,n]}$ への正射影作用素を $P_{[1,n]}$ と書く。この時、$Y \in H$ に対して、$P_{[1,n]}Y$ は 観測データ $X_1, \ldots, X_n$ に基ずく Y の最良線形予測、従って $Y - P_{[1,n]}Y$ はその予測誤差、と見なされる。

$\{X_n\}$ の偏相関関数 $\alpha(\cdot)$ は次の様に定義される：

$$\alpha(n) := \frac{E[Z_n^+ Z_n^-]}{E[(Z_n^+)^2]^{1/2} \cdot E[(Z_n^-)^2]^{1/2}} \qquad (n \geq 2).$$

ここで、

$$Z_n^+ := X_n - P_{[1,n-1]}X_n, \quad Z_n^- := X_0 - P_{[1,n-1]}X_0$$

とおいた。さらに便宜上 $\alpha(1)$ は $\alpha(1) := \gamma(1)/\gamma(0)$ で定義される。この定義は、$\alpha(n)$ が、X_0 と X_n からそれぞれ $X_1, \ldots, X_{n-1}$ の影響を取り除いて得られたもの達の間の相関係数であるという事を言っている。この意味で、$\alpha(n)$ は X_0 と X_n の間の「純粋な」相関係数であるから、偏相関関数 $\alpha(\cdot)$ が $\{X_n\}$ の従属構造と密接に関連すると考えるのは自然であろう。

[1] において、$\{X_n\}$ に対するある仮定の下で、相関関数 $\gamma(\cdot)$ の漸近挙動

$$\gamma(n) \sim C \cdot n^{-p} \qquad (n \to \infty),$$

ただし $C > 0$、$0 < p < \infty$ とする、から、$\alpha(\cdot)$ に対する

$$|\alpha(n)| \sim \frac{\gamma(n)}{\sum_{k=-n}^{n} \gamma(k)} \qquad (n \to \infty). \tag{1}$$

という漸近公式が従うことが示された。ここでは、この漸近公式を ([1] の結果ではカバーされないが) 重要な long-memory process である fractional ARIMA 過程に拡張した [2] の結果の紹介を行う。

$-1/2 < d < 1/2$ とし、また $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。$\{X_n\}$ の共分散関数 $\gamma(\cdot)$ が次の様に書ける時、$\{X_n\}$ は fractional ARIMA (p, d, q) 過程と呼ばれる:

$$\gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \frac{1}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})|^2} |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} d\lambda \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

ここで $\phi(z)$ と $\theta(z)$ はそれぞれ次数 p と q の実係数多項式 である。我々は次を仮定する：

(A) $\phi(z)$ と $\theta(z)$ は共通零点を持たず、また共に閉円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ に零点を持たない。

次が [2] の主な結果である：

Theorem. $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < d < 1/2$ とする。この時、条件 (A) を満たす *fractional ARIMA* (p, d, q) 過程 $\{X_n\}$ の偏相関関数 $\alpha(\cdot)$ について次が成り立つ：

$$|\alpha(n)| \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

注意 1．Theorem の fractional ARIMA 過程 $\{X_n\}$ の相関関数 $\gamma(\cdot)$ が、$\gamma(n) \sim \text{const.} \times n^{2d-1}$ $(n \to \infty)$ という漸近挙動を持つことは良く知られている。これから

$$\frac{\gamma(n)}{\sum_{k=-n}^{n} \gamma(k)} \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty) \tag{3}$$

が従うので、(2) は (1) の形をしていることが分かる。

注意 2．$p = q = 0$ (かつ $-1/2 < d < 1/2$) の場合は例外的に事情が簡単で、$\alpha(n) = d/(n-d)$ が成り立つ (Hosking (1981))。このことから、実際には Theorem よりもっと良く $d \in (-1/2, 1/2) \setminus \{0\}$ に対して次が成り立つことが予想される：

$$\alpha(n) \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty).$$

REFERENCES

[1] A. Inoue, Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process, J. Analyse Math., to appear.

[2] A. Inoue, Asymptotic behaviour for partial autocorrelation functions of fractional ARIMA processes, submitted.

Applications of the Concentrated Matrix Langevin Distributions

香川大学工学部　筑瀬靖子

1. Introduction

The Stiefel manifold $V_{k,m}$ is the space a point of which is a set of k orthonormal vectors in $R^m(k \leq m)$, so that $V_{k,m} = \{X(m \times k); X'X = I_k\}$. A random matrix X on $V_{k,m}$ is said to have the matrix Langevin distribution $L(m, k; F)$ if its density function is given by (Downs [1])

$$exp(trF'X)/{}_0F_1(\frac{1}{2}m; \frac{1}{4}F'F)$$

with F an $m \times k$ matrix. Writing the (unique) singular value decomposition of F of rank $p(\leq k)$ as

$$F = \Gamma\Lambda\Theta', \text{with} \quad \Gamma \in \tilde{V}_{p,m}, \quad \Theta \in \tilde{V}_{p,k},$$

$$\text{and} \quad \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_p), \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0,$$

the λ's control concentrations in the directions determined by the orientations Γ and Θ. The distribution is exponential having the modal orientation $\Gamma\Theta'$, and has been used most commonly on $V_{k,m}$ (corresponding to the normal distribution on the Euclidean space). The sample mean matrix $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ is a sufficient statistic, and the distributions of $\bar{X}$ and related statistics are expressed in integral forms involving hypergeometric functions with matrix arguments, which seem to be intractable, and thus we must resort to asymptotic theory.

Asymptotic results on distributional and inferential problems concerning the matrix Langevin distributions have been obtained for the cases of large sample size n(and small concentrations) and of high dimension m; see Chikuse [2] and [3], respectively. This paper is concerned with asymptotic theorems and applications for the concentrated matrix Langevin distributions (i.e., when the concentration parameter Λ is large).

2. Asymptotic Theorems and Applications

We investigate asymptotic distributions of the sample mean matrix $\bar{X}$ in connection with testing hypotheses of the orientation parameters Γ and Θ for large and known Λ. An asymptotic behavior of the $L(m,k;F)$ distribution for large Λ is obtained (due to Chikuse [4]), and we discuss some applications of the high concentration asymptotic theorem.

(1)We evaluate asymptotically the maximum (marginal and semimarginal) likelihood estimators of large Λ, which are given by a system of partial differential equations involving hypergeometric functions with matrix arguments.

(2) Asymptotic distributions are obtained for the problem of classification of matrix Langevin distributions under the condition of "local closeness" of the distributions being considered.

(3) Corresponding to the concept of linear dependence considered on the Euclidean space, measures of orthogonal association for two random matrices on $V_{k,m}$ are suggested. The distributions of the measures are in general difficult and we investigate their asymptotic distributions when the underlying distributions are matrix Langevin.

(4) We consider the problem of "orientational regressions" concerning the matrix Langevin distributions and investigate asymptotic behavior of the maximum likelihood estimator of the orientational regression coefficient matrix.

A similar discussion can be carried out for asymptotic theorems on the Grassmann manifold, which will be presented on other occations.

References

1. T.D. Downs, Orientation statistics, Biometrika 59 (1972), 665-676.
2. Y. Chikuse, Asymptotic expansions for distributions of the large sample matrix resultant and related statistics on $V_{k,m}$, J.M.A. 39 (1991), 270-283.
3. Y. Chikuse, High dimensional asymptotic expansions for the matrix Langevin distributions on the Stiefel manifold, J.M.A. 44 (1993), 92-101.
4. Y. Chikuse, Concentrated matrix Langevin distributions (2000).

階層型ランダム係数成長曲線モデルと推測

広島大学大学院理学研究科　佐藤亜香里
広島大学大学院理学研究科　藤越　康祝
広島大学原爆放射能医学研究所　大瀧　慈

本報告では経時測定データを扱うが，これは，各個体について経時的に，または異なる条件の下で繰り返し測定されたデータのことである．繰り返し測定時点または条件が，すべての個体について等しい場合をバランス型と呼び，さらに個体内説明変数も等しい場合を完全バランス型と呼び，これら以外のデータをアンバランス経時測定データと呼ぶ．多くの場合，実際のデータをバランス経時測定データで得ることは難しく，アンバランス経時測定データの解析が重要となる．本報告ではアンバランス経時測定データに焦点を当てて，さらに，個体がいくつかのグループに分かれていて，用いられる個体内説明変数が階層的になっている場合にも焦点を当てている．例えば，多項式曲線などの適合の際，各グループの多項式の次元が同一でなく，包含関係があるような場合である．例として，Potthoff and Roy (1964) の少女と少年の歯学データでは，少女に1次式，少年に2次式を適合させるのが適当と考えられる．本報告では，このような階層的構造をもつアンバランス経時データに対して，ランダム係数モデルを導入し，その推測問題を扱う．

階層的構造をもつランダム係数成長曲線モデルは，階層がない場合を扱っている，Vonesh and Carter (1987) の拡張として，2段階に分けて次のように導入される．ただし，簡単のため2層で考える．今，$\boldsymbol{y}_j^{(i)}$ を第 i 層での第 j 番目の個体の繰り返し測定値で，$p_{ij}\times 1$ ベクトルとする．ただし，$j=1,\cdots,N_i$，$i=1,2$. つまり，各階層で観測される個体数が異なり，しかも，同じ階層内でも各個体の繰り返し観測数が異なるというアンバランス経時測定データとする．まず，最初の段階は，第 i 層に対して q_i 個の説明変数に基づく線形回帰，あるいは，q_i-1 次の多項式を適合させるとして，

$$\boldsymbol{y}_j^{(i)}=X_j^{(i)}\boldsymbol{\beta}_j^{(i)}+\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(i)}\ ,\ j=1,\cdots,N_i,\ i=1,2$$

とする．ここに，$X_j^{(i)}$ は $p_{ij}\times q_i$ の既知の個体内計画行列で $\mathrm{rank}(X_j^{(i)})=q_i$，$\boldsymbol{\beta}_j^{(i)}$ は $q_i\times 1$ の回帰係数ベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(i)}$ は $p_{ij}\times 1$ の個体内誤差ベクトルである．次に，同一階層内に異なる平均をもつグループが k_i 個あるとし，平均のまわりでの個体間の変動を考慮して，係数ベクトル $\beta_j^{(i)}$ に，

$$\boldsymbol{\beta}_j^{(i)}=\Xi^{(i)\prime}\boldsymbol{a}_j^{(i)}+\boldsymbol{\nu}_j^{(i)}\ ,\ j=1,\cdots,N_i,\ i=1,2$$

という構造を入れる．ここに，$\Xi^{(i)\prime}=[\boldsymbol{\xi}_1^{(i)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k_i}^{(i)}]$ は $q_i\times k_i$ のパラメータ行列，$\boldsymbol{a}_j^{(i)}$は $k_i\times 1$ の既知ベクトル，$\boldsymbol{\nu}_j^{(i)}$は $q_i\times 1$ の個体間誤差ベクトルである．$\boldsymbol{\xi}_1^{(i)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k_i}^{(i)}$ は第 i 層での各グループの平均パラメータベクトルである．$A^{(i)}=[\boldsymbol{a}_1^{(i)},\cdots,\boldsymbol{a}_{N_i}^{(i)}]'$ を第 i 層の個体間計画行列と呼び，$\mathrm{rank}(A^{(i)})=k_i$ とする．誤差ベクトルは，

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(i)})=\boldsymbol{0},\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(i)})=\Sigma_\varepsilon^{(i)}>0,\ \mathrm{E}(\boldsymbol{\nu}_j^{(i)})=\boldsymbol{0},\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{\nu}_j^{(i)})=\Delta^{(i)}\geq 0,\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\nu}_j^{(i)},\boldsymbol{\varepsilon}_{j'}^{(i)})=0$$

を満たすとする．ここに，対称行列 A に対し，$A>0$, $A\geq 0$ はそれぞれ正定値，半正定値を意味する．ランダム係数モデルにおいては，通常，$\Sigma_\varepsilon^{(i)}=\sigma^2 I_{p_{ij}}$, $\Delta^{(i)}\geq 0$ を仮定する．また，$\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(i)}$ と $\boldsymbol{\nu}_j^{(i)}$ に正規性を仮定すると，

$$\boldsymbol{y}_j^{(i)}=X_j^{(i)}\Xi^{(i)\prime}\boldsymbol{a}_j^{(i)}+X_j^{(i)}\boldsymbol{\nu}_j^{(i)}+\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(i)}\ ,\ j=1,\cdots,N_i,\ i=1,2$$

は，$\mathrm{E}(\boldsymbol{y}_j^{(i)})=X_j^{(i)}\Xi^{(i)\prime}\boldsymbol{a}_j^{(i)}$，$\mathrm{Var}(\boldsymbol{y}_j^{(i)})=X_j^{(i)}\Delta^{(i)}X_j^{(i)\prime}+\sigma^2 I_{p_{ij}}$ の多変量正規分布に従う．

上記のような階層的構造をもつモデルにおいては，個体間誤差ベクトルの共分散行列について，次の２つの場合が考えられる．１つは，階層毎に共分散行列が異なる場合，すなわち，$\Delta^{(1)}$と$\Delta^{(2)}$を独立なパラメータとして扱う場合である．他は，個体間誤差ベクトルの共分散行列が同じである場合であって，$\Delta^{(1)}$ は $\Delta^{(2)}$ の最初の $q_1 \times q_1$ 部分行列となっている場合である．つまり，

$\Delta^{(2)} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$ と分解したとき，$\Delta^{(1)} = \Delta_{11}$とする．

ここに，Δ_{11}，Δ_{12}，Δ_{21}，Δ_{22} はそれぞれ，$q_1 \times q_1$，$q_1 \times (q_2 - q_1)$，$(q_2 - q_1) \times q_1$，$(q_2 - q_1) \times (q_2 - q_1)$ の行列である．以下のパラメータの推定等において，上記の２つの場合を扱う．

さて，パラメータ $\Xi^{(i)}$,σ^2,$\Delta^{(i)}$ の推測を行うに当って，次のような $\boldsymbol{y}_j^{(i)}$ の分解を考える．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_j^{(i)} \\ \boldsymbol{v}_j^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_j^{(i)'} X_j^{(i)})^{-1} X_j^{(i)'} \\ \tilde{X}_j^{(i)'} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}_j^{(i)}.$$

ここに，$\tilde{X}_j^{(i)}$は $p_{ij} \times (p_{ij} - q_i)$ 行列で，$\tilde{X}_j^{(i)'} X_j^{(i)} = 0$，$\tilde{X}_j^{(i)'} \tilde{X}_j^{(i)} = I_{p_{ij} - q_i}$ を満たすとする．このとき，$\boldsymbol{u}_j^{(i)}$ と $\boldsymbol{v}_j^{(i)}$ は独立で，

$$\boldsymbol{u}_j^{(i)} \sim \mathrm{N}_{q_i}\left(\Xi^{(i)'} \boldsymbol{a}_j^{(i)}, \Gamma_j^{(i)}\right), \quad \Gamma_j^{(i)} = \Delta^{(i)} + \sigma^2 (X_j^{(i)'} X_j^{(i)})^{-1},$$
$$\boldsymbol{v}_j^{(i)} \sim \mathrm{N}_{p_{ij} - q_i}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 I_{p_{ij} - q_i})$$

となる．これらの基本的結果に基づいて，パラメータの推定法が提案される．

σ^2，Δ が既知のときには，一般線形モデルの理論が適用して，$\boldsymbol{\xi}^{(i)} = \mathrm{vec}(\Xi^{(i)'})$ の最尤推定量が，

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} = \left[\sum_{j=1}^{N_i} \boldsymbol{a}_j^{(i)} \boldsymbol{a}_j^{(i)'} \otimes \Gamma_j^{(i)^{-1}} \right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{N_i} \boldsymbol{a}_j^{(i)} \otimes \Gamma_j^{(i)^{-1}} \boldsymbol{u}_j^{(i)} \right]$$

と求まる．これは，データが階層内でバランス型のときは σ^2，Δ に依存しなく，σ^2，Δ が未知の場合にも最尤推定量になる．

一般に，σ^2，Δ が未知の場合，バランス型の場合には，σ^2，Δ の最尤推定量は尤度関数を微分したものが０となるような解がパラメータ空間内にない場合に，境界上に最尤推定量が存在するという考えに基づいて，場合分けの推定量として与えられる．(Khatri and Rao (1991), 藤越 (1993))．しかし扱いにくく，また，アンバランス型の場合には一般に求めることが困難である．そのため，σ^2，Δ の不偏推定量を求め，それを代入して簡便的に $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ の推定量を構成する．

本報告では，検定問題も扱い，これらの推測に関して数値例を紹介する．

参考文献

[1] 藤越康祝 (1993). 成長曲線モデル-その理論と応用. 数理科学, **358**, 60-66.

[2] Khatri,C.G. and Rao,C.R. (1991). Multivariate linear model with latent variables : problems of estimation. *Jr. Comb., Inf. & Syst. Sci.*, **16**, 137-154.

[3] Potthoff,R.F. and Roy,S.N. (1964). A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems. *Biometrika*, **51**, 313-326.

[4] Vonesh,E.F. and Carter,R.L. (1987). Efficient inference for random-coefficient growth curve models with unbalanced data. *Biometrics*, **43**, 617-628.

Wu の GEM は最適解に収束するか？

高知大理　　野間口謙太郎

1. 序

モデル $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$ の下で得られる不完全データを y と表す。y と整合的な完全データ x の集合を $\chi(y) = \{x : x_{obs} = y\}$ と置くと、尤度関数は次で与えられる。

$$g(y|\theta) = \int_{x \in \chi(y)} f(x|\theta)dx$$

この最尤推定量を求めるものとして開発されたいわゆる EM-Algorithm は 2 変数関数

$$Q(\theta|\eta) = \int_{x \in \chi(y)} \log(f(x|\theta))f(x|y,\eta)dx$$

を用いて、次のように定式化される。先ず初期値 $\theta_0 \in \Theta$ から出発して、$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して次の２つのステップを収束するまで繰り返す。

$$\begin{array}{lcl} \text{E(xpectation)-step} & : & Q(\theta|\theta_n) \text{ を計算せよ} \\ \text{M(aximization)-step} & : & Q(\theta|\theta_n) \text{ を最大にする } \theta = \theta_{n+1} \text{ を見つけよ} \end{array}$$

M-step において、最大値をとる $\theta \in \Theta$ を見つけるのが難しいならば、少なくとも

$$Q(\theta_{n+1}|\theta_n) \geq Q(\theta_n|\theta_n)$$

であるような θ_{n+1} で我慢するというのが G(eneralized)EM といわれるものである。この収束定理としては Wu(1983) によって与えられたものに尽きると信じられているが (McLachlan and Krishnan(1997))、その GEM の収束条件には瑕疵があることを示したい。

2. Wu (1983) による GEM の収束定理

GEM では、θ_n から必ずしもユニークには次の θ_{n+1} を定めない。今、θ_n に対して可能な解の集合を $S(\theta_n)$ と書くことにすると、次の解はこの集合から任意に選ばれてきていると考えてよい。そこで、１対多関数 $S : X \to 2^X$ を考えて、$x_0 \in X$, $x_{n+1} \in S(x_n)$ であるような数列に関して収束の一般論をまず述べておこう。

定理 1. (Global Convergence Theorem(Zangwill(1969), 今野他 (1978)))
１対多関数 S に対して、点列 $x_n \in X$ は次々に $x_{n+1} \in S(x_n)$ であるように取られているとする。さらに、次の条件を満足すると仮定する。

(1) $\{ x_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \}$ はあるコンパクト集合の中に含まれている。

(2) S はある集合 Γ の補集合の上で閉である。

$$z_n \in \Gamma^c, \ z_n \to z, \ u_n \in S(z_n), \ u_n \to u \implies u \in S(z)$$

(3) 次を満足する X 上の実数値連続関数 α が存在する。

$$\begin{array}{lll} \text{(3.a)} & x \in \Gamma^c \implies & \alpha(y) > \alpha(x) \text{ for } \forall y \in S(x) \\ \text{(3.b)} & x \in \Gamma \implies & \alpha(y) \geq \alpha(x) \text{ for } \forall y \in S(x) \end{array}$$

この時、次が成り立つ。

(i) x_n の集積点はすべて Γ に含まれる。

(ii) $\alpha(x_n)$ は単調増加で、ある $x \in \Gamma$ に対する $\alpha(x)$ に収束する。

すべての EM-最適解の集合を

$$\Gamma = \{\theta^* \in \Theta : \ Q(\theta^*|\theta^*) \geq Q(\theta|\theta^*) \text{ for } \forall\theta \in \Theta\}$$

と置く。この Γ の中に GEM は収束するかということが問題になる。その際

$$S(\theta) = \{\eta \in \Theta : Q(\eta|\theta) \geq Q(\theta|\theta)\}$$

となるだろう。Dempster et. al.(1977) の与えた EM の収束条件の誤りを指摘し、きっちりとした証明を与えたのが Wu(1983) である。しかしながら、彼も GEM に対しては間違った定理を与えている (と筆者は考える)。論文のなかで定理 1 を書き換えると GEM についての定理として次が証明できるとしている (明らかだとして証明は付いていない)。

定理 2 (Wu による GEM の収束定理)
GEM で得られる解の列 θ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ が次の条件を満足するとする。

(1) $\{\ \theta_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ \}$ はあるコンパクト集合の中に含まれている。

(2) S は Γ^c で閉である。

(3) $\theta_n \in \Gamma^c \implies L(\theta_{n+1}) > L(\theta_n)$

このとき、θ_n のすべての集積点は EM-最適解であり、$L(\theta_n)$ は単調増加で、ある EM-最適解 $\theta \in \Gamma$ に対する $L(\theta)$ に収束する。

3. 反例

次の例を考える：$x \sim N(\theta, 1), y = [x \in [-1, 1]]$。つまり、$y$ は [x は区間 [-1,1] に出現した] という不完全情報である。この例において、GEM に関する $S(\theta)$ は次で与えられる。

$$S(\theta) = \begin{cases} [\theta, 2E(x|y,\theta) - \theta] & \theta \leq 0 \\ [2E(x|y,\theta) - \theta, \theta] & \theta > 0 \end{cases}$$

よって、GEM の一つの例として次のような列が考えられるが、これは $\theta_{MLE} = 0$ に収束しないことが容易に示される。

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_{n+1} = \mathrm{Max}\{E(x|y,\theta_n), \theta_n - \frac{1}{2^{n+1}}\},$$

4. Reference

Dempster, A.P., Laird, N.M., and Rubin, D.B. (1977), "Maximum Likelihood Estimation From Incomplete Data Via the EM Algrithm"(with discussion), J.R.S.S., Ser. B, 39, 1-38.

McLachlan, G.J. and Krishnan, T. (1997), *The EM Algorithm and Extensions*, Wiley.

Wu, C.F.J. (1983), "On the Convergence Properties of the EM Algorithm," A.S. 11, 95-103.

Zangwill, W.I.(1969), *Nonlinear Programming : A Unified Approach*, Prentice-Hall.

今野浩・山下浩 (1978) 非線形計画法, 日科技連.

GMANOVA モデルにおける検定統計量の漸近展開

広島大・理　柳原 宏和

対象になる各個体に対して, いくつかの時点あるいは異なる条件のもとで繰り返し観測することによって得られる経時データは, 成長に関する測定や臨床実験などにおいて多く見られる. そのような経時データに関する解析においては, 個体の成長の変化を経時的に記述し, また扱われるグループ毎に成長の変化を総合的に比較するということに関心がある. Potthoff and Roy (1964) によって提唱された GMANOVA モデルは, バランス型で, かつ, 繰り返し数が小さい場合のデータに対して用いられている. しかし現在多く用いられている GMANOVA モデルに関する統計的解析の手法は, 誤差に正規性を仮定した結果に基づいたものであり, 非正規性のもとでの理論的展開はほとんど考えられていない. 一般に誤差分布については, 経験的に知られている場合を除いて, 特定することが困難であるので, 非正規性のもとでの研究は非常に重要であると思われる.

本発表の目的は, GMANOVA モデルにおける線形仮説の検定に関して, 非正規性の影響を調べることにある. とくに検定統計量の帰無分布に関する漸近展開に注目し考察を行う.

GMANOVA モデルでは, 確率変数行列 $Y=(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n)'$ ($n\times p$ 行列) を未知母数行列 Ξ ($q\times k$ 行列), 誤差行列 $\mathcal{E}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)'$ ($n\times p$ 行列, $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0}$, $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})=\Sigma$), 既知の個体内計画行列 X ($p\times q$ 行列, $\mathrm{rank}(X)=q$), 個体間計画行列 A ($n\times k$ 行列) を用いて

$$Y=A\Xi X'+\mathcal{E},$$

といった形で表わす. このような GMANOVA モデルにおいて, 未知母数行列に何らかの線形関係, つまり既知の行列 C ($c\times k$ 行列, $\mathrm{rank}(C)=c\leq k$), D ($q\times d$ 行列, $\mathrm{rank}(D)=d\leq q$) を用いて

$$H_0 \quad : \quad C\Xi D=0,$$

となるような線形仮説に関する検定を行う場合, 主に正規性の下で提案された以下の３つの検定統計量が用られる.

(i) the likelihood ratio statistic :

$$T_{LR}=-\{n-k-(p-q)+s_1\}\log(|S_e|/|S_e+S_h|),$$

(ii) the Lawley-Hotelling trace criterion :

$$T_{HL}=\{n-k-(p-q)+s_2\}\mathrm{tr}\left(S_hS_e^{-1}\right),$$

(iii) the Bartlett-Nanda-Pillai trace criterion :

$$T_{BNP}=\{n-k-(p-q)+s_3\}\mathrm{tr}\left\{S_h(S_h+S_e)^{-1}\right\},$$

ただし

$$\begin{aligned}
&Se=D'(X'S^{-1}X)^{-1}D, \qquad S_h=(C\hat{\Xi}D)'(CRC')^{-1}(C\hat{\Xi}D),\\
&S=Y'(I_n-P_A)Y, \qquad \hat{\Xi}=(A'A)^{-1}A'YS^{-1}X(X'S^{-1}X)^{-1},\\
&R=(A'A)^{-1}+(A'A)^{-1}A'Y\{S^{-1}-S^{-1}X(X'S^{-1}X)X'S^{-1}\}Y'A(A'A)^{-1},
\end{aligned}$$

であり, s_j は正規性の下でのバートレット補正項を表す係数で, それぞれ $s_1=-(d-c+1)/2$, $s_2=-(d+1)$, $s_3=c$ である. ここで P_A は $\Re(A)$ への射影行列である.

3つの検定統計量は $[Y', X]$ から $\Sigma^{-1/2}[Y', X]$ への変換に関して不変であるので, X を $\Sigma^{-1/2}X$ と置き換えることで $\Sigma = I_p$ として議論を進めることができる. 表示を簡略化するために, これから議論では $\Sigma^{-1/2}X$ を単に X と表記することにする.

非正規性のもとでの漸近展開をより簡単に導出するために, いくらかの変形が必要となる. まず, 検定統計量は以下で定義される統計量 $\widetilde{S}_e$, $\widetilde{\Xi}$, $\widetilde{R}$ を用いて表されていることに注目する.

$$\left(\frac{1}{n}S_e\right)^{-1} = \{D'(X'X)^{-1}D\}^{-1/2}\widetilde{S}_e^2\{D'(X'X)^{-1}D\}^{-1/2},$$
$$\widehat{\Xi} = (A'A)^{-1/2}Z\widetilde{\Xi}X(X'X)^{-1/2},$$
$$(A'A)^{-1/2}C'(CRC')^{-1}C(A'A)^{-1/2} = \widetilde{R}\Omega\widetilde{R}.$$

ただし,

$$Z = (A'A)^{-1/2}A'\mathcal{E}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{\varepsilon}_j\boldsymbol{\varepsilon}_j{}' - I_p),$$
$$\Omega = (A'A)^{-1/2}C'\{C(A'A)^{-1}C'\}^{-1}C'(A'A)^{-1/2}.$$

これらの表現を用いると, 適当な正則条件のもとで各検定統計量は

$$T_G = \mathrm{tr}(U'\Omega U) + \frac{1}{n}\left[\{r_1 - k - (p-q)\}\mathrm{tr}(U'\Omega U) + r_2\mathrm{tr}\left\{(U'\Omega U)^2\right\}\right] + \mathrm{O}_p(n^{-3/2}),$$

と摂動展開される. ただし,

$$U = \widetilde{R}Z\widetilde{\Xi}L\widetilde{S}_e,$$

であり, 係数 r_1, r_2 はそれぞれ,

$$\text{(i) } T_{LR} : \begin{array}{l} r_1 = s_1, \\ r_2 = -1/2, \end{array} \qquad \text{(ii) } T_{HL} : \begin{array}{l} r_1 = s_2, \\ r_2 = 0, \end{array} \qquad \text{(iii) } T_{BNP} : \begin{array}{l} r_1 = s_3, \\ r_2 = -1. \end{array}$$

これらの結果と U の分布関数の展開式をもちいて特性関数を導出し反転することで, 以下のような検定統計量 T_G の帰無分布を漸近展開を得ることができる.

$$\mathrm{P}(T_G \le x) = G_{cd}(x) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} b_j G_{cd+2j}(x) + \mathrm{o}(n^{-1}).$$

なお, 展開式の妥当性については Wakaki, Yanagihara and Fujikoshi (2000) と Bhattacharya and Rao (1976) と同様な手法を用いることで示すことができる. また, この結果に関して $X = I_p$, $D = I_p$ とすると Wakaki, Yanagihara and Fujikoshi (2000) で導出されている結果と一致する. この漸近展開の精度については当日シミュレーション結果を報告する予定である.

参考文献

1. Bhattacharya, R. N. and Ranga Rao, R. (1976). *Normal Approximation and Asymptotic Expansions.* Jhon Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto.
2. Potthoff, R. F. and Roy, S. N. (1964). A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems. *Biometrika*, **51**, 313–325.
3. Wakaki, F., Yanagihara, H. and Fujikoshi, Y. (2000). Asymptotic expansions of the null distributions of test statistics for multivariate linear hypothesis under nonnormality. *Statistical Resarch Group, Hiroshima University,* TR., 00–06.

対称統計量の極限定理の精密化について

金沢大学・工　金川秀也

対称統計量

$\{\xi_j, j \geq 1\}$ を分布をμとする$(X, \mathcal{B})$.上の確率変数列とする．また$u(x_1, x_2, \cdots, x_k)$を実対称関数とする．$u(x_1, x_2, \cdots, x_k)$を核関数とする統計量を対称統計量と呼ぶ.

退化型核関数を持つ対称統計量に対する極限定理

任意の$x_2, \cdots, x_k$に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y, x_2, \cdots, x_k)\mu(dy) = 0 \tag{1}$$

のとき$u(x_1, x_2, \cdots, x_k)$は退化(degenerate)しているという.

Large Deviation Principles

Let $\{\xi_j, j \geq 1\}$ be i.i.d. random variables with a probability distribution μ. Suppose that $u(x,y)$ is a real valued symmetric function on $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Furthermore assume that u is square integrable with respect to $\mu \times \mu$ and degenerate, i.e., for any real x

$$E(u(\xi_1, x)) = 0. \tag{2}$$

Let L^2 be the space of all square integrable functions with respect to μ. Then, according to Serfling (1980), we see that the kernel u induces a bounded linear operator $T_u : L^2 \to L^2$ defined by $T_u f(x) := E[u(\xi_1, x) f(\xi_1)]$, $f \in L^2$ which has eigenvectors $\{g_i\}$ and eigenvalues $\{\lambda_i\}$ satisfying for each $i \geq 1$

$$\begin{cases} E(g_i(\xi_1)) = 0, \quad E(g_i^2(\xi_1)) = 1 \\ E(g_i(\xi_1) g_j(\xi_1)) = 0 \ (i \neq j), \quad E(h(\xi_1, x) g_i(\xi_1)) = \lambda_i g_i(x) \end{cases} \tag{3}$$

Then u can be represented by

$$\lim_{N \to \infty} \iint_{R^2} \left(u(x_i, x_j) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k g_k(x_i) g_k(x_j) \right)^2 \mu(dx_i)\mu(dx_j) = 0. \tag{4}$$

We introduce a separable Hilbert space H equipped with the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and the norm $\| \cdot \|$ as follows:

$$H := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbf{R}^\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \mathbf{x}_k^2 < \infty \right\}, \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| x_k y_k, \ \|\mathbf{x}\| := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| x_k^2 \right)^{1/2}.$$

If we assume that

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| < \infty, \qquad (5)$$

then from (2)

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| g_k^2(\xi_i)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| E\left(g_k^2(\xi_i)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| < \infty,$$

which implies that we can define H-valued random variables $G_i := \left(g_1(\xi_i), g_2(\xi_i), g_3(\xi_i), \cdots\right)$ for each $i \geq 1$. Let $\{U_n, n \geq 1\}$ and $\{V_n, n \geq 1\}$ be U-statistics and V-statistics with degree 2 defiende by

$$U_n := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u\left(\xi_i, \xi_j\right), \quad V_n := \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} u\left(\xi_i, \xi_j\right),$$

respectively.

Kanagawa (1999)
Suppose that $\{\xi_j, j \geq 1\}$ is a sequence of i.i.d. random variables with law μ. Assume that u is square integrable symmetric function with respect to $\mu \times \mu$. Furthermore suppose (1), (2), (5) and for any real t

$$E\left(\exp\left(t\|G_1\|\right)\right) < \infty. \qquad (6)$$

Let $\Phi(x) := \left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathbf{x}_k^2\right|^{1/2}$ for $x \in H$ and h be the entropy function of the distribution of G_1 which is defined by

$$h(\mathbf{x}) := \sup_{\varphi \in H^*}\left(\varphi(\mathbf{x}) - \log M(\varphi)\right), \qquad (7)$$

where H^* is the topological dual of H and $M(\varphi) := E(\exp(\varphi(G_1)))$. Then we have

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log E\left(\exp\left(n|U_n|^{1/2}\right)\right) = \sup_{\mathbf{x} \in H}\left(\Phi(\mathbf{x}) - h(x)\right). \qquad (8)$$

REFERENCES

[1] S. Kanagawa, A representation of the rate functions in large deviation principles for U-statistics with degenerate kernels, Trends in Probability and Related Analysis (Proceedings of Symposium on Analysis and Probability 1998, Tiwan University, Taipei), 254-264, (1999).

[2] R. J. Serfling, Approximation Theorems of Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York, 1980.

比の統計量と Hoeffding 分解

九州大学・経済　前園宜彦

1．序

$X_1, \cdots, X_n$ を無作為標本とし，$T_n = T_n(X_1, \cdots, X_n)$, $S_n = S_n(X_1, \cdots, X_n)$ をパラメーター t_n, s_n に関連した統計量とする．本報告では比の統計量 T_n/S_n の漸近的な表現を一般的に求め，その結果を３次のキュムラントの推定量について応用し，漸近的な性質を調べた．残差項としては

$$P\{|o_L(n^{-1/2})| \geq n^{-1/2}(\log n)^{-1}\} = o(n^{-1/2})$$

を満たす $o_L(n^{-1/2})$ を使って $n^{-1/2}o_L(n^{-1/2})$ までの漸近表現を求めた．

まず T_n, S_n は次の漸近表現を持つとする．

$$\begin{aligned} T_n &= t_n + n^{-1}\delta_T + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\tau_1(X_i) + n^{-2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\tau_2(X_i, X_j) + n^{-1/2}o_L(n^{-1/2}), \\ S_n &= s_n + n^{-1}\delta_S + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\zeta_1(X_i) + n^{-2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\zeta_2(X_i, X_j) + n^{-1/2}o_L(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

ただし δ_T, δ_S は定数であり，$\tau_1(x)$, $\zeta_1(x)$, $\tau_2(x,y)$, $\zeta_2(x,y)$ は

$$E[\tau_1(X_1)] = E[\zeta_1(X_1)] = 0, \quad E[\tau_2(X_1, X_2)|X_1] = E[\zeta_2(X_1, X_2)|X_1] = 0 \ a.s.$$

を満たす関数とする．この漸近表現は Hoeffding-分解 (H-分解) された形になっており，多くの統計量がこの形で表される．後で述べる U-統計量の３次のキュムラントの推定量もこの形で表される．

2．比の統計量の漸近表現

H-分解に対するモーメントの評価を利用して，適当な正則条件の下で

$$\frac{T_n}{S_n} = \frac{t_n}{s_n} + n^{-1}\delta + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\eta_1(X_i) + n^{-2}\sum_{C_{n,2}}\eta_2(X_i, X_j) + n^{-1/2}o_L(n^{-1/2})$$

の漸近表現を求めた．この η_1, η_2 も前と同様で，H-分解された表現である．この表現を使うと，バイアスの比較ができて，$\sqrt{n}(T_n/S_n - t_n/s_n)$ の $n^{-1/2}$ の項までのエッジワース展開を求めることもできる．

3．スチューデント化 U-統計量の歪度

$h(x,y)$ を成分の入れ替えに関して不変な関数 (2 次のカーネル) とするとき，$n \geq 2$ に対して２次の U-統計量は

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}h(X_i, X_j)$$

と定義される．このとき $\sigma_n^2 = V(U_n)$ のジャックナイフ分散推定量 $\hat{\sigma}_n^2$ を使ってスチューデント化した $S_n = (U_n - \theta)/\hat{\sigma}_n$ の歪度の推定を考える．ここでは κ_3 のジャックナイフ推定量 $\hat{\kappa}_{3J}$ と不偏推定量を利用した $\hat{\kappa}_{3U}$ の漸近的性質を議論する．また Fujioka & Maesono (2000) で議論されているように $o(n^{-1})$ の残差項の正規化変換では歪度推定量の漸近表現が必要になる．その意味でも漸近表現の研究は重要である．

S_n は漸近 U-統計量で表せて，3次のキュムラントを求めることができる．$g_1(x) = E[h(x, X_1)] - E[h(X_1, X_2)]$, $g_2(x, y) = h(x, y) - E[h(X_1, X_2)] - g_1(x) - g_1(y)$ とおき

$$e_1 = E[g_1^3(X_1)],\ e_2 = E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1, X_2)]$$

の記号を準備する．このとき

$$\kappa_3 = \sqrt{n}E(S_n)^3 = \frac{1}{\xi_1^3}(-2e_1 - 3e_2) + \frac{d}{n} + O(n^{-2})$$

となる．

4．ジャックナイフ歪度推定量の漸近表現

κ_3 の主項 $\xi_1^{-3}(-2e_1 - 3e_2)$ の推定量を構成する．$-2e_1 - 3e_2$ のジャックナイフ推定量を $\hat{\nu}_n$ とすると，ジャックナイフ歪度推定量 $\hat{\kappa}_{3J}$ は

$$\hat{\kappa}_{3J} = \frac{\hat{\nu}_n}{(n\hat{\sigma}_n^2)^{3/2}}$$

で与えられる．$\hat{\kappa}_{3J}$ の漸近表現は

$$\hat{\kappa}_{3J} = \kappa_3 + \frac{2}{n\xi_1^3}\sum_{i=1}^{n}\zeta_1(X_i) + \frac{2}{n(n-1)\xi_1^3}\sum_{C_{n,2}}\zeta_2(X_i, X_j) + \frac{\delta_J}{n\xi_1^3} + n^{-1/2}o_L(n^{-1/2})$$

となる．ここで ζ_1, ζ_2 は前と同じように H-分解されたものになっている．

5．不偏推定量の漸近表現

$-2e_1 - 3e_2$ の不偏推定量 $8\hat{m}_3$ を利用した歪度推定量

$$\hat{\kappa}_{3U} = \frac{8\hat{m}_3}{(n\hat{\sigma}_n^2)^{3/2}}$$

の漸近表現は

$$\hat{\kappa}_{3U} = \kappa_3 + \frac{2}{n\xi_1^3}\sum_{i=1}^{n}\zeta_1(X_i) + \frac{2}{n(n-1)\xi_1^3}\sum_{C_{n,2}}\zeta_2(X_i, X_j) + \frac{\delta_U}{n\xi_1^3} + n^{-1/2}o_L(n^{-1/2})$$

となる．ジャックナイフ歪度推定量と不偏推定量との違いは，バイアスの項の違いだけになり，$\zeta_1(x)$, $\zeta_2(x, y)$ の関数は同じものである．したがって Fujioka & Maesono (2000) の正規化変換においては関数 $\zeta_1(x)$ が必要になるが，3次のキュムラントの推定量としてどちらを使おうが，その後の議論に影響しないことが分かる．