（8）「経済時系列、数理ファイナンスにおける統計推測の基礎理論」に関する研究報告

金融工学の研究事例とデータ解析

三浦良造　（一橋大学国際企業戦略研究科）

私の講演では、上記の表題のもとで、金融工学の研究事例をお話ししました。金融工学と云う呼び名のもとで、純粋数理的な研究（細かくは、これを数理ファイナンスと呼ぶ）、確率統計モデルに基づく統計的データ分析、派生証券価格理論の数理的枠組みを用いた金融証券の価格理論、ポートフォリオ選択問題、など数学会の会員の興味をそそるような研究が行われています。このように簡単な言葉で云っても実態が分かりませんので、このシンポジウムでは、私が見える範囲で、金融工学と云う呼び名のなかで、どのような研究が行われているかについて、どのような目的で、どのような方法論を用いて研究しているか、について事例を挙げて解説しました。金融工学が盛んになったのはアメリカではもう２０数年前でしょうが、日本では、金融機関のなかでは１０年以上前から勉強していたようですが、ごく最近は一般の人達が注目するようになりました。 かつて、オプション価格理論を”あ、O.R.ですね。”、と言う人がいましたが、いまは、”数学ですね”と言ったり、また、データ分析、とか、結局コンピューター計算だ、と言ったりします。それぞれ当たっているところがあります。問題意識に応じて、アプローチ、方法が替る訳でしょう。私は、金融工学を広い意味での統計科学だと思っています。ここでは、統計的データ分析をともなった研究事例を２つお話しします。

１．市場リスク計測の統計的方法

統計的方法にかなり依存する市場リスク計測の概要とそこで工夫された計測の方法についてお話しします。金融機関が保有する市場性のある金融証券の価格がどのように変動するかを調べて、１日分、１週間、１ヵ月間では変動の確率分布がどのようであるかを見て、分布の１％点を推定あるいは予測することを目的としています。この推定値をバリューアットリスクと呼んでポートフォリ

オのリスク管理に利用します。　計測の対象はそのように定義できますが、計測の方法はデータに基づいて考えるために、複数の手法が提案されます。ポートフォリオには、複数の金融証券を含めますので、価格の増分は結局確率変数の一時結合であるということになり、平均分散を用いて考える手法が一つの主流です。もう一つは、経験分布に頼る方法です。これら２つの基本的手法と原理に関して私が研究した成果をお話ししました。それは重みつき尤度、重みつき経験分布という形で使います。この方法による１％点推定の性質についてシミュレーション例を用いて説明しました。市場リスク計測の問題は全く統計的問題であり、数理統計学者が参加すべき問題ですので、特に取り上げて説明しました。

２．商品先物とコモディティリンク債券の価格理論

商品先物価格に含まれるパラメターの単純な推定と、それにより確認された確率モデルを用いて、債券価格を数学的に導く、という標準的な研究事例の話しをしました。この研究は、１９９０年頃までの先行研究の成果に新しい成果を付け加えたものです。商品先物価格に含まれるコンビニエンスイールドが確率過程に従うとして、クーポンが、商品価格に依存して決まるという債券、コモディティリンク債券の価格式を導きました。ここで用いた価格式導出の枠組みは、ブラック・ショールズのオプション価格式導出法の延長上にある方法です。微分積分をきちんと分かれば出来る方法ですので、マルチンゲールとか本格的な確率過程論や測度論が分からない学生にも身につけることが出来ます。この方法の範囲内でもこの程度の研究は出来るということ、そしてさまざまな金融証券の価格づけが重要な問題の一つであることを紹介しました。ここで得られた価格式を用いて、倒産確率を計算したり、企業財務のなかでの戦略を考えたり出来るのですが、そういう作業が実務では必要になってきていること、そしてそういうことが出来る人材が少なくて、そういう人材を大学院で育てることも求められているということもお話ししました。

リスク中立確率と数理統計学

楠岡成雄（東京大学大学院数理科学研究科）

数理ファイナンスにおいては統計パラメータを推定することが多い。しかし、 Heath によれば、「多くの場合、全然違ったものを推定している」そうである。もちろん Implied で統計学を用いず推定している限りでは問題は起こらない。実務上問題が起こりやすいのは金利の期間構造を取り扱う場合や Default Risk を扱う場合などモデルが複雑になり、Headging も困難になる場合である。実は講演者自身どのように問題を定式化すべきか分からない点が多い。特に、金利の期間構造に関する従来の標準的な理論は再検討すべきのように思う。本講演では何が問題であるのかを示していきたい。

1．数理ファイナンスの基本定理

「No Arbitrage」 ＝「ELMM の存在 」というのが基本的な考え方である。しかし、 No Arbitrage をどのように定義するかは厄介な問題である。Delbaen-Schchermayer らにより証明されている結果は以下のようなものである。

まず $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t\in[0,T]}, P)$ は usual condition を満たす Filtration 付き確率空間とする。N 種類の security があり、その価格過程を S_t^i, $t \in [0,T]$, $i = 1, \ldots, N$, とする。さらに S_t^i は locally bounded な semimartingale で $\inf_{t\in T} S_t^i > 0$, $P-a.s.$, $i = 1, \ldots, N$ とする。この N 種類の security が市場で frictionless に売買できるという設定の下で以下のことが示されている（かなりごまかしがあるが)。

「定理」 「No Arbitrage」であることは以下のことと同値。P と互いに絶対連続な確率測度 Q が存在して、$(S_t^1)^{-1}S_t^i$, $t \in [0,T]$, $i = 1, \ldots, N$ は Q-local martingale 。

Q は S_t^1 を Numeraire とする ELMM (Equivalent Local Martingale measure) と呼ぶ。S_t^1 が安全資産の価格であるとき、この Q をリスク中立確率とよぶ。

4．金利の期間構造

「標準理論」

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t\in[0,\infty)}, P)$ は usual condition を満たす Filtration 付き確率空間とする。まず、任意の $T > 0$ に対して時刻 T を満期とし、pay-off が 1 であるようなリスクのない zero-coupon 債券が存在すると仮定する。$p(t,T)$, $t \in [0,T]$ をその債券の価格過程とする。さらに仮定として

(i) 各 T に対して $p(t,T)$, $t \in [0,T]$, は locally bounded なセミマルチン

ゲールで、各 t に対して $p(t,T), T>t$ は 確率 1 で連続
(ii) $D(t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{[2^n t]} p(2^{-n}(k-1),2^{-n}k)$ が存在し、 $D(t),\ t\geq 0$ も locally bounded セミマルチンゲール

このような設定の下では $D(t)^{-1}$ を Numeraire とみなし、ファイナンスの基本定理の連想から次のような仮定がおけるだろう。P と互いに絶対連続な確率測度 Q が存在し、すべての $T>0$ に対し $D(t)P(t,T), t\in[0,T]$, は Q -local martingale

この Q がリスク中立確率である。また「市場の完備性」も期待し、すべての Derivative の価格をこの確率測度 Q を下に計算しよう。

例えばスワップを考える。$T_0<T_1<\ldots<T_N$ とし、$m=1,\ldots,N$ とする。時刻 T_0 において R_m ($\mathcal{F}_{T_0}$ 可測な確率変数) を定め、以下のような契約をするとする。

(支払い)　各時点 $T_i, i=0,1,\ldots,m-1,$ において $1-\exp(-R_m(T_{i+1}-T_i))$ 支払う

(受け取り)　各時点 $T_i, i=0,1,\ldots,m-1,$ において $1-p(T_i,T_{i+1})$ 受け取る

この契約が Fair であるためには

$$\sum_{i=0}^{m-1} E^Q[D(T_i)(1-\exp(-R_m(T_{i+1}-T_i)))|\mathcal{F}_{T_0}]=\sum_{i=0}^{m-1} E^Q[D(T_i)(1-p(T_i,T_{i+1}))|\mathcal{F}_{T_0}]$$

となる必要がある。この式は次のような式に変形できる。

$$\sum_{i=0}^{m-1} p(T_0,T_i)(1-\exp(-R_m(T_{i+1}-T_i))=1-p(T_0,T_m)$$

よって $R_M, m=1,2,\ldots,N$ が与えられると $p(T_0,T_m), m=1,2,\ldots,N$ がわかる。

標準理論はファイナンスの基本定理の帰結のごとく述べてきたが、実はいくつかの基本的な問題がある。

(1) すべての $T>0$ に対してそれを満期とする債券というのは全く架空で一部の T に対してのみ実際の取り引きされているのにすぎないこと。

(2) 一方で Derivative であるスワップは非常に多く取り引きされている。しかし、それは毎日違うものを取り引きしていることになる。それは それはファイナンスの基本定理の設定とは違う。

この講演では上記の問題には立ち入らない。しかし、標準理論を押し進め、統計的推測を行おうとすると再び同様な問題点にぶつかることを示したい。

[Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model と それに関連する確率過程の推定

名古屋市立大学　　宮原 孝夫

1 はじめに

本稿の目的は、非完備市場におけるオプションの価格付けのための一つのモデルを提案し、このモデルを適用する場合に必要となる推定 (価格過程の推定) の問題を検討することである。

2 [Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model

非完備市場におけるオプションの価格付け理論における数理モデルは, 次の２つの要素からなる.

（A）原資産の価格過程としての確率過程 S(t) を定義すること。

（B）オプションの価格 (価値) を定める同値マルチンゲール測度を１つ定めること。

この枠組みに添った形でのモデルはいくつか提案されているが、完備市場における Black-Scholes モデルの様に、基本的なものとして一般に認められたモデルは、非完備市場についてはまだ無い。

われわれのモデル [Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model は、上の枠組みの下で、

（A）原資産の価格過程：幾何 Lévy 過程 、

（B）同値マルチンゲール測度:MEMM(minimal entropy martingale measure)

なるものである。このモデルは [1] で定式化され、MEMM の存在定理が得られている。従って、このモデルにより option 価格を計算するための基本的枠組みは得られていることになる。ただし、実際にこのモデルを適用するためには検討すべき課題がいくつかある。次節ではその一つについて述べる。

このモデルの利点はいくつかある。たとえば、（A）に関しては、log

return の分布として、非対称なものおよび fat tail のあるものが自然に現れること、（B）に関しては、MEMM が指数型の効用関数と関連付けられること、などがある。

3 原資産の価格過程の推定

前節で述べたモデルを適用するするためには、次の２つのことが必要になる。

1）原資産の価格過程を定めている Lévy 過程の推定。

2）オプションの価格の計算のために、Lévy 過程の汎関数の期待値の計算。

このうちの 1）について検討する。

Lévy 過程 $X(t)$ は characteristic triplet により定まる。そのためには $X(1)$ の分布が分かればよい。そこで、$X(1)$ の empirical な分布が与えられたときに、その分布が無限分解可能分布からのサンプルであるとみなして characteristic triplet を推定することとする。さらに、モデルのクラスを次のようなクラスに限定した上で、そのクラス内で推定を行うことにする。

(I) $X(t)$:Gaussian + 有限個の jump part。

(II) $X(t)$:有限個の jump part のみ。

一つの推定法として、次のような方法が考えられる。$X(1)$ の empirical な分布の 2k 次までのモーメントを求め、モーメントがそれと一致するような process を、(I) および (II) のそれぞれのクラスの中で求め、推定されたモデルとして、それらを採用する。

この方法による推定法の説明、結果、および問題点等について、述べる。

参考文献

[1] Miyahara, Y.(1999), 'Minimal Relative Entropy Martingale Measures of Geometric Lévy Processes and Option Pricing Models in Incomplete Markets,' *Discussion Papers in Economics, Nagoya City University* No. 249(1999), pp. 1-8.

[2] Miyahara, Y.(1999), '[Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model and Relating Estimation Problems.'

確率微分方程式の近似解の精度について

税所康正（熊本大学）、金川 秀也（金沢大学）

数値実験におけるSDEの近似の問題点

1. ブラウン運動をランダムウォークで近似したときに生じる誤差の大きさ.

2. SDEの近似解は正規擬似乱数を用いて構成される. 正規擬似乱数は完全に独立で、かつ完全に正規分布に従うわけではない.

3. SDEの近似解の擬似乱数の分布に対する頑強性を調べる.

4. 分布に対するある程度の頑強性が示されれば、実際の数値実験では、どのような擬似乱数を使うのが最も効率がよいか考える.

Euler-Maruyama型近似解のL^2 −評価

まず、ブラウン運動をランダムウォークで近似したときに生じる誤差の大きさを調べてSDEの近似解の精度を計算する. $\{B(t), 0 \le t \le 1\}$ を標準ブラウン運動、$\{X(t), 0 \le t \le 1\}$ $(d \ge 1)$ をd-次元SDEの解とする:

$$\begin{cases} dX(t) = \sigma(t, X(t))dB(t) + b(t, X(t))dt, \quad 0 \le t \le 1 \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

ここで$\sigma(t,x)$及び$b(t,x)$がLipschitz条件を満たすとき強い意味の解が存在する.

The Euler-Maruyama Algorithm

つぎに丸山(1955)によって構成された$\{X(t), 0 \le t \le 1\}$の近似解$Z_n := \{Z_n(t), 0 \le t \le 1\}$を次に定義する.

$$Z_n(t) := X_0 + \int_0^t \sigma_n(u)dB(u) + \int_0^t b_n(u)du, \quad 0 \le t \le 1,$$

ただし

$$\sigma_n(t) := \sigma\left(\frac{k-1}{n}, x_{k-1}\right), \quad k/n \le t \le (k+1)/n, \quad k = 0, \cdots, n-1,$$

$$b_n(t) := b\left(\frac{k-1}{n}, x_{k-1}\right), \quad k/n \le t \le (k+1)/n, \quad k = 0, \cdots, n-1,$$

$$x_k := X_0 + \sum_{j=1}^{k} \sigma\left(\frac{j-1}{n}, x_{j-1}\right)\eta_j + \sum_{j=1}^{k} b\left(\frac{j-1}{n}, x_{j-1}\right)\Big/ n, \ k = 0, 1, \cdots, n,$$

$$\eta_k := B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad k=1,\cdots,n.$$

$Z_n := \{Z_n(t), 0\le t\le 1\}$ は区間$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k=0,1,\cdots,n-1$ ではブラウン運動と同じ道を持つためこのままでは計算機実験には用いられることが出来ない．そこで各区間$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$上で階段関数化したのが次の$X_n := \{X_n(t), 0\le t\le 1\}$である．

$$\begin{cases} X_n(t) := x_k, & k/n \le t < (k+1)/n, \quad k=0.\cdots,n-1 \\ X_n(1) := x_n, & \end{cases}$$

ここで$\{\eta_k\}$は$N(0,1/n)$を分布とするi.i.d.確率変数列である．

X_n及びZ_nの精度についてGhiman-Skorohod(1979)、Shimizu(1984)、Kanagawa (1988)などの結果が知られている．

定理(1988) $0\le s,t\le 1$ 及び$x,y\in\mathbf{R}^{\mathrm{d}}$ に対して

$$|\sigma(t,x)-\sigma(s,y)|^2 + |b(t,x)-b(s,y)|^2 \le K_1\left(|x-y|^2 + |t-s|^2\right),$$

$$|\sigma(t,x)|^2 + |b(s,y)|^2 \le K_2,$$

ただしK_1及びK_2はs, t, x, yに無関係な定数とする．この時任意の$p\ge 2$及び$\varepsilon > p/2$に対して

$$\boldsymbol{E}\left(\max_{0\le t\le 1}|X(t)-X_n(t)|^p\right) = o\left(n^{-p/2}(\log n)^{\varepsilon}\right) \quad as\ n\to\infty,$$

$$\boldsymbol{E}\left(\max_{0\le t\le 1}|X(t)-Z_n(t)|^p\right) = O\left(n^{-p/2}\right) \quad \text{as } n\to\infty.$$

最初に指摘した問題点について以下の論文を参照されたい．

S. Kanagawa, Error estimation for discretized Euler-Maruyama scheme for SDE's, Proceedings of the Workshop on Turbelent Diffusions and the Related Problems in Stochastic Numerics, Inst. Statist. Math., Tokyo, 1996, pp. 139 - 157.

田中哲，金川秀也、擬似乱数の検定法とSDEの近似解の精度について，数理解析研究所講究録 Vol. 1032, (1998) 21-45.

S. Kanagawa and Y, Saisho, Strong Approximation of Reflecting Brownian Motion Using Penalty Method and its Application to Cumputer Simulation, preprint.

Effects of Stochastic Interest Rates and Volatility on Contingent Claims

by Naoto Kunitomo and Yong-Jin Kim

November 29, 1999

1. Suppose that $S_t^{(\epsilon,\delta)} (t \geq 0)$ represents the price of the underlying security at t and it does not pay any dividends. We investigate the pricing problem of contingent claims by using the asymptotic expansion approach called the small disturbance asymptotics under the probability measure $Q(\epsilon, \delta)$ when the spot interest rate and the volatility of the underlying asset change stochastically. We assume that the price process $S_t^{(\epsilon,\delta)}$ follows the stochastic integral equation :

$$S_t^{(\epsilon,\delta)} = S_0 + \int_0^t r_s^{(\epsilon)} S_s^{(\epsilon,\delta)} ds + \int_0^t \sigma_s^{(\delta)} S_s^{(\epsilon,\delta)} dW_{1s}, \tag{1}$$

where $r_t^{(\epsilon)}$, the instantaneous spot interest rate, is given by the solution of

$$r_s^{(\epsilon)} = r_0 + \int_0^s \mu_r(r_u^{(\epsilon)}, u) du + \epsilon \int_0^s w_r(r_u^{(\epsilon)}, u) dW_{2u} \tag{2}$$

and $\sigma_s^{(\delta)}$, the instantaneous volatility function, is given by the solution of

$$\sigma_t^{(\delta)} = \sigma_0 + \int_0^s \mu_\sigma(\sigma_u^{(\delta)}, u) du + \delta \int_0^s w_\sigma(\sigma_u^{(\delta)}, u) dW_{3u} \ . \tag{3}$$

The instantaneous correlations among the underlying three Brownian motions $W_{is}(i = 1, 2, 3)$ are denoted as ρ_r, ρ_σ, and $\rho_{\sigma r}$, respectively.

Let $r_t = r_0 + \int_0^t \mu_r(r_s, s)ds$ and Y_t^r be the solution of $dY_t^r = \partial\mu_r(r_t, t)Y_t^r dt$ with $Y_0^r = 1$. Also let $\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \mu_\sigma(\sigma_s, s)ds$ and Y_t^σ be the solution of $dY_t^\sigma = \partial\mu_\sigma(\sigma_t, t)Y_t^\sigma dt$ with $Y_0^\sigma \mp 1$. We have investigated the theoretical prices of the futures, the forward rate, and the options for the underlying security when ϵ and δ are small. The asymptotic expansion approach we are using has been justified by the Watanabe-Yoshida Theory on Malliavin Calculus as discussed by Kunitomo and Takahashi (1998).

2. **Theorem 1** : An asymptotic expansion of the futures price at time zero with delivery time T, F_0, is given by $F_0 = S_0 \exp\left(\int_0^T r_s ds\right) \left\{1 + \epsilon \Sigma_{12}^{(r)}\right\} + o(\epsilon, \delta)$, as $\epsilon, \delta \downarrow 0$, where $\Sigma_{12}^{(r)} \equiv \rho_r \int_0^t \left(\int_u^t Y_s^r ds\right) (Y_u^r)^{-1} w_r(r_u, u)\sigma_u du$.

Theorem 2 : An asymptotic expansion of the current forward price with delivery time T, f_0, is given by $f_0 = S_0 \exp\left(\int_0^T r_s ds\right) + o(\epsilon, \delta)$, as $\epsilon, \delta \downarrow 0$.

Theorem 3 : An asymptotic expansion of the current value of the European call options with maturiy T, V_0, is given by

$$V_0 \ = \ \left[S_0\Phi(d_1) - K\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right)\Phi(d_2)\right]$$

$$
+\epsilon \frac{-\Sigma_{12}^{(r)}}{\sigma(T)^2} \left[d_2 S_0 \phi(d_1) - d_1 K \exp\left(-\int_0^T r_t dt \right) \phi(d_2) \right]
$$
$$
+\delta \left\{ \left[\frac{\Sigma_{12}^{(\sigma)}}{\sigma(T)^2} d_2 + \frac{\Sigma_{12}^{(\sigma)}}{\sigma(T)^3} (d_2^2 - 1) \right] \left[S_0 \phi(d_1) - K \exp\left(-\int_0^T r_t dt \right) \phi(d_2) \right] \right.
$$
$$
\left. -S_0 \frac{\Sigma_{12}^{(\sigma)}}{\sigma(T)^2} d_2 \, \phi(d_1) \right\} + o(\epsilon, \delta),
$$

where $\Phi(\cdot)$ is the standard normal distribution function and $\phi(\cdot)$ is its density function, $d_1 = \frac{1}{\sigma(T)} \left[log \frac{S_0}{K} + \int_0^T \left(r_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) ds \right]$, $d_2 = d_1 - \sigma(T)$, $\sigma(T)^2 = \int_0^T \sigma_s^2 ds$, and $\Sigma_{12}^{(\sigma)} \equiv \rho_\sigma \int_0^t \left(\int_u^t \sigma_s Y_s^\sigma ds \right) (Y_u^\sigma)^{-1} w_\sigma(\sigma_u, u) \sigma_u du$.

3. When both the spot interest rate and the volatility of the underlying security follow the diffusion processes, the security market is incomplete. When ϵ and δ are zero, however, the market is complete and it is simply the Black-Scholes economy with the deterministic interest rate and volatility. Thus we are considering the situation when the market is incomplete, but it is not far from the complete market (i.e. near-complete) in the sense of the small disturbance asymptotics.

We have discussed the effects of the theoretical prices of the contingent claims on the underlying security numerically. Two immediate examples are the Cox-Ingersoll-Ross type interest rate process and the Heath-Jarrow-Morton type processes. The spot interest rate in the latter case is not necessarily Markovian, but it is straightforward to extend our analysis to this case which was partially investigated by Kunitomo and Takahashi (1995).

We also suggested that the risk premium factors can be incorporated by modifying Equations (1)-(3) when both the spot interest rate and the volatility of the underlying security are stochastic under the probability measure Q (equivalent to the observed measure P) in an incomplete market framework.

References

[1] Kim, Yong-Jin and Kunitomo, N. (1999), "Pricing Options under Stochastic Interest Rates : A New Approach," *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 49-70.

[2] Kunitomo, N. and Takahashi, A. (1995), "The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rates Contingent Claims," Discussion Paper No.95-F-19, Faculty of Economics, University of Tokyo.

[3] Kunitomo, N. and Takahashi, A. (1998), "On Validity of the Asymptotic Expansion Approach in Contingent Claim Analysis," Discussion Paper No.98-F-6, Faculty of Economics, University of Tokyo.

[4] Takahashi, A. (1999), "An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Financial Contingent Claims," *Asia-Pacific Financial Market*, 6, 115-151.

Asymptotic Expansion for Small Diffusions Applied to Option Pricing

統計数理研究所　内田 雅之
東京大学数理　吉田 朋広

1 Introduction

Let $X_T = \{X_t^\varepsilon; t \in [T_0, T]\}$ be a d-dimensional diffusion process defined by the stochastic differential equation (statistical model)

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= V_0(X_t^\varepsilon, \theta)dt + \varepsilon V(X_t^\varepsilon, \theta)dw_t, \ t \in [T_0, T], \ \varepsilon \in (0, 1], \\ X_0^\varepsilon &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

where T is a fixed value, x_0 is a constant, a p-dimensional unknown parameter $\theta \in \Theta$: a bounded convex domain of $\mathbf{R}^d$, V_0 is an $\mathbf{R}^d$-valued smooth function defined on $\mathbf{R}^d \times \Theta$, V is an $\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r$-valued smooth function defined on $\mathbf{R}^d \times \Theta$ with bounded x-derivative and w is an r-dimensional standard Wiener process.

Under the equivalent martingale measure $\tilde{P}$, we consider d-dimensional diffusion process defined by the stochastic differential equation

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= \tilde{V}_0(X_t^\varepsilon, \theta)dt + \varepsilon V(X_t^\varepsilon, \theta)d\tilde{w}_t, \ t \in [T_0, T], \ \varepsilon \in (0, 1], \\ X_0^\varepsilon &= x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

where $\tilde{V}_0$ is an $\mathbf{R}^d$-valued smooth function defined on $\mathbf{R}^d \times \Theta$, $\tilde{w}$ is an r-dimensional standard Wiener process under $\tilde{P}$ and θ, V, T and x_0 are the same as (1). Many option pricing problems associated with small diffusion are related to functionals of the form

$$F_T^\varepsilon(\theta, \tilde{w}) = F_{T_0} + \int_{T_0}^T f_0(X_t^\varepsilon, \theta)dt + \varepsilon \int_{T_0}^T f(X_t^\varepsilon, \theta)d\tilde{w}_t, \tag{3}$$

where $F_{T_0} \in \mathbf{R}^k$, $f_0(x, \theta) \in C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d \times \Theta \to \mathbf{R}^k)$, i.e., $f_0(x, \theta)$ is an $\mathbf{R}^k$-valued smooth function defined on $\mathbf{R}^d \times \Theta$ and for any $i, j \in \mathbf{N}$ there exist $m_1, C_1 > 0$ such that $\sup_{\theta\in\Theta} |\delta^i \partial^j f_0(x, \theta)| \leq C_1(1 + |x|)^{m_1}$, and $f(x, \theta) \in C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d \times \Theta \to \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^r)$. Moreover,

$$\begin{aligned} G_T^\varepsilon(\theta, \tilde{w}) &= \exp\left\{ -\int_{T_0}^T r_s^\varepsilon(\theta, \tilde{w})ds \right\}, \\ r_T^\varepsilon(\theta, \tilde{w}) &= r_{T_0} + \int_{T_0}^T h_0(X_t^\varepsilon, \theta)dt + \varepsilon \int_{T_0}^T h(X_t^\varepsilon, \theta)d\tilde{w}_t, \end{aligned}$$

where $r_{T_0} \in \mathbf{R}$, $h_0(x, \theta) \in C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d \times \Theta \to \mathbf{R})$, $h(x, \theta) \in C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d \times \Theta \to \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}^r)$ and $r_s^\varepsilon(\theta, \tilde{w}) \geq 0$ for $s \in [T_0, T]$. To price European-type options at time $t = T_0$ we obtain the expectation

$$E_{T_0,\theta_0}[G_T^\varepsilon(\theta_0, \tilde{w})\mathrm{Max}\{F_T^\varepsilon(\theta_0, \tilde{w}) - K, 0\}], \tag{4}$$

where $E_{T_0,\theta_0}[\cdot]$ stands for the conditional expectation operator under $\tilde{P}$ given $\theta_0 \in \Theta$ at time $t = T_0$ and K is a striking price (see Hull [2]). However, we can not obtain this expectation because θ_0 is unknown parameter. Therefore, we estimate θ_0 and predict (4) by means of

$$E_{T_0,\hat{\theta}_\varepsilon(w)}[G_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w})\mathrm{Max}\{F_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) - K, 0\}], \tag{5}$$

where $\hat{\theta}_\varepsilon(w)$ is an estimator of θ_0 independent of $\{\tilde{w}_t; t \in [T_0, T]\}$. It is difficult to obtain this expectation explicitly, so we will derive the asymptotic expansion of (5).

2 Asymptotic expansion and option pricing

Let $(W, \mathcal{F}, P)$ be a probability space. Let $(\tilde{W}, \tilde{H}, \tilde{P})$ be an r-dimensional Wiener space associated with the Ornstein-Uhlenbeck operator $\tilde{L}$. It is then possible to extend $\tilde{L}$ over the product space $\bar{W} = W \times \tilde{W}$ (cf. Bichteler et. al. [1]).

Lemma 1 *$F_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) \in D^\infty(\bar{W}; \mathbf{R}^k)$ and it has the asymptotic expansion*

$$F_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) \sim f_{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon(w)) + \varepsilon f_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) + \varepsilon^2 f_1(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) + \cdots$$

in $D^\infty(\bar{W}; \mathbf{R}^k)$ as $\varepsilon \downarrow 0$ with $f_{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon(w)), f_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}), f_1(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}), \cdots \in D^\infty(\bar{W}; \mathbf{R}^k)$.

Assumption 1 *For any $p \in (1, \infty)$, the Malliavin covariance $\sigma_{f_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \cdot)}$ of $f_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \cdot)$ in Lemma 1 satisfies $\sup_{\varepsilon \in (0,1]} E[(\det \sigma_{f_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \cdot)})^{-p}] < \infty$.*

Lemma 2 *Let $\tilde{F}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) = \frac{F_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) - f_{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon(w))}{\varepsilon}$ and $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a smooth function such that $0 \le \psi(x) \le 1$ for $x \in \mathbf{R}$, $\psi(x) = 1$ for $|x| \le \frac{1}{2}$ and $\psi(x) = 0$ for $|x| \ge 1$. Let $\xi_\varepsilon(w, \tilde{w}) = 2(\det \sigma_{\tilde{F}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \cdot)} - \det \sigma_{f_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \cdot)}) / \det \sigma_{f_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \cdot)}$ and $\psi_\varepsilon^*(w, \tilde{w}) = \psi(\xi_\varepsilon(w, \tilde{w}))$. Suppose that Assumption 1 holds true. Then for any $T(x) \in S'(\mathbf{R}^k)$ (the space of Schwartz tempered distributions), $\psi_\varepsilon^*(w, \tilde{w}) T(\tilde{F}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w})) \in \tilde{D}^{-\infty}(\bar{W})$ has the asymptotic expansion*

$$\psi_\varepsilon^*(w, \tilde{w}) T(\tilde{F}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w})) \sim \Phi_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) + \varepsilon \Phi_1(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) + \cdots$$

in $\tilde{D}^{-\infty}(\bar{W})$ as $\varepsilon \downarrow 0$ uniformly in every class $\{T\}$ satisfying the condition 5) of Theorem 4.1 in Yoshida [4], and $\Phi_0(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}), \Phi_1(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}), \cdots$ in $\tilde{D}^{-\infty}(\bar{W})$ are determined by the formal Taylor expansion.

From Lemmas 2.1 and 2.2 in Yoshida [3] and Lemmas 1 and 2, we see that for $A_\varepsilon(\theta) = \left\{x; x \ge \frac{K - f_{-1}(\theta)}{\varepsilon}\right\}$, the composite functional $(F_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) - K) \psi_\varepsilon^*(w, \tilde{w}) 1_{A_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w))}(\tilde{F}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}))$ $=: \bar{F}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w})$ is well-defined and we define $\bar{H}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) = G_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w}) \bar{F}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w})$.

Theorem 1 *Suppose that Assumption 1 holds true. Then $E_{T_0, \hat{\theta}_\varepsilon(w)}[\bar{H}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w})] \in L_p(\mathbf{R}^k)$ has the asymptotic expansion*

$$E_{T_0, \hat{\theta}_\varepsilon(w)}[\bar{H}_T^\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w), \tilde{w})] \sim \int_{A_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w))} p_0(x, \hat{\theta}_\varepsilon(w)) dx + \varepsilon \int_{A_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w))} p_1(x, \hat{\theta}_\varepsilon(w)) dx + \cdots$$

in $L_p(\mathbf{R}^k)$ as $\varepsilon \downarrow 0$ with $\int_{A_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w))} p_0(x, \hat{\theta}_\varepsilon(w)) dx, \int_{A_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon(w))} p_1(x, \hat{\theta}_\varepsilon(w)) dx, \cdots$ in $L_p(\mathbf{R}^k)$.

References

[1] Bichteler, K., Gravereaux, J.-B., Jacod, J.: Malliavin calculus for processes with jumps. New York London Paris Montreux Tokyo: Gordon and Breach Science Publishers (1987)

[2] Hull, J.: Options, futures, and other derivative securities, second edition. Prentice-Hall, New Jersey. (1993)

[3] Yoshida, N.: Asymptotic expansion of maximum likelihood estimators for small diffusions via the theory of Malliavin-Watanabe. Probab. Theory Relat. Fields **92**, 275-311 (1992)

[4] Yoshida, N.: Asymptotic expansion for statistics related to small diffusions J. Japan Statist. Soc. **22**, 139-159 (1992)

Lower bounds for estimating the stochastic volatility

Marc Hoffmann

We observe $X^n = (X_{i/n}, i = 0, \dots, n)$, where $(X_t)_{t\in[0,1]}$ is a 1-dimensional diffusion process of the form

$$X_t = x_0 + \int_0^t v_s\, dB_s + \int_0^t b(s, v_s, X_s)ds,\ t \in [0,1] \tag{0.1}$$

where $x_0 \in \mathbf{R}$, B is a standard Brownian motion, the function b is smooth and the diffusion coefficient $(v_t)_{t\in[0,1]}$ -the so-called stochastic volatility- solves the 1-dimensional equation

$$v_t = v_0 + \int_0^t \sigma(\theta, v_s)\, dW_s + \int_0^t \rho(s, v_s)ds,\ t \in [0,1] \tag{0.2}$$

with $v_0 \in \mathbf{R}$, W a standard Brownian motion independent of B and ρ smooth. The function $\sigma(\theta, x)$ is known up to the parameter $\theta \in \Theta$, where $\Theta \subset \mathbf{R}^k$, $k \geq 1$ is given. Our aim is to estimate θ from the data X^n. Asymptotics are taken as $n \to \infty$. In this setup, the drift term (b, ρ) cannot be identified from the data and is considered as a nuisance parameter. Likewise, the initial condition v_0 is unknown. The assumptions on Equations (0.1) and (0.2) are the following.

Assumption A A1. For all $\theta \in \Theta$, the map $x \to \sigma(\theta, x)$ is Lipschitz continuous and satisfies $\inf_x \sigma(\theta, x) > 0$.
A2. We have $\sup_{t,x} |b(t,x,y)| \leq C_1(1 + |y|)$ and $\sup_t |\rho(t,x)| \leq C_2(1 + |x|)$ for two constants $C_1, C_2 > 0$. ∎

We assess the quality of an estimation procedure in squared-error loss, uniformly over the parameter set Θ. If $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X^n)$ is an estimator of θ, we introduce its risk

$$\mathbf{R}_n(\hat{\theta}_n, \Theta, \varphi_n) = \sup_{b,\rho} \sup_{v_0 \in V, \theta \in \Theta} E_\theta^n \left\{ \varphi_n^{-2} |\hat{\theta}_n - \theta|^2 \right\} \tag{0.3}$$

where φ_n is a normalizing factor and $|\cdot|$ is the Euclidean norm on $\mathbf{R}^k$. The notation $E_\theta^n = E_\theta^n(b, \rho)$ denotes integration w.r.t. the law of $(X_{i/n}, i = 1, \dots, n)$ on the canonical space $\mathbf{R}^n$ endowed with its Borel σ-field $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. The supremum in (b, ρ) is taken over all admissible drifts which satisfy Assumption A2. The supremum in v_0 is taken over a (known) subset $V \subseteq \mathbf{R}$ of possible initial conditions for the process v. Of course, the finiteness of $\mathbf{R}_n$ will be meaninful only if $\varphi_n \to 0$ as $n \to \infty$.

We further impose the following restrictions on V, Θ and σ, which assess in some sense the non-degeneracy of the parameter space Θ. If $\zeta \in \mathbf{R}^{k-1}$ and $i_0 \in \{1, \dots, k\}$, we set

$$\theta[i_0, \zeta] = (\zeta_1, \dots, \zeta_{i_0-1}, \theta_{i_0}, \zeta_{i_0+1}, \dots, \zeta_k)$$

and write Θ_{i_0} for the restriction of Θ to its i_0-th component.

Assumption B There exist $\zeta \in \mathbf{R}^{k-1}$, $i_0 \in \{1,\ldots,k\}$, $U \subseteq \Theta_{i_0}$ such that

B1. The family of equations

$$x = \sigma(\theta[i_0,\zeta],x),\ \theta_{i_0} \in U$$

has a family of (measurable) solutions $(x(\theta[i_0,\zeta]),\theta_{i_0} \in U)$ satisfying

(i) $(x(\theta[i_0,\zeta],\theta_{i_0} \in U)) \subseteq V$,

(ii) $(\sigma(\theta[i_0,\zeta],x(\theta[i_0,\zeta]),\theta_{i_0} \in U))$ contains an open set.

B2. The map $\theta_{i_0} \to \sigma(\theta[i_0,\zeta],v_0)$ is Lipschitz continuous, uniformly in $v_0 \in V$. ∎

Theorem 1 *Grant Assumptions A and B. The rate $\varphi_n = n^{-1/4}$ is a lower bound for the estimation of θ, i.e.*

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\hat{\theta}_n} \mathbf{R}_n(\hat{\theta}_n,\Theta,n^{-1/4}) > 0$$

where the infimum is taken over all estimators.

Assumption B is satisfied for some classical stochastic volatility models, such as those considered by Hull and White or Heston ([6],[5]). A slightly annoying fact is that the model with diffusion coefficient $\sigma(\theta,x) = \frac{1}{2}\sqrt{\theta}x$ does not satisfy Assumptions A1 and B1, and has some importance in the mathematical finance literature (see Wiggins, Chesney and Scott, Melino and Turnbull (see [8], [1], [7]). However, in this specific case, a simple modification of the proof of Theorem 1 yields

Theorem 2 *Grant Assumptions A2. Assume that $\Theta \subset (0,\infty)$ and that $V \cap \sqrt{\Theta}$ contains an open set. For the particular model $\sigma(\theta,x) = \frac{1}{2}\sqrt{\theta}x$, we have Theorem 1.*

Several remarks are in order: first, Theorem 1 and 2 are still valid if we take $V = \mathbf{R}$ and if we relax assumption A to arbitrary (ρ,b) -provided that Equations (0.1) and (0.2) are still meaningful- but it is dubious that one can find an estimator providing the finitness of $\mathbf{R}_n$ for any $\varphi_n \to 0$ in this case. Second, under further minor restrictions, this rate can be attained and is therefore optimal. Indeed, Gloter, [4], constructed asymptotically mixed normal estimators for the normalization $n^{-1/4}$. Presumably, a slight modification of his argument -and additional assumptions like for instance the boundedness of Θ- would show that the estimators he considered converge for the risk $\mathbf{R}_n$.

References

[1] Chesney, M. and Scott, L. (1989) *Pricing European currency options: A comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model.* J. Financial Quantitive Anal., **24**, 267-289.

[2] Genon-Catalot, V., Jeantheau, T. and Laredo, C. (1998a) *Limit theorems for discretely observed stochastic volatility models.* Bernoulli **4**, 283-303

[3] Genon-Catalot, V., Jeantheau, T. and Laredo, C. (1998b) *Parameter estimation for discretely observed stochastic volatility models.* To appear in Bernoulli **5**.

[4] Gloter, A. (1999) Personnal communication. Groupe de travail Statistique des processus, Université Paris 6, april 1999.

[5] Heston, S.L. (1993) *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.* Review of Financial Studies **6**, 327-343.

[6] Hull, J. and White, A. (1988) *An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility.* Advances in Futures and Options Research **3**, 29-61.

[7] Melino, A. and Turnbull, S.M. (1990) *Pricing foreign currency options with stochastic volatility.* Journal of Econometrics, **45**, 239-265.

[8] Wiggins, J.B. (1987) *Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates.* Journal of Financial Economics, **19**, 351-372.

相関をもつマルコフ連鎖と信用リスク管理

東京都立大学 経済学部 木島 正明

1 はじめに

社債の信用リスク評価のためにはデフォルトと回収率のモデル化が重要であるが，デフォルトまでの振舞いを信用力(格付け)を表わすマルコフ連鎖で記述するモデルが注目されている．しかし，金融機関は社債をポートフォリオで保有しており，格付けの変動には相関があるので，信用リスク評価のためには相関のあるマルコフ連鎖モデルが必要となる．本稿では，相関のあるマルコフ連鎖モデルを提案し，社債ポートフォリオの信用リスク評価を試みる．

2 相関のあるマルコフ連鎖モデル

状態空間$\mathcal{S} = \{1, 2, \cdots, K, K+1\}$をもつ$n$個のマルコフ連鎖$\{X_t^k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$を考え，マルコフ連鎖$\{X_t^k\}$はk番目の企業(あるいは金融資産)の格付けの推移を表わすとする．本稿では，以下のモデルを提案する．

$\{X_t^k\}$のダイナミズムを次のように仮定する．

$$X_{t+1}^k = \begin{cases} \xi\Big(X_t^k + Z_{t+1}^k + (-1)^{\delta_k} B_{t+1}^k Y_{t+1}\Big), & X_t^k \neq K+1 \\ X_t^k, & X_t^k = K+1 \end{cases} \tag{1}$$

ここでδ_kは相関の正負に応じて0または1をとる定数，B_t^kは独立で同一の分布に従う(IID)パラメータα_kをもつベルヌーイ確率変数列で

$$P\{B_t^k = 1\} = 1 - P\{B_t^k = 0\} = \alpha_k, \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1, \tag{2}$$

Y_tは平均0で整数値をとるIIDな確率変数列，Z_{t+1}^kは(マルコフ性を規定する)X_t^kに依存した増分

$$P\{Z_{t+1}^k = j - i | X_t^k = i\} = q_{ij}^k, \quad i, j \in \mathcal{S}, \tag{3}$$

である(q_{ij}^kはマルコフ連鎖$\{X_t^k\}$の推移確率ではないことに注意)．また，$\xi(x)$は境界での振舞いを規定する関数で

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq K \\ K+1, & x \geq K+1 \end{cases} \tag{4}$$

で定義される．k番目の確率変数列$\{B_t^k\}$, $\{Z_t^k\}$は$\{Y_t\}$および他の確率過程と独立とする．したがって，マルコフ連鎖$\{X_t^k\}$は“共通”のファクター$\{Y_t\}$をとおしてのみ相関がある．確率1で$B_t^k = 0$ならば，マルコフ連鎖$\{X_t^k\}$は互いに独立である．

モデル(1)は以下のような意味合いをもつ．簡単化のために，$X_t^k \neq K+1$および$X_{t+1}^k \neq 1, K+1,$と仮定しよう．このとき，(1)と(4)式から，マルコフ連鎖$\{X_t^k\}$の増分は

$$X_{t+1}^k - X_t^k = (-1)^{\delta_k} B_{t+1}^k Y_{t+1} + Z_{t+1}^k \tag{5}$$

となる．これは増分を1つの共通ファクターY_{t+1}で説明しているモデルであり，このためY_{t+1}を**システマティック・リスク**，Z_{t+1}^kは企業kの**個別リスク**であると考えられる．ファクター$(-1)^{\delta_k}B_{t+1}^k$はCAMPで言うところの"β"であり，後述するように，これはマルコフ連鎖間の相関に関係している．

いま，2つのマルコフ連鎖の増分の共分散

$$c_{k\ell}^n = \mathrm{Cov}\Big(X_{t+1}^k - X_t^k,\, X_{t+1}^\ell - X_t^\ell\Big), \quad t = 0, 1, 2, \cdots,$$

を考える．簡単化のために，(5)式を仮定する．このとき，(1)式と仮定された独立性より

$$c_{k\ell}^n = \mathrm{Cov}\Big(Z_{t+1}^k + (-1)^{\delta_k}B_{t+1}^k Y_{t+1},\, Z_{t+1}^\ell + (-1)^{\delta_\ell}B_{t+1}^\ell Y_{t+1}\Big) = (-1)^{\delta_k+\delta_\ell}\alpha_k\alpha_\ell V[Y_{t+1}]$$

が得られる．ただし$V[Y_t]$はY_tの分散を表わす．また，$E[Y_{t+1}] = 0$なので

$$V[X_{t+1}^k - X_t^k] = V[Z_{t+1}^k] + \alpha_k V[Y_{t+1}]$$

が成立する．したがって，マルコフ連鎖の増分間の相関$\rho_{k\ell}^t$は

$$\rho_{k\ell}^t = (-1)^{\delta_k+\delta_\ell}\frac{\alpha_k\alpha_\ell V[Y_{t+1}]}{\sqrt{V[Z_{t+1}^k] + \alpha_k V[Y_{t+1}]}\sqrt{V[Z_{t+1}^\ell] + \alpha_\ell V[Y_{t+1}]}} \tag{6}$$

で与えられる．特に，分散$V[Z_{t+1}^k]$が分散$V[Y_t]$に比べて小さいならば，(6)式の右辺は時間tと独立で

$$\rho_{k\ell} = \lambda_k\lambda_\ell, \quad k, \ell = 1, 2, \cdots, n, \quad k \neq \ell, \tag{7}$$

となる．ただし

$$\lambda_k = (-1)^{\delta_k}\sqrt{\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

とおいた．

以上のモデルに基づいて実証研究を行なったところ，銘柄数10程度のポートフォリオにおける信用リスク分析では，本モデルは実務的に有益であることがわかった．今後は，大規模なポートフォリオにも本モデルによる信用リスク分析が有効であることを確認する必要がある．

References

[1] 木島正明(1998)，金融リスクの計量化(下)：クレジット・リスク，金融財政事情研究会．

[2] 木島正明・小守林克哉(1999)，信用リスク評価の数理モデル，朝倉書店．

[3] Jarrow, R.A., D. Lando and S.M. Turnbull (1997), "A Markov model for the term structure of credit risk spread," *Review of Financial Studies*, 10, 481–523.

[4] Kijima, M. (1997), *Markov Processes for Stochastic Modeling*, Chapman & Hall.

[5] Kijima, M. (1998), "Monotonicities in a Markov chain model for valuing corporate bonds subject to credit risk," *Mathematical Finance*, **8**, 229–247.

[6] Lando (1998), "On rating transition analysis and correlation," *Credit derivatives*, R. Jameson Ed., Risk Magazine, forthcoming.

An Improvement in Portfolio Selection through Parameter Certainty Equivalence

IBJ-DL Financial Technology Co., Ltd.
Hiroyuki Kashima

Abstract

This paper discusses an improvement in portfolio selection through Parameter Certainty Equivalence. Specifically, we first show that the portfolio selection problem can result in a statistical decision problem in some situations. Second, we illustrate methods of portfolio selection that are superior to the Parameter Certainty Equivalence method from the viewpoint of maximizing the expected utility. Third, we consider the Bayesian approach in this discussion.

Key words

portfolio selection problem, Parameter Certainty Equivalence, maximization of expected utility, Bayesian approach.

Introduction

In portfolio selection through the estimation of parameters, problems of Parameter Certainty Equivalence (the concept of decision-making by regarding estimated values as true parameters) have been discussed in several papers. For example, Lence and Hayes (1994) have indicated the following :

(a) The realistically existing estimation risk is neglected.

(b) Subjective information not reflected in the sample data is unavailable for portfolio selection.

It is well known that the Bayesian approach is well suited for solving these problems. (e.g. Frost and Savarino (1986), Jorion (1986), Lence and Hayes (1994)). However, we believe that this problem has not been sufficiently discussed from the viewpoint of maximizing the expected utility. The purpose of portfolio selection is to maximize the expected utility, which involves the utilization of statistical methods.

This paper is organized as follows. Before our discussion, we formulate the problem of selecting a portfolio through the estimation of parameters. We then specify the relation between portfolio selection and the statistical decision problem that is present under some circumstances. Second, we derive methods of portfolio selection that are superior to the Parameter Certainty Equivalence method. Third, we consider the relation between the Bayesian approach and this problem.

Conclusion

We can obtain the portfolio decision function $\phi_{\beta_0}^{(r)}$ so that it dominates ϕ_{PCE} by adopting r so that it satisfies a regularity condition, for example r_+. In $\phi_{\beta_0}^{(r)}$, we can select any β_0 as a subjective view of the unknown true β. That is, $\phi_{\beta_0}^{(r)}$ constructed by r satisfying a regularity condition can play a role as a composite device to guarantee a synergistic effect between the objective information $\hat{\beta}$ and the subjective information β_0 in portfolio selection.

Moreover, if we require the admissibility of δ to construct ϕ, then it is enough to adopt r^* as r in $\phi_{\beta_0}^{(r)}$. $\phi_{\beta_0}^{(r^*)}$ can be obtained by regarding β as a random variable that has a special prior density with a mean of β_0. Although the accuracy of prior information is usually the crucial problem in the Bayesian approach, we can surmount this problem in portfolio selection by using the special prior density.

Consequently, we come to consider the estimation risk by regarding β as a random variable and to obtain the availability of subjective information by using $\phi_{\beta_0}^{(r)}$. Thus, (a) and (b), which are defined in the section 1, can be naturally solved by pursuing the maximization of expected utility.

REFERENCES

Bawa, V., Brown, S. and Klein, R. (1979). *Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice* (North-Holland Publishing Co., Amsterdam.).

Berger, J. O. (1976). Admissible minimax estimation of a multivariate normal mean with arbitrary quadratic loss, *Ann. Statist.*, **4**, 223-226.

Frost, P. A. and Savarino, J. E. (1986). An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 21, No. 3(September), 293-305.

Jorion, P. (1986). Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 21, No. 3(September), 279-292.

Lence, S. H. and Hayes, D. J. (1994). Parameter-based Decision Making under Estimation Risk: An Application to Futures Trading, *Journal of Finance*, vol. XLIX, NO. 1(March), 345-357.

Optimal Estimation for Random Coefficient Autoregressive Models

Ajay CHANDRA and Masanobu TANIGUCHI

Osaka University

Abstract

This paper dicusses the problem of estimation for a class of non-linear models, which are called random coefficient autoregressive (RCA) models. First, assuming that the nuisance parameters are known we construct an estimator $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ for parameter $\boldsymbol{\theta}$ of interest based on Godambe's asymptotically optimal estimating function. Then, using the conditional least squares (CLS) estimator given by Tjøstheim (1986) and moment estimators for the nuisance parameters, we propose the estimated version $\hat{\hat{\theta}}$ of $\hat{\theta}$. We study the asymptotic behaviour of $\hat{\hat{\theta}}$. Comparison between the CLS and $\hat{\hat{\theta}}$ is given via simulation studies.

Keywords and Phrases: Non-linear time series models; random coefficient autoregressive models; conditional least squares estimator; estimating functions; moment estimator; asymptotic optimality.

1. Introduction

The studies of non-linear time series models have received a large amount of attention, for example, Nicholls and Quinn (1982), Tjøstheim (1986) and Tong (1990). These are due to the observation that a lot of real data in fields such as hydrology, metrology and biology exhibit features like occasional sharp spikes, which cannot be sufficiently explained by classical linear time series models. Such features arise when the coefficients of the model considered have many random characteristics. One convincing way of modeling the underlying process in such situations is the consideration of random coefficient autoregressive (RCA) models. For these models, Nicholls and Quinn (1982) developed a rigorous statistical theory which cover the case of vector-valued autoregressive (AR) models.

In the estimation of non-linear time series models, Tjøstheim (1986) proposed a conditional least squares (CLS) estimator, and elucidated the asymptotics of it. Godambe (1960) and (1985) developed the theory of estimating function for stochastic models, and introduced the concept of asymptotically optimal estimating function.

In this paper, we consider the problem of estimation for RCA models. First, we construct Godambe's optimal estimator for the parameter of interest assuming that the nuisance parameters are known. Then, using the CLS estimator and moment estimators for the nuisance parameters we propose the estimated version of Godambe's optimal estimator. This new estimator is expressed in a closed form. We study the asymptotic behaviour of the estimator. Also, we compare, via simulation, the mean square error of the estimator in various situations.

References

FEIGIN, P. D AND TWEEDIE, R. L. (1985). Random coefficient autoregressive processes: a Markov chain analysis of stationarity and finiteness of moments. *J. Time Series Anal.,* **6**, 1-14.

FULLER, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series,* 2nd ed. New York: Wiley.

GODAMBE, V. P. (1960). An optimum property of regular maximum likelihood equation. *Ann. Math. Statist.*, **31**, 1208-11.

GODAMBE, V. P. (1985). The foundations of finite sample estimation in stochastic processes. *Biometrika,* **72**, 319-28.

HALL, P. AND HEYDE, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and Its Applications.* Academic Press, New York.

KLIMKO, L. A. AND NELSON, P. I. (1978). On conditional least squares estimation for stochastic processes. *Ann. Statist.,* **6**, 629-642.

MAGNUS, J. R. AND NEUDECKER, H. (1988). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics.* Chichester: Wiley.

NICHOLLS, D. F. AND QUINN, B. G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction,* Lecture Notes in Statistics, Vol. No. 11, Springer, New York.

THAVANESWARAN, A. AND ABRAHAM, B. (1988). Estimation for nonlinear time series models using estimating equations. *J. Time Series Anal.,* **13**, 99-108.

TJØSTHEIM, D. (1986). Estimation in non-linear time series models. *Stoch. Proc. Appl.,* **21**, 251-273.

TONG, H. (1990). *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach.* Oxford: Oxford Univ. Press.

Elimination of Third-Series Effect and Defining Partial Measures of Causality

Yuzo Hosoya
Tohoku University, Sendai 980-8576, Japan

ABSTRACT Using the one-way effect extraction method, this paper presents a set of partial causal measures which represents quantitatively the interdependence between a pair of vector-valued processes in the presence of a third process. Those measures are defined for stationary as well as for a class of non-stationary time-series. In contrast to conventional conditioning methods, the partial concept defined in the paper would be mostly devoid of feedback distortion by the third process. The paper also discusses statistical inference on the proposed measures.
Detection of causal directions and their extent among a set of time series is one of the major interests in time-series analysis, and the literature has centerd around the causality concept Granger (1963, 69) introduced as a statistically testable criterion defined in terms of prediction improvement based on the assumption that the cause chronologically precedes the effect and the future does cause the past. If a third-series intervention is taken into account, however, his concept is not necessarily well-founded and is known to incur sometimes such phenomena as spurious or indirect causality due to possible feedback with third series (see Granger, 1980; Hsiao, 1982 for example).

To circumvent the difficulty, this paper proposes an operational way of defining the partial causality between a pair of processes based on the elimination from both of the processes only of the one-way effect due to the third process. The proposed elimination method would preserve the inherent feedback structure in the two processes concerned. By means of this partial concept, the paper extends the measures given by Hosoya (1991a, 97) to circumstances where a third-series is present, introducing a set of partial causal measures.

The paper is organized as follows: Section 2 illustrates by examples how conventional third-series effect elimination methods do not pertain to the causal analysis and in contrast how the elimination method proposed in this paper works. Section 3 provides the background for the concept of one-way effect via the Sims representation of Granger's non-causality. Section 4 shows how to construct the partial causal measures between a pair of non-deterministic stationary processes on the basis of the elimination from this pair of the one-way effect by a third process. That section also extends Sims' characterization of the Granger non-causality to the case of a third series presence (Theorem 4.3) and also shows that the proposed partial concept avoids Hsiao's spurious causality (Theorem 4.4). Dealing with a class of possibly nonstationary reproducible processes, Section 5 extends the partial causal measures to that class and exhibits how to construct those measures in nonstationary circumstances. Section 6 concludes the paper by discussion on large-sample inference on the partial measures.

ACKNOWLEDGEMENT The research is partially supported by the Japanese Ministry of Education Scientific Research Grant No.(C)(2)-09630023. The paper is available by request to the author(correspondence: hosoya@econ.tohoku.ac.jp).

REFERENCES

Geweke, J. (1984) Measures of conditional linear dependence and feedback between time series. *Journal of the American Statistical Association* 79, 907-15.

Granger, C.W.J. (1963) Economic process involving feedback. *Information and Control* 6, 28-48.

Granger, C.W.J. (1969) Investigating causal relations by cross-spectrum methods. *Econometrica* 39, 424-438.

Granger, C.W.J. (1980) Testing for causality: a personal view-point. *Journal of Economic Dynamics and Control* 2, 329-52.

Hosoya, Y. (1977) On the Granger condition for non-causality. *Econometrica* 45, 1735-6.

Hosoya, Y. (1991) The decomposition and measurement of the interdependency between second-order stationary processes. *Probability Theory and Related Fields* 88, 429-444.

Hosoya, Y. (1997a) Causal analysis and statistical inference on possibly non-stationary time series, in *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Application, Seventh World Congress Vol.III*, eds D.M. Kreps and K.F. Wallis, Cambridge University press, Cambridge.

Hosoya, Y. (1997c) A note on factorization of multivariate ARMA spectra. *The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report* 103, 60-69.

Hsiao, C. (1982) Time series modelling and causal ordering of Canadian money, income and interest rates, in *Time Series Analysis: Theory and Practice I*, ed. O.D. Anderson, 671-98. North-Holland, Amsterdam.

Sims, C. (1972) Money, income and causality. *American Economic Review* 62, 540-52.

Yao, F. and Hosoya, Y. (1998) Inference on one-way effect and evidence in Japanese macroeconomic data. To appear in *Journal of Econometrics*.

フラクショナル ARIMA モデルに関する統計理論

一橋大学大学院経済学研究科　　田中　勝人

本稿の目的は，伝統的な ARIMA モデルをフラクショナル ARIMA (**ARFIMA**) モデルに拡げた上で,「単位根問題」や「共和分分析」を考えることである．以下では，そのために必要な統計理論について基本的なことがらを述べることにする．

時系列 $\{y_t\}$ が，ARFIMA(p,d,q) モデル

$$y_t = (1-L)^{-d}\phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t = (1-L)^{-d}\psi(L)\varepsilon_t \tag{1}$$

に従うものとする．ここで，$\psi(L)=\phi^{-1}(L)\theta(L)$, $\varepsilon_t \sim$ i.i.d.$(0,\sigma^2)$ であり，4 次までのモーメントをもつとする．このとき，次のような結果が成立する．

標本平均

(i) $|d|<1/2$ のとき (Hosking 1996)

$$T^{1/2-d}\,\bar{y} \longrightarrow \mathrm{N}(0,\sigma^2\psi^2(1)\omega^2) \tag{2}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\omega^2 &= Var(w_d^{(I)}(1))\\ &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)}\left[\int_{-\infty}^{0}\{((1-s)^d-(-s)^d)^2\}\,ds+\int_0^1(1-s)^{2d}\,ds\right]\\ &= \frac{\Gamma(1-2d)}{(2d+1)\Gamma(1-d)\Gamma(1+d)}\end{aligned}$$

(ii) $d\geq 1/2$ のとき (Tanaka 1999)

$$T^{1/2-d}\,\bar{y} \longrightarrow \mathrm{N}(0,\sigma^2\psi^2(1)\kappa^2) \tag{3}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= Var(w_d^{(II)}(1)) = \frac{1}{\Gamma^2(d+1)}\int_0^1(1-s)^{2d}\,ds\\ &= \frac{1}{(2d+1)\Gamma^2(d+1)}\end{aligned}$$

2 次モーメント

(i) $-1/2<d<1/4$ のとき (Hannan 1976)

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t^2-Var(y_t)\right) \longrightarrow \mathrm{Normal}$$

(ii) $d=1/4$ のとき (Hosking 1996)

$$\frac{1}{\sqrt{T\log T}}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t^2-Var(y_t)\right) \longrightarrow \mathrm{Normal}$$

(iii) $1/4 < d < 1/2$ のとき (Rosenblatt 1961)

$$\frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t^2 - Var(y_t)\right) \longrightarrow \textbf{Rosenblatt distribution}$$

(iv) $1/2 < d$ のとき (Chan and Wei 1988, Liu 1998, Tanaka 1999)

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\sigma^2\psi^2(1)\int_0^1 \left(w_{d-1}^{(II)}(t)\right)^2 dt\right)$$

最尤推定量 (Fox and Taqqu 1986, Li and McLeod 1986, Dahlhaus 1989, Yajima 1989, Tanaka 1999)

誤差項の正規性のもとで，$d > -1/2$ なる任意の実数 d に対して，その **MLE** (あるいは，擬似 MLE) を $\hat{d}$ とするとき，次の結果が成り立つ．

$$\sqrt{T}(\hat{d} - d) \longrightarrow \mathrm{N}(0, \omega^{-2})$$

ここで，

$$\omega^2 = \pi^2/6 - \delta'\Omega^{-1}\delta, \qquad \delta = (\kappa_1, \cdots, \kappa_p, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)'$$

$$\kappa_i = \sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{j}a_{j-i}, \qquad \lambda_i = -\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{j}b_{j-i},$$

であり，a_j と b_j は，それぞれ，$\phi^{-1}(L)$ と $\theta^{-1}(L)$ の展開表現における L^j の係数，また，Ω はパラメータ ϕ と θ に対するフィッシャー情報行列である．

検定統計量 (Robinson 1994, Tanaka 1999)

検定問題

$$H_0 : d = d_0 \quad H_1 : d < d_0$$

に対する検定統計量として，

$$S_T = \sqrt{T}\sum_{j=1}^{T-1}\frac{1}{j}\hat{\rho}_j \Big/ \hat{\omega}$$

を考える．ただし，$\hat{\rho}$ は H_0 のもとで計算された残差に基づく自己相関，$\hat{\omega}$ は d の最尤推定量の標準誤差の推定量である．S_T が小さいときに H_0 を棄却する検定は，誤差項が正規ならば，適当な変換群のもとで **LBI** となる．また，局所対立仮説 $H_1 : d = d_0 + c/\sqrt{T}$ (c は固定された負の実定数) のもとで，

$$S_T \longrightarrow \mathrm{N}(c\omega, 1)$$

を得るので，**漸近的局所検出力**は，N(0,1) の分布関数 $\Phi(\cdot)$ を使って

$$\lim_{T\to\infty} P(S_T < -z_\alpha | d = d_0 + c/\sqrt{T}) = \Phi\left(-z_\alpha - c\omega\right)$$

と表すことができる．

On Fractional Cointegration

Yoshihiro Yajima(University of Tokyo)

Peter M. Robinson(London School of Economics)

1.Fractionally Integrated Processes and cointegration

Let $X_t,\ t = 0, \pm 1, \ldots$, be a p-dimensional covariance stationary vector process and put $X_t = (X_{1t}, \ldots, X_{pt})'$ and its spectarl density matrix $f(\lambda)$ is defined by

$$f(\lambda) = \mathrm{diag}\{(1-e^{-i\lambda})^{-d_a}\}C(e^{-i\lambda})C(e^{i\lambda})'\mathrm{diag}\{(1-e^{i\lambda})^{-d_a}\}/(2\pi),$$

where $-1/2 \leq d_a < 1/2 (a = 1, \ldots, p)$ and $C(e^{i\lambda})$ is a $p \times p$ matrix.

Definition 1 If $C_a(e^{i\lambda})(a = 1, \ldots, p)$ is continuous at $\lambda = 0$ and

$$C_a(1) \neq \mathbf{o}',$$

where $C_a(e^{i\lambda})$ be the ath row vector of $C(e^{i\lambda})$, $\{X_t\}$ is called stationary $I(d_1, \ldots, d_p)$.

Hereafter we assume that

$$(1) \qquad d_1 = \ldots = d_{i_1} > d_{i_1+1} = \ldots = d_{i_2} > \cdots > d_{i_{s-1}+1} = \ldots = d_{i_s},$$

where $1 \leq s \leq p,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s = p$, and $i_0 = 0$.

Let X_t be an $I(d_1, \ldots, d_p)$ process and $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)'$ be a p-dimensional vector. Now we express $\boldsymbol{\beta}$ by

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}(1)', \ldots, \boldsymbol{\beta}(s)')',$$

where $\boldsymbol{\beta}(j) = (\beta_{i_{j-1}+1}, \ldots, \beta_{i_j})'(j = 1, \ldots, s)$ is an $(i_j - i_{j-1})$-dimensional vector, being conformed to the partition of $(d_1, \ldots, d_p)$ of (1) and also partition the original time series X_t into subsets of groups $X_t^{(j)} = (X_{i_{j-1}+1,t}, \ldots, X_{i_j,t})'(j = 1, \ldots, s)$.

Definiton 2 If there exists a nonzero vector $\boldsymbol{\beta}(j)$ such that $\boldsymbol{\beta}(j)'X_t^{(j)}$ is $I(d_e)$ with $d_e < d_{i_j}$,then we call X_t cointegrated with cointegrating vector $\boldsymbol{\beta} = (0, \ldots, 0, \boldsymbol{\beta}(j)', 0, \ldots, 0)'$.

2.Determination of Cointegrating rank (Stationary case)

Defintion 2 implies that a procedure of determining fractional cointegrating rank should consist of two steps.

First we have to partition the original time series X_t into subsets of groups $X_t^{(j)} (j = 1, \ldots, s,\ 1 \leq s \leq p)$ so that (1) holds and each component process $X_{at}(i_{j-1} + 1 \leq a \leq i_j)$ of $X_t^{(j)}$ is $I(d_{i_j})$ with the same fractional difference parameter d_{i_j}.

After X_t is partitioned into subsets of groups $X_t^{(j)}$ so that (1) holds, next we determine fractional cointegrating rank of each process $X_t^{(j)}(j = 1, \ldots, s)$.

We apply a closing testing method for analysis of variance with a suitable modification to partition the original process into subsets of groups with the same fractional difference parameter.

Next we estimate the rank of the spectral density matrix at zero frequency which is equal to that of cointegrating rank by using the periodograms in the vicinity of it.

Martingale Expansion and Conditional Mixing

吉田朋広
東京大学大学院数理科学研究科*

平成１１年１２月１－３日，東大数理

(1)　一般にジャンプのあるマルチンゲールに対する２次の漸近展開についてまず議論した．マルチンゲールのなめらかな関数との合成の期待値の展開についてはMykland の１９９２，１９９３，１９９５年の論文がある．Mykland はスカラハドの埋蔵の方法により，狭義の確率解析，つまり伊藤－Meyer 解析によってその結果を得た．いっぽう，統計学では検定，区間推定，赤平－竹内－Pfanzagl の集中確率による推定量の高次漸近有効性，ブートストラップ法に関する諸問題などを考えれば明らかなように，分布自信の漸近展開も重要である．そのためには分布の滑らかさの議論が本質的となり，独立観測の場合には，一つの十分条件として，Cramér 条件がよく用いられる．確率過程においても事情は同じで，Cramér 条件をたとえばマリアヴァン共分散行列の非退化性の条件で置き換え分布の漸近展開を得ることができる．中心極限定理の精密化としてマルチンゲールに対して漸近展開を与えたが，この方法は極限が無限分解可能分布になる場合にも拡張できる．発表においては以前得たジャンプ型のマルチンゲールの場合を話した．

新しい応用として，強従属性をもつ説明変数への確率過程の回帰モデルにおいて回帰係数の推定量が２次項（この場合次数を規定するものは1/2 およびフラクショナルな指数なので，何が「２次」かはそれほど明らかではないが）において非中心極限が現れることを示した．漸近展開式は２次項の消滅

*153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1

によって一見 Berry-Esseen 型の評価のように見えるが，そのオーダーは一般に $n^{-1/2}$ ではないので，この意味で通常よく知られている Berry-Esseen のバウンドとは異なる．もっとも，マルチンゲールに対してはそのオーダーが一般に $n^{-1/2}$ とはならないことは知られているが，この例では 2 次項の消滅まで言えているので，これは漸近展開によってわかることである．

(2) マルチンゲールの漸近展開は「大域的な」方法で，マルコフ性（あるいはその類似の性質）がある場合はミキシングに基づくのが漸近展開を導くには効果的である．(もっとも，拡散係数の推定のように自明なミキシング構造がない場合でもマルチンゲールの方法が役立つことがあるので，これはマルチンゲールの方法を否定するものではなく，むしろ両者は補完的である.）はじめに考えた強従属性のある回帰モデルでは，ノイズ項は弱従属性をもつ（と仮定している）が，デザインの強従属性によって従来の漸近展開の一般論を適用することはできない．既存の一般論では全体的なミキシング条件を仮定するので，キュムラントの収束オーダーは $n^{-k/2}(k \in \mathbf{Z}_+)$ となり，漸近展開の各項はエルミート関数で表現され，これは現れる多変量確率変数の漸近正規性を反映している．いっぽう，先の例では，分散項において一般に非正規性が現れ得る．

一つの見方として，ノイズ項に対する通常の漸近展開に説明変数のフラクショナルな展開が巻き付くと思えるが，その表現として条件付きミキシング条件を考え，そのもとで，汎関数に対する分布の漸近展開を与えた．連続時間も扱うために非退化性は Malliavin 共分散の非退化性で与え，条件付きミキシング条件＋条件付き ϵ-マルコフ過程の汎関数にたいして Götze-Hipp の理論を拡張した．

SEQUENTIAL ESTIMATION FOR A FUNCTIONAL OF THE SPECTRAL DENSITY OF A GAUSSIAN STATIONARY PROCESS

大阪大学·基礎工 塩浜敬之·谷口正信

1 Sequential Procedures

Let $\{X_t; t=0,\pm 1,\ldots\}$ be a Gaussian stationary process with mean zero, spectral density $f(\lambda)$ and covariance function $\Gamma(l)=EX_{t+l}X_t$. We suppose $\sum_{l=-\infty}^{\infty}|l||\Gamma(l)|<\infty$. Consider an integral functional of $f(\lambda)$ of $\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\lambda)f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, where $\psi(\lambda)$ is a given continuous and symmetric function on $[-\pi,\pi]$. The proposed sequential point estimator is based on $\hat{\theta}_n=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\lambda)I_n(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, where $I_n(\lambda)$ is the periodogram of n-consecutive observations from the process concerned. Given n consecutive observations, we wish to estimate θ by $\hat{\theta}_n$, subject to the loss function,

$$L_n=a(\hat{\theta}_n-\theta)^2+cn, \qquad a>0, \quad c>0, \tag{1.1}$$

where c denotes the cost per observation. The risk is written as

$$R_n=EL_n \quad = \quad n^{-1}a\Psi(f)+cn+O(n^{-2}). \tag{1.2}$$

where

$$\Psi(f)=4\pi\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\lambda)^2 f(\lambda)^2\mathrm{d}\lambda \tag{1.3}$$

If $\Psi(f)$ is known, (1.2) is approximately minimized by the best fixed sample size procedure (BFSP)

$$n_0\simeq c^{-1/2}a^{1/2}\Psi(f)^{1/2} \tag{1.4}$$

with minimum risk $R_{n_0}\simeq 2cn_0$. However, it is often that $\Psi(f)$ is unknown. In this case, n_0 cannot be used and there is no fixed sample size procedure that achieves the minimum risk. Thus we use a sequential procedure for choosing a sample size whose risk will be close to R_{n_0} for small c.

Let m be a predetermined and fixed initial sample size, and h be an arbitrary given positive constant. In view of (1.4) we define the following stopping rule N,

$$N=\inf\left\{n\geq m: n\geq c^{-1/2}a^{1/2}\left[\hat{\Psi}_n(f)^{1/2}+n^{-h}\right]\right\}, \tag{1.5}$$

where $\hat{\Psi}_n(f)$ is an appropriate estimator of $\Psi(f)$. To describe the asymptotics of $\hat{\Psi}_n(f)$ we need the following assumption.

Assumption 1. (i) There exists $\rho\in(0,1)$ such that the covariance function of $\{X_t\}$ satisfies

$$\Gamma(j)=O(\rho^{|j|}). \tag{1.6}$$

(ii) The weight function $\psi(\lambda)$ is expressed as

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta(k) \mathrm{e}^{-ik\lambda}, \tag{1.7}$$

where $\eta(k)$ is a known function and satisfies

$$\eta(k) = O(\beta^{|k|}), \quad \text{for some } \beta \in (0,1). \tag{1.8}$$

Let $\{h_n\} = [(\log n)^{1+q}]$, $q \in (0,1)$ where $[x]$ is the greatest integer less than or equal to x. Then

$$\sqrt{n}\rho^{h_n} \to 0 \quad \text{and} \quad h_n/(n^{\delta}) \to 0 \quad \text{for all } \delta > 0. \tag{1.9}$$

From Assumption 1, it is natural to estimate $\Psi(f)$ by

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_n(f) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_{|j_1| \le h_n} \sum_{|j_2| \le h_n} \sum_{|k_1| \le h_n} \hat{\Gamma}_n(j_1)\hat{\Gamma}_n(j_2) \\ &\quad \times \eta(k_1)\eta(-j_1 - j_2 - k_1) \end{aligned} \tag{1.10}$$

where $\hat{\Gamma}_n(l) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-l} X_t X_{t+l}$.

The proposed sequential point estimation of θ is $\hat{\theta}_N$ and its risk is

$$R_N = aE(\hat{\theta}_N - \theta)^2 + cEN. \tag{1.11}$$

2 Main Results

THEOREM 1 *Suppose that Assumption 1 holds. Then as $c \to 0$,*

$$N/n_0 \to 1 \quad a.s., \tag{2.1}$$

$$E|N/n_0 - 1| \to 0 \tag{2.2}$$

and

$$R_N/R_{n_0} \to 1. \tag{2.3}$$

THEOREM 2 *Under Assumption 1,*

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} N(0, \Psi(f)), \quad as \quad c \to 0. \tag{2.4}$$

準モンテカルロ法と加重サンプリングのハイブリッド・シミュレーション －数理ファイナンスへの応用を中心に－*

白川 浩　　野口 理
東京工業大学　三和銀行

1 はじめに

高次元の数値積分においては, 従来, 準モンテカルロ法は収束性が遅く, 擬似乱数に基づくモンテカルロ法よりも非効率であると予想されていた. ところが最近になってNinomiya and Tezuka[2],Paskov [?], 田村・白川 [3] 等の研究によって, あるクラスの $low-discrepancy$ 列を用いた準モンテカルロ法では, 高次元の積分を効率的に数値計算可能なことが実証されている. 一方これらの高次元積分の計算法が, シミュレーションの代表的な収束性改善策である分散減少法において, どのような影響があるのかは, 従来, 注目されていなかった. そこで本研究では, 田村・白川 [3] によって提案された準モンテカルロ法に, 連続確率過程における代表的な分散減少法である加重サンプリングを併用した場合の収束性について, 金利派生証券の評価をもとに数値実験により検証した. 結果として, 準モンテカルロ法においても, 加重サンプリング法により安定的な分散減少が達成できることを確認できた.

2 加重サンプリング法

ここでは確率測度変換を利用した分散減少法である, 加重サンプリング法について述べる. $\mathbf{X}=\{\mathbf{X}=(X_{1,t},\cdots,X_{d,t})^T; 0\le t\le T\}$ を, 以下のマルコフ型確率微分方程式に従う d 次元上の拡散過程とする.

$$\boldsymbol{dX}_t \;=\; \boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{X}_t)dt+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}_j(t,\boldsymbol{X}_t)dW_{j,t},\quad \boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

ここで $\boldsymbol{W}_t=(\boldsymbol{W}_{1,t},\cdots,\boldsymbol{W}_{m,t})^T$ は, 元々のフィルタ付けられた確率空間 $(\Omega,\{\mathcal{F}_t;0\le t\le T\},P)$ 上での m 次元ウイナー過程を表すものとする. この確率過程に対して, 以下の条件付き期待値を定義する.

$$u(t,\mathbf{x})=E\left[g(\mathbf{X}_T)|\mathbf{X}_t=\mathbf{x}\right] \tag{2.2}$$

以降の目的は, 時点 0 での $g(X_T)$ の期待値 $u(0,x)$ を, できるだけ安定的に推定することである. そこで, 次の $Radon-Nikodym$ 微分 ρ_T によって, 元々の確率測度 P を, それと同値な確率測度 $\tilde{P}$ へ確率測度変換する.

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}=\rho_T=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_0^T d_j^2(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)dt-\sum_{j=1}^{m}\int_0^T d_j(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)dW_{j,t}\right\}. \tag{2.3}$$

ここで $\tilde{\mathbf{X}}_t$ は, 以下のマルコフ型確率微分方程式に従う確率過程である.

$$\boldsymbol{d\tilde{X}}_t=\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{\tilde{X}}_t)dt+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}_j(t,\boldsymbol{\tilde{X}}_t)(dW_{j,t}+d_j(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)dt),\quad \boldsymbol{\tilde{X}}_0=\boldsymbol{x}. \tag{2.4}$$

なお $d_j(t,\mathbf{x}),\ j=1,\cdots,m$ は後述するように,$u(0,\mathbf{x})$ を安定的に推定可能とする関数を選ぶ. ギルサノフの定理により, 新しい確率測度 $\tilde{P}$ のもとでは, $\tilde{W}_{j,t}=W_{j,t}+\int_0^t d_j(s,\tilde{\boldsymbol{X}}_s)ds,\ j=1,\cdots,m$ は, $(\Omega,\{\mathcal{F}_t;0\le t\le T\},\tilde{P})$ 上での m 次元ウイナー過程となる. したがって,

$$E[g(\mathbf{X}_T)|\mathbf{X}_0=\mathbf{x}]=\tilde{E}[g(\tilde{\mathbf{X}}_T)|\tilde{\mathbf{X}}_0=\mathbf{x}]=E[g(\tilde{\mathbf{X}}_T)\rho_T|\tilde{\mathbf{X}}_0=\mathbf{x}] \tag{2.5}$$

となる. 但し $\tilde{E}[\ \cdot\ ]$ は,$\tilde{P}$ のもとでの期待値を表す. 従って (2.5) を評価するには, 元々の確率測度 P のもとで $g(\tilde{\mathbf{X}}_T)\rho_T$ の期待値を推定すればよく, 加重サンプリング法ではこの推定量の分散をできるだけ減少させるべく, 関数 $d_j(t,\mathbf{x}),\ j=1,\cdots,m$ を決定する.

* 本研究は, 野口氏が東京工業大学・修士課程在学中に行ったものであり, 三和銀行の公式な見解を反映するものではない

3 最適な加重サンプリング法の設計

ここでは条件付期待値 $u(t,\mathbf{x})$ が解析的に求められる場合には, 関数 $d_j(t,\mathbf{x})$, $j=1,\cdots,m$ を適切に選ぶことにより推定量 $g(\tilde{\mathbf{X}}_T)\rho_T$ の分散を 0 にできることを示す. まず P のもとでの $\mathbf{X}_t$ の分布は,$\tilde{P}$ のもとでの $\tilde{\mathbf{X}}_t$ の分布と一致するので,$u(t,\mathbf{x}) = \tilde{E}[g(\tilde{\mathbf{X}}_T)|\tilde{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{x}]$ が成立する. したがって $u(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)$ の $\tilde{P}$ のもとでのマルチンゲール性より,

$$\begin{aligned} du(t,\tilde{\mathbf{X}}_t) &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} b_{i,j}(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)\frac{\partial u}{\partial x_i}d\tilde{W}_{t,j} \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} b_{i,j}(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)d_j(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)\frac{\partial u}{\partial x_i}dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} b_{i,j}(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)\frac{\partial u}{\partial x_i}dW_{t,j}, \end{aligned}$$

となる. さらに伊藤の補題より

$$d[u(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)\rho_t] = \sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{d}\rho_t\left(b_{i,j}(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - u(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)d_j(t,\tilde{\mathbf{X}}_t)\right)dW_{t,j}\right\} \tag{3.6}$$

となるので,

$$d_j^*(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{u(t,\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{d} b_{i,j}(t,\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{3.7}$$

と決定すれば $g(\tilde{\mathbf{X}}_T)\rho_T = u(T,\tilde{\mathbf{X}}_T)\rho_T = u(0,\mathbf{x})$ となり, 推定量 $g(\tilde{\mathbf{X}}_T)\rho_T$ の P のもとでの分散を 0 とできる. ただし, この最適な関数 $d_j^*(t,\mathbf{x})$ を導出するには, 条件付期待値 $u(t,\mathbf{x})$ の陽な解が必要であり, これは元々推定したい関数値に他ならない. したがって実際の加重サンプリングでは, 陽にその条件付分布の導出できる確率過程 $\hat{\mathbf{X}}_t$ を考え, それを利用して近似的な条件付期待値 $\hat{u}(t,\mathbf{x})$ を計算することになる. 具体的には, 準最適な関数 $\hat{d}_j(t,\mathbf{x})$ を

$$\hat{d}_j(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{\hat{u}(t,\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{d} b_{i,j}(t,\mathbf{x})\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \tag{3.8}$$

と設定すればよい.

4 終わりに

本研究では, 準モンテカルロ法と加重サンプリング法を併用したハイブリッド・シミュレーション法を用いて金融派生商品を評価した. その結果, 加重サンプリング法は近似に基づくパラメータ関数を利用した場合でも十分効果を発揮することが分かった. 特に準モンテカルロ法と併用した場合には, 十分実用的な収束性を得られた. さらにパラメータ関数を上手く近似すれば制御変数法と同程度の収束性が達成可能である.

参考文献

[1] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Press.

[2] S. Ninomiya and S. Tezuka. *Toward Real-Time Pricing of Complex Financial Derivatives*, Appl. Math. Finance, 3:1-20, 1996.

[3] 田村 勉, 白川 浩 「一般化 *Faure* 列による準乱数とそのオプションへの応用」, ジャフィージャーナル掲載予定, 1999.

Estimation of Relationship between the Return Volatility and Trading Volume: the Case of TOPIX

佃　良　彦　　（東北大学大学院経済学研究科）
島田　淳二　　（東北大学大学院経済学研究科博士課程院生）

1．目的

近年、金融資産価格変動を分析するために非線形時系列モデルが適用され、一定の成功を収めている。Engle（1982）に始まる条件付分散変動時系列モデルとその一般化モデルはこの分野の標準的な分析ツールとなっている。しかし、ARCH 型モデルは資産収益率の当期分散が過去の収益率の決定論的関数となっているために、分散変動を規定する背後にある要因を知ることができない構造となっている。

市場ミクロ構造の経済理論的分析の立場からは、市場へ流入する新情報が価格変動の要因と考えて、情報流入の価格変動への効果を分析している（Glosten and Milgrom (1985))。他方、これまでの多くの実証分析は、収益率変動と取引量に正の相関が存在する事を示している。

本報告では、Andersen (1994, 1996)にしたがって、市場へ流入する情報が市場取引を発生させ、価格変動と取引量を同時に変化させると考えて１つの統計モデルを提示する。このモデルは非線形時系列モデルであるが、ARCH 型モデルとは異なって、確率的ボラティィリティー（stochastic volatility）モデルに分類され、改良した分布混合仮説(Mixture of Distribution hypothesis= MDH)に属する。次に、この改良型 MDH を日本の株価指数（TOPIX）と取引量の分析に適用する。

2．改良型 MDH モデル

対象とする資産価格の t 期における（連続複利）収益率を R_t、取引量を V_t、市場への情報流入量（観測不可能）を K_t とする。情報量 K_t を所与とする収益率の条件付き分布は

$$R_t \mid K_t \sim N(0,\ K_t) \qquad (1)$$

また取引量の条件付き分布は

$$V_t \mid K_t \sim Po(m_0 + m_1 K_t) \qquad (2)$$

と表されるものとする。ここで、Po(・)はポアソン分布をしめす。t 期に市場に流入する情報は確率過程

$$K_t^{1/2} = \omega + \beta K_{t-1}^{1/2} + \alpha K_{t-1}^{1/2} u_t \qquad (3)$$

に従うとする。ただし、α、$\beta \geqq 0$、$\omega > 0$、$u_t \sim i.i.d(1, \sigma_u^2)$、かつ $u_t > 0$。このとき、収益率の過程は Stochastic AutoRegressive Volatility（SARV）モデルとよばれる。（１）と（３）は GARCH(1,1)モデルの拡張と解釈できる。

3．データと推定結果

われわれは、Hansen(1982)と Neway and West(1987)による一般化モーメント法（GMM）を用いてモデルの未知パラメータ（θ）を推定する。GMM は適切に選択した標本モーメントを $M_T(\theta)$、それに対応する母集団モーメントを $A(\theta)$、加重行列を $\Gamma_T(\theta)$ として、最小化問題

$$\min_\theta\ (A(\theta) - M_T(\theta))'\ \Gamma_T(\theta)^{-1} (A(\theta) - M_T(\theta)) \qquad (4)$$

の解として得られる。

使用するデータは１９８４年１月４日から１９９９年８月末までの TOPIX 日次収益率と日次取引株数である。表１は基本統計量を示している。表２は推定結果を示す。推定されたモデルは

$$V_t \mid K_t \sim 0.024\ Po(35.8 + 7.0\ K_t) \qquad (5)$$

$$K_t^{1/2} = 0.083 + 0.634\ K_{t-1}^{1/2} + 0.28\ K_{t-1}^{1/2} u_t \qquad (6)$$

と表される。我々の実証分析によると、カイ２乗適合度検定は改良型 MDH モデルを棄却する。米国株式市場には適合するモデルが日本株式市場には十分に適合しない理由の一つとして、米国のデータと異なり日本のデータでは収益率の変動と取引量との間に正の相関が存在するだけでなく、収益率そのものと取引量との間に正の相関が存在することが考えられる。今後、MDH モデルをこの方向に拡張することが必要となろう。

Table1. Summary Statistics for Returns and Volumes

	Return	Volume (1 milion shares)	Detrended volume
Mean	0.024	469.156	1.054
Std.dev.	0.998	321.115	0.361
Skewness	−0.394*	2.514*	1.529*
Excess Kurtosis	18.892*	8.738*	4.668*
Maximum	9.115	2853.734	0.271
Minimum	−15.810	76.758	3.540

Note:* indicates significance at the 5% level.Number of observation is 5701.

Table2. Estimates of the Model

σ	$\alpha+\beta$	α	cm_0	cm_1	c	w	$\chi^2(6)$
0.960	0.914	0.280	0.859	0.168	0.024	0.219	99.397
(0.015)	(0.034)	(0.012)	(0.042)	(0.041)	(0.013)	(0.033)	[0.000]

Note: (・) denotes the standard errors of estimates. The χ^2-test for Goodness-of-Fit(Hansen(1982) has the 6 degrees of freedom since there are 13 moment restrictions and 7 free parameters.
[・] denotes the p-value of the χ^2-test for Goodness-of-Fit.

参考文献

[1]Andersen, T.G., (1994), Stochastic autoregressive volatility : A framework for volatility moeling, *Mathematical Finance* 4, 75-102.

[2]Andersen, T. G., (1996), Return Volatility and Trading Volume : An Information Flow Interpretation of Stochastic Volatility, *Journal of Finance*, 71, No.1, 169-204

[3]Engle, R.F., (1982), Autoregressive conditional hetroskedasiticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, 50, 987-1007.

[4]Glosten, L. R., and P. R. Milgrom, (1985), Bid, ask, and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders, *Journal of Financial Econmics* 14, 71-100.

[5]Hansen, L.P., (1982), Large sample properties of generalized method of moments estimators, *Econometrica*, 50, 1029-1054.

[6]Neway, W.K., and K.D.West, (1987), A simple positive semi-definite, hetroskedasiticity consistent covariance matrix, *Econometrica*, 55, 703-708.

A NEW CONTROL VARIATE ESTIMATOR FOR AN ASIAN OPTION

by

Kenji Kamizono*, Takeaki Kariya**, Regina Y. Liu†, and Teruo Nakatsuma‡

March 1999

Abstract

There exist several estimators for valuing the Asian option on the arithmetic mean. Among all variance reduction estimators, the one with the control variate derived from the geometric mean has been shown by Boyle, Broadie and Glasserman (1997) to perform best so far. In this paper, a new improved control variate estimator for this type of Asian option is proposed and investigated. Simulation results confirm that it does perform better than the control variate derived from the geometric mean. The improvement becomes more significant as the volatility increases and/or as the time to expiration lengthens.

* Department of Mathematics, Columbia University, New York, NY 10027, USA; e-mail: kenji@math.columbia.edu

** IBJ-DL Financial Technology Co., Ltd., Ohtemachi 1-5-1, Chiyoda-ku, Tokyo 100-0004, Japan; e-mail: kariya@fintec.or.jp

† Department of Statistics, Hill Center, Rutgers University, Piscataway, NJ 08855, USA; e-mail: rliu@stat.rutgers.edu

‡ Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, Kunitachi, Tokyo 186-8603, Japan; e-mail: cr00387@srv.cc.hit-u.ac.jp

1. Introduction

Several variance reduction methods such as the antithetic variate (AV) method, the control variate (CV) method, and the moment matching (MM) method have been proposed for valuing derivatives. With an extensive overview, Boyle, Broadie and Glasserman (1997) (shortened as BBG henceforth) compared the performances of these variance reduction methods to that of the traditional Monte Carlo (MC) method. Among other findings, they showed by simulation that the CV method is the most efficient for valuing an Asian call option, C^A. This is deduced from the observation that the sample variance under CV method is the smallest among the four sample variances shown in Table 2 of BBG. The Asian call is difficult to value analytically in practice. The CV method considered in BBG is to improve upon the MC estimator (MCE) for the Asian call by choosing the analytical variate of the call on the geometric mean, C^L, as the control variate (see Turnbull and Wakeman (1991) for a closed-form solution for this price). This call on the geometric mean yields a formula similar to the Black-Scholes formula for the European call, and thus can be computed for each volatility, interest rate and time to expiration. Most relevant references are found in BBG.

In this paper, we propose a new optimal CV estimator (CVE) for the Asian call. We show, by both theoretical arguments and simulation results, that it is uniformly better than the CV estimator treated in BBG. Our estimator is motivated by the fact,

$$C_T^L < C_T^A \qquad \text{at time } T, \qquad \text{and hence} \qquad C_0^L < C_0^A \qquad \text{at time } 0. \tag{1.1}$$

Here $C_t^\dagger$ indicates the value of the call C of type $\dagger$ at time t, and T is the time of expiration. In other words, the value C_0^L of the call on the geometric mean at 0 gives a lower bound for the value C_0^A of the Asian call at 0. Hence we employ an additional variate C^U such that $C_T^L < C_T^A < C_T^U$, and use two control variates C^L and C^U to improve upon the CVE with C^L alone. We show that using two control variates C^L and C^U is much better than using C^L alone. The performance of an estimator is measured here in terms of its sample standard deviation. The smaller standard deviation of an estimator implies more stability and credibility of the estimator under each simulation run. We observe that the improvement of our estimator is far more significant for certain values of the time to expiration T, volatility σ and moneyness S_0/K. Further, for comparison, we consider a suboptimal CVE with C^U alone and the CVE with the optimal combination of C^L and C^U as a control variate estimator. The latter is better than the CVE with C^L alone, while the former does not necessarily outperform it.

金利オプション市場におけるボラティリティスマイル
ーインプライド分布の歪み、尖りによる解明

興銀第一フィナンシャルテクノロジー（株）
石田　友利子、王　京穂

1. 背景と概要

標準的な市場モデルとして広域的に使用されているブラックショールズモデルにおいては、原資産が対数正規過程に従うと仮定している。市場においてこの仮定が成立しているならば、インプライドボラティリティはストライクに依らず一定であるはずである。しかし、実際の市場においては、相対市場、上場市場ともに、インプライドボラティリティがストライクによって異なる現象が観測される。これを、インプライドボラティリティのスマイルと呼ぶ。スマイルについては、株式オプション市場、通貨オプション市場を中心に、かねてから重要なテーマとして研究されて来ている。現在、特に欧米を中心に金利オプション市場におけるスマイルへの関心が高まったのを背景に、我々は金利オプション市場におけるインプライドボラティリティのスマイルについて研究した。

スマイルの解釈には ①瞬間的な原資産の変動が対数正規分布から外れているとするもの、 ②各時点における瞬間的な原資産の変動は対数正規分布に従っているが、その累積分布が対数正規分布にならないとするもの、など様々な議論が存在する。今回、我々は②の観点に立ち、インプライドボラティリティのスマイル（もしくは市場価格）から得られるリスク中立確率のもとでの累積分布（これをインプライド分布と呼ぶ）が対数正規分布にならないと考えて、モディファイド・ブラックショールズモデルを拡張した。

2. モディファイド・ブラックモデルの拡張

モディファイド・ブラックモデルは、金利オプションを評価する標準的な市場モデルとして、今日、学者から実務家まで広域的に使用されている。ここでは、原資産金利が対数正規過程に従うと仮定されているが、我々は、このモデルを金利オプション市場から得られるインプライド分布を反映させて、拡張する。具体的に、インプライド分布として着目するのは原資産金利の収益率を対数かつ基準化したもの、すなわち

$$\frac{\log\dfrac{L_T}{L_0}+\dfrac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

が従う分布である。この確率変数のキュムラントを $\{\lambda_j\}$ とすると、インプライド分布の分布関数 $\Psi(s)$ は標準正規分布の分布関数 $\Phi(s)$ を用いて、次のように EDGEWORTH 展開される。ここで $h_i(s)$ は i 次エルミート多項式である。

$$\Psi(s)=\Phi(s)+\phi(s)\left\{\frac{R_1(s)}{\sqrt{n}}+\frac{R_2(s)}{n}+\frac{R_3(s)}{n\sqrt{n}}+\frac{R_4(s)}{n^2}\right\}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$R_1(s)=\frac{\lambda_3}{6}h_2(s)$$

$$R_2(s)=\frac{\lambda_4}{24}h_3(s)+\frac{\lambda_3{}^2}{72}h_5(s)$$

$$R_3(s)=\frac{\lambda_5}{120}h_4(s)+\frac{\lambda_3\lambda_4}{144}h_6(s)+\frac{\lambda_3{}^3}{1296}h_8(s)$$

$$R_4(s)=\frac{\lambda_6}{720}h_5(s)+\left(\frac{\lambda_4{}^2}{1152}+\frac{\lambda_3\lambda_5}{720}\right)h_7(s)+\frac{\lambda_3{}^4\lambda_4}{1728}h_9(s)+\frac{\lambda_3{}^4}{31104}h_{11}(s)$$

このインプライド分布の分布関数を用いて、モディファイド・ブラックモデルは次のように拡張される。

$$Caplet(\Psi,K,\sigma)=P_T\left[L_0\Psi(d_1)-K\Psi(d_2)\right]$$
$$Floorlet(\Psi,K,\sigma)=P_T\left[K\Psi(-d_2)-L_0\Psi(-d_1)\right]$$

しかし、実際の市場からはインプライド分布は不明瞭であるため、このモデルによる時価評価は実務上難しい。ゆえに、これをより扱い易い「歪み skw 」と「尖り krt 」を用いた形へ近似することとした。近似方法は、

$$\Psi(d)-\Phi(d)\approx\left\{\frac{\partial F(\Phi)}{\partial skw}(d)\right\}\left(skw(\Psi)-skw(\Phi)\right)+\left\{\frac{\partial F(\Phi)}{\partial krt}(d)\right\}\left(krt(\Psi)-krt(\Phi)\right)$$

である。ここで

$$\Delta skw \equiv skw(\Psi) - skw(\Phi) = skw(\Psi) - 0$$
$$\Delta krt \equiv krt(\Psi) - krt(\Phi) = krt(\Psi) - 3$$

とすると、次のように、実務上有益な歪みと尖りを調整したモディファイド・ブラックモデルへ拡張することが出来る。

$$Caplet(\Psi, K, \sigma) = Caplet(\Phi, K, \sigma^*) + P_T\left[S_0\left(\frac{\partial F(\Phi)}{\partial skw}(d_1^*)\Delta skw + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial krt(F)}(d_1^*)\Delta krt\right) - K\left(\frac{\partial F(\Phi)}{\partial skw}(d_2^*)\Delta skw + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial krt}(d_2^*)\Delta krt\right)\right]$$

$$Floorlet(\Psi, K, \sigma) = Floorlet(\Phi, K, \sigma^*) + P_T\left[K\left(\frac{\partial F(\Phi)}{\partial skw}(-d_2^*)\Delta skw + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial krt}(-d_2^*)\Delta krt\right) - S_0\left(\frac{\partial F(\Phi)}{\partial skw}(-d_1^*)\Delta skw + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial krt}(-d_1^*)\Delta krt\right)\right]$$

$$d_1^* = \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) + \frac{\sigma^{*2}}{2}T}{\sigma^*\sqrt{T}}$$

$$d_2^* = \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) - \frac{\sigma^{*2}}{2}T}{\sigma^*\sqrt{T}}$$

但し、σ^* Δskw Δkrt は市場価格からカリブレートされる。

3. 数値検証例

金利キャップ／フロアー市場を用いて、このモデルの市場価格体系への適合性を検証した。具体的なパラメータ σ^* Δskw Δkrt のカリブレーションの方法については多くの議論が想定されるが、今回は、フォワードボラティリティマトリックスに着目し、高次ニュートン法を用いて、キャップレット／フロアーレットの満期毎にカリブレートした。

この結果、金利キャップ市場についてはカリブレートされた σ^* Δskw Δkrt は満期に依らず、比較的安定的であるが、金利フロアー市場についてはカリブレートされた Δskw Δkrt は同キャップ市場に比べてあまり安定的ではないことがわかった。(σ^* は安定的。) この原因としては、フロアーはキャップと比較して流動性が低く市場に厚みがないことが挙げられる。しかし、全体的なこのモデルの市場価格体系への適合性は、平均誤差、最大誤差のレベル、さらに、僅かなパラメータで市場価格を表現出来ることから、かなり優れていることがわかった。

4. まとめ

我々は、インプライド分布の歪みと尖りを反映するように、モディファイド・ブラックモデルを拡張した。このモデルはカリブレーションの方法（①採用するボラティリティの種類（アベレージ／フォワード）、②ボラティリティの補間方法、③ボラティリティの選別方法、など）により多くの変形が得られ、その用途は多岐に渡る。これらを明確に判断し応用すれば、プレーン商品につき市場のインプライドボラティリティスマイルを反映した正確かつ整合的なプライシングが可能となる。

また、このモデルにより得られたインプライド分布の歪みと尖りをモンテカルロ法やラティス法などの数値解法へ導入することを可能とし、これによってエキゾチック商品についてもプレーン商品と整合的なプライシングが出来るようになった。

参考文献

[1] Corrado, Charles J. and Su, Tie. Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Option Prices. *Journal of Derivatives*, Vol. 4, No. 4, Summer 1997.

[2] Duffie, Darrell and Pan, Jun. An Overview of Value at Risk. *Journal of Derivatives*, Vol. 4, No.3, Spring 1997.

[3] Ishida, Yuriko and Oh, Kyosui. Volatility Smiles in the Interest Rate Option Market and the Non-normal Skewness and Kurtosis in Option-implied Distributions. IBJ-DL Financial Technology working paper, 1999.

[4] Jarrow, Robert and Rudd, Andrew. Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 347-369, 1982.

[5] Kariya, Takeaki. Quantitave Methods for Portfolio Analysis. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[6] Rubinstein, Mark. Edgeworth Binomial Trees. *Journal of Derivatives*, Vol. 5, No. 3, Spring 1998.