（6）計画数学におけるモデル化と解析

On some stopping rules for proofreading

Mitsushi Tamaki (Aichi University)

The general framework of the proofreading problem for a single reader can be described as follows: A manuscript has an unknown number M of misprints. One may attempt to detect and correct these misprints through a series of proofreadings. On the n th proofreading, one observes and corrects a random number X_n of misprints, each of which is independently detected with probability p. Two models can be considered concerning the distribution assumed on M.

Case 1: Binomial model

$$P(M=m)=\binom{W}{m}\pi^m(1-\pi)^{W-m}$$

where W is the number of words in the manuscript and π is the probability that a word is a misprint.

Case 2: Poisson model

$$P(M=m)=e^{-\mu}\frac{\mu^m}{m!}$$

where μ=E(M). The Poisson model with parameter $\mu=\pi W$ can be regarded as an approximation to the binomial model with parameters W and π.

Here we investigate a stopping rule which indicates to stop reading after n th proofreading if $X_1>k, \ldots, N_{n-1}>k$, and $X_n \leqq k$ for a prescribed non-negative integer k. We call this rule *k-rule*. Let N_k be the stopping time associated with k-rule, then

$$N_k=\min\{n: X_n \leqq k\}.$$

Let M_n be the number of misprints left undetected after the first n proofreadings, namely, $M_n=M-X_1-\ldots-X_n$ for $n\geqq 1$, and $M_0=M$.

Then, for k-rule, we are interested in deriving the distribution of N_k and M_{N_k}. Especially $E(N_k)$, $E(M_{N_k})$, and $P(M_{N_k}=0)$ are quantities of interest. In Section 2, 0-rule is considered in the binomial model. More general k-rule($k\geqq 0$) is considered in the Poisson model in Section 3. A more careful reader would not stop reading even when he cannot find any misprints. He/she is still anxious about the potential misprints yet undetected and continues proofreading until he/she again finds no misprint. We call this rule 00-rule and denote N_{00} the stopping time associated with this rule, i. e.,

$$N_{00}=\min\{n>N : X_n=0\}.$$

This rule is also considered in Section 3.

Best-Choice Games with Random Priority on a Two-Poisson Stream

名古屋商大　坂口　実

Abstract This paper investigates a sequential game with player's random priority played over the two Poisson streams. Two players are each presented with a poisson stream of offers with rates λ_1 and λ_2, respectively. The offers from each stream are *iid* non-negative r.v.'s from a known distribition. Each player may sel ect at most one offer, and no recall is allowed. For the offers arriving via stream i, player i has higher priority to decide than his apponent. The game terminates at T, and each player wishes to maximize his expected value of the r.v. he has accepted. We obtain simultaneous differenial equations for the equilibrium values of the game and provide explicit solutions in special cases.

1 Introduction and Summary This paper investigates a sequential game with player's random priority played over two Poisson streams. The two players, called I and II,are each presented with a Poisson stream of offers with arrival rates λ_1 and λ_2, respectively. The offers presented are *iid* non-negative r.v.'s from a distribution F(x) satisfying $\mu = \int_0^\infty x \, dF(x) \in (0,\infty)$.

For the offers arriving via stream i with rate $\lambda_i (i = 1, 2)$, player i is the first mover and 3-i is the second mover. (Player 1 and 2 are I and II, respectively). Player i must first choose either to accept or to reject the offer.If the offer is rejected then it is offered to the other player who must next choose either to accept or to reject it. If both players reject the offer, the game continues in a similar manner when the next offer arrives. Any offer once rejected cannot be recalled later. If one player accepts an offer, then he (or she) obtains the observed value as a reward and drops out from the game, and the single-player game for the opponent remains thereafter. The game terminates at a predetermined time T. A player or players who have not made an acceptance by time T are rewarded nothing. The objective in the game of each player is to maximize the expected value of his (or her) own reward. Since the game is non-zero-sum, we shall consider optimal strategies of the players in terms of Nash equilibrium.

In Sections 2 and 3 we obtain the simultaneous differential equations for the expected rewards of the players obtainable by employing their respective equilibrium strategies. We shall derive the solution of the games where the arrival rate of the Poisson streams are (1) $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ and (2) $0 \leq \lambda_2 < \lambda_1$, and provide explicit solutions when the offer-size distribution is uniform or negative-exponential. We show that the player whose Poisson stream of offers has the most frequent arrival rate obtains the higher expected reward.

In Section 4 we shall study about the elapsed time when one player first makes an acceptance of an offer when both players employ their respective equilibrium strategies.

The remarkable features contained in this work are the following two points. First, players' objective in the game investigated in this paper is Expected Value Maximization. As far as the author knows, the bilateral sequential games with players' priority have been investigated in the past for the versions where players' objective is Winning Probability Maximization. See Enns and Ferenstein [2,3], Radzik and Szajowski [7], Ravindran and Shah [9], Ravindran and Enns [8], Sakaguchi [11,12]. Second, players' priority is not fixed, and changes randomly during the time when both players remain in the game. Bilateral sequential games with players' random priority is first discussed by Radzik and Szajowski [7] very recently. Also, there are two papers by Sakaguchi [12,13] concerning this point of interest.

Key words: Sequential game, Best-choice problem, Non-zero-sum game, Nash equilibrium, Players' priority.

AMS (1990) Subject Classification: 60G40

On zero-sum games with stopping times for discrete-time multi-armed bandit processes

吉田 祐治（千葉大学教養部）

Bandit processes のゲーム問題について論じる。

1. Zero-sum games for multi-armed bandit processes.

Multi-armed bandit processes の定式化を行う。

$\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots\}$: time space. $\mathbf{N}(e,r) = \{$ even $t : 0 \le t < r \}$. $\mathbf{N}(o,r) = \{$ odd $t : 0 \le t < r \}$. d : number of arms. β : discount rate ($0 < \beta < 1$). $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$: probability space. $X^i = (X_t^i , \mathcal{F}_t^i , \mathbf{P}^i)_{t\in \mathbf{N}}$: independent Markov chains with Borel state spaces E^i. $\{ \mathcal{F}_t^i \}_{t\in \mathbf{N}}$: increasing family of completed sub-σ-fields of $\mathcal{F}^i$ ($i = 1,\cdots,d$). $X = (X_s)_{s\in \mathbf{T}} = (X^1_{s^1} ,\cdots, X^d_{s^d})_{s = (s^1,\cdots,s^d) \in \mathbf{T}}$: d-parameter process s.t. $\mathbf{T} = \mathbf{N}^d$, $E = \prod_{i=1}^d E^i$, $\Omega = \prod_{i=1}^d \Omega^i$, $\mathbf{P} = \prod_{i=1}^d \mathbf{P}^i$, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}^1_{s^1} \otimes\cdots\otimes \mathcal{F}^d_{s^d}$ for $s = (s^1,\cdots,s^d) \in \mathbf{T}$.

Bandit processes のゲームの進め方を述べる。

$(\pi_A,\tau_A;\pi_B,\tau_B)$: tactics. Player A's (B's) strategies π_A (π_B) and his stopping times τ_A (τ_B).

$\pi_A = \{ \pi_A(t) \}_{t\in \mathbf{N}(o,\infty)} = \{ (\pi_A{}^1(t),\cdots,\pi_A{}^d(t)) \}_{t\in \mathbf{N}(o,\infty)}$ and

$\pi_B = \{ \pi_B(t) \}_{t\in \mathbf{N}(e,\infty)} = \{ (\pi_B{}^1(t),\cdots,\pi_B{}^d(t)) \}_{t\in \mathbf{N}(e,\infty)}$

are $\mathbf{T}$-valued stochastic sequences on $(\Omega, \mathcal{F})$ s.t. (i) ~ (iv) :

(i) $\pi_A(0) = \pi_B(0) = (0,\cdots,0)$.

(ii) For all $t \in \mathbf{N}(e,\infty)$, it holds that $\pi_A(t+1) = \pi_B(t) + e_i$ for some $i = 1,\cdots,d$, and for all $t \in \mathbf{N}(o,\infty)$, it holds that $\pi_B(t+1) = \pi_A(t) + e_i$ for some $i = 1,\cdots,d$, where e_i are i'th unit vectors in $\mathbf{T}$.

(iii) For all $t \in \mathbf{N}(o,\infty)$ ($\mathbf{N}(e,\infty)$) and all $s' \in \mathbf{T}$ it holds that

$\{ \pi_A(t) = s' \} \in \mathcal{F}_{s'}$ ($\{ \pi_B(t) = s' \} \in \mathcal{F}_{s'}$).

τ_A (τ_B) are $\mathbf{N}(e,\infty)$ ($\mathbf{N}(o,\infty)$)-valued random variables s.t.

(iv) For all $t \in \mathbf{N}(e,\infty)$ ($\mathbf{N}(o,\infty)$) and all $s' \in \mathbf{T}$ it holds that

$\{ \tau_A = t \} \cap \{ \pi_A(t) = s' \} \in \mathcal{F}_{s'}$ ($\{ \tau_B = t \} \cap \{ \pi_B(t) = s' \} \in \mathcal{F}_{s'}$).

We call this game <u>first-type</u> game since player A moves first. By exchanging $\mathbf{N}(e,\infty)$ with $\mathbf{N}(o,\infty)$, we define <u>second-type</u> games. Then we put families of first (second)-type tactics by $\mathcal{T}(F)$ ($\mathcal{T}(S)$) = { all first (second)-type tactics $(\pi_A,\tau_A;\pi_B,\tau_B)$ starting at $\mathbf{0}$ }.

このゲームの値はつぎのように与えられる。

$f_A{}^i$ ($f_B{}^i$) : A's (B's) running rewards, bdd. m'ble fts on E^i.
h_A (h_B) : A's (B's) terminal rewards, bdd. m'ble fts on E.

We shall introduce the following notation $\langle \cdot,\cdot \rangle$:

$$\langle f_A(X_{\pi_A(1)}), \pi_A(1) - \pi_B(0) \rangle = \sum_{i=1}^{d} f_A{}^i(X_{\pi_A}{}^i{}_{i(1)})(\pi_A{}^i(1) - \pi_B{}^i(0)).$$

Player A's expected gain to be paid from player B is

$$V_F[\pi_A,\tau_A;\pi_B,\tau_B](x) = \mathbf{E}^x\Big[\sum_{t\in N(e,\tau_A\wedge\tau_B)} \beta^t \langle f_A(X_{\pi_A(t+1)}),\pi_A(t+1)-\pi_B(t)\rangle$$

$$-\sum_{t\in N(o,\tau_A\wedge\tau_B)} \beta^t \langle f_B(X_{\pi_B(t+1)}),\pi_B(t+1)-\pi_A(t)\rangle + \beta^{\tau_A\wedge\tau_B} h(X_{\pi_B(\tau_A)\wedge\pi_A(\tau_B)})\Big],$$

where $a\wedge b = (a^1\wedge b^1,\cdots,a^d\wedge b^d)$ for $a = (a^1,\cdots,a^d)$, $b = (b^1,\cdots,b^d) \in \mathbf{T}$ and $h = h_A - h_B$. Hence admissible tactics are

$$\mathcal{D}(F;\pi_B,\tau_B)\ (\ \mathcal{D}(S;\pi_B,\tau_B)\ ) = \{\ (\pi_A,\tau_A) : (\pi_A,\tau_A;\pi_B,\tau_B) \in \mathcal{T}(F)\ (\ \mathcal{T}(S)\ )\ \},$$

$$\mathcal{D}(F;\pi_A,\tau_A)\ (\ \mathcal{D}(S;\pi_A,\tau_A)\ ) = \{\ (\pi_B,\tau_B) : (\pi_A,\tau_A;\pi_B,\tau_B) \in \mathcal{T}(F)\ (\ \mathcal{T}(S)\ )\ \},$$

$$\overline{V}_F(x) = \inf_{(\pi_B,\tau_B)} \sup_{(\pi_A,\tau_A)\in\mathcal{D}(F;\pi_B,\tau_B)} V_F[\pi_A,\tau_A;\pi_B,\tau_B](x)\ (\ x \in E\ ),$$

$$\underline{V}_F(x) = \sup_{(\pi_A,\tau_A)} \inf_{(\pi_B,\tau_B)\in\mathcal{D}(F;\pi_A,\tau_A)} V_F[\pi_A,\tau_A;\pi_B,\tau_B](x)\ \ (\ x \in E\ ).$$

Proposition. $\overline{V}_F = \underline{V}_F$ ($= V_F$).

ここで扱いたい問題はつぎのように表わされる。

First-type games :

To find $(\pi_A{}^*,\tau_A{}^*;\pi_B{}^*,\tau_B{}^*) \in \mathcal{T}(F)$ s.t. $V_F[\pi_A{}^*,\tau_A{}^*;\pi_B{}^*,\tau_B{}^*] = V_F$.

これらの前提の下に次の結果が得られた。

Theorem 1. There exist optimal Markov strategies $(\pi_A{}^*;\pi_B{}^*)$.

Theorem 2. V_F and V_S is a unique solution of the following equations :

(1) $V_F = \max\Big\{ \max\limits_{1\le i\le d} S_A{}^i V_S\ ,\ h \Big\}$ and $V_S = \min\Big\{ \min\limits_{1\le i\le d} S_B{}^i V_F\ ,\ h \Big\}$,

where $S_A{}^i$ and $S_B{}^i$ ($i = 1,\cdots,d$) are defined by

$$S_A{}^i \phi(x) = \mathbf{E}^x\Big[\ f_A{}^i(X_1^i) + \beta\ \phi(x^1,\cdots,X_1^i,\cdots,x^d)\ \Big],$$

$$S_B{}^i \phi(x) = \mathbf{E}^x\Big[\ -f_B{}^i(X_1^i) + \beta\ \phi(x^1,\cdots,X_1^i,\cdots,x^d)\ \Big]$$

for $x = (x^1,\cdots,x^d) \in E$ and bounded measurable functions ϕ on E. Further optimal strategies are given by (1). And optimal stopping times are given by

$$\tau_A{}^* = \inf\ \{\ t \in N(e,\infty) : X_{\pi_B{}^*(t)} \in \{\ V_F = h\ \}\ \}\ \text{and}$$

$$\tau_B{}^* = \inf\ \{\ t \in N(o,\infty) : X_{\pi_A{}^*(t)} \in \{\ V_S = h\ \}\ \}.$$

時間平均コストに対する確率微分ゲームについて

愛媛大学教養部　森木宏明

状態 x(t) が次の１次元線形確率微分方程式

$$dx = [ax + bu + cv]dt + dw, \qquad x(0) = x_0, \quad t \geq 0,$$

で記述されるとする。ここで a, b, c は constants, u(t), v(t) は controls, w(t) は Brown 運動とする。このとき時間平均コストに関して次の３種類の問題を考える。

I. Control Problems: $a \neq 0,\ b = 1,\ c = 0$のとき、コスト$J(u)$を

$$J(u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\int_0^T \frac{1}{2}(x(t)^2 + u(t)^2)dt, \qquad u \in U,$$

で定義して the set U of admissible controls 上において、最小にしたい。

II. Zero-Sum Games: $a,\ b,\ c \neq 0$のとき、コスト $J_0(u,v)$を

$$J_0(u,v) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\int_0^T \frac{1}{2}\{x(t)^2 + u(t)^2 - v(t)^2\}dt, \qquad (u,\ v) \in U_0,$$

で定義して the set U_0 of admissible controls 上において、saddle-point $(\bar{u},\bar{v})$、

即ち $$J_0(\bar{u},v) \leqq J_0(\bar{u},\bar{v}) \leqq J_0(u,\bar{v}) \quad \text{for all } (u,v) \in U_0,$$

を求めたい。

III. Non-Zero-Sum Games: $a,\ b,\ c \neq 0$のとき、コスト $J_1(u,v)$, $J_2(u,v)$ を

$$J_1(u,v) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\int_0^T \frac{1}{2}\{x(t)^2 + u(t)^2\}dt,$$

$$J_2(u,v) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\int_0^T \frac{1}{2}\{x(t)^2 + v(t)^2\}dt, \qquad (u,\ v) \in U_0,$$

で定義して the set U_0 of admissible controls 上において、Nash equilibrium point $(\hat{u},\hat{v})$、即ち $J_1(\hat{u},\hat{v}) \leqq J_1(u,\hat{v})$, $J_2(\hat{u},\hat{v}) \leqq J_2(\hat{u},v)$ for all $(u,\ v) \in U_0$,

を求めたい。

研究会では、これらの問題の解法について以下のように報告した。

Iについて：

$U = \{u(t)$: progressively measurable, $E\int_0^T u(t)^2dt < \infty$, $\sup_t Ex(t)^2 < \infty\}$とする。

Dynamic programming equationsに相当するものはつぎの方程式である。

(＊) $$(\kappa,\ \phi) \in R_+ \times C^2:\ \kappa = \frac{1}{2}\phi'' + ax\phi' + \min_u(u^2/2 + u\phi') + \frac{1}{2}x^2.$$

この方程式の解 $(\kappa,\ \phi)$は $\kappa = K$, $\phi(x) = Kx^2$ で与えられる。ここで、$K^2-aK-\frac{1}{4}=0$, $K>0$. 更に、optimal control u^* と optimal cost $J(u^*)$ は次のとおりである。

$$u^*(x) = -\phi'(x) = -2Kx,$$

$$J(u^*) = \kappa.$$

IIについて：

$U_0 = \{(u,v):\ u(t),\ v(t)$ は feedback laws $u(t) = u(x(t)),\ v(t) = v(x(t))$
$u(x),\ v(x)$: Lipschitz continuous, $|u(x)| + |v(x)| \leqq \mathrm{const}(1+x^2)$,
$\sup_t Ex(t)^2 < \infty\}$とする。

（＊）に対応する方程式は次のようになる。

$$(\lambda, \phi_0) \in R_+ \times C^2:\ \lambda = \frac{1}{2}\phi_0'' + ax\phi_0' + \min_u(u^2/2+b\phi_0'u) - \min_v(v^2/2-c\phi_0'v) + \frac{x}{2}^2.$$

この方程式の解 (λ,ϕ_0) は $\lambda = L$, $\phi_0(x) = Lx^2$で与えられる。ここで、
$(b^2-c^2)L^2 - aL - 1/4 = 0$. 更に, L が $a - 2(b^2-c^2)L < 0$ を満たすとき saddle-point $(\bar{u},\bar{v})$ は次のものである。

$$\bar{u}(x) = -b\phi_0'(x) = -2bLx, \qquad \bar{v}(x) = c\phi_0'(x) = 2cLx.$$

IIIについて：（＊）に対応する方程式は次のようになる。

$(\mu_1,\ \mu_2,\ \phi_1,\ \phi_2) \in R_+ \times R_+ \times C^2 \times C^2$:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\phi_1'' + [ax - c(c\phi_2')]\phi_1' + \min_u(u^2/2 + b\phi_1'u) + \frac{1}{2}x^2,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\phi_2'' + [ax - b(b\phi_1')]\phi_2' + \min_v(v^2/2 + c\phi_2'v) + \frac{1}{2}x^2.$$

この方程式の解 $(\mu_1,\ \mu_2,\ \phi_1,\ \phi_2)$ は $\mu_1 = M$, $\mu_2 = N$, $\phi_1(x) = Mx^2$, $\phi_2(x) = Nx^2$ で与えられる。ここで、

$$b^2M^2 + 2c^2NM - aM - 1/4 = 0,$$

$$c^2N^2 + 2b^2MN - aN - 1/4 = 0.$$

更に、(M,N) が $M,\ N > 0$ を満たすとき、

Nash equilibrium point $(\hat{u},\hat{v})$ は次のものである。

$$\hat{u}(x) = -b\phi_1'(x) = -2bMx,$$

$$\hat{v}(x) = -c\phi_2'(x) = -2cNx.$$

KKMS 定理について

富山大学経済学部　菊田健作

特性関数型協力ゲーム（以下ゲームとよぶ）の解の概念の一つにコアというものがある．これは，ある条件をみたすような分配の集合として定義される．コアは，例えば完全競争市場等のゲーム論的分析に応用されており，解の概念のうち最もよく研究されているものの一つである．コアの持つ欠点の一つとして，かなり多くのゲームにおいてコアが空集合になる，ということが挙げられる．それゆえに，どのようなゲームにおいてコアが空集合になるのか，という問題は研究者の関心を引いた．

ゲームのコアが空集合でないための必要十分条件は，手付けの存在を前提としかつプレーヤーの数が有限である場合，ゲームの特性関数がある線形不等式系をみたすことである，という事実はよく知られている．これはBondareva[3]とShapley[3]によって示された．次に，プレーヤーの数が有限とは限らないが手付けの存在を前提とする場合や，手付けの存在を前提としない場合にまで，コアの定義が一般化された．その後，コアが空集合でないための必要十分条件がどのように一般化されるかについて調べられ，Kannai[6]やSchmeidler[6], Billera[3], Shapley[3]あるいはこれらに続く結果[5]が得られている．

ここでの目的は，手付けの存在を前提としない場合に重要な役割を果たす，いわゆるKKMS定理について解説すること，およびプレーヤーの数が有限とは限らないが手付けの存在を前提とする場合の若干の結果を述べることである．

手付けの存在を前提としない場合に，特性関数型の<u>n人協力ゲーム</u>はペア(N,V)で定義される．ここに，$N=\{1,2,...,n\}$はプレーヤーの集合, Vは各提携にR^nの部分集合を対応させる関数で 4つの条件

(0)$[u,v \in R^n,\ u_i = v_i,\ \text{all } i \in S]$ ならば$[u \in V(S) \text{ iff } v \in V(S)]$,

(i) $V(S) - R^n_+ = V(S)$, all $S \in 2^N$,

(ii) $V(S)$ is closed, all $S \in 2^N$,

(iii) 次のようなMがある：任意の$S \in 2^N$ に対し，

$[u \in V(S)\ \&\ u \in \{b\}+R^n_+]$ ならば$[u_i < M,\ \text{all } i \in S]$,

ここに，$b=(b_i)$, $b_i = \sup\{u_i \in R : u \in V(\{i\})\}$, all $i \in N$,をみたす． 以後，$b_i = 0$, all $i \in N$を仮定する．ゲーム(N,V)の<u>コア</u>　$C(V)$ を

$u \in C(V) \longleftrightarrow$ (i) $u \in V(N)$,

(ii) [あるSと$u' \in V(S)$について，$u_j < u'_j$, all $j \in S$]

ということはない,

で定義する．コアが空集合でないためには，特性関数Vはどのような条件をみたせばよいのか．それを述べる前に有限集合の一般化された分割を定義する．ベクトル$w = \{w_S : S \subset N, S \neq \phi, N\}$があって，条件

$\sum_{i \in S} w_S = 1$, all $i \in N$, かつ　$w_S \geqq 0$, all $S \subset N, S \neq \phi, N$,

をみたすとき，$\mathcal{B} = \{S : w_S > 0\}$を（N上の）balanced set という．ゲーム(N,V)がすべてのbalanced set $\mathcal{B}$に対し，$\cap_{S \in \mathcal{B}} V(S) \subset V(N)$,をみたすとき，ゲーム$(N,V)$はbalancedであるという．もしも，$(N,V)$がbalancedであればそのコアは空集合でないことをScarf[3]はアルゴリズムに基づいて示したが，その後Shapleyによって，いわゆるKKM定理を一般化したKKMS定理による証明が与えられた．

$\mathcal{N} = 2^N - \{\phi\}$とおく． $e^i\ (i \in N)$ をR^nの単位ベクトルとし，$A^S = \mathrm{CH}\{e^i : i \in S\}$,i.e., the convex hull of $\{e^i : i \in S\}$, $A = A^N$とおく．

KKM定理　$\{C^i : i \in N\}$ をAの閉集合族で，各$T \in \mathcal{N}$ に対し，

$\bigcup_{i \in T} C^i \supset A^T$ をみたすとする．このとき

$$\bigcap_{i \in N} C^i \neq \phi.$$

KKMS定理　$\{C^S: S \in \mathcal{N}\}$ がAの閉集合族であって，各$T \in \mathcal{N}$ に対し，

$\bigcup_{S \subset T} C^S \supset A^T$ をみたすならば，あるbalanced set $\mathcal{B}$が存在して

$$\bigcap_{S \in \mathcal{B}} C^S \neq \phi.$$

KKMS定理の証明は，Ky FanによるCoincidence Theoremを用いたものや，Fan-Browder Theoremを用いたもの，Shapleyによる角谷の不動点定理を用いたもの等がある．KKMS定理を応用することによって，balanced game のコアは空集合でないことを示すことができる[3]．しかし，逆は成立しない．即ち，ゲームが balanced でなかったとしてもコアが空集合でないことが起こり得る．

さて，balanced set は有限集合の一般化された分割であると考えることができるが，重みはすべて非負である．そこで重みとして負数をも許すような分割を考えてそれに対応するような定理を考えることは，数学的に興味があるばかりでなくゲーム理論への応用も考えられる．これは今後の課題であるが，参考文献[5]に同様の意図を持った論文を見ることができる．

次に，プレーヤーの数が無限の場合を考える．X：無限次元実ノルム空間X^*:Xの共役空間，I：任意の添数集合，$x_\nu \in X$, $\alpha_\nu \in R$, C：$\{x_\nu\}_{\nu \in I}$より生成される頂点0をもつXにおける凸錐，$C \neq \{0\}$を仮定，$B = \{x \in X : \|x\| = 1\}$とおく．次の命題1はKy Fan定理12の変形である．

命題1.　$\alpha_\nu \geqq 0$, all $\nu \in I$, かつある$x_0 \in B \cap C$ に対し，$x_0 - (B \cap C) \subset C$を仮定する．任意の$\rho \geqq 0$ に対し，次の二つの条件は同値である．

(i) $\exists f \in X^* : \|f\|^* \leqq \rho$ かつ $f(x_\nu) \geqq \alpha_\nu$, all $\nu \in I$.

(ii) 任意の正整数n，任意の$\nu_1, \ldots, \nu_n$，および等式 $\Sigma \lambda_j x_{\nu_j} = x_0$
を成立せしめる$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$に対して，不等式$\rho \geqq \Sigma \lambda_j \alpha_{\nu_j}$ が成り立つ．

Sを無限集合，ΣをSの部分集合のσ-体とする．vはΣ上で定義された非負実数値関数で$v(\phi) = 0$とする．可測空間(S,Σ)は可測空間([0,1],B)に同型であると仮定する．ここに，Bは[0,1]のすべてのBorel集合からなる集合である．I = Σとおく．$\alpha_T = v(T)$, $x_T = \chi_T$, all $T \in \Sigma$,とおく．XをΣの元の指示関数の有限線形結合のすべての一様極限からなる集合とする．$x_0 = \chi_S$, $\rho = v(S)$とおく．命題1より，

系2. 次の二つの条件は同値である．

(i) $\mu(T) \geqq v(T)$, all $T \in \Sigma$，が成立し，しかも$\mu(S) = v(S)$ であるような，ba(S,Σ)の元μが存在する．

(ii) $\Sigma \lambda_j \chi_{S_j}(s) = \chi_S(s)$, all $s \in S$,をみたすような，任意の正整数n,Σの任意のn個の元$S_1, \ldots, S_n$, および任意の$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$に対して，次の不等式が成立．

$$v(S) \geqq \Sigma \lambda_j v(S_j).$$

参考文献 [1] Kim Border : Fixed point theorems with applications to economics and game theory. Cambridge Univ. Press 1985.[2] Ky Fan:On Systems of Linear Inequalities. Annals of Math. Studies 38 (1956),99-156. [3] T. Ichiishi : Game Theory for Economic Analysis. Academic Press. 1983.[4] 菊山健作「Ky Fan 定理の一変形とそのゲーム理論への応用」富大経済論集第27巻，2号，1982. [5] Lin & Simons (eds.) : Nonlinear and convex analysis. Dekker. 1987.[6] 高橋渉：非線形関数解析学. 近代科学社. 1988年.

縄張りのn人ゲームについて

姫路工大 理　寺岡義伸
姫路工大 理　吉田稔

n種の動物間の縄張りをめぐる争いやn企業間の市場獲得をめぐる広告合戦から抽出されたn人非0和ゲームについて取扱う[1,2]。モデルは次のように表現できる：

n人のPlayers (Player $1,\cdots,n$) は，価値Vを有する縄張りをめぐってにらみ合っている。各々は$[0,\infty)$のどの時点まで頑張るかを決めなければならない。一番大きな時点まで頑張った者が勝ちとなり，勝者は価値Vを敗者は価値0を得る。しかしながら，時刻$t\in[0,\infty)$まで頑張るためには，各playerは$h(t)$のコストを費やさなければならない。ここにコスト$h(t)$は$h(0)=0$であり

$$h'(t)>0 \quad \text{for } t\in[0,\infty) \quad \text{かつ} \quad h(t)\nearrow\infty \ \text{as } t\nearrow\infty$$

であると仮定する。次に，n人のplayersのうちk人が最後まで頑張り同時刻で断念したときは，価値Vをk人で平等に分け合うものとする。各playerは互に他の$n-1$人の持続時間を考えに入れた上での，自分の最適持続時間を決めなければならない。

このn人ゲームにあっては，各々のplayerにとっての競争相手は他の$n-1$人というよりはむしろ他の$n-1$人の中で最後まで頑張るplayerであろう。

1. Noisy型のゲーム

ここでは，n人のplayersの各々が互に他の$n-1$人の行動が観測できるNoisy型のゲームを取扱う。そうするとPlayer iの純戦略を$x_i\in[0,\infty)$とすればよい。($i=1,\cdots,n$)。

Player iが純戦略x_iを用いたときのPlayer 1への期待利得を$M_1(x_1,\cdots,x_n)$で表わし，Player 2からPlayer nの$n-1$人が選んだ純戦略のうち最大な値をyとすると

$$(1)\qquad M_1(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}-h(x_1), & x_1<y\\ \frac{1}{k}V-h(x_1), & x_1=y\\ V-h(y), & x_1>y\end{cases}$$

ここに$x_1=y$のときは，Player 2からPlayer nのうち$k-1$人が最大値yを選ぶことになったとする。$k=2,\cdots,n$.
が得られる。

このゲーム(1)に対し定理1を得る[3]。

定理1. 次のような cdf $F^*(\cdot)$ を考える：

$$F^*(x) = \left\{1 - e^{-\frac{h(x)}{V}}\right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad \text{for } x \geqq 0.$$

そうすると $(F^*, \cdots, F^*)$ は (2) で与えられる非0和ゲームの1つの平衡点であり，対応する平衡値は下記の通り：

$$v_1^* = \cdots = v_n^* = 0.$$

2. Silent型のゲーム

ここでは，n人のplayersの各々は互に他の$n-1$人の行動を観測できない状態に置かれており $(0, \infty)$ のどの時点までねばるか決定し自分が決めた計画時間が実行されてみてはじめて断念した人数と頑張っている人数が知らされるというSilent型のゲームを扱う．ここでも純戦略は $x \in [0, \infty)$ としてよい．Noisy型の場合と同様にして

$$\text{(2)} \qquad M_1(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} -h(x_1), & x_1 < y \\ \frac{1}{k}V - h(x_1), & x_1 = y \\ V - h(x_1), & x_1 > y \end{cases}$$

が得られる．このゲームに対して定理2が成りたつ [4]．

定理2. 次のような cdf $F^*(\cdot)$ を考える．

$$F^*(x) = \begin{cases} \left\{\frac{h(x)}{V}\right\}^{\frac{1}{n-1}}, & 0 \leqq x \leqq u^* \\ 1, & x > u^*, \end{cases}$$

ここに $u^* = h^{-1}(V)$ である．

そうすると，$(F^*, \cdots, F^*)$ は (2) のゲームの1つの平衡点であり，対応する平衡値は下記のようになる：

$$v_1^* = \cdots = v_n^* = 0.$$

参考文献

[1] E. Damme: Stability and Perfection of Nash Equilibria, Springer Verlag (1987). [2] J. M. Smith: Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press (1982). [3] 寺岡義伸：ナワバリをめぐる2人ゲーム，京大数理解析研究所講究録 680, 275—284 (1989). [4] 寺岡義伸：ナワバリをめぐる2人ゲームII，京大数理解析研究所講究録，印刷中。

ある多期間確率的在庫モデルの最適政策

九大経済　　児玉正憲

本論文では、需要量が連続的な多期間在庫モデルについて返却および追加注文を考慮し、過剰需要が後期需要として取扱われる場合の最適政策を動的計画法を援用して検討する。記号と前提条件を以下のように設定する。

(i) 各期の正規発注（発注間隔は t）は期首に行われ、ただちに入荷し（単価 c_1）、単価 r_1 ($r_1 > c_1$) で販売する。正規発注前の初期在庫量を x（以後は初期在庫量という）とし、y だけ正規発注した後の期首在庫量を z とする。　$z = x + y$

(ii) 余剰品に対しては単位当り h の在庫コスト，品切れに対しては単位当り p の品切コストがかかるものとする。($c_1 < p$)

(iii) 任意に定められた時点 t_0 ($0 < t_0 < t$, t_0 は各期で一定）で売れ残りがあると、供給者はあるきめられた許容範囲 R_1 以内で引きとる.（単価 r_2, $0 \leqq r_2 \leqq c_1$）　t_0 時点で品切れがあると ある許容範囲 R_2 以内であれば、ただちに単価 c_2 ($c_1 \leqq c_2$) で追加発注し、即時に入荷できるものとする。ただし、$c_2 > r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p$ のときは追加注文せず ($R_2 = 0$) 品切を起したほうが有利となり、これはモデルの仮定に反するので、$c_2 \leqq r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p$ とする。

(iv) 各期の需要量を表わす確率変数は互いに独立で同じ分布に従うものとする。需要量 B の確率密度関数を $\phi(b)$，累積分布関数を $\Phi(b)$、平均値を m とする。

$$\Phi(b) = P\{B \leqq b\} = \int_0^b \phi(u)du, \quad m = \int_0^\infty b\phi(b)db$$

(v) 需要の発注は一般的な関数に従うものとする。つまり、各期の需要量 B の実現値 b が与えられたとき、期における需要の発生は　　$bg(T/t)$　　($0 \leqq T \leqq t$)

に従うものとする。ここに、

$g(x)$ は $g(0)=0$, $g(1)=1$ となる $dg(x)/dx>0$ なる関数 $(0\leqq x\leqq 1)$。時点 T における在庫量を $Q(T)$ とすると、

$$Q(T)=z-g(T/t)b, \qquad 0\leqq T\leqq t$$

である。 $a=g(T/t)b$ をみたす T/t は $b\geqq a$ のとき唯一存在し、これを $T/t=g^{-1}(a/b)$ で表す。このとき、$T=tg^{-1}(a/b)$

α：割引率 $(0<\alpha<1)$

$f_n(x)$：初期在庫量を x としたとき、n 期間にわたる期待割引費用を最小するという意味での最適発注政策をとったときの費用関数。

以上のモデルにおいて、最適発注政策が適当な条件のもとでは簡単な政策になることを示した。また、最適発注政策の性質を検討した。

文献

〔1〕児玉正憲：「確率的在庫モデル最適政策(I),(II)」経済学研究 Vol 52, No1～4.5 九州大学経済学会 1986

〔2〕————：「動的在庫モデルの最適政策(I),(II)連続編」経済学研究 Vol 53, No 4～6 九州大学経済学会 1987

〔3〕狙揉三十六，有薗育生，大田宏：「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」日本経営工学会誌 Vol 37. No2 1986.

A Characterization of the Optimal Value Function of Switching Problems for Bi-Symmetric Markov Processes

田中 輝雄 (九州大学理学部)

Abstract

2-パラメータの連続時間確率過程 (特に bi-symmetric Markov process) に対する switching problem を考え、その optimal value function を Dirichlet form を用いて特徴づける。

1 定義と定式化

$i = 1, 2$
E^i : locally compact Hausdorff space with countable base
m^i : nonnegative everywhere dense Radon measure on E^i
$X^{(i)} = (\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}^i_t, \mathrm{X}^i_t, \mathrm{P}^i_x)_{t\geq 0}$: Markov process on $(E^i, \beta(E^i))$
P^i_t : transition semigroup of $X^{(i)}$

とし、これらに対して直積によって bi-Markov process を構成する：

$\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2,\ \mathcal{F} = \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2,\ \mathrm{P}_{(x,y)} = \mathrm{P}^1_x \otimes \mathrm{P}^2_y$
$\{\mathcal{F}_{(s,t)}\} = \mathcal{F}^1_s \otimes \mathcal{F}^2_t$ を含み、右連続完備となる最小の filtration
$\mathrm{X}_{(s,t)}(\omega) = (\mathrm{X}^1_s(\omega_1),\ \mathrm{X}^2_t(\omega_2))\quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$
$E = E^1 \times E^2,\ m = m^1 \otimes m^2$
$P_{(s,t)} = P^1_s \otimes P^2_t$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{(s,t)}, \mathrm{X}_{(s,t)}, \mathrm{P}_{(x,y)})_{(s,t)\in \mathbf{R}^2_+}$ を bi-Markov process on $(E, \beta(E))$ という。$\mathbf{T} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2_+ \cup \{\infty\}$ が stopping point であるとは、任意の $(s,t) \in \mathbf{R}^2_+$ に対して $\{\mathrm{T} \leq (s,t)\} \in \mathcal{F}_{(s,t)}$ を満たすことである。$\pi = \{\mathrm{T}^n\}_n$ が strategy であるとは、各 T^n が stopping point であり、

$$\mathrm{T}^0 = (0,0),\ \mathrm{T}^n \uparrow \infty$$

$$\mathrm{T}^{2n}_2 = \mathrm{T}^{2n+1}_2,\ \mathrm{T}^{2n+1}_1 = \mathrm{T}^{2n+2}_1,$$

$$\mathrm{T}^{2n}_1 \leq \mathrm{T}^{2n+1}_1,\ \mathrm{T}^{2n+1}_2 \leq \mathrm{T}^{2n+2}_2$$

を満たすことである。T^n_i は T^n の第 i 成分を表すとする。この様な列の全体をΣとする。$\pi = \{\mathrm{T}^n\} \in \Sigma$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{J}(\pi)(x,y) \\
= \ & \mathrm{E}_{(x,y)}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_{\mathrm{T}_1^{2n}}^{\mathrm{T}_1^{2n+1}} e^{-\alpha(r+\mathrm{T}_2^{2n})} f(\mathrm{X}_{(r,\mathrm{T}_2^{2n})})dr + \int_{\mathrm{T}_2^{2n+1}}^{\mathrm{T}_2^{2n+2}} e^{-\alpha(r+\mathrm{T}_1^{2n+1})} f(\mathrm{X}_{(\mathrm{T}_1^{2n+1},r)})dr \\
& + e^{-\alpha|\mathrm{T}^{2n+1}|}\mathrm{C}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{T}^{2n+1}}) + e^{-\alpha|\mathrm{T}^{2n+2}|}\mathrm{C}^2(\mathrm{X}_{\mathrm{T}^{2n+2}})\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

とおく時、

$$\mathrm{J}(x,y) = \mathrm{J}(\pi^*)(x,y) = \inf_{\pi\in\Sigma} \mathrm{J}(\pi)(x,y)$$

となる$\pi^* \in \Sigma$ をみつけ、J を特徴付ける。

2 Dirichlet form と symmetric Markov process

DEFINITION **2.1** *Markov process* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathrm{X}_t, \mathrm{P}_x)_{t\geq 0}$ *on* $(E, \beta(E))$ の *transition semigroup* P_t が *m-symmetric* のとき、*Markov process* は *m-symmetric* であるという。つまり、$\forall u, v :\geq 0$, *measurable function on* E に対して、

$$\int_E u(x)(P_t v)(x)m(dx) = \int_E (P_t u)(x)v(x)m(dx).$$

DEFINITION **2.2** ε が *symmetric form on* $L^2(E,m)$ であるとは、

1. $\varepsilon : \mathcal{D}[\varepsilon] \times \mathcal{D}[\varepsilon] \longrightarrow \mathbf{R}$, $\mathcal{D}[\varepsilon]$ *:dense subspace of* L^2,
2. $\varepsilon(u,v) = \varepsilon(v,u), \varepsilon(u+v,w) = \varepsilon(u,w) + \varepsilon(v,w), \ \ u,v,w \in \mathcal{D}[\varepsilon]$
3. $a\varepsilon(u,v) = \varepsilon(au,v), \varepsilon(u,u) \geq 0, \ \ a \in \mathbf{R}. \ u,v \in \mathcal{D}[\varepsilon]$.

DEFINITION **2.3** $(\varepsilon, \mathcal{D}[\varepsilon])$ が *Dirichlet form on* $L^2(E,m)$ であるとは

1. $(\varepsilon_\alpha, \mathcal{D}[\varepsilon])$ が *Hilbert space (closed)*, 但し、$\varepsilon_\alpha(u,v) = \varepsilon(u,v) + \alpha(u,v)$,
2. $u \in \mathcal{D}[\varepsilon], v = (0 \vee u) \wedge 1 \Longrightarrow v \in \mathcal{D}[\varepsilon], \ \varepsilon(v,v) \leq \varepsilon(u,u)$

DEFINITION **2.4** *Dirichlet form* $(\varepsilon, \mathcal{D}[\varepsilon])$ が *regular* であるとは、*subspace* $C \subset \mathcal{D}[\varepsilon] \cap C_0(E)$ が存在し、C は $\mathcal{D}[\varepsilon]$ および $C_0(E)$ において稠密になるときをいい、C を *core* と言う。ここで、$C_0(E)$ は *compact support* を持つ E 上の連続関数の全体を表わす。

順序制約付き逐次過程について

北九州工業高専　　徳一保生

1．はしがき

動的計画法（ＤＰ）による解法は、最適性原理に基ずいて再帰式を作り、それを逐次的に解くことに依存している。しかし、再帰式を導いても実際にそれを解くことになると、きわめて面倒であったり難解であったりすることが少なくない。ここでは、古典的不等式である算術平均・幾何平均型不等式をモデルにして順序制約を付け配分過程とし、ＤＰによる逐次的解法を試みた。更に、ＤＰと同様に逐次性を持つ重積分（累次積分）に対して、積分領域に加法型関数に順序制約を付けたものをとり、被積分関数に加法型および乗法型関数を与えて、再帰式を導き具体的に解いてみた。これらは、前者については岩木［１］を後者については岩本［２］を参考にしたものである。また、前者については、主問題・逆問題の両方の解析を行い、［１］と同様の逆定理が成り立つことを確認した。

2．問題の設定

（１）・$F_m(c,d) = \mathrm{Max}\,\{x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot x_m^{a_m}\}$，

subject to (i) $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m = c$，$(c>0)$

(i) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_m \geqq d \geqq 0$，$\left(d \leqq \frac{c}{b_1+b_2+\cdots+b_m}\right)$

・$f_m(c,d) = \mathrm{min}\,\{b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m\}$，

subject to (i) $x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot x_m^{a_m} = c$，$(c>0)$

(i) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_m \geqq d \geqq 0$，$\left(d \leqq c^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_m}}\right)$

・$G_n(c,d) = \mathrm{Max}\,\{x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}\cdots x_n^{a_n}\}$，

subject to (i) $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m = c$，$(c>0)$

(i) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_m \geqq \cdot \geqq x_n \geqq d \geqq 0$，$\left(d \leqq \frac{c}{b_1+\cdots+b_m}\right)$

・$g_n(c,d) = \mathrm{min}\,\{b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m\}$，

subject to (i) $x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}\cdots x_n^{a_n} = c$，$(c>0)$

(i) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_m \geqq \cdot \geqq x_n \geqq d \geqq 0$，$\left(d \leqq c^{\frac{1}{a_1+\cdots+a_n}}\right)$

$F_m(c,d)$と$f_m(c,d)$および$G_n(c,d)$と$g_n(c,d)$は主問題と逆問題の関係になっている。また、$a_i\,(\geqq 0)$および$b_i\,(>0)$については、$a_1/b_1 \geqq a_2/b_2 \geqq \cdots \geqq a_m/b_m \geqq \cdots \geqq a_n/b_n$ であるものとする。

（２）・$U_n(c,d) = \int\int\cdots\int_D dx_1dx_2\cdots dx_3$

・$V_n(c,d)=\int\int\cdots\int_D(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

・$W_n(c,d)=\int\int\cdots\int_D(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots\cdots x_n^{a_n})\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

ただし、$a_i \geqq 0, b_i > 0, 0 \leqq d \leqq \frac{c}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ であり、積分領域Dは次のように定める。

$$D=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\;\middle|\;\begin{array}{l} b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n \leqq c, \\ x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq d \geqq 0. \end{array}\right\}$$

なお、$W_n(c,d)$においては、$a_1,a_2,\cdots,a_n$ は自然数であるものとする。

3．経過の概要

（１）については、それぞれの再帰式を容易に導くことができる。そして、実際に逐次的に計算してみると、順序制約に下界（d≧0）を付けたことにより、最適解はdの値により［１］と同様に区分的に求まることになる。各区間のグラフどうしはそれぞれ滑らかにつながることが確認できる。$G_n(c,d)$および$g_n(c,d)$を求めるときには２つのlemmaを必要とするが、これらは［３］のlemma2.1.の拡張になっている。それぞれの（目的関数）≦（最大値）および（目的関数）≧（最少値）は、算術平均・幾何平均不等式の拡張になっている。

（２）については、重積分を累次積分に直して計算する方法によって再帰式を導くことができる。途中の積分は関係式 $x^n-y^n=\Sigma_{r=1}^{n}\ {}_nC_r y^{n-r}(x-y)^r$ を用いて変形しながら部分積分法を繰り返し行えばよい。適当な漸化式を準備することによって、ある程度すっきりした形にまとめられることが確認された。

4．参考文献

［１］岩本誠一，順序配分過程について，九大経済学研究，vol 52,No1~4合併号（1987），569~592

［２］岩本誠一，動的計画と累次積分について，九大経済学研究，vol 53,No4·5合併号（1988），211~226

［３］M.Freimer and G.S.Mudholkar, A Class of Generalizations of Hölder's Inequality, Proceeding of symposium on "Inequalities in Statistics and Probability" IMS Lecture Notes-Monograph Series, vol 5(1984), 59~67

Parametric Linear Programs through Dynamic Programming

九州大・経済　岩本 誠一(Seiichi Iwamoto)

本論文では、Bellman[1,p.47]が提示したマルチ・パラメトリックなN変数(N-1)制約線形計画問題（主問題）およびその双対問題、逆転問題、双対逆転問題の合計４つの線形計画問題を考える。いずれも(N-1)個のパラメータ $a = (a_1, \ldots, a_{N-1})^t$ を右辺定数ベクトルまたは目的係数ベクトルとして含む問題である。４つの問題の各々に対して動的計画法の再帰式に基づいて最適値関数をパラメータの解析的表現として求める。動的計画法で解くためには、まず同時制約系である線形不等式系を逐次制約系に同値変形しておく必要がある。

まず、次の主問題を考える。

$$
\begin{array}{lllr}
\min & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{N-1} + x_N & \\
\text{s.t.} & (1) & x_1 + x_2 & \geqq a_1 \\
 & (2) & x_2 + x_3 & \geqq a_2 \\
 & (3) & x_3 + x_4 & \geqq a_3 \\
 & . & \ldots & . \\
 & (N-1) & x_{N-1} + x_N & \geqq a_{N-1} \\
 & (N) & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{N-1},\ x_N & \geqq 0
\end{array}
$$

この主問題を次のように表す。

$$
\begin{array}{ll}
\min & (e, x) \\
\text{s.t.} & \text{(i)}\ \ Ax \geqq a \\
 & \text{(ii)}\ \ x \geqq 0
\end{array}
$$

ただし　$a \in R^{N-1}$,　$N \geqq 2$.

補題 1　(i) 同時不等式系 (1)-(N) は逐次不等式系

$$
\begin{array}{lll}
(1)^+ & x_1 & \geqq 0 \\
(2)^+ & x_2 & \geqq (a_1 - x_1)^+ \\
(3)^+ & x_3 & \geqq (a_2 - x_2)^+ \\
. & . & .\ \ . \\
(N)^+ & x_N & \geqq (a_{N-1} - x_{N-1})^+
\end{array}
$$

に同値である。　ただし、　$x^+ = \max(x, 0)$.

(ii)　$$f_N(a) = \min_{(1)^+} \min_{(2)^+} \ldots \min_{(N)^+} [x_1 + x_2 + \ldots + x_N].$$

ここに、$f_N(a)$ は主問題の最大値である。

以下、最小値関数列

$$f_N(x_1;a) = \min_{(x_2\cdots x_N)} [x_1+x_2+\ldots+x_N \mid (1)\ldots(N)] \qquad x_1 \geqq 0,\quad a \in R^{N-1},\ N \geqq 2$$

が満たす再帰式

$$f_N(x_1;a_1,\ldots,a_{N-1}) = x_1 + \min_{x_2:(2)^+} f_{N-1}(x_2;a_2,\ldots,a_{N-2})$$

$$f_N(a_1,\ldots,a_{N-1}) = \min_{x_1 \geqq 0} f_N(x_1;a_1,\ldots,a_{N-1})$$

を解いて求める最小値関数 $f_N(a)$ を得る。

同様にして、双対問題

$$\begin{aligned} &\text{Max} && (a,y) \\ &\text{s.t.} && (i)\ A^t y \leqq e \\ & && (ii)\ y \geqq 0 \end{aligned}$$

の最大値関数 $g_N(a)$, 逆転問題

$$\begin{aligned} &\text{Max} && (e,x) \\ &\text{s.t.} && (i)\ Ax \leqq a \\ & && (ii)\ x \geqq 0 \end{aligned}$$

の最大値関数 $F_N(a)$, および 双対逆転問題

$$\begin{aligned} &\min && (a,y) \\ &\text{s.t.} && (i)\ A^t y \geqq e \\ & && (ii)\ y \geqq 0 \end{aligned}$$

の最小値関数 $G_N(a)$ がそれぞれ求められる。 さらに、再帰式を解く過程で同時に最適値関数列すなわち最適政策を求めると、4問題の各々についてその最適（最大・最小）点がパラメータ a の関数として得られる。

参考文献

[1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957

[2] 岩本誠一、「動的計画論」、九州大学出版会、１９８７年。

[3] 岩本誠一、動的計画と累次積分について、経済学研究５３（１９８８）、２１１－２２６。

[4] 岩本誠一、パラメトリックな線形計画と動的計画（１）、経済学研究５５（１９８９）１７３－１８５。

グリードイド上のグリーディ アルゴリズムと離散決定過程との関係

城西大(理) 数学教室
岩 村 覚 三

グリードイド上のグリーディ アルゴリズムを離散決定過程のワク組みの中からとらえられることを示した。更にマトロイド上のグリーディ アルゴリズム，シンメトリック・マトロイド上のグリーディ アルゴリズムも離散決定過程のワク組みに入ることを示した。

Hardy - Littlewood - Pólya の基本不等式の確率順序版について

京都大学 工学部
大西 匡光 OHNISHI Masamitsu

研究報告

本研究で言う Hardy - Littlewood - Pólya の基本不等式とは 2 つの実数の有限列

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \tag{1}$$

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \tag{2}$$

に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{n-i+1} \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_{\pi(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{3}$$

が $(1, 2, \cdots, n)$ のすべての順列 $\pi = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n))$ について成立することを主張するものである.

上述の不等式において "式 (2) の実数 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を (互いに独立な) 確率変数 X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に置き換え, 式 (2) と (3) の不等号 $\le$ を何らかの確率順序に置き換えることはできないか ? " という問題が本研究で考察した "Hardy - Littlewood - Pólya の基本不等式の確率順序版" の問題である, ただし式 (2) と (3) の不等号を同じ確率順序で置き換える必要はない.

これまでに知られていたのは, 著者の知る限りでは,

(1) 式 (2) の $\le$ を Likelihood Ratio Ordering $\le_{lr}$, 式 (3) の $\le$ を (Ordinary) Stochastic Ordering $\le_{st}$ と置き換えれば成立する (Brown and Solomon (1973), Ross (1982, 1983)),

(2) 式 (2) と (3) の $\le$ の両方を (Ordinary) Stochastic Ordering $\le_{st}$ と置き換えると必ずしも成立しない (Ross (1983))

ということ程度であった.

最近 Shanthikumar and Yao (1990) は

(3) 式 (2) の $\le$ を Hazard Rate Ordering $\le_{hr}$, 式 (3) の $\le$ を (Increasing) Convex Ordering $\le_{cv}$ と置き換えれば成立する

ことを示し, 単一機械・フロータイムの確率的最小化スケジューリング問題, 最適 Issuing の問題などへの応用をあげている.

本研究では Shanthikumar and Yao (1990) と同様の方法に従い **(1)**, **(3)** の結果を導くとともに,

(4) 式 (2) の $\le$ を Hazard Rate Ordering $\le_{hr}$, 式 (3) の $\le$ を (Increasing) Concave Ordering (Second Order Stochastic Dominance) $\le_{cc}$ と置き換えれば成立する

ことをも新たに示し, 最適ポートフォリオ選択問題への応用を考察した.

ファジー推移の極限について

千葉大学 (教育) 蔵野正美, 千葉大学 (教養) 安田正実,
千葉大学 (理) 中神潤一, 千葉大学 (教養) 吉田祐治

Bellman and Zadeh [1] は multi-stage の fuzzy decision making の 問題として, fuzzy 行列からつくられる 有限状態集合上の fuzzy 状態の系列について, 収束性とそのアルゴリズムを 議論している. 本報告では, 一般の状態集合上で定義された fuzzy 推移によって生成される fuzzy 状態の系列を考え, この系列の極限定理, およびこの推移関係に関して不変な fuzzy 状態の存在とその一意性について考察する. さらに, terminal gain が与えられているとき, 有限期間における fuzzy expected gain を計算し, その極限の性質を調べることにより, fuzzy 最適化問題に対する有用な示唆を与える. また本報告で用いられるアイデアの理解のために, いくつかの数値例を与え, fuzziness を含む決定過程に関する問題点を考察する.

定式化, 問題と結果

まず system の状態空間, 状態推移を定め, これによって 離散 parameter の動的 fuzzy system を定義する. そのために基本となる空間として compact metric space X を考える. この X の closed subsets の全体 2^X の中に Hausdorff metric ρ が与えられれば, metric space $(2^X, \rho)$ は compact になることはよく知られている. また X 上の upper semi-continuous function を membership function にもつ fuzzy number の全体を $\mathcal{F}(X)$ で表す. われわれは次の条件 (i) ～ (iv) を満足する (X, q, T, p_0) を 離散 parameter の動的 fuzzy system とよぶことにする.

(i) X は compact metrix space で, system の状態は $p \in \mathcal{F}(X)$ で表されるとし, これを fuzzy state とよぶ.

(ii) 状態の推移関係 $q: X \times X \to [0,1]$, $q \in \mathcal{F}(X \times X)$ は, 定常性と Markov 性を満たす. すなわち, n 期の状態が $x \in X$のとき, indicator function I を使えば, $I_{\{x\}}(\cdot) \in \mathcal{F}(X)$ のとき, 次の $n+1$ 期 fuzzy state は $q(x, \cdot) \in \mathcal{F}(X)$, $x \in X$ で表される. これを fuzzy relation とよぶ.

(iii) 単位区間 $[0,1]$ 上の三角ノルム ([10]) $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ は $T(x,y) = x \wedge y = \min\{x,y\}$ とする.

(iv) 任意に与えられた fuzzy state $p_0 \in \mathcal{F}(X)$ で initial fuzzy state を表す.

離散パラメータの動的 fuzzy system (X, q, T, p_0) から, つぎで定義される fuzzy 状態の系列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$p_{n+1}(y) = \sup_{x \in X} T(p_n(x), q(x,y)) = \sup_{x \in X} \{p_n(x) \wedge q(x,y)\}, \ y \in X, n \geq 0$$

を fuzzy chain といい, このような relation と chain によって定まる構造を fuzzy 推移とよぶ.

ここではつぎの 2 つの問題を考える.

問題 1. Fuzzy chain における極限定理と不変 fuzzy state の 存在について.

問題 2. 与えられた fuzzy state $r \in \mathcal{F}(X)$ を terminal fuzzy gain とし, その期待値として n 期の fuzzy expected gain $\psi_n^* := ⨍ r\, dp_n$ および その極限値 $\psi^* := \limsup_{n \to \infty} \psi_n^*$ の特徴づけについて.

次の仮定のもとで定理1と定理2の結果を得る.

仮定 1. (continuity) fuzzy relation $q: X \times X \to [0,1]$ は連続関数とする.

fuzzy state 列の収束を次のように定義する.

定義 (例えば [6] を参照) $s_n, s \in \mathcal{F}(X)$ について,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

とは, $\sup_{\alpha\in[0,1]} \rho(s_{n,\alpha}, s_\alpha) \to 0 \ (n \to \infty)$, ただし $s_{n,\alpha}, s_\alpha$ は それぞれ fuzzy state s_n, s のα-cut $(0 \le \alpha \le 1)$ とし, ρ は与えられた Hausdroff metric とする.

fuzzy chain $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ の収束を議論するために fuzzy relation q のα-cut の考えを用いて, 写像 $q_\alpha : 2^X \to 2^X$ $(0 \le \alpha \le 1)$ を次で定義する :

$$\begin{array}{ll} \alpha \neq 0,\ D \in 2^X (D \neq \emptyset) \text{ に対して}, & q_\alpha(D) := \{y \mid q(x,y) \ge \alpha \text{ for some } x \in D\}, \\ \alpha = 0,\ D \in 2^X (D \neq \emptyset) \text{ に対して}, & q_0(D) := c\ell\{y \mid q(x,y) > 0 \text{ for some } x \in D\}, \\ 0 \le \alpha \le 1,\ D = \emptyset \text{ に対して}, & q_\alpha(\emptyset) := X. \end{array}$$

仮定 2. (contraction property) ある実数 $\beta (0 < \beta < 1)$ が存在して, 次が成立つ:

$$\rho(q_\alpha(A), q_\alpha(B)) \le \beta\rho(A,B) \ \text{ for all } \ A, B \in 2^X \text{ and all } \alpha\ (0 \le \alpha \le 1).$$

定理 1. (i) 次の等式を満たす fuzzy state $p \in \mathcal{F}(X)$ が一意に存在する:

$$p(y) = \max_{x\in X}\{p(x) \wedge q(x,y)\} \ \text{ for all } y \in X.$$

(ii) 上で定めた fuzzy chain $\{p_n\}$ は, initial fuzzy state p_0 には無関係に, 定理1 (i) の unique solution $p \in \mathcal{F}(X)$ に収束する. 即ち,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

定理 2. $r \in \mathcal{F}(X)$ を 連続とする. このとき, 次が成立する.

$$\psi^* = \sup_{0\le\alpha\le1} \{\alpha \mid p_\alpha \cap r_\alpha \neq \emptyset\} = \fint r\, dp,$$

ただし, p_α は定理1 (i) の等式を満たす唯一の fuzzy state $p \in \mathcal{F}(X)$ の α-cut である.

References

[1] Bellman,R.E. and L.A.Zadeh, *Management Sci.*, 17 1970, pp. 141-164. [2] Bertsekas,D.P. and S.E.Shreve, Academic Press, New York, 1978. [3] Dubois,D., H.Prade, *European J. Op. Res.*, 40 1989, pp. 135-154. [4] Kruse,R., R.Buck-emden, and R.Cordes, *Fuzzy Sets and Systems*, 21 1987, pp. 289-299. [5] Kuratowski,K., Academic Press, New York, 1966. [6] Nanda,S., **33** 1989, pp. 123-126. [7] Novàk,V., Adam Hilder, 1989. [8] Ralescu,D. and Adams, *J. Math. Anal. App.*, 75 1980, pp. 562-570. [9] Sadovski,A.L., *Soviet J. Aut. and Inf. Sci.*, **19** 1986, pp. 17-19. [10] Schweizer,B. and A.Sklar, North-Holland, Amsterdam, 1983. [11] Sugeno,M., North-Holland, Amsterdam, 1987 pp. 89-102. [12] Zadeh,L.A., *Information and Control*, 8 1965, pp. 338-353.

多状態システムの確率的性質について

愛知工業大学 大鋳 史男

序. 本論では多状態システムの構造と確率的性質との関係, 確率的なclosure theoremsについて述べた。本稿ではそれらの内主要な結果を必要な定義と共に記す。

1. 定義. 多状態システムとは次の条件を満たす組 $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$ である。
(i) $\Omega_i \ (1\le i\le n)$, S は全順序集合である。
(ii) φ は直積順序集合 $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ から S への単調増加な全射である。

2. 定義. システム $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$ が直列システムであるとは, 任意の $s\in S$ に対して $\varphi^{-1}(s\le)$ が $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ の部分束になることである。ここで $\varphi^{-1}(s\le)\equiv\{x \mid \varphi(x)\ge s\}$。

3. 定義. 順序集合 $(\Omega',\le)$ において A が increasing sub-set of Ω' であるとは, $x\le y,\ x\in A \Rightarrow y\in A$ が成立することである。

4. Notations. $\mathcal{A}_i\equiv\{W \mid W$ は Ω_i の increasing sub-set$\}$, $\mathcal{A}\equiv\{W \mid W$ は S の increasing sub-set$\}$, $\mathcal{B}_i\equiv\sigma(\mathcal{A}_i)$, $\otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i$: $\mathcal{B}_i \ (1\le i\le n)$ の直積 σ-field, $\mathcal{S}\equiv\sigma(\mathcal{A})$, $\mathcal{P}_i$: $(\Omega_i,\mathcal{B}_i)$ 上の確率測度全体, $\mathcal{P}$: $(S,\mathcal{S})$ 上の確率測度全体。$P_i\in\mathcal{P}_i \ (1\le i\le n)$ の時 $\otimes_{i=1}^n P_i$ は $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i)$ 上の直積確率である。

5. 定理. $(\Omega_i,\mathcal{B}_i)$ 上の確率測度 P_i, Q_i に対して

$$\forall W\in\mathcal{A}_i,\ P_i(W)=Q_i(W) \Rightarrow P_i=Q_i$$

である。この定理から次の $\mathcal{P}_i$ 上の演算が定義できる。

6. 定義. $P_i, Q_i\in\mathcal{P}_i$, $\alpha\in[0,1]$ とする。
(i) $P_i\cdot Q_i$ は $(\Omega_i,\mathcal{B}_i)$ 上の確率で, $\forall W\in\mathcal{A}_i$, $(P_i\cdot Q_i)(W)=P_i(W)\cdot Q_i(W)$ を満たすものである。
(ii) P_i^α は $(\Omega_i,\mathcal{B}_i)$ 上の確率で, $\forall W\in\mathcal{A}_i$, $(P_i^\alpha)(W)=(P_i(W))^\alpha$ を満たすものである。
(iii) $-\log P_i$ は $\mathcal{B}_i$ から $[0,\infty]$ への mapping で $\forall A\in\mathcal{B}_i$, $(-\log P_i)(A)=-\log P_i(A)$ なるものである。$-\log 0=+\infty$ とする。
(iv) $(-\log P_i)+(-\log Q_i)\equiv-\log(P_i\cdot Q_i)$, $\alpha(-\log P_i)\equiv-\log P_i^\alpha$.
(v) $P_i\le Q_i \Leftrightarrow \forall W\in\mathcal{A}_i,\ P_i(W)\le Q_i(W)$, $-\log P_i\ge-\log Q_i \Leftrightarrow P_i\le Q_i$ と定義する。

$\mathcal{P}$ 上の演算に関しても同様に定義する。

7. 定義 (i) system $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ の信頼度関数 h_φ とは $\prod_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i$ から $\mathcal{P}$ への写像で, $(h_\varphi(\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n))(A)=(\otimes_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i)(\varphi^{-1}(A))$ となるもの。

(ii) system $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ の hazard transform η_φ とは $\prod_{i=1}^{n}(-\log\mathcal{P}_i)$ から $-\log\mathcal{P}$ への写像で $\eta_\varphi(-\log\mathbb{P}_1,\dots,-\log\mathbb{P}_n)=-\log h_\varphi(\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n)$ はるもの。$-\log\mathcal{P}_i\equiv\{-\log\mathbb{P}_i \mid \mathbb{P}_i\in\mathcal{P}_i\}$。

8. 定理 信頼度関数 h_φ に対して次の順序関係が成立する。$\forall\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_i\in\mathcal{P}_i$, $\forall\alpha\in[0,1]$ に対して,

$$h_\varphi(\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n)\cdot h_\varphi(\mathbb{Q}_1,\dots,\mathbb{Q}_n)\geq h_\varphi(\mathbb{P}_1\cdot\mathbb{Q}_1,\dots,\mathbb{P}_n\cdot\mathbb{Q}_n) \quad (8.1)$$

$$h_\varphi(\mathbb{P}_1^\alpha,\dots,\mathbb{P}_n^\alpha)\geq[h_\varphi(\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n)]^\alpha \quad (8.2)$$

である。

任意の $\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_i\in\mathcal{P}_i$ $(1\leq i\leq n)$ に対して (8.1) で等号が成立するための必要十分条件はシステム φ が直列システムになることである。(8.2) に関しても同様に等号が成立するための必要十分条件はシステムが直列システムになることである。

9. 定義 以下システム $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ において φ は $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, \otimes_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i)$ から $(S, \mathcal{S})$ への可測関数とする。又 Ω_i, S には閉区間全体から生成される開集合系が与えられており, $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ には直積位相が与えられているものとする。$\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ には通常の位相が与えられているとする。$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし $\{X_i(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ を Ω_i-valued decreasing right-conti. な確率過程とする。(i) $\{X_i(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ が NBU であるとは $\forall$open increasing sub-set W of Ω_i, $T_{iW}\equiv\inf\{t \mid X_i(t)\notin W\}$ が NBU 確率変数であること。(ii) $\{X_i(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ が IFRA であるとは, $\forall$open increasing sub-set W of Ω_i, T_{iW} が IFRA 確率変数であること。

信頼度関数 h_φ の性質（定理8）を用いて次のことが証明できる。

10. 定理 $\{X_i(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ $(1\leq i\leq n)$ を互いに独立とし, φ を left-continuous とする。

(i) $\{X_i(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ $(1\leq i\leq n)$: NBU $\Rightarrow\{\varphi(X_1(t),\dots,X_n(t)), t\in\mathbb{R}_+\}$: NBU。

(ii) $\{X_i(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ $(1\leq i\leq n)$: IFRA $\Rightarrow\{\varphi(X_1(t),\dots,X_n(t)), t\in\mathbb{R}_+\}$: IFRA。

証明は $X_i(t)$ による $(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$ 上の像測度 $\mu_{i,t}$ を考える。

２項過程によるルックバックオプションの評価

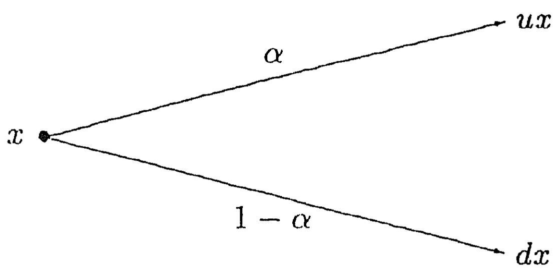
鳥取大学工学部　　　　河合　一

1　はじめに

株式オプションとは，指定された期日（満期日）ないしは，期間内に定められた価格（権利行使価格）で株式を購入あるいは売却する権利である．買う権利をコール (call)，売る権利をプット (put) と云う．また，権利行使が満期日に限られているものをヨーロピアン，満期日迄いつでも行うことができるものをアメリカン，と呼ぶ．オプションの価格理論としては，権利行使価格が，契約時にあらかじめ定められている最も基本的なオプションについて，Black and Scholes [1] は，株価変動が幾何ブラウン運動に従うとし，市場に裁定の機会が存在しないという条件の下で，ヨーロピアンオプションの価格式を与えた．一方，ヨーロピアンルックバックオプションとは，行使価格が株式のサンプルパスに依存しているものであり，それがオプションの発行日から満期日迄の最安値（コール），最高値（プット）となっているオプションである．ルックバックオプションの価格については，Goldman, Sosin and Gatto [3] は，[1] と同じ仮定の下で，その評価式を導いている．しかし [1,3] で用いられている数学的な手法は高度なものであり，数学も経済学あるいは財務理論も共に好きであり得意である人以外には，理論の基礎となっている基本的な考え方を分かりにくくさせている傾向がある．それに対して，Cox, Ross and Rubinstein [2] により提案された離散時間２項型オプション価格モデルは数学的に単純であり，またある極限操作を施すことにより幾何ブラウン運動を仮定した連続型モデルと同じ結果を与えることなどから，基本的な考え方を理解するのに適していると思われる．そこで，本稿では２項過程を用いたルックバックオプションの価格評価を議論する．

2　株式価格の２項モデル

時間は離散的とする．現在の株価を x とするとき．次期の株価は，確率 α, $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ で ux, dx となる．ここで u, d はそれぞれ株価の上昇率，下降率である．$u>1$, $d<1$ であり，$ud=1$ と仮定する．また，α, u, d は時間に依らず一定である．



3 仮定

オプション価格形成にあたり，以下の環境を設定する．

1．コストをかけずに確率 1 で利益を上げることができるという裁定機会は存在しない．

2．売買手数料と税金はない．また，配当は考えない．

3．株式，オプションの空売り，現金の借入れは無制限に可能である．

4．現金の貸出し，借入の利子率は同じである．

5．無危険資産が存在し，その利子率は，満期日まで一定である．

6．株式，オプションの売買，現金の貸借の単位は任意に分割が可能である．

無危険資産の 1 + 利子率 を R とすると，仮定 1. から，株式の変化率，u, d と R の間には，$d < R < u$ の関係が存在することになる．

4 ヘッジ・ポートフォリオの構成

ヘッジとは，株式とそれに対するオプションを組み合わせる形を意味する．本節では，ルックバック・コールあるいはプットオプションと，その原株からなるポートフォリオを適切に構成することにより，そのポートフォリオを無危険化し，裁定機会に関する仮定 1 の下で，オプション価格の満期迄の残り期間に関する漸化式を与える．

4.1 コールオプション

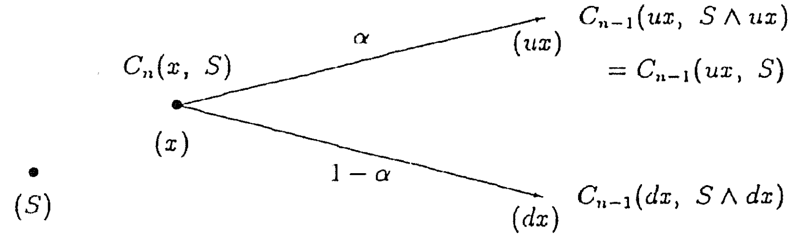
原株の価格変化率は，毎期独立で同一の分布をすること，および，ルックバックコールオプションの権利行使価格は，オプションの発行日から満期日迄の株価の最小値であることから，現時点のオプション価格は，現在の株価，現在迄の株価の最小値および満期迄の残り期間に依存することになる．

$C_n(x,\ S)$：残り期間 n, 現在の株価 x, 現在までの株価の最小値 S, のときのコールの価格．

とする．ここで，$x \geq S$ である．また，

$$C_0(x,\ S) = x - S, \tag{1}$$

は明らかである．



$a \wedge b \equiv \min\{a,\ b\}$

凸関数の二次の Approximate Directional Derivative と Dini Derivative の関係について

富山大学経済学部　白石俊輔

必ずしも微分可能でないような関数に対し一般化された方向微分を定義することは計画数学における解析の中でも最も基礎的な部分とみなされている。そして一次の方向微分についてはいわゆる Clarke の微分が非常な成功を収めている。そこで当然のことながら次に要請されるのは二次の方向微分であろう。

凸関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, x_0 \in \mathbf{R}^n, d \neq 0, \varepsilon > 0$ に対して（一次の） Approximate Directional Derivative を次式によって定める。

$$f'_\varepsilon(x_0; d) := \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0) + \varepsilon}{\lambda}$$

形式的に $\varepsilon = 0$ とするとこれは exact な方向微分 $f'(x_0; d) = \lim_{\lambda \to 0^+}[f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)]/\lambda$ に一致しさらに $\varepsilon \to 0^+$ としたとき $f'(x_0; d)$ に収束する。この意味で Approximate Directional Derivative は exact な方向微分を近似していると言える。而るに $f'_\varepsilon(x_0; d)$ は次のような特徴づけも可能である。

$$f'_\varepsilon(x_0; d) = \max\{< x^*, d > |x^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)\},$$

where $\partial_\varepsilon f(x_0) = \{x^* \in \mathbf{R}^n | f(x_0) + f^*(x^*) - < x_0, x^* > \leq \varepsilon\}$. 従って $f'_\varepsilon(x; d)$ は次の（x をパラメーターとする）パラメトリックな凸計画問題の最適値関数とみなせる。

$$max\{< x^*, d > | f(x) + f^*(x^*) - < x_0, x^* > \leq \varepsilon\}.$$

この問題は自然に Slater（内点）条件を満たす。従ってパラメーター x について方向微分可能であることが知られている。この事実を鑑みて二次の Approximate Directional Derivative を次式で定める。

$$f''_\varepsilon(x_0; d) := \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f'_\varepsilon(x_0 + \lambda d; d) - f'_\varepsilon(x_0; d)}{\lambda}$$

この研究の目的は $\varepsilon \to 0^+$ とした時の $f''_\varepsilon(x_0; d)$ の挙動を調べることである。その挙動についてであるが $f''_\varepsilon(x_0; d)$ を一般化方向微分として採用する為にはやはり exact な二次の方向微分が存在するような時にはその値に収束することが望まれる

わけである。exact な二次の方向微分は関数の凸性にも拘らず常に存在するとは限らないので次のようなものを考える。

$$\overline{D}''f(x_0;d) := \lim_{\lambda\to 0^+}[f'(x_0+\lambda d;d) - f'(x_0;d)]/\lambda$$

$$\underline{D}''f(x_0;d) := \lim_{\lambda\to 0^+}[f'(x_0+\lambda d;d) - f'(x_0;d)]/\lambda$$

$\overline{D}''f(x_0;d) = \underline{D}''f(x_0;d)$ となるとき $D''f(x_0;d)$ と書いて二次の Dini Derivative と呼ぶ。この時次が成立する。

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d) = \overline{D}''f(x_0;d)$$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d) = \underline{D}''f(x_0;d)$$

従って $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d)$ と $D''f(x_0;d)$ の存在性は同値であり $f''_\varepsilon(x_0;d)$ は $D''f(x_0;d)$ を近似していると言えよう。この事実が、二次の Approximate Directional Derivative を一般化された二次の方向微分として採用する根拠になり、二次の Approximate Directional Derivative は凸計画問題のあらゆる場面で（最適性条件を中心とする理論面やそこから設計されるアルゴリズム面において）重要な役割を果たすものと期待される所以ともなるのである。またこの事実に従えば、もし $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d)$ の収束性が殆ど至るところで保証されればそれと同値な二次の Dini Derivative が凸関数においては殆ど至るところ存在すると言う古典的な事実も示されることになる。

線形制約凸計画問題に対する主双対近接点法

茨木 智，福島雅夫，茨木俊秀

京都大学工学部

本研究では，線形制約凸計画問題に対して，近接点法 (proximal point methods) と呼ばれるクラスに属する最適化法を提案し，特に問題の目的関数が分離可能な場合に対して，効率的に適用できることを示した．

近接点法は，極大単調な作用素 $T(: R^N \to R^N)$ のゼロ点$\bar{z}$を求めるための反復的解法の1つである．その手順は，任意の初期点 z^0からスタートし，次の点 z^{k+1}を $z^{k+1} \approx P_k(z^k) = (I + c_k T)^{-1}(z^k)$ で計算することによって点列 $\{z^k\}$ を生成するものである (c_kは正定数)．Rockafellar(1976) は，k回目の反復における z^{k+1}を計算するルールを (z^kから z^{k+1}を近似的に求めるとき必要となる基準を含めて) 提案し，さらに $\{z^k\}$ が$\bar{z}$に収束することを示した．また彼は，凸計画問題に対しても，3 種類の近接点法を提案し，それらは主，双対および主双対近接点法と呼ばれている．我々の提案する方法は，彼の主双対近接点法に多くの共通点を持つ．

本研究で考察した問題は次のようなものである．

$$\text{minimize } F(x) \text{ subject to } Ax = b.$$

いま，この問題の Lagrange 関数を $L(x,y)(= F(x) - \langle y, Ax - b\rangle)$ で定義する．主双対近接点法は，問題を直接解くかわりに，Lagrange 関数 L の鞍点 (=Kuhn-Tucker pair) を近接点法で反復的に求めようとするものであり，各反復ごとに関数 $L_k(x,y)(= L(x,y) + \frac{1}{2c_k}|x - x^k| - \frac{1}{2c_k}|y - y^k|)$ の鞍点を求める作業を繰り返すことにより，点列 $\{(x^k, y^k)\}$ を生成する．Rockafellar の提案した方法では，まず関数 L_kを yに関して最大化し，次に x に関して最小化することによって鞍点を求めるのに対し，我々の提案する方法は，はじめに関数 L_kの x に関する最小化を行い，続いて yに関する最大化を行って L_kの鞍点を求める．本研究では，この主双対近接点法によって生成される点列が問題の Kuhn-Tucker pair に収束することを示し，またその収束率に関する議論を行った．Rockafellar の方法では，各反復で必要となる基準が，点と集合の距離で表されているのに対して，我々の方法では微分可能な関数の勾配の大きさで計算できる点で扱いが容易である．特にこの方法が効率良く適用できる問題のクラスは，問題の目的関数が分離可能な場合であり (目的関数の微分可能性は必ずしも必要ではない)，本研究ではこの分離可能な問題に対する考察をも詳しく与えた．

Sharp Bonferroni-Type Inequalities in Explicit Forms

BY MASAAKI SIBUYA

Department of Mathematics, Keio University

SUMMARY

Let $A = (A_i)_{i=1}^n$ be a finite set of events on a probability space, and let K be the number of A_i's which occur. Put $p_m = P\{K = m\}, 0 \le m \le n$; $q_m = P\{K \ge m\}, 1 \le m \le n-1$; $S_0 = 1$ and

$$S_j = \sum\nolimits_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le n} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_j}), \quad 1 \le j \le n. \tag{1.1}$$

The inequalities bounding p_m or q_m by linear combinations of S_j's are called Bonferroni-type inequalities. See, for example, Galambos(1978) for introduction. The inequalities are used in the theory of reliability, order statistics, multiple comparisons, and so on.

In this paper, sharp inequalities on p_m or q_m by linear combinations of $(S_0, S_k, S_{k+1}, \ldots, S_r)$, $1 \le k < r \le n$, are obtained by using the 'majorant-minorant method', which was explored in Sibuya(1990). In Section 2, Theorems 1 and 2 state the inequalities on p_m and q_m, respectively, using (S_k, S_{k+1}). In Theorems 3 and 4 of Section 3, those using (S_k, S_{k+1}, S_{k+2}) are stated. They imply, as in the case $k = m$ for example, Galambos' lower bound on p_m of three terms, Galambos and Mucci's(1980) upper bound of p_m, and the following sharp inequalities:

$$\begin{aligned} q_m \le S_m - \Big(\frac{2(m+1)}{j-m+1} - \frac{j-m}{\binom{j}{m+1}} + \frac{j-m-1}{\binom{j+1}{m+1}}\Big) S_{m+1} \\ + (m+2)\Big(\frac{m+1}{(j-m+1)(j-m)} - \frac{1}{\binom{j}{m+1}} + \frac{1}{\binom{j+1}{m+1}}\Big) S_{m+2}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

where $j = m + 1 + [(m+2)S_{m+2}/S_{m+1}]$ ($[x]$ denotes the integer part of x), $m+1 \le j \le n-1$. The equality holds if $P(K \in \{m-1, m, j, j+1\}) = 1$. If $j = m+1$, it is the classical Bonferroni inequalities of three terms.

(1.3)

$$\begin{aligned} q_m \ge & \frac{1}{(n-m)^{(2)}\binom{n}{m}\binom{j+1}{m+1}} \\ & \times\Big((m+2)^{(2)}\Big\{m\Big(\binom{n}{m+1} - \binom{j}{m+1}\Big) - (j-m+1)\Big(\binom{n}{m} - \binom{j}{m}\Big)\Big\} S_{m+2} \\ & - (m+2)\Big\{(m+1)^{(2)}\Big(\binom{n}{m+2} - \binom{j}{m+2}\Big) - (j-m+1)^{(2)}\Big(\binom{n}{m} - \binom{j}{m}\Big)\Big\} S_{m+1} \\ & + (m+2)(j-m+1)\Big\{(m+1)\Big(\binom{n}{m+2} - \binom{j}{m+2}\Big) - (j-m)\Big(\binom{n}{m+1} - \binom{j}{m+1}\Big)\Big\} S_m\Big), \end{aligned}$$

where

$$j = m + [(m+1)\frac{(n-m-1)S_{m+1} - (m+2)S_{m+2}}{(n-m)S_m - (m+1)S_{m+1}}],$$

and $m \le j \le n-2$. The equality holds if $P(K \in \{m-1, j, j+1, n\} = 1$. Further if $j = m$, it is an inequality by Mărgăritescu(1987) and Sibuya(1990).

In Section 4, the 'majorant and minorant' method is summarized, and it is justified in the present framework by Theorems 5 and 6. After them, the proof of Theorems 1-4 is outlined. The principle

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

of the proofs can be applied to the general case using $(S_k, S_{k+1}, \ldots, S_r)$. In supplementary Section 5, a method to find all the majorants and minorants is shown.

There is a group of inequalities bounding p_m or q_m using $(S_m, S_{m+1}, \ldots, S_r)$, e.g. classical Bonferroni's and the above examples. There is another group of inequalities bounding p_m or q_m by linear combinations of $(S_0, S_1, \ldots, S_r)$, e.g. Kwerel(1975a, 1975b, 1975c), Sathe, Pradhan and Shah(1980), Platz(1985), Boros and Prékopa (1989) and Sibuya(1990). The inequalities of the latter group give the best bound for any possible value of $(S_1, \ldots, S_r)$. These two groups are combined and extended in the new group of this paper.

It is well known that Bonferroni-type inequalities are obtained by solving linear programming problems, e.g. Hailperin(1965). Recently, Prékopa(1988, 1990) and Boros and Prékopa(1989) studied the inequalities extensively from this viewpoint. The majorant and minorant method of this paper is essentially solving the dual problem of the linear programming, but it is geometric and makes the computation simpler. A similar geometric approach was adopted by Móri and Székely(1985) and Samuels and Studden(1989). Samuels and Studden(1989) pointed out the role of the theory of the Chebyshev system in the Bonferroni-type inequalities, and that the inequalities are special cases of the results in Karlin and Studden(1966) and Kreĭn and Nudel'man(1977). The present paper treats a more specific case than Samuels and Studden(1989) to obtain the bounds in more explicit forms by simpler methods. See Remark (4) of Theorem 1.

There are inequalities using not $S_j, 1 \leq j \leq n$, but partial sums of the definition (1.1), e.g. Hunter(1976). Although sometimes useful, they are out of the scope of this paper.

References

1. Boros, E. and Prékopa, A., *Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occur*, Math. Operations Res. 14 (1989), 317–342.
2. Galambos, J., "The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics," John Wiley, New York, 1978. (2nd ed., Robert E. Krieger Publ., Malabar, Florida, 1987.)
3. Galambos, J. and Mucci, R., *Inequalities for linear combinations of binomial moments*, Publ. Math., Debrecen 27 (1980), 263–269.
4. Hailperin, T., *Best possible inequalities for the probability of a logical function of events*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 343–359.
5. Hunter, D., *An upper bound for the probability of a union*, J. Appl. Prob. 13 (1976), 597–603.
6. Karlin, S. J. and Studden, W. J., "Tchebycheff Systems," John Wiley, New York, 1966.
7. Kreĭn, M. G. and Nudel'man, A. A., "The Markov Moment Problem and Extremal Problems," Translations of Mathematical Monographs, No. 50, American Mathematical Society, Providence, 1977.
8. Kwerel, S. M., *Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified dependent probability systems*, J. Amer. Statist. Assoc. 70 (1975a), 472–479.
9. Kwerel, S. M., *Bounds on the probability of the union and intersection of m events*, Adv. Appl. Prob. 7 (1975b), 431–448.
10. Kwerel, S. M., *Most stringent bounds on the probability of the union and intersection of m events for systems partially specified by $S_1, S_2, \ldots, S_k$, $2 \leq k < m$*, J. Appl. Prob. 12 (1975c), 612–619.
11. Mărgăritescu, E., *On some Bonferroni inequalities*, Stud. Cerc. Mat. 39 (1987), 246–251.
12. Móri, T. F. and Székely, G. J., *A note on the background of several Bonferroni-Galambos-type inequalities*, J. Appl. Prob. 22 (1985), 836–843.
13. Platz, O., *A sharp upper probability bound for the occurrence of at least m out of n events*, J. Appl. Prob. 12 (1985), 978–981.
14. Prékopa, A., *Boole-Bonferroni inequalities and linear programming*, Operations Res. 36 (1988), 145–162.
15. Prékopa, A., *Sharp bounds on probabilities using linear programming*, Operations Res. 38 (1990), 227–239.
16. Samuels, S. M. and Studden, W. J., *Bonferroni-type probability bounds as an application of the theory of Tchebycheff systems*, in "Probability, Statistics, and Mathematics, Papers in Honor of Samuel Karlin," eds. T. W. Anderson, K. B. Athreya and D. L. Iglehart, Academic Press, Boston, 1989.
17. Sathe, Y. S., Pradhan, M. and Shah, S. P., *Inequalities for the probability of the occurrence of at least m out of n events*, J. Appl. Prob. 17 (1980), 1127–1132.
18. Sibuya, M., *Bonferroni-type inequalities; Chebyshev-type inequalities for the distributions on [0,n]*, Ann. Inst. Statist. Math. (1990b). (to appear)

Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, JAPAN 223