

(4) 実験計画法における統計的推測と応用

Das, A. (ISI, India), Ghosh, S. (Univ. of California, U.S.A.), 景山三平 (広島大・学校教育)、Mukerjee, R. (IIM Calcutta, India) : Robustness of designs	123
Gupta, S. (National Institute of Health, U.S.A.) : Block designs with nested rows and columns for factorial experiments	125
浜田昇 (大阪女子大), Helleseth, T., Ytrehus, ϕ . (Univ. of Bergen, Norway) : There are exactly two nonequivalent $[20, 5, 12; 3]$ -codes	127
神保雅一 (岐阜大・工)、伊藤栄明 (統数研) : Lotka-Volterra 系の保存量と Hadamard design	129
広津千尋 (東京大・工) : 交互作用の多重比較—順序仮説を中心にして—	131
白旗慎吾 (大阪大・教養)、阪本雄二 (作陽短大) : BIBD の不完全 U-統計量への応用	133
袁福之 (江戸川大) : Optimal fractional s^m factorial designs of resolution III in a restricted class	135
上村秀一, 藤原良 (筑波大・社工) : A construction of orthogonal arrays from Baer subplanes	137
大森博之 (愛媛大・教育) : Weighing 行列 $W(8a-2, 4a)$ について	139
伊藤昇 (名城大・理工) : On cyclic tournament	141
劉 璋温 (中国科学院应用数学研究所) : 中国における直交配列の研究	143
兵頭義史 (岡山理大・理) : 一般状況下での単純配列を用いた 2^m -FF 計画の情報行列に関する注意	145
山本純恭, 藤井淑夫, 並川哲郎, 光岡元弘 (岡山理大・理) : Three-symbol orthogonal arrays of strength t and $t+2$ constraints	147

ROBUSTNESS OF DESIGNS

Ashish DAS
ISI, Calcutta
India

Subir GHOSH
Univ. of Calif.
Riverside, USA

Sanpei KAGEYAMA
Hiroshima Univ.
Japan

Rahul MUKERJEE
IIM, Calcutta
India

The unavailability of data is common in scientific experiments. The deep concern of experimenters and researchers about the unavailability of data can be seen in a voluminous literature and in many text books. In statistical planning, it is never possible to anticipate beforehand which observations are going to be unavailable during the experiment and rarely it is possible to know beforehand the probability of a set of observations being unavailable during the experiment. In case of unavailability of data, the experimenter can not redo the experiment with a different design because it costs money, time and effort. However, the experimenter may be interested in knowing whether all the inferences the experimenter originally planned to do can even be possible in this situation and, moreover, the efficiency of the resulting design relative to the original design. The facts which are very common in real life, motivate the research in

this paper. In comparative experiments, block designs are used in eliminating (or reducing) the noise with respect to a single controllable noise factor. Incomplete blocks are used to keep the noise down and to make the comparison among treatments more precise. Balanced incomplete block (BIB) and group divisible (GD) designs are known to have many optimal properties in the class of incomplete block designs. For these designs, we are able to draw inferences on every possible comparison of treatment effects. This paper demonstrates the following: (1) BIB and GD designs remain quite efficient in terms of drawing inferences on treatment effects comparisons when a single observation is unavailable. (2) BIB and extended BIB designs are fairly robust against the unavailability of any number of observations in a block. Furthermore, the robustness of any Youden design and Latin square design against the loss of a column is shown.

**Block Designs With Nested Rows And Columns
For Factorial Experiments**

Sudhir Gupta

Div. of Prevention Research, National Inst.

of Child Health and Human Development &

Northern Illinois University, U.S.A.

We consider designs with nested rows and columns for a s^m factorial experiment, where s is a prime or a prime power. Let each block be of size $k = s^{m_1}$, arranged in $p = s^{m_2}$ rows and $q = s^{m_1 - m_2}$ columns. A single replicate design D is constructed so that there are a total of $b = s^{m - m_1}$ blocks in the design. The paper provides a general method of constructing D such that a specified set of interactions are confounded. The method makes use of the classical method of confounding for symmetrical factorial experiments. The method can be looked upon as an extension of the classical method to designs with nested rows and columns. Thus, single replicate designs which confound a specified set of factorial effects are obtained using the method. Further replications which confound a different set of effects can be added to the design in the usual way. Several methods of constructing variance balanced designs with nested rows and columns are now available in the literature. Some partially balanced designs have also been given. However, these designs for factorial experiments have not so far been investigated in the literature in a systematic way.

The structure of confounding single degree of freedom contrasts in a design with nested rows and columns is first considered. Let D_1, D_2, D_{12} denote the treatment-row, treatment-column and treatment-block component designs respectively. It is shown how the contrasts confounded in D can be derived using the confounding pattern in the component designs D_1, D_2, D_{12} . Then the case of factorial experiments is investigated. The method first constructs a single replicate design D_{12} with $k = s^{m_1}$, $b = s^{m - m_1}$ using the classical method

of confounding. The total number of effects confounded in D_{12} , each such effect having $s - 1$ degrees of freedom, is given by $g = (s^{m-m_1} - 1)/(s - 1)$. Of these g effects, $m - m_1$ are independent interactions and the remaining are generalized interactions. Let us confound a specified set of independent interactions denoted by $A_1, A_2, \dots, A_{m-m_1}$, and A_{m-m_1+1}, \dots, A_g denote the generalized interactions.

Next the contents of each block of D_{12} are arranged in $p \times q$ arrays with $p = s^{m_2}$, $q = s^{m_1-m_2}$. First consider the component design D_1 . Let g_1 denote the effects confounded between rows within blocks in D_1 where $g_1 = (s^{m_2} - 1)/(s - 1)$. The number of independent and generalized interactions confounded between rows within blocks is then given by m_2 and $g_1 - m_2$ respectively. Let these confounded independent and generalized interactions be denoted by R_1, R_2, \dots, R_{m_2} and $R_{m_2+1}, \dots, R_{g_1}$ respectively.

Finally, consider the component design D_2 . Let g_2 denote the interactions confounded between columns within blocks in D_2 where $g_2 = (s^{m_1-m_2} - 1)/(s - 1)$. In this case the number of independent and generalized interactions confounded between columns within blocks is given by $m_1 - m_2$ and $g_2 - m_1 + m_2$ respectively. We denote by $M_1, M_2, \dots, M_{m_1-m_2}$ and $M_{m_1-m_2+1}, \dots, M_{g_2}$ respectively these independent and generalized interactions. The following theorem is proved in the paper, where $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}$ denote the non-zero elements of $GF(s)$.

THEOREM. The single replicate design D with nested rows and columns with parameters $v = s^m, b = s^{m-m_1}, k = s^{m_1}, p = s^{m_2}, q = s^{m_1-m_2}$, obtained as described above confounds the effects $A_i, R_j, M_l, A_i R_j^u, A_i M_l^u, i = 1, 2, \dots, g, j = 1, 2, \dots, g_1, l = 1, 2, \dots, g_2, u = 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-2}$.

In general it may not be easy to arrange the contents of each block of D_{12} in $p \times q$ arrays. Therefore, a simple method of doing so is also described when $p = s$. The method is illustrated with the help of an example. Further replications which confound a different set of effects can be added to the design in the usual way.

There are exactly two
nonequivalent [20,5,12;3]-codes

N. Hamada (Osaka Women's University)

T. Helleseeth (University of Bergen)

Ø. Ytrehus (University of Bergen)

Abstract. Let $V(n;q)$ be an n -dimensional vector space over a Galois field $GF(q)$ where q is a prime power. If C is a k -dimensional subspace in $V(n;q)$ such that every non-zero vector in C has a Hamming weight of at least d , then C is denoted an $[n,k,d;q]$ -code where $n \geq k \geq 3$ and $d \geq 1$. It is well known (cf. Griesmer [1] and Solomon and Stiffler [5]) that if there exists an $[n,k,d;q]$ -code, then

$$n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil \quad (1)$$

where $\lceil x \rceil$ denotes the smallest integer $\geq x$.

Hill and Newton [4] showed that (i) there exists a $[20, 5, 12; 3]$ -code meeting the Griesmer bound (1) and (ii) the weight distribution of a $[20, 5, 12; 3]$ -code is unique. However, it is unknown whether or not a code with these parameters is unique up to equivalence. Recently, Hamada and Helleseeth [3] showed that a $[19, 4, 12; 3]$ -code is unique up to equivalence and characterized this code using a charac-

terization of $\{21,6;3,3\}$ -minihypers (cf. Hamada [2] with respect to a minihyper). The purpose of this paper is to prove the following theorem using the geometrical structure of the $[19,4,12;3]$ -code.

Theorem. Any $[20,5,12;3]$ -code is equivalent to either C_1 or C_2 where C_1 and C_2 denote the $[20,5,12;3]$ -codes generated by the following matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

respectively.

- [1] J. H. Griesmer (1960), A bound for error-correcting codes, IBM J. Res. Dev. 4, 532-542.
- [2] N. Hamada (1991), A characterization of some $[n,k,d;q]$ -codes meeting the Griesmer bound using a minihyper in a finite projective geometry, to appear in Discrete Math.
- [3] N. Hamada and T. Helleseth (1990), A characterization of some $\{3v_2, 3v_1; t, q\}$ -minihypers and some ... codes, Bull. Osaka Women's Univ. 27, 49-107.
- [4] R. Hill and D. E. Newton (1988), Some optimal ternary codes, ARS Combinatoria, Twenty-Five A, 61-72.
- [5] G. Solomon and J. J. Stiffler (1965), Algebraically punctured cyclic codes, Inform. Contr. 8, 170-179.

Lotka-Volterra 系の保存量と Hadamard design

神保 雅一 (岐阜大・工)
伊藤 栄明 (統 数 研)

数種の個体が競合しているときの個体数 (量) の変化を表すモデルとしてしばしば、Lotka-Volterra 方程式が用いられる。個体密度が希薄な場合には 3 体以上の衝突は無視できるとして 2 体の衝突のみを考慮する場合が多いが、個体密度が高くなるにつれて、3 体以上の衝突も無視できなくなるであろう。ここでは、 n 種の個体が時刻 t でそれぞれ $p_1(t), \dots, p_n(t)$ の比率で存在しているとし、3 体の衝突も考慮した次のモデルを考える。

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = p_i(t) \left[\delta_1 \sum_{j=1}^n p_j(t) s_j^i + \delta_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_j(t) p_k(t) t_{jk}^i \right] \quad (1)$$

ただし、 s_j^i は第 i 種と第 j 種の 2 体衝突による第 i 種の増加率をあらわし、 t_{jk}^i は第 i, j, k 種の 3 体衝突による第 i 種の増加率を現している。また、任意の i, j, k に対して $s_j^i + s_i^j = 0$, $t_{jk}^i = t_{kj}^i$, $t_{jk}^i + t_{ki}^j + t_{ij}^k = 0$ が成り立っているものとする。このとき、 $\sum_{i=1}^n p_i(t) = \text{const.}$ であることは容易にわかる。今、上の n 種の個体間には強弱関係があり、その強弱関係が単純有向グラフで表されているとする。すなわち、 n 種を G の頂点 $V = \{1, \dots, n\}$ に対応させ、第 i 種が、第 j 種より強いとき、 (i, j) を G の弧とする (すなわち $(i, j) \in E$ とする)。有向グラフ $G = (V, E)$ において任意の異なる $i, j \in V$ に対して、 $(i, j) \in E$ 又は、 $(j, i) \in E$ が成り立つとき、 G を完全グラフといい、完全単純有向グラフをトーナメントと呼ぶ。ここでは、 n 種の粒子は、その強弱関係を除いては均質であり、したがって s_j^i, t_{jk}^i の値は、その 2 者、又は 3 者の強弱関係によってのみ決まるものとする。そして、2 体衝突において、 s_j^i を次のように定義する。

$$s_j^i = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E & \text{(第 } i \text{ 種が第 } j \text{ 種より強いとき)} \\ -1 & (j, i) \in E & \text{(第 } i \text{ 種が第 } j \text{ 種より弱いとき)} \\ 0 & (i, j), (j, i) \notin E & \text{(強弱関係が無いとき)} \end{cases}$$

また、3 体衝突に関して t_{jk}^i を次のように定義する。

- (1) $(i, j), (j, k), (k, i) \in E$ ならば $t_{jk}^i = t_{ki}^j = t_{ij}^k = 0$.
- (2) $(i, j), (j, k), (i, k) \in E$ ならば $t_{jk}^i = a, t_{ki}^j = b, t_{ij}^k = c$, ただし $a + b + c = 0$.
- (3) $(i, j), (i, k) \in E$ で $(j, k), (k, j) \notin E$ のとき $t_{jk}^i = 2d, t_{ki}^j = t_{ij}^k = -d$.
- (4) $(j, i), (k, i) \in E$ で $(j, k), (k, j) \notin E$ のとき $t_{jk}^i = -2d, t_{ki}^j = t_{ij}^k = d$.
- (5) $(i, j) \in E$ で $(i, k), (k, i), (j, k), (k, j) \notin E$ のとき $t_{jk}^i = e, t_{ki}^j = -e, t_{ij}^k = 0$.
- (6) $(i, j), (j, i), (j, k), (k, j), (k, i), (i, k) \notin E$ ならば $t_{jk}^i = t_{ki}^j = t_{ij}^k = 0$.

$p_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) の関数 $f(p_1(t), \dots, p_n(t))$ が時刻 t によらず一定であることが、任意の初期値 $p_i(0)$ について成り立つとき、 $f(p_1(t), \dots, p_n(t))$ は保存量であるという。たとえば、上のモデルのもとで、任意のグラフ G に対して、 $\sum_{i=1}^n p_i(t)$ が保存量となることは容易にわかる。2 体衝突のみを考慮した Lotka-Volterra 系の保存量に関して、Itoh (1987, 1988), Bogoyavlensky (1988) らが特種な強弱関係を表すグラフについて、いくつかの結果を得ている。

ここでは、 $\prod_{i=1}^n p_i(t)$ が保存量となるためにグラフ G が満たすべき条件を組合せ論的に考察する。

まず、2体衝突のみを考慮する場合（すなわち (1) において $\delta_2 = 0$ の場合）、次の定理が成り立つ。

定理1 G を有向グラフとし、 $\delta_1 > 0, \delta_2 = 0$ とする。このとき、 $\prod_{i=1}^n p_i(t)$ が保存量となるための条件は任意の頂点 $i \in V$ において $n_i^- = n_i^+$ が成り立つことである。ただし、 n_i^-, n_i^+ はそれぞれ、頂点 i に入る有向辺の数、頂点 i から出る有向辺の数を表す。

次に3体衝突まで考慮した場合について考える。ここで

$$n_{ij}^{++} = |\{k \in V \mid (i, k) \in E, (j, k) \in E\}|$$

$$n_{ij}^{+-} = |\{k \in V \mid (i, k) \in E, (k, j) \in E\}|$$

と定義する。また、 n_{ij}^{--}, n_{ij}^{-+} 等も同様に定義する。このとき、次の定理が成り立つ。

定理2 G を有向グラフとし、 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ とする。このとき、任意の a, b, c, d, e に対して $\prod_{i=1}^n p_i(t)$ が保存量となるための条件は

$$(i) \quad n_j^+ = n_j^- = \text{const.} (= r) \quad \forall j \in V$$

$$(ii) \quad (j, k) \in E \text{ のとき } n_{jk}^{++} = n_{jk}^{--} = n_{jk}^{+-}$$

$$(iii) \quad (j, k) \notin E \text{ かつ } (k, j) \notin E \text{ のとき } n_{jk}^{++} = n_{jk}^{--}$$

が成り立つことである。

n 頂点を持つトーナメント $G = (V, E)$ に対して、 $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

と定義し、 A を G の隣接行列と呼ぶ。 A がアダマールアザインの結合行列であるとき、グラフ G をアダマールトーナメントと呼ぶ。

系 G をトーナメントとする。このとき、任意の a, b, c, d, e と任意の $\delta_1, \delta_2 > 0$ に対して、 $\prod_{i=1}^n p_i(t)$ が保存量となるための条件は G がアダマール・トーナメントであることである。

定理2の条件を満足する一般の有向グラフの構成法については、次の場合を除いては、わかっていない。

定理3 $q \equiv 3 \pmod{4}$ を素数巾とし、 $V = GF(q)^2 \setminus \{0\}$ と置く。任意の $i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \in V$ に対して、

$$\det \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}$$

が (i) 平方数であれば $(i, j) \in E$, (ii) 非平方数であれば $(j, i) \in E$, (iii) 0 であれば $(i, j), (j, i) \notin E$ と定義すると、有向グラフ G は定理2の条件を満足する。

1. はじめに

仮説検定あるいは適合度検定で用いられる手法の多くは自由度1の線形統計量、もしくは逆にオムニバスな χ^2 統計量に基づいている。しかしながら前者はあまりに制約が強く余程仮説が絞り込まれていないと有効でないと思われ、一方、後者は特定の問題に対して検出力が低い、また仮に有意差が示せても統計量が無方向ゆえ、以降のアクションにすぐには結びつかない等の欠点がある。

そこでよく用いられるのが目的を明確にした多重比較法であるが、主として1元配置の設定で議論されており、2元配置交互作用の多重比較法の研究は十分進んでいない。本論では交互作用の多重比較法について考察するが、とくに行、列の一方に自然な順序があることを想定する。すなわち、

(1) 交互作用の多重比較 ; (2) 順序仮説の多重比較
を同時に議論するのが本論のテーマである。

2. いろいろな応用

以下、一般性を失うことなく列のみに順序がある2元表データを想定する。これには以下に述べるようにいろいろな応用がある。

(1) 2元配置分散分析モデル

2種の睡眠薬の効果をそれぞれ6人の被験者についてテストする。データは8時間脳波を測定し、そのうち4段階の熟睡度のそれぞれにあった時間を記録する。このとき、 2×4 2元表で繰返し6というデータ (y_{ijk} , $i=1, 2$; $j=1, \dots, 4$; $k=1, \dots, 6$) が得られる (Biometrika, 1978)。この例では $\bar{y}_{i..} = 8$ となるのでいわゆる主効果は意味がない。睡眠効果は $i=1, 2$ についてどちらが相対的に熟睡度の高い状態に長くいたかで判定される。そのため対立仮説としては次のような交互作用に関する順序仮説に興味を持たれる、

$$K : \mu_{11} - \mu_{21} \geq \mu_{12} - \mu_{22} \geq \mu_{13} - \mu_{23} \geq \mu_{14} - \mu_{24} \quad \text{or} \\ \mu_{11} - \mu_{21} \leq \mu_{12} - \mu_{22} \leq \mu_{13} - \mu_{23} \leq \mu_{14} - \mu_{24} .$$

行(i)に関しては順序が無いのでこれは本質的に両側仮説となる。このような対立仮説Kの検定には総括的なトレンド検定の他、列の水準を区別する多重比較法(たとえば1元配置におけるWilliams法のような)が考えられる。さらに比較したい薬剤が3以上の場合、薬剤に関する多重比較法が必要になる。すなわち、行、列それぞれの多重比較問題があり、それらは対称には扱えない。

(2) 順序分類データ

新薬と標準薬の比較臨床試験においては、しばしば有効性を著効、有効、やや有効、無効のように分類し、各薬剤に対するそれらの出現頻度を比較することにより、相対的な有効性を評価することが行われる。この場合、薬剤の区別を $i(=1, \dots, a)$ で表し、有効性の分類を $j(=1, \dots, b)$ で表すと

$$K' : p_{i1}/p'_{i1} \geq \dots \geq p_{ib}/p'_{ib} \quad \text{or} \quad p_{i1}/p'_{i1} \leq \dots \leq p_{ib}/p'_{ib}$$

のような順序仮説に興味を持たれる (Biometrika, 1982, 83). そこで (1) と同じように, 薬剤の多重比較および分類カテゴリの多重比較が必要になる. 順位データは順位を順序カテゴリと考えればこの特別な場合と考えられる.

(3) 経時測定データに基づく処理比較

コレステロール量推移, 血圧推移あるいは尿中排泄量推移など, 順を追った一組のデータに基づく処理比較にはいろいろな手法が提案されている. これを処理による推移パターンの違いの比較と考えれば, 順序応答を持つ交互作用の多重比較として定式化することもできる (Biometrika, to appear).

3. 累積カイ二乗最大成分に基づく多重比較

2元配置のデータ (平均) を $\bar{y} = (\bar{y}_{11}, \bar{y}_{12}, \dots, \bar{y}_{ab})'$ のように表す. このとき, 順序仮説 K の総括検定として累積カイ二乗統計量

$$\chi^2 = \| (P'_a \otimes P''_b) \bar{y} \|^2$$

に基づく方法が高い検出力を持つことが報告されている (Biometrika, 1978). ただし, P'_a は $a-1 \times a$ の直交行列で各行は $j = (1, \dots, 1)'$ にも直交する. P''_b は順序を反映した対比を表し,

$$P''_b = \text{diag}(\delta^{-1/2}, \dots) \begin{bmatrix} b-1 & -1 & \dots & -1 \\ b-2 & b-2 & \dots & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -(b-1) \end{bmatrix}_{b-1 \times b}, \quad \delta_i = bi(b-i)$$

で定義される. そこで行または列の多重比較に χ^2 の最大成分を用いることが考えられる. なお, 以下では主としてこの2元配置の設定で述べるが, 2次元分割表も漸近的にはまったく同様に扱える.

(1) 行の多重比較

Scheffe型の多重比較は

$$W^* = \max_{\rho' : j=0, \rho' \rho = 1} \| (\rho' \otimes P''_b) \bar{y} \|^2$$

に基づいて行われる. W^* は無交互作用の仮説の下でWishart行列 $W(P''_b P''_b, a-1)$ の最大根の分布に従う. またそれは $\{(b-1)/2\} \chi^2_{a-1}$ で比較的よく近似される. そこで様々な行比較に対応して定義された ρ に対する統計量の有意確率を $\{(b-1)/2\} \chi^2_{a-1}$ の分布を参照して保守的に評価することができる.

(2) 列の多重比較

列の水準には順序があり, すべての並べ替えを考えることは意味が無い. そこで P''_b の第 j 行を b''_j として

$$\max_j \| (P'_a \otimes b''_j) \bar{y} \|^2$$

に基づいた多重比較を行う. この有意確率の計算と様々な応用については Biometrika (1983) および応用統計学 (1990) を参照して欲しい.

交互作用に関する多重比較としては 2×2 型や外れ値型がよく知られているがこれら自由度1の多重比較より, 上記の行単位, あるいは列単位の多重比較の方が検出力の上からも実際の意味付けの上からも望ましいと思われる.

BIBD の不完全 U -統計量への応用

白旗慎吾 (大阪大・教養), 阪本雄二 (作陽短大)

X_1, \dots, X_m を分布関数 $F(x)$, Y_1, \dots, Y_n を分布関数 $G(x)$ からの無作為標本とする. 2 標本 U -統計量

$$U_{mn} = \frac{1}{\binom{m}{r} \binom{n}{s}} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_r, j_1 \leq \dots \leq j_s} t(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}, Y_{j_1}, \dots, Y_{j_s})$$

を考え θ をその平均とする. ここで, $M = \binom{m}{r}$, $N = \binom{n}{s}$. これを $\text{degree}(r, s)$ の U -統計量, 関数 t を kernel function という.

U -統計量は順序統計量の関数であり, 順序統計量は完備十分統計量なので U_{mn} は θ の最良不偏推定量となる. さらに, 弱い仮定の下で漸近的に正規分布に従う. このように, U -統計量は理論的に良い性質を持つが, U -統計量はそれほど使われていない. その理由の一つに, 計算量の大きさがあると思われる. 実際 m, n が大きい場合には, また r, s が大きいほど U_{mn} の和の項数はきわめて大きくなる. ただし, U は多くの和から成り, かつその各項の間には強い相関がある. したがって, すべての項の和を考える必要はなく, その一部の和のみを考えても効率はさほど低下しないと思われる. このような考え方で, 計算量の大きさを克服するために Blom(1976, Biometrika) らは 1 標本の場合に, 不完全 U -統計量を提案し, Lee(1982, Australian J. Stat.) は不完全 U -統計量の中での最小分散推定量が BIBD に関係することを示した. ここでは 2 標本での最小分散不完全 U -統計量がやはり BIBD に関係することを示す.

$$\begin{aligned} t_{cd}(x_1, \dots, x_c; y_1, \dots, y_d) \\ &= E\{t(x_1, \dots, x_c, X_{c+1}, \dots, X_r; y_1, \dots, y_d, Y_{d+1}, \dots, Y_s)\}, \\ \zeta_{cd} &= \text{Var}\{t_{cd}(X_1, \dots, X_c; Y_1, \dots, Y_d)\} \end{aligned}$$

とおく.

不完全 2 標本 U -統計量は以下のように定義される. X_1, \dots, X_m から k 回 r 個の組を選ぶ. 同様に Y_1, \dots, Y_n から k 回 s 個の組を選ぶ. I 回目の番号の組を Δ_I , そのとき選ばれた観測値を $(X, Y; \Delta_I)$, 関数 t の値を $t(X, Y; \Delta_I)$ とする. 不完全 U -統計量は

$$U_{mn(k)} = \frac{1}{k} \sum_{I=1}^k t(X, Y; \Delta_I)$$

で定義される. これを計画 $\{\Delta_I\}$ による不完全 U -統計量という. 行列 $D = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, $P = (p_{iI})$, $Q = (q_{jI})$, $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; I = 1, \dots, k$ を

$$p_{iI} = 1(0), i \in (\notin)\Delta_I, \quad q_{jI} = 1(0), i \in (\notin)\Delta_I$$

と定義し計画行列と呼ぶ. 不完全 U -統計量は θ の不偏推定量であり, 計画行列できまる. 問題は計画行列または Δ_I をどのように決めるかにある.

不完全 U -統計量の分散は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} c_{vw}(i_1, \dots, i_v; j_1, \dots, j_w) &= (i_1, \dots, i_v; j_1, \dots, j_w) \text{ を含む計画 } \Delta_I \text{ の個数} \\ &= \sum_{I=1}^k \prod_{t=1}^v p_{i_t, I} \prod_{u=1}^w q_{j_u, I} \end{aligned}$$

とする. さらに

$$\begin{aligned} A_{vw} &= \sum c_{vw}(i_1, \dots, i_v; j_1, \dots, j_w), \\ B_{vw} &= \sum c_{vw}^2(i_1, \dots, i_v; j_1, \dots, j_w) \end{aligned}$$

とおく. 和は可能な番号すべてを渡る. これらは計画で決まる量であり,

$$A_{vw} = k \binom{r}{v} \binom{s}{w}, \quad B_{vw} = \sum_{c=v}^r \sum_{d=w}^s f_{cd} \binom{c}{v} \binom{d}{w}.$$

となる. ここで, f_{cd} は k^2 個の組 (Δ_I, Δ_J) の中で i がちょうど c 個, j がちょうど d 個の共通の添え字を持つ組の数である. A_{vw} は計画に関係しない.

$$\text{Var}(U_{mn(k)}) = k^{-2} \sum_{p=0}^r \sum_{q=0}^s B_{pq} \lambda_{pq},$$

$$\lambda_{pq} = \sum_{v=0}^p \sum_{w=0}^q (-1)^{p+q-v-w} \binom{p}{v} \binom{q}{w} \zeta_{vw} \geq 0$$

が示される. したがって, B_{pq} を p, q に関して一様に最小にする計画は分散を最小にするので, そのような計画を探せばよい. それに関して次のことが言える.

X の番号 (i_1, \dots, i_r) と Y についての番号 (j_1, \dots, j_s) すべてについて c_{v0} と c_{0w} が一定であり, そのうえで c_{vw} が一定であれば最小分散不完全 U -統計量である. したがって, P, Q は 1 標本の場合の最適な計画 (特別な BIBD の生起行列) ならよい, かつ P, Q の間の会合数が一定なら最適である. 実際に

- (1) $(r, s) = (2, 1)$, $m = n = \text{奇数}$, $k = \binom{n}{2}$
 - (2) $(r, s) = (2, 1)$, $m = n = \text{偶数}$, $k = 2 \binom{n}{2}$
 - (3) $(r, s) = (2, 2)$, $m = n = \text{奇数}$, $k = n \binom{n}{2}$
 - (4) $(r, s) = (2, 2)$, $m = n = \text{偶数}$, $k = n \binom{n}{2} / 2$
- の場合に最適な計画を具体的に構成した.

Optimal Fractional s^m Factorial Designs of Resolution III in a Restricted Class

江戸川大学・応用社会学科
袁 福之

1. Fractional s^m factorial designs of resolution III

Consider an s^m factorial design with m factors each at s levels. Let T be a fractional s^m factorial design with N assemblies. A fraction T is said to be of *resolution III* if all main effects are to be estimated, assuming two-factor and higher order interactions are negligible. We will consider the *orthonormal model* (e.g., Raktoc, Hedayat and Federer (1981)).

Let $\lambda_{ij}^{\alpha\beta}$ be frequency of the ordered pair $(\alpha\beta)$ occurring in the i th and j th columns of T , where $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_s$, and $1 \leq i, j \leq m$. Let $m(0,0)$ be the element of the information matrix corresponding to the general means, $m(\alpha_i, \beta_j)$ be the element corresponding to the α th component of the main effect of the i th factor and the β th component of the main effect of the j th factor.

Lemma 1. *Under the normalized orthogonal polynomial model, it holds that*

$$m(0,0) + \sum_{\alpha=1}^{s-1} m(\alpha_j, \alpha_j) = \left(\frac{1}{s}\right)^{m-1} N \quad (1 \leq \forall j \leq m) \quad (1.1)$$

for any fractional s^m factorial design.

Lemma 2. *Under the normalized orthogonal polynomial model, $\text{trace}(M_T)$ is a constant, for any fractional s^m factorial design of resolution III.*

Lemma 3. *Under the normalized orthogonal polynomial model, it holds that*

$$m(0,0) + \sum_{\alpha=1}^{s-1} m(\alpha_i, \alpha_j) = \left(\frac{1}{s}\right)^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{s-1} \lambda_{ij}^{\alpha\alpha} \quad (1 \leq \forall i, j \leq m) \quad (1.2)$$

for any fractional s^m factorial design.

Lemma 4. Under the normalized orthogonal polynomial model, $\sum_{\alpha=1}^{s-1} \{m(\alpha_i, \alpha_j)\}^2$ is minimized when $m(1_i, 1_j) = m(2_i, 2_j) = \dots = m(s-1_i, s-1_j)$, $1 \leq \forall i, j \leq m$, for any fractional s^m factorial design.

2. Optimal fractional s^m factorial designs of resolution III in a restricted class

We shall consider the optimal fractional s^m factorial designs of resolution III in a restricted class \mathcal{C} , where all the α th components of the main effects are uncorrected with all the β th components of the main effects ($\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \alpha \neq \beta$), i.e. $m(0, \beta_j) = 0$ and $m(\alpha_i, \beta_j) = 0$ ($\forall \alpha \neq \beta$). Let M_α be the coefficient matrix of the reduced normal equation for estimating all the α th components of the main effects in the restricted class \mathcal{C} .

Lemma 5. The elements of the information matrix of a balanced fractional s^m factorial design of resolution III derived from a $BA(s(s\lambda + k), m, s, 2)\{\mu_{\alpha\alpha}^{(2)} = \lambda + k, \mu_{\alpha\beta}^{(2)} = \lambda (\forall \alpha \neq \beta)\}$ are given by

$$\begin{aligned} m(0, 0) &= \left(\frac{1}{s}\right)^{m-1} (s\lambda + k), \\ m(\alpha_i, \alpha_i) &= \left(\frac{1}{s}\right)^{m-1} (s\lambda + k), \\ m(\alpha_i, \alpha_j) &= \left(\frac{1}{s}\right)^{m-1} k, \\ m(0, \alpha_j) &= m(\alpha_i, \beta_i) = m(\alpha_i, \beta_j) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_s \setminus \{0\}$ and $\alpha \neq \beta$.

The coefficient matrix M_α of the reduced normal equation for estimating all the α th components of the main effects is given by

$$M_\alpha = \left(\frac{1}{s}\right)^{m-1} s\lambda I_m + kJ_m. \tag{2.2}$$

Applying Theorem 2.1 of Cheng (1980), we have the following:

Theorem. A design T^* derived from a $BA(s(s\lambda + k), m, s, 2)\{\mu_{\alpha\beta}^{(2)}\}$ with $\mu_{\alpha\alpha}^{(2)} = \lambda + k, \mu_{\alpha\beta}^{(2)} = \lambda (\forall \alpha \neq \beta)$ and $m < \frac{s\lambda}{k} + 2$ is optimal with respect to any generalized criterion of type 1 in the restricted class \mathcal{C} .

A Construction of Orthogonal Arrays from Baer Subplanes

上村秀一 (筑波大学社会工学研究科)

藤原良 (筑波大学社会工学系)

$N \times k$ -配列が直交配列 $OA[N, k, g, t; \lambda]$ であるとは、配列の要素が g 個のシンボルから成り、どの t 列にもすべての t -順列が行として $\lambda = N/g^t$ 回ずつ現れているときである。 N, k, g, t, λ をそれぞれ、直交配列のサイズ、制約数、水準数、強さ、インデックスと呼ぶ。ここでは強さ 2 に限る。

シンボル数が素数巾のときには直交配列はガロア体を使って容易に構成できるが、そうでないときは困難である。シンボル数が素数巾でない直交配列がほしいときは、直交配列の合成によって構成することが多い。この研究では Baer 部分平面を使って素数巾でないシンボル数 ($q^2 - q$) をもつ直交配列の構成法を示した。

\mathcal{P} を有限射影平面 $PG(2, q^2)$ (q は素数巾) とする。部分平面 \mathcal{P}_0 は \mathcal{P} の部分集合で \mathcal{P} と同じ結合関係を持つ射影平面である。 \mathcal{P} の真部分集合である部分平面 \mathcal{P}_0 が \mathcal{P} のすべての線と少なくとも 1 点で交わっているとき、 \mathcal{P}_0 を Baer 部分平面と呼ぶ。

有限射影平面 \mathcal{P} の 1 つの Baer 部分平面を固定し、それを \mathcal{P}_0 とする。 B を \mathcal{P}_0 と排反な Baer 部分平面全体の集合とする。 Π を $\mathcal{P} - \mathcal{P}_0$ の点全体の集合とする。そのとき、結合関係 (Π, B) を考える。 $|B| = q^4(q-1)^3(q+1)/3$ は Bose, Freeman, Glynn (1980) によって示された。

結合関係 (Π, B) において \mathcal{P}_0 のどの線とも同時に結合していないような Π の 2 点の組全体を考える。その任意の組と結合している B の要素の数が一定であることを示した。この一定数が直交配列のインデックスに対応し、 B の要素と \mathcal{P}_0 の線がそれぞれ、直交配列の行と列に対応する。この性質をもとにして直交配列

$$OA[N, q^2 + q + 1, q^2 - q, 2; q^2(q-1)(q+1)/3]$$

の構成法を示した。

6×6 の互いに直交するラテン方格は存在しないので、 $OA[36, k, 6, 2; 1]$, $k \geq 4$ は存在しない。 λ が 1 より大きい、シンボル数 6 の直交配列は存在する。著者の知る限りではその λ は 12 である。 $OA[16, 13, 2, 2; 4]$ と $OA[27, 13, 3, 2; 3]$ の合成から得られる。 k を 13 にすると、この 2 つの直交配列は k, λ, g の不等式の限界に達しているので λ を

これより小さくすることは不可能である。従って、合成から得られるシンボル数6の直交配列の中では $\lambda = 12$ のものが最小である。ここで示した構成法で $q = 3$ のとき、 $\lambda = 24$ の直交配列が得られた。

直交配列を $d = N/g$ 個の $g \times k$ -部分配列に分けたとき、それぞれの $g \times k$ -部分配列のすべての列が g 個のシンボルすべてを含んでいるとき、この直交配列は分割可能であると言う。また、直交配列が分割可能であるならば、制約数を1つ増やせることが知られている。コンピュータを使って $q = 2$ と $q = 3$ の例を作るとそれらは分割可能であることが分かった。構成法より、この直交配列の分割可能性は結合関係 (II, B) の分割可能性と同値である。

有限射影平面 \mathcal{P} の互いに排反な $q^2 - q + 1$ 個の Baer 部分平面の集合を tiling と言う。結合関係 (II, B) が分割可能ならば、その各分割クラスと固定した Baer 部分平面 \mathcal{P}_0 を合わせると tiling になる。よって、 $q^3(q-1)^2(q+1)/3$ 種類の \mathcal{P}_0 を含む tiling があり、 B のすべての Baer 部分平面はそれらの tiling のどれかただ1つに属していることになる。

projectivity は \mathcal{P} からそれ自身への結合関係を保存し、行列で表される全単射である。Hirschfeld(1976)は、 \mathcal{P}_0 上を cyclic に働く \mathcal{P} の projectivity の orbit は $q^2 - q + 1$ 個あり、tiling をなすことを示した。さらに、彼は、 \mathcal{P}_0 上を cyclic に働く projectivity は $q^3(q-1)^2(q+1)\phi(q^2 + q + 1)/3$ 個あり、それらによって $q^3(q-1)^2(q+1)/3$ 種類の tiling が生成されることも示した。

このとき結合関係 (II, B) が分割可能であるときの分割クラスの数と上の tiling の数が一致していることに気づいた。そこで、固定した Baer 部分平面 \mathcal{P}_0 上を cyclic に働く projectivity の orbit を用いると分割可能な直交配列が構成できるのではないかと予想する。この予想をもとに $q = 3$ の例を構成してみた。このとき問題は、 \mathcal{P}_0 と排反な Baer 部分平面すべてが $q^3(q-1)^2(q+1)\phi(q^2 + q + 1)/3$ 個の projectivity の orbit として現れてくるかどうかである。しかし、 $q = 3$ の場合には、コンピュータで確かめてみると、反例は見つからなかった。

最後に、ここで構成法を示した直交配列は、 \mathcal{P}_0 上を cyclic に働く \mathcal{P} の projectivity の orbit を用いて構成できるのではないだろうかと予想する。この予想が正しいならば、 $q = 2$ 、 $q = 3$ だけでなく、一般の素数 q についてもこの直交配列は分割可能であると言える。

Weighing 行列 $W(8a-2, 4a)$ について

大森博之 (愛媛大・教育)

成分が 1, -1, 0 からなる n 次の正方行列 W が $WW^t = kI_n$ をみたすとき、 W は次数 n 、重み k の weighing 行列 と呼ばれている (そのような行列は $W(n, k)$ と表わされる)。同じ次数と重みを持つ 2 つの weighing 行列 W_1 と W_2 に対し、符号のついた置換行列 P と Q を用いて $W_1 = PW_2Q$ と表わされるとき W_1 と W_2 は同値であると定義する。weighing 行列の、この同値関係による分類が、 $k \leq 5$ のとき すべての n にたいし、また $n \leq 13$ のときすべての k ($\leq n$) にたいして完成されている。分類が完成されていない最初の行列は $W(14, 8)$ である。これまでの weighing 行列の分類の方法は、以下の通りである。(I) IPC (非負整数をもつ 2 つの線形方程式) を解く。(II) IPC の解に対応する weighing 行列を構成する。(III) 同値関係で不変な適当な”物”(例えば、アガマル 行列における ホルセット、weighing 行列の プロファイル そして 自己同型群 のような物) を作って同値か否かを判定する。

以上のことを踏まえて、以下の結果を得た。

行列 $W(8a-2, 4a)$ (ただし、 a は 2 以上の正整数) に対する IPC は

$$\sum_{i=1}^{2a} x_{2i} = 8a-3, \quad \sum_{i=1}^{2a} ix_{2i} = 2a(4a-1), \quad x_{2i} \geq 0 \quad (1)$$

であるが、この式の一般解は次式で与えられる。

「 $x_{4a} = z_{4a}, \dots, x_{4a-2(i-1)} = z_{4a-2(i-1)}$ を固定したとき、 $z_{4a}, \dots, z_{4a-2(i-1)}$ で定まる $w_1(i), w_2(i)$ を用いると $w_1(i) \leq x_{4a-2i} \leq w_2(i)$ となる。さらに、整数 z_{4a-2i} を $w_1(i) \leq z_{4a-2i} \leq w_2(i)$ とすると $x_{4a-2j} = z_{4a-2j}$ ($0 \leq j \leq i$) となる (1) の解が存在する。ただし、 $0 \leq i \leq 2a-2$ 」

いま、 Γ を(1)の解全体とする。また Δ を $W(8a-2, 4a)$ 行列全体とする。このとき $W \in \Delta$ に対して、 W の各行及び各列に於ける他の行及び他の列との交叉数の分布は、 Γ の元となる。しかし逆は必ずしも成り立たない。事実、 $\Delta(z_{4a})$ を条件： W の行または列に於ける他の行または他の列との交叉数の分布で $(x_2=z_2, \dots, x_{4a}=z_{4a}) \in \Gamma$ となる行又は列は存在するが $(x_2=y_2, \dots, x_{4a}=y_{4a}) \in \Gamma$ となる行又は列は存在しない(ただし、 $z_{4a} < y_{4a}$)：を満たす Δ の部分集合とする。このとき、次の結果を得る。

「 $\Delta(4a-3) = \Delta(4a-4) = \phi$ (空集合)」ただし、 $w_2(0) \leq 4a-3$ である事が上述の結果からわかっている。

「 $W \in \Delta(4a-5)$ とすると W の最初の行に関する交叉数の分布は、 $(x_2, \dots, x_{4a-2}, 4a-5) \in \Gamma$ としてよい。ただし、 x_{4a-2} は0または2」

「 $W \in \Delta(1)$ とすると W の最初の行に関する交叉数の分布は、 $(x_2, \dots, x_{4a-2}, 1) \in \Gamma$ としてよい。ただし、 $0 \leq x_2 \leq 4$ 」

「 $W \in \Delta(0)$ とすると W の最初の行に関する交叉数の分布は、 $(x_2, \dots, x_{4a-2}, 0) \in \Gamma$ としてよい。ただし、 $0 \leq x_2 \leq 2$ 」

これらの結果を行列 $W(14, 8)$ の分類に用いると、25通りのIPCの解のうち15通りの場合を考えてweighing行列を構成すれば良い事がわかる。さらに、こうして構成されたweighing行列の自己同型群やC-分布そしてT-分布(7-分布の一種)を用いる事により次の結果を得る。

「行列 $W(14, 8)$ の全体は65個の同値でないクラスに分類される」

On cyclic tournaments

Noboru Ito (Meijo University)

Let V be the set of integers $1, 2, \dots, v$ and $S(v)$ the symmetric group on V . Put $C = (1, 2, \dots, v)$. Let $W(v)$ be the set of all subgroups of $S(v)$ of odd orders containing C . We identify a permutation with its matrix representation.

Let A be a tournament of order v . The set $G(A)$ of all permutation matrices P such that $A = P^t A P$ forms the automorphism group of A . A is called cyclic if $G(A)$ contains C . Let $C(v)$ be the set of all cyclic tournaments of order v .

Let $v = p$ be a prime and $u(p)$ the odd portion of $p - 1$. Then $G(p)$ denotes the metacyclic group of order $pu(p)$ on V . $G(p) = G(A)$ for some tournament A of order p .

In the present talk we show the following:

(i) If any v -cycle of $G(A)$ is a power of C , we can determine the size of the equivalence class of A in $C(v)$;

(ii) Any maximal element of $W(v)$ is of the form $G(p_1) \circ G(p_2) \circ \dots \circ G(p_r)$, where $v = p_1 p_2 \dots p_r$ is a prime decomposition of v and \circ denotes the Polya composition.

(iii) An element of $W(v)$ of the largest order is uniquely (up to the conjugacy in $W(v)$) determined by a certain linear order of odd

primes;

and

(iv) Any element of $W(v)$ is of the form $G(A)$
for a certain element A of $C(v)$.

中国における直交配列の研究

劉 璋 温

中国科学院应用数学研究所, 北京

国際自然科学研究所, 倉敷

1. $D(2p, 2p, p, 2)$ の作り方

直交配列 $(2p^2, 2p+1, p, 2)$ を生成する差集合 $D(2p, 2p, p, 2)$ を p 次モジュール M の要素で作るいくつかの結果を紹介する.

定理 1 ([1]) $p = 6n-1$ を素数とする. 大きさ $2p \times 2p$ の行列

$$D_{6n-1} = \begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$$

は $D(2p, 2p, p, 2)$ である. ここに $a_{ij} = ij$; $b_{ij} = i(i+j)$; $c_{ij} = (i+j)j$; $d_{ij} = -(i^2 + ij + j^2)/3$; $i, j = 0, 1, 2, \dots, 6n-2$.

定理 2 ([1]) $p = 6n+1$ を素数とする.

(i) $p = 6n+1 \equiv 1, 4 \pmod{5}$ なる p に対し 大きさ $2p \times 2p$ の行列

$$D_{6n+1} = \begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$$

は $D(2p, 2p, p, 2)$ である. ここに $a_{ij} = ij$; $b_{ij} = -i(i-j)$; $c_{ij} = (i+j)j$; $d_{ij} = (-i^2 + ij + j^2)/5$; $i, j = 0, 1, 2, \dots, 6n$.

(ii) $p = 6n+1 \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ なる p に対し 大きさ $2p \times 2p$ の行列

$$D'_{6n+1} = \begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$$

は $D(2p, 2p, p, 2)$ である. ここに $a_{ij} = ij$; $b_{ij} = i(j-i)$; $c_{ij} = (i-2j)j$; $d_{ij} = (i^2 - ij + 2j^2)/7$; $i, j = 0, 1, 2, \dots, 6n$.

定理 3 ([2]) p を奇素数とする. δ を $\text{mod } p$ の平方非剰余とし,

$\alpha \equiv (\delta - 1)/4\delta, \beta \equiv \alpha\delta \pmod{p}$ とする. 大きさは $2p \times 2p$ の行列

$$D_J = \begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$$

は $D(2p, 2p, p, 2)$ である. ここに $a_{ij} = ij, b_{ij} = a_{ij} + i^2, c_{ij} = a_{ij} + \alpha j^2, d_{ij} = \delta b_{ij} + \beta j^2; i, j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

定理4 ([3]) p を奇素数とし, α を $\text{mod } p$ の平方非剰余とする.

大きさは $2p \times 2p$ の行列

$$D_X = \begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$$

は $D(2p, 2p, p, 2)$ である. ここに $a_{ij} = 2ij, b_{ij} = i^2 + 2ij, c_{ij} = 2ij + \frac{\alpha-1}{\alpha} j^2, d_{ij} = \alpha i^2 + 2\alpha ij + (\alpha-1)j^2; i, j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

2. 差集合と直交配列の直和による直交配列の構成

$D(\mu p, h, p, 2)$ の各要素に $(\lambda p^2, h, p, 2)$ のすべての要素を加えて得られる大きさは $\mu\lambda p^3 \times h$ の行列を Kronecker 和 (\oplus で表す) と定義すれば $D(\mu p, h, p, 2) \oplus (\lambda p^2, h, p, 2)$ の剰余 \pmod{p} は $(\mu\lambda p^3, h \times h, p, 2)$ を与える. こうして得られた配列は分解可能, すなわち $\mu\lambda p^3$ 行がおのの λp^2 行を持つ μp 組に分割できて配列のどの列にも各組が丁度 p 個の要素をすべて λp 回含むようにできる. (したがって要素 x を何れかの μ 組に入れて, $x \in GF(p)$, そう 1 列を作ることができ, 明らかに $(\mu\lambda p^3, h \times h + 1, p, 2)$ が得られる.

定理5 ([1]) $D(\mu p, h, p, 2)$ と $(\lambda p^2, h, p, 2)$ が存在すれば $(\mu\lambda p^3, h \times h + 1, p, 2)$ が存在する.

参考文献

- [1] 刘璋温, 『应用数学学报』, 1977年第3期, 35-45.
- [2] 蒋声, 『应用数学学报』, 2(1979), 75-80.
- [3] 徐承绪, 『应用数学学报』, 2(1979), 92-97.

一般状況下での単純置列を用いた 2^m -FF 計画の 情報行列に関する注意

岡山理科大学 理学部 兵頭 義史

本報告では、単純置列 $SA(m; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ を用いた 2^m -FF 計画 T に限定する。実際問題として、例えば因子数 $m = 5$ のとき、2 因子以上の交互作用、3 因子以上の交互作用あるいは 4 因子以上の交互作用等を見捨てるいろいろな状況が考えられるであろう。そこで、ここでは、 $(\ell + 1)$ 因子以上の交互作用を見捨てる一般状況を仮定する。ここに $1 \leq \ell \leq m$ である。このとき、Kuwada (1990) による結果を適用して、情報行列 M_T は、次の Block 対角行列と相似であることが示される：

$$\exists \tilde{Q} \in O(\nu_\ell) \text{ s.t. } \tilde{Q}' M_T \tilde{Q} = \text{diag}(\tilde{K}_0, I_{\phi_1} \otimes \tilde{K}_1, \dots, I_{\phi_{\min(\ell, [m/2])}} \otimes \tilde{K}_{\min(\ell, [m/2])})$$

ただし $\nu_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{m}{i}$, $\phi_\beta = \binom{m}{\beta} - \binom{m}{\beta-1}$.

本報告の目的は、上記の $(\min(m - \beta, \ell) - \beta + 1)$ 次対称行列 \tilde{K}_β (M_T の既約表現) と Hyodo and Yamamoto (1988) and Hyodo (1989, 1990) の合併による M_T の既約表現 K_β の相互関係を明確にし、 \tilde{K}_β の代数的性質を導出することである。さらに、これらの諸結果をこのクラスの計画の特徴づけへ応用する。ここでは、その一例を述べる。

定理 1 \tilde{K}_β について次が成り立つ：

$$\tilde{K}_\beta = \sum_{j=\beta}^{m-\beta} \lambda_j \tilde{\kappa}_{\beta j} \tilde{\kappa}'_{\beta j} \quad \text{for } 0 \leq \beta \leq \min(\ell, [m/2])$$

ただし $\tilde{\kappa}_{\beta j}$ の $(i + 1)$ th 要素 $\tilde{\kappa}_{\beta j}^i$ ：

$$\tilde{\kappa}_{\beta j}^i = 2^\beta \sqrt{\binom{m-2\beta}{j-\beta} / \binom{m-2\beta}{i}} \sum_{c=0}^i (-1)^c \binom{j-\beta}{i-c} \binom{m-\beta-j}{c} \quad \text{for } 0 \leq i \leq \min(m - \beta, \ell) - \beta$$

定理 2 \tilde{K}_β と K_β は次の関係式で結ばれる：

$$\tilde{K}_\beta = D'_\beta K_\beta D_\beta \quad \text{for } 0 \leq \beta \leq \min(\ell, [m/2])$$

ここに $D_\beta = \text{diag}(d_0, \dots, d_{\min(m-\beta, \ell)-\beta})$ ；

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq i \leq \min(\ell, [m/2]) - \beta \\ (-1)^\beta & \text{for } \min(\ell, [m/2]) - \beta < i \leq \min(m - \beta, \ell) - \beta \end{cases}$$

定理 3 $\forall \{j_0, \dots, j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}\} \subset \{\beta, \dots, m - \beta\}$ に対して、 $(\min(m - \beta, \ell) - \beta + 1)$ 次元列ベクトル $\tilde{\kappa}_{\beta j_0}, \dots, \tilde{\kappa}_{\beta j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}}$ は常に一次独立である。

定理 4 $\det[\tilde{K}_\beta] = \sum_{\beta \leq j_0 < j_1 < \dots < j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta} \leq m-\beta} c(j_0, j_1, \dots, j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}) \cdot \lambda_{j_0} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}} \quad \text{for } 0 \leq \beta \leq \min(\ell, [m/2])$

ここに $c(j_0, j_1, \dots, j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}) = 2^{\{\min(m-\beta, \ell)-\beta+1\} \{\min(m-\beta, \ell)+\beta\}}$

$$\prod_{i=0}^{\min(m-\beta, \ell)-\beta} \frac{\binom{m-2\beta}{j_i-\beta}}{\binom{m-2\beta}{i}(i!)^2} \prod_{0 \leq g < h \leq \min(m-\beta, \ell)-\beta} (j_h - j_g)^2$$

[注意] $c(j_0, j_1, \dots, j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}) = c(m - j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}, \dots, m - j_1, m - j_0) > 0$

定理 5

$$\bar{K}_\beta > 0 \iff \exists \{j_0, \dots, j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}\} \subset \{\beta, \dots, m - \beta\}$$

s.t. $\lambda_{j_0}, \dots, \lambda_{j_{\min(m-\beta, \ell)-\beta}} > 0$

定理 6

$$\text{rank}[\bar{K}_\beta] = \min(\omega(\lambda_\beta, \dots, \lambda_{m-\beta}), \min(m - \beta, \ell) - \beta + 1)$$

for $0 \leq \beta \leq \min(\ell, [m/2])$

ここに $\omega(\underline{x}')$ は \underline{x}' の非零要素の個数を表す。

これらの諸定理から次が成り立つ。

定理 7 T は分解能 $2\ell + 1$ の 2^m -BFF 計画である。 $\iff T$ は次の条件を満たす単純配列 $SA(m; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ である:

$$\omega(\lambda_\beta, \dots, \lambda_{m-\beta}) \geq \min(m - \beta, \ell) - \beta + 1 \quad \text{for } 0 \leq \beta \leq \min(\ell, [m/2])$$

REFERENCES

- Hyodo, Y. (1989). Characteristic polynomials of information matrices of some balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell + 1$. Submitted for publication.
- Hyodo, Y. (1990). Characterization of information matrices of fractional factorial designs derived from two-symbol simple arrays under some situation. Submitted for publication.
- Hyodo, Y. and Yamamoto, S. (1988). Algebraic structure of information matrices of fractional factorial designs derived from simple two-symbol balanced arrays and its applications. In: K. Matusita, Ed., *Statistical Theory and Data Analysis II*, North-Holland, Amsterdam, 457-468.
- Kuwada, M. (1990). On triangular multidimensional partially balanced association schemes and their algebras, with applications to balanced fractional 2^m factorial designs. Statistical Research Group Technical Report No. 267, Hiroshima University.

THREE-SYMBOL ORTHOGONAL ARRAYS OF STRENGTH t
AND $t+2$ CONSTRAINTS

岡山理科大学理学部

山本純恭, 藤井淑夫, 並川哲郎, 光岡元弘

T を3シンボル $0, 1, 2$ の大きさ $N \times m$ の配列とし, T の任意の t 列から成るどの部分配列においても, 3^t 個の t 次元行ベクトルが各々 λ 回現れるとき, T を強さ t , 大きさ N , 制約数 m , 指標 λ の3シンボル直交配列という, 記号 $OA(N, m, 3, t) : \lambda$ が用いられるが, ここでは, $N = \lambda 3^t$ であることから $3-OA(t, m, \lambda)$ を用いる.

$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ を3シンボルの m 次元行ベクトルとし, $\nu(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ を配列 T に現れる行ベクトル $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ の頻度を表すものとする.

この頻度は列番号の部分集合 $\alpha_j = k$ となる列番号の集合 $I_k, k = 0, 1, 2$ を用いて $\nu[I_0, I_1, I_2]$ と表すこともある.

$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ を3進数とみて, その大きさの順に並べた配列を $Z^{(m)}$, 配列 T の ν をその3進引数の順に並べたベクトルを $\nu(Z^{(m)})$ とする. $\nu(Z^{(m)})$ を T のモジュラー・ベクトルと呼ぶ.

T が $3-OA(t, m = t + 2, \lambda)$ であるための必要十分条件として, 次の定理がある.

定理 1.1. T が $3-OA(t, m = t + 2, \lambda)$ であるための必要十分条件はモジュラー・ベクトル $\nu(Z^{(m)})$ の $|I_2| < 2$ である $2^m + m2^{m-1}$ 個の成分 $\nu[I_0, I_1, I_2]$ に対して非負の整数を与えたとき, 残りの式 (1.1) で計算される $|I_2| \geq 2$ の $3^m - 2^m - m2^{m-1}$ 個の成分 $\nu[I_0, I_1, I_2]$ が非負の整数であることである.

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \nu[I_0, I_1, I_2] = & \lambda - \nu[I_0 \cup \{p, q\}, I_1, I_2'] - \nu[I_0 \cup \{p\}, I_1 \cup \{q\}, I_2'] \\ & - \nu[I_0 \cup \{p\}, I_1, I_2' \cup \{q\}] - \nu[I_0 \cup \{q\}, I_1 \cup \{p\}, I_2'] - \nu[I_0, I_1 \cup \{p, q\}, I_2'] \\ & - \nu[I_0, I_1 \cup \{p\}, I_2' \cup \{q\}] - \nu[I_0 \cup \{q\}, I_1, I_2' \cup \{p\}] - \nu[I_0, I_1 \cup \{q\}, I_2' \cup \{p\}] \\ & \quad i < p < q; i \in I_2' = I_2 - \{p, q\} \end{aligned}$$

この定理を満たすすべてのモジュラー・ベクトルを求める手順を計算機上で実現するために 0 を a , 1 を b , 2 を c に置き換えた 3^m 個の長さ m のリストのベクトル $L^{(m)}$ を用いて $\nu(Z^{(m)})$ の変数名すなわち格納番地のベクトルとする.

実行プログラムでは $|I_2| < 2$ に対応する文字 c の個数が 2 個より少ないときはループ・パラメータとし, 0 から λ までの非負の整数を与え, $|I_2| \geq 2$ に対応する c を 2 個以上含むとき, (1.1) 式を用いて計算しその結果の非負性を判定すればよい. ただし通常の多重ループ計算を実行すると $\lambda^{2^m+m2^{m-1}}$ 回の計算が必要になり到底実用的であるとはいえない.

そこで実行時間短縮のための工夫として, (1.1) が計算可能となり次第計算を実行し, 判定し不適解を排除することが考えられる. そのことは $L^{(m)}$ の 3 進の順にループ・パラメータとしてセット, あるいは計算式 (1.1) による計算及び判定を行うことにより実現される.

3-OA($t = 2, m = 4, \lambda = 2$) の場合について, この工夫を適用したところ, 3^{48} (10 進 23 桁) の計算回数が 485,785,629 回に激減した. この比は実に 160 兆分の 1 である.

計算の効率を上げる第 2, 第 3 の工夫がある.

第 2 の工夫は, 3-OA($t + 1, m + 1, \lambda$) の中に 3 個の 3-OA(t, m, λ) が埋め込まれていることを用い, 3-OA(t, m, λ) のすべての解の集合の中から 2 個を取り出して第 3 の部分の計算をし 3-OA($t + 1, m + 1, \lambda$) を構成することによりループの深さの節減を図ることである.

第 3 の工夫は 3-OA(t, m, λ) のすべての解をシンボルの置換により類別し, 第 2 の工夫における一方の 3-OA(t, m, λ) を類の代表元に置き換えるものである. その結果, すべての処理が終了した時点で解の集合がシンボルの置換による類の和として与えられる.

このことは列の置換を加えた解の類別をも容易にする.

第 2 の工夫は 3-OA($t = 3, m = 5, \lambda = 2$) を求めることを可能にした. さらに第 3 の工夫を加えることにより, 第 2 の工夫まででは約 10 日間を要した計算時間 (VAX-8350) を約 7 時間に短縮することができた.

また 3-OA($t = 4, m = 6, \lambda = 2$) の不存在が検証できた.

	3-OA(1, 3, 2)	3-OA(2, 4, 2)	3-OA(3, 5, 2)
解の総数	1,152	31,356	82,944
類の数 (S の置換)	16	68	32
類の数 (S & C の置換)	8	12	4

詳細は IINS TECHNICAL REPORT No.2 Jan.1991 参照