Ｃ．研究内容・成果
－研究集会関係－

（１）推定と検定における最適性

Brown-Brewster-Zidek 法による James-Stein 推定量の改良

東大・工　　久保川達也

$X=(X_1,\ldots,X_p)'$ を p-変量正規分布 $N_p(\theta, I)$ に従う確率変数とし、平均ベクトルθを損失関数$\|\delta-\theta\|^2=(\delta-\theta)'(\delta-\theta)$に関して推定する問題を考える。推定量は危険関数 $R(\theta,\delta)=E[\|\delta-\theta\|^2]$ によって評価されるものとする。

Stein(1956) が $p\geq3$ のときの X の非許容性を示し、James-Stein(1961) は改良された推定量

$$\delta_{JS}=(1-(p-2)/\|X\|^2)X$$

を構成した。以来 X を改良している多くの縮小推定量が提案されてきた。特に Baranchick(1964) は打ち切り推定量

$$\delta_{JS}^{+}=\begin{cases}0 & \text{if } \|X\|^2\leq p-2\\ \delta_{JS} & \text{otherwise}\end{cases}$$

を提案し、δ_{JS}^{+} がδ_{JS}より優れていることを示した。δ_{JS} は$\|X\|^2\leq p-2$で X_iの符号を変えてしまっており、δ_{JS}^{+} はδ_{JS}のこの望ましくない性質を取り除いているわけである。しかしδ_{JS}^{+} も$\|X\|^2\leq p-2$ のときには 0 でθを推定しているわけで満足いくものとはいえない。さらにδ_{JS}^{+} のような打ち切り推定量は一般に非許容的であることが知られている。

ここではδ_{JS}, δ_{JS}^{+} の望ましくない性質を除去する為に、Brown(1968), Brewster-Zidek(1974) の方法によって、δ_{JS} を改良している、許容的で滑らかな推定量を構成する。

[1] δ_{JS} を改良している許容的推定量

δ_{JS} を改良する為に次なる推定量を考える。

$$\delta(c,r)=\begin{cases}(1-c/\|X\|^2)X & \text{if } \|X\|^2\leq r\\ \delta_{JS} & \text{otherwise}\end{cases}$$

但し、c, r (>0) は定数。$\lambda=\|\theta\|^2/2$ とし、f $(t;\lambda)$ を自由度 p, 非心度λの非心χ^2-分布の密度関数とする。

$$c(r,\lambda)=p-2-2f_p(r;\lambda)/\int_0^r t^{-1}f_p(t;\lambda)dt,$$

とおくとき、次の補題を得る。

補題 1.1

(i) $\delta(c,r)$ の危険関数は c に関して２次式で、$c=c(r,\lambda)$ で最小となる。

(ii) $c(r,\lambda)\leq c(r,0)\equiv c(r)$ であり、$c(r)$ は次のように表現される。

$$c(r)=p-2-2\left[\int_0^1 t^{p/2-2}\exp\{\tfrac{1}{2}(1-t)r\}dt\right]^{-1}.$$

(iii) $c(r)$ は r に関して単調増加で、$0<c(r)<p-2$ である。

この補題から次の定理が成り立つことがわかる。

定理1.1　$\delta(c(r),r)$ は δ_{JS} を改良する。

さらに、分割を細かくして $0=r_{i,0}<\ldots<r_{i,n_i-1}<r_{i,n_i}=\infty$ とし、

$$\delta^{(i)}=(1-c\ (r_{ij})/\|X\|^2)X \quad \text{if } r_{i,j-1}<\|X\|^2\leq r_{ij}.$$

なる推定量を考えると、$\delta^{(i)}$ は δ_{JS} を改良することがわかる。この分割を無限に細かくしていくと Fatou の補題により次の定理を得る。

定理1.2　推定量

$$\delta^{*}=(1-c(\|X\|^2)/\|X\|^2)X$$

は δ_{JS} を改良している。さらに Strawdermann(1971), Berger(1976) のよって提案された許容的、一般化ベイズ推定量に一致する。

実際、δ^{*} は事前密度

$$\pi(\theta)=\int_0^1(2\pi)^{-p/2}\lambda^{-2}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^{p/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1-\lambda}\|\theta\|^2\right\}d\lambda$$

に対して一般化ベイズであることがわかる。

[2] 共分散行列が未知の場合への拡張

$X\sim N_p(\theta,\sigma^2 I)$, $S\sim\sigma^2\chi^2_n$ の場合には、σ^2 が既知のときと同様にして次の結果を得る。

$$c(r)=\frac{p-2}{n+2}-\frac{2}{n+2}\left[\int_0^1\frac{(1+r)^{(p+n)/2}}{(1+rz)^{(p+n)/2+1}}z^{p/2-2}dz\right]^{-1}$$

に対して、

$$\delta^{*}=(1-c\ (\|X\|^2/S)S/\|X\|^2)X$$

なる推定量を考える。

定理2.1　δ^{*} は James-Stein 推定量　$(1-\frac{p-2}{n+2}S/\|X\|^2)X$　を改良し、かつ Lin-Tsai(1973) によって導かれた一般化ベイズ推定量に一致する。

さらに $X\sim N_p(\theta,\Sigma)$, $S\sim W_p(n,\Sigma)$ の場合には、

$$c(r)=\frac{p-2}{n-p+3}-\frac{2}{n-p+3}\left[\int_0^1\frac{(1+r)^{(n+1)/2}}{(1+rt)^{(n+1)/2+1}}t^{p/2-2}dt\right]^{-1}$$

に対して、

$$\delta^{*}=(1-c\ (X'S^{-1}X)/X'S^{-1}X)X$$

とおくと、δ^{*} は James-Stein 推定量 $(1-\frac{p-2}{n-p+3}(X'S^{-1}X)^{-1})X$ を改良し、かつ一般化ベイズ推定量になっている。

ON ESTIMATING THE MATRIX OF MEAN

石巻専修大学　今野 良彦

母集団の分布が多変量正規分布に従うとする。この分布のもと有限標本で、多次元の未知母数の同時推定問題を考えると、通常用いられる推定量が自然な損失関数のもとで非許容的になることがスタインにより発見されて以来、この現象について数多くの研究がなされてきた。本講演では、分散共分散行列が未知の場合について、多変量正規分布の平均行列の同時推定問題を考え、平均ベクトルの同時推定問題で得られている結果の多変量への拡張を報告した。

モデルとして、次のようなものを扱った。X は mxp の確率行列で多変量正規分布 $N_{mp}(B, I_m \otimes \Sigma)$ に従い、S は p p のウィシャート行列で $W_p(\Sigma, n)$ に従うものとし、X と S は互いに独立とする。X と S をもとに平均行列 B の同時推定問題を損失関数 $tr[(\hat{B}-B)\Sigma^{-1}(\hat{B}-B)']$ に関して考えた。ただし $\hat{B}$ を B の推定量とし、A' を行列 A の転置とする。

通常用いられる推定量 $\hat{B}_{ML}=X$ はミニマックスになるが、スタインの結果より非許容的になることがわかる。そこで、具体的に $\hat{B}_{ML}$ を改良する推定量を構築するために以下のような手法を用いた。

1° 始めに推定量の族を適当に制限し、推定量の型を定めた。

2° 1° で求めたものに対して、Bilodeau and Kariya の補題を用いて、リスクの不偏推定量を計算する。

3° 最後に、リスクの不偏推定量を使い、新しい推定量を見いだす。

この手法はスタインにより考えられ、色々な問題に応用されている。

ここでは、推定量の族として、$\hat{B}(X,S)=X+\nabla_X h(F)$ を考えた。ただし、$F=(f_1,\dots,f_{\min(m,p)})$、$f_1,\dots,f_{\min(m,p)}$ は $X'XS^{-1}$ の順序付けられた

固有根、$h(F)$ は F から実数への２回連続微分可能な関数、$\nabla_X h(F)$ は $m \times p$ の行列で、その (i,j)成分は X の (i,j)成分に関する $h(F)$の１階偏微分導関数とする。この推定量の族は、アフィン群に関して共変になり、エフロン＝モーリスによる縮小推定量を含んでいる。更に、この推定量の族に対して、リスクの不偏推定量を実際に計算すると、f_k, $h(F)/ f_k$, $h(F)/ f_k$ $(k=1,...,min(m.p))$ のみを用いて表現できることがわかった。これは、スタインが分散共分散行列が未知の場合への拡張になっている。求めたリスクの不偏推定量を使って、従来知られているエフロン＝モーリス型の推定量とは異なったスタイン型の縮小推定量やバランチック型推定量の多次元への拡張を求めることができた。

More Comparisons Of MLE With UMVUE For Exponential Families With Applications

黄 提源 (国立清華大・統数研)

In making a decision, there exists usually one more statistics in statistical analysis. Before the criterion to select the best one among them will be relatively important. In statistical inference, therelative efficiency of one statistic comparing with other is considered as the one of most important index.

The definition of relative efficiency of two statistics is different in estimation theory and testing theory: the former considers the ratio of their variances, and the latter the ratio of their sample sizes while they have same type I and type II errors.

The asymptotic relative efficiency (ARE) is defined as its asymptotic sense in estimation theory, and however has four different definitions proposed by Pitman (1949), Chernoff (1952), Hodges & Lehmann (1956) and Bahadur (1960) in testing theory.

We concentrate on the comparison of maximum likelihood estimator (MLE) and uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE), which are considered as the two most important estimators for estimating parametor under an exponential family. They usually are equivalent in terms of ARE under some regularity conditions.

In order to discober whether MLE is better than UMVUE or not, Rao (1961, 1962 and 1963) introduced several concepts of second order efficiency, and Hodges & Lehmann (1970) gave the deficiency. We uses the latter because of its more concrete sense.

A simple formula for the asymptotic expected deficency (AED) of MLE relative to UMVUE was obtained for the one-parameter exponential family. We gave the exact expression of AED corresponding to normal, lognormal, inverse Gaussian, exponential (or gamma), Pareto, hyperbolic secant, Bernoulli, Poisson and geometric (or negative binomial) distributions.

von-Mises 分布における周辺尤度推測

岡山理大　山本英二
on Nov. 1, 1991 at Kumamoto Univ.

1.はじめに

Directional Data における正規分布とでもいうべき von-Mises 分布 (Fisher, Langevin 分布) については Mardia (1972) によって広く紹介され多くの研究者に注目される様になった。

von-Mises 分布は確率密度関数が

$$f(x;\mu,\kappa)=\frac{1}{2\pi I_0(\kappa)}e^{\kappa cos(x-\mu)},\quad -\pi<x-\mu<\pi$$

という指数型で与えられ μ は平均方向, κ は集中度（バラツキ度）を示す母数である。ここで $I_i(\kappa)$ はオーダー i の第 1 種の変形された Bessel 関数である。大きさ n の標本 $\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ が与えられると，その同時密度は

$$\begin{aligned}f(\underline{x};\mu,\kappa)&=f_m(R;\kappa)f_c(\bar{x};\mu,\kappa\mid R)f_r(\underline{x}\mid\bar{x},R)\\&=\frac{I_0(R\kappa)}{I_0^n(\kappa)}h_n(R)\frac{1}{2\pi I_0(R\kappa)}e^{R\kappa cos(\bar{x}-\mu)}\frac{1}{(2\pi)^{n-1}h_n(R)}\\h_n(R)&=R\int_0^\infty uJ_0(Ru)J_0^n(u)du,\quad J_0(u)=I_0(iu)\end{aligned}$$

$$C=Rcos(\bar{x}-\mu)=\sum_1^n cos(x_i-\mu),\quad S=Rsin(\bar{x}-\mu)=\sum_1^n sin(x_i-\mu)$$

と分解され $(\bar{x},R)$ は (μ,κ) の最小十分統計量となる。(μ,κ) は Cox の意味で直交している。$\bar{x}$ が R の条件下で再生性を持つ。分解された密度関数 f_m,f_c をそれぞれ κ,μ の尤度と考えることにより，(μ,κ) の推測を統一的に尤度原理に基づいて行うことが出来る。即ち

(1) μ の推定は f_c に基づく ML 推定を行う。$\hat{\mu}=\bar{x}$ となる。
(2) μ の検定は f_c に基づく LR 検定を行う。このとき，未知母数 κ には (3) の推定量を用いる。提案する検定量は $T_p=2\hat{\kappa}R(1-cos(\bar{x}-\mu_0)$ を F- 検定として行うことである。
(3) κ の推定は f_m に基づく ML 推定を行う。周辺 MLE $\hat{\kappa}$ が与えられる。
(4) κ の検定は f_m に基づく LR 検定を行う。周辺 LRT が与えられる。

それぞれの統計量は統一された尤度法によって導き出され，それぞれ統計的に良い性質を持つ。

2. κ の推定

κ の推定は MLE, 周辺 MLE が提案されていて，それぞれ推定方程式

$$R-nA(\kappa)=0,\tag{2.1}$$

$$RA(R\kappa)-nA(\kappa)=0,\tag{2.2}$$

で与えられる。ここで $A(\kappa) = I_0(\kappa)/I_1(\kappa)$ である。 $E(C) = nA(\kappa)$, $E(S) = 0$ となることから MLE はモーメント推定量とも呼ばれる。Schue (1978) によって，MLE $\hat{\kappa} >$ 周辺 MLE $\tilde{\kappa}$ が標本ごとに成立し，MLE の正の偏差が周辺 MLE でかなり改善されることが simulation study で示されている。これを推定方程式の立場から見ると 2 つの推定方程式 (2.1), (2.2) は正偏，不偏になっている。また両者を比較できる様に Godambe (1960) による推定方程式 $g(\underline{x}:\theta) = 0$ の有効性基準を拡張した基準 $M(g) = E^2(gl_\theta)/E(g^2)$ (Yanagimoto & Yamamoto 1991) によれば周辺 MLE が良い。

3. 修正されたLRT

ここで $H_0 : \mu = \mu_0, H_a : \mu \neq \mu_0$ (κ : 未知) の検定問題を考える。最良検定が存在しないため従来は

$$LRT : 2nln\frac{I_0(\tilde{\kappa})}{I_0(\tilde{\kappa})} + 2R(\tilde{\kappa} - \tilde{\kappa}_0 cos(\bar{x} - \mu_0))$$

$$WATSON : \frac{\tilde{\kappa}}{nA(\tilde{\kappa})} R^2 sin^2(\bar{x} - \mu_0)$$

$$SCORE : \frac{\tilde{\kappa}_0}{nA(\tilde{\kappa}_0)} R^2 sin^2(\bar{x} - \mu_0)$$

の検定が用いられている。ここで $\tilde{\kappa}_0$ は $\mu = \mu_0$ の下での MLE である。Hayakawa (1990) によって χ^2 分布に基づく展開は $1/n$ のオーダーより下位で上の統計量が漸近同値であることが示されている。これらの検定量は $\kappa \to \infty$ と $n \to \infty$ で漸近分布が異なる。LRT では $nlog(1 - F^1_{n-1}/n - 1)$ である。さて Yanagimoto & Yamamoto (1990) によれば κ が既知のときの $LRT(\kappa)$ に直接周辺 MLE を代入した検定量 $LRT(\tilde{\kappa})$ が良い性質を持つことが期待出来る。正規分布で σ^2 既知での LRT が $(\bar{x} - \mu_0)/\sigma^2/n$ で与えられ，σ^2 に周辺 MLE ($\bar{x}$ の条件付き MLE) $s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2/n - 1$ を代入したものが $LRT(s^2) = (\bar{x} - \mu_0)^2/s^2/n$ となり t^2 検定，即ち F 検定を直接導出していることに注目せよ。von-Mises 分布では T_p となる。この統計量は $\kappa \to \infty$ のときも $n \to \infty$ のときも漸近分布として F 分布を持つ。T_p の良さは simulation study によっても支持される。

参考文献

Godambe, V.P.(1960). *Ann. Math. Statist.* **31**, 1208-1211.

Hayakawa, T.(1990). *Ann. Inst. Math. Statist.* **42**, 359-373.

Mardia, D.J.(1973). *Statistics of directional data.* Academic press.

Schou, G.(1978). *Biometrika* **65**, 369-377.

Yanagimoto, T. & Yamamoto, E.(1990). *RM of ISM* **368**.

Yanagimoto, T. & Yamamoto, E.(1991). (in preparation)

Stepwise Bayes法による許容的推定量の構成法とその自然な拡張

関東学院大学経済学部　布能英一郎

1．Stepwise Bayes法は Hsuan(1979, Ann of Stat.), Meeden and Ghosh (1981, Ann of Stat) らによって提案され、推定量の許容性を示すのに簡潔で広い応用範囲を持つ方法である。最初にHsuan Meeden Ghoshらが得た結果を示す。

離散型確率分布$P(x|\theta)$を考察の対象とし、確率分布・損失関数に次の仮定を置く。

仮定①：各 $x\in \mathfrak{X}$ に対し、少なくとも $P(x|\theta)>0$ を満たす $\theta\in\Theta$ が存在する。

仮定②：　Θ上の任意の確率測度 $d\lambda(\theta)$に対し、

$$\int_{\theta\in\Theta} L(\gamma(\theta),\delta(x))\,d\lambda(\theta)$$

を最小にする$\delta(x)$は一意である。

<u>定理1.</u>（Hsuan, Meeden, Ghosh）

標本空間、母数空間はともに有限とする。すなわち$\mathfrak{X}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_k\}$とする。このとき、$\delta$を$\gamma(\theta)$の許容的推定量とすると(1)~(3) を満たすような有限個の事前分布の列

$\lambda_j=(\lambda_j(\theta_1),\lambda_j(\theta_2),...,\lambda_j(\theta_k))$,　　　$j=1,2,...,m$

が存在する。

(1)　$\sum_{\ell=1}^{k}\lambda_\ell(\theta_j)\lambda_\ell(\theta_i)=0$　　if　$i\neq j$

(2)　$\mathfrak{X}(1)=\{x : g(x:\lambda_1)=\sum_{\ell=1}^{k}P(x|\theta_\ell)\lambda_1(\theta_\ell)>0\}$ および

各 $i=2,3,...,m$に対し

$$\mathfrak{X}(i)=\{x : g(x:\lambda_i)=\sum_{\ell=1}^{k}P(x|\theta_\ell)\lambda_i(\theta_\ell)>0 \text{ and } x\notin\bigcup_{j=1}^{i-1}\mathfrak{X}(j)\}$$

と定める。そうすると、

$\bigcup_{j=1}^{m}\mathfrak{X}(j)=\mathfrak{X}$　が満たされる。

(3) $\delta(x)$ は$\mathfrak{X}(i)$ 上の各点 xに対して $\lambda_i(\theta)$を事前分布とする $\gamma(\theta)$ のベイズ解に一致する。

逆に、(1)～(3) を満たすような有限個の事前分布の列 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ が存在すれば、$\delta(x)$は $\gamma(\theta)$ の許容的推定量である。

2．ステップワイズ・ベイズ法の自然な拡張

ここでは仮定①、仮定②は満たすが、母数空間Θ、標本空間$\mathfrak{X}$は必ずしも有限とは限らない場合に Hsuan Meeden Ghosh らの定理を拡張することを考える。そのために次のような準備をしておく。

$\mathfrak{X}$の空でない部分集合$\mathfrak{X}(i)$に対し、

$$\Theta(\mathfrak{X}(i))=\{\theta\in\Theta : g_i(\theta)=\sum_{y\in\mathfrak{X}(i)} P(y|\theta)>0\}$$

とおく。そうすると、標本空間を$\mathfrak{X}(i)$,母数空間を$\Theta(\mathfrak{X}(i))$とする restricted probability distribution $P_{\mathfrak{X}(i)}(x|\theta)=P(x|\theta)/g_i(\theta)$ がwell-definedである。

次に、Θの空でない部分集合Θ^*に対して、Θ^*上に確率測度$d\lambda(\theta)$が定義されているとする。このとき、$\Theta-\Theta^*$上で$d\lambda(\theta)$は zero probability mass を持つと定めることでΘ上の確率測度に自然に拡張できる。

さて、定理1.の拡張のやり方はいろいろあるかも知れないが、定理1.の後半部分を次の定理2.および定理3.のように拡張することができる。

<u>定理2.</u>　標本空間$\mathfrak{X}$の空でない部分集合の列$\{\mathfrak{X}(i)\}_{i\in I}$と，事前確率測度の列$\{d\lambda_i\}_{i\in I}$に関して、

ⓐ　$\mathfrak{X}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{X}(i)$　（直和）

ⓑ $\Theta(i)=\{\theta\in\Theta(\mathfrak{X}(i)) : d\lambda_i$は positive probability massを持つ。$\}$

と置くと、　$\Theta(i)\cap\Theta(j)=\Phi$　　if $i\neq j$　を満たす。

が成立し、更に

ⓒ推定量$\delta(x)$が各$(\Theta(i),\mathfrak{X}(i))$上で事前確率測度$d\lambda_i$より一意に定まるベイズ解

とする。このとき、$\delta(x)$は$(\Theta,\mathfrak{X})$で許容的。

<u>定理3.</u>　仮定①、仮定②と、定理2.における仮定ⓐ，ⓑに加え、更にⓓが満たされているとする。

ⓓ $h_i(x)=\int P_{\mathfrak{X}(i)}(x|\theta)d\lambda_i(\theta)$　とおく。そうする各$x\in\mathfrak{X}(i)$に対して

$0<h_i(x)<+\infty$　が満たされる。

このとき、推定量$\delta(x)$が各$i\in I$に対し、$(\Theta(i),\mathfrak{X}(i))$上で$d\lambda_i(\theta)$に関するベイズ解ならば、$\delta(x)$は$(\Theta,\mathfrak{X})$上で許容的。

Nonparametric Approach in Time Series Analysis

By Masanobu Taniguchi
and Masao Kondo
Osaka University
and Kagoshima University

Suppose that $\{X(t)\}$ is a Gaussian stationary process with the spectral density $f(w)$. Here we consider the testing problem

$$H: \quad \int K\{f(w)\}dw = c,$$

against

$$A: \quad \int K\{f(w)\}dw \neq c,$$

where $K(.)$ is an appropriate function and c is a given constant. This setting of test is unexpecteadly wide, and can be applied to many problems in time series. For this problem we propose a test based on a integral of function of a nonparametric spectral estimator of $f(w)$. Then we evaluate the asymptotic power under a sequence of nonparametric contiguous alternatives. We also compare the asymptotic power of our test with the other one, and show some good properties of ours.

It is shown that our testing problem can be applied to testing for independence. Finally some numerical studies will be given for a sequence of exponential spectral alternatives. They confirm the theoretical results and the goodness of our test.

分散が異なるｋ標本モデルにおけるパラメータの順位推測

横浜市立大学文理学部数学教室　白石高章

１、モデル

X_{ij} が連続型の分布関数 $F((x-\mu_i)/\sigma_i)$ に従う（$j=1,\cdots,n_i$, $i=1,\cdots,k$）とし、X_{ij}'s は互いに独立とする。ただし、$F(-x)=1-F(x)$。さらに、便宜上、$\int x^2dF(x)=1$ と仮定する。このとき、μ_i と σ_i^2 は、それぞれ、i 番目の標本の平均と分散であり、σ_i^2 は未知の邪魔なパラメータで μ_i の推測に興味がある。ここでは、平均の一様性の帰無仮説

(1)　　$H_0:\mu_1=\cdots=\mu_k$、

の検定を考える。

２、符号付き線形順位統計量と仮定

$X_{ij}(\theta)=X_{ij}-\theta$ とおき、$R^+_{ij}(\theta)$ を $\{|X_{ij}(\theta)|:j=1,\cdots,n_i\}$ の中での $|X_{ij}(\theta)|$ の順位とする。$a^+_n(\cdot):\{1,\cdots,n\}\longrightarrow R^1$。$S_i(\theta)=\sum_{j=1}^{n_i}\mathrm{sign}\{X_{ij}(\theta)\}a^+_{n_i}(R^+_{ij}(\theta))/\sqrt{N}$

ただし、$N=\sum_{i=1}^{k}n_i$。つぎを仮定

(c.1)　$n_i/N\longrightarrow\lambda_i>0$（$i=1,\cdots,k$）.　(c.2)　$0<\int\{-f'(x)/f(x)\}^2f(x)dx<\infty$.

(c.3)　$a^+_n(m)=E\{\phi(U^{(m)}_n)\}$、$\phi(m/(n+1))$。$\phi(u)\geq0$, $\phi(u)$ は単調増加。

３、提案する手法と結果

$ST=N\sum_{i=1}^{k}[\{T_i(\hat{\nu}^*)\}^2/\{n_i\hat{\sigma}_i^2(\phi)\}]$ が大きいとき、一様性の帰無仮説 H_0 を棄却する。

ただし、$T_i(\theta)=S_i(\theta)-\{n_i/(N\tilde{\sigma}_i)\}\sum_{j=1}^{k}\{S_j(\theta)/(N\tilde{\sigma}_j)\}/\sum_{j=1}^{k}\{n_j/(N\tilde{\sigma}_j)\}$。$\hat{\nu}^*$ と $\tilde{\sigma}_i$ は $\hat{\nu}^*-\nu=O_P(1/\sqrt{N})$、$\tilde{\sigma}_i-\sigma_i=O_P(1/\sqrt{N})$ となる一致推定量。$\hat{\sigma}_i^2(\phi)=\sum_{m=1}^{n_i}\{a^+_{n_i}(m)\}^2/n_i$ で $a^+_{n_i}(m)$ は (c.3) で与えられる。

定理、局所対立仮説 A_N: $\mu_i=\mu_0+\Delta_i/\sqrt{N}$ のもとで $N\longrightarrow\infty$ として、ST は自由度 k-1 の非心 χ^2 に分布収束し、非心度は $\{\eta(\phi,\varphi)\}^2\sum_{i=1}^{k}\{\lambda_i(\Delta_i-\bar{\Delta})^2/\sigma_i^2\}/\sigma^2(\phi)$ である。ただし $\eta(\phi,\varphi)=\int_0^1\phi(u)\varphi(u)du$, $\sigma^2(\phi)=\int_0^1\{\phi(u)\}^2du$, $\varphi(u)=-f'(F^{-1}((1+u)/2))/f(F^{-1}((1+u)/2))$, $\bar{\Delta}=\sum_{i=1}^{k}\{\lambda_i\Delta_i/\sigma_i^2\}/\sum_{i=1}^{k}\{\lambda_i/\sigma_i^2\}$。∎

10,000回繰り返しのシミュレーションによって Wilcoxon 型の順位検定と Welch 検定法の検出力を比較、提案した検定の検出力の高さが検証できた。Kruskal-Wallis 検定よりも提案した検定の方が帰無仮説のもとでの漸近近似がよいことも検証できた。

次に推定を考える。H_0 が成立するときの共通平均 $\mu_i=\nu$（$i=1,\cdots,k$）の推定と、

$\mu=(\mu_1,\cdot\cdot\cdot,\mu_k)$ の同時推定に興味がある。μ_i の順位推定量として、Hodges & Lehmann (1962) の $\hat{\mu}_i=[\inf\{\theta: S_i(\theta)\geq 0\}+\sup\{\theta: S_i(\theta)\leq 0\}]/2$ を考えることができる。この統計量を使って、

$\hat{\nu}=\sum_{i=1}^{k}\{n_i\hat{\mu}_i/\tilde{\sigma}_i^2\}/\sum_{i=1}^{k}\{n_i/\tilde{\sigma}_i^2\}$ を ν の推定量として提案する。

ν の推定として、重みつき最小二乗法

$\tilde{\nu}=\sum_{i=1}^{k}\{n_i\bar{X}_{i\cdot}/\tilde{\sigma}_i^2\}/\sum_{i=1}^{k}\{n_i/\tilde{\sigma}_i^2\}$ がよく知られている。

$\sqrt{N}(\hat{\nu}-\nu)$ と $\sqrt{N}(\tilde{\nu}-\nu)$ は共に正規分布に法則収束し、$\hat{\nu}$ に対する $\tilde{\nu}$ の漸近相対効率は、よく知られた1標本の 標本平均に対する順位推定の漸近相対効率に等しい。

10,000回繰り返しのシミュレーションによる危険関数の値も調べた。$\hat{\mu}=(\hat{\mu}_1,\cdot\cdot\cdot,\hat{\mu}_k)'$ を $\mu=(\mu_1,\cdot\cdot\cdot,\mu_k)'$ の推定量として考えることができるが、ここでは、つぎの正値縮小順位推定量を提案する。

$\hat{\mu}^{PS}=\hat{\nu}\mathbf{1}_k+\max(1-c/ST,0)\cdot(\hat{\mu}-\hat{\nu}\mathbf{1}_k)$。ただし、$\mathbf{1}_k$ は、各成分が 1 の k 次元縦ベクトル。

μ の点推定として、正値縮小順位推定量のほかに、

次の予備検定推定量と縮小順位推定量

$\hat{\mu}^{PT}=\hat{\nu}\mathbf{1}_k+I(ST>\chi^2_{k-1,\alpha})\cdot(\hat{\mu}-\hat{\nu}\mathbf{1}_k)$　　$\hat{\mu}^{S}=\hat{\nu}\mathbf{1}_k+(1-c/ST,0)\cdot(\hat{\mu}-\hat{\nu}\mathbf{1}_k)$

を考えることができる。

対立仮説 A_N (H_0を含む) のもとで 漸近的危険関数 $\lim_{c\to\infty}\lim_{N\to\infty}E[\min\{c,\ N(\hat{\mu}^{*}-\mu)'Q(\hat{\mu}^{*}-\mu)\}]$

によって、推定量の良さを調べる。ただし、Q は正値対称行列とする。定理、$N\longrightarrow\infty$ として、$k\geq 4$ に対して つぎの (i) または (ii) の場合に $\hat{\mu}^{PS}$ は、$\hat{\mu}$, $\hat{\mu}^{S}$, $\hat{\mu}^{PT}$ を 改良する。

(i) H_0 が成立する。

(ii) A_N のもとで、Q は、もっともらしい特別な行列。∎

10,000回繰り返しのシミュレーションによるの危険関数値を、重ね書きのグラフで表す。この場合、$k=4$、$n_1=\cdot\cdot\cdot=n_4=5,10,15,\infty$、F(x)=正規、ロジステイック、両側指数、異常値と正規分布の混合、$\mu_i=\sigma_i^2\cdot\Delta$ $(i=1(1)4)$、$\sigma_1^2=1$, $\sigma_2^2=1.3$, $\sigma_3^2=1.6$, $\sigma_4^2=2$ の場合を調べた。その結果

(1) $\hat{\mu}^{PS}$ は、$\hat{\mu}$, $\hat{\mu}^{S}$, $\hat{\mu}^{PT}$ を 改良している。

(2) $\hat{\mu}^{S}$ の危険関数は、$n_k=5,10,15$ のとき ST が $(\hat{\mu}-\hat{\nu}\mathbf{1}_k)$ の値に比べて異常に小さくなることがあり、不安定である。

(3) $\hat{\mu}^{PS}$ は、異常値に対して特に改良度が大きい。

(4) Δ が大きくなれば、改良度が小さくなる。

(5) $\hat{\mu}^{PT}$ は、$\Delta\geq 3$ とき、順位推定量のなかで最も危険関数が大きい。

Covariance Structure Analysis with Heterogeneous Kurtosis Parameters

Yutaka Kano
University of Osaka Prefecture

P.M. Bentler, M. Berkane
UCLA

Summary

This paper discusses the analysis of covariance structure in a wide class of multivariate distributions whose marginal distributions may have heterogeneous kurtosis parameters. Elliptical distributions often used as a generalization of the normal theory are members of this class. It is shown that a simple adjustment of the weight matrix of normal theory, using kurtosis estimates, results in an asymptotically efficient estimator of structural parameters within the class of estimators that minimize a general discrepancy function. Results are obtained for arbitrary covariance structures as well as those that meet a scale invariance assumption. Two real data sets are analyzed for illustrative purpose.

Main Results

Let $\{\Sigma(\theta): \theta \varepsilon \Theta\}$ be a covariance structure model. The generalized least squares (GLS) estimation for the parameter θ is characterized as follows:

$$(1) \qquad F(\Sigma(\hat{\theta}), S) = \underset{\theta \varepsilon \Theta}{MIN} \ \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\{(\Sigma(\theta) - S)C^{-1}\}^2]$$

where S is the sample covariance matrix and C is a weight matrix.

Assume that the fourth-order moments σ_{ijkl} of the observation enjoys the following structure:

$$\sigma_{ijkl}=(a_{ij}a_{kl})\sigma_{ij}\sigma_{kl}+(a_{ik}a_{jl})\sigma_{ik}\sigma_{jl}+(a_{il}a_{jk})\sigma_{il}\sigma_{jk}$$

where

$$\Sigma(\theta)=(\sigma_{ij}),$$

$$a_{ij}=(\eta_i+\eta_j)/2$$

Then it should be noted that 1)

$$\eta_i^2=\frac{\sigma_{iiii}}{3\sigma_{ii}^2} \qquad (i=1,\ldots,p)$$

represent the marginal kurtosis coefficient, and that 2) if $\eta_i=\eta$ for all i, this structure reduces to that of elliptical distributions.

The $p^2\times p^2$ matrix Γ of the fourth-order moments σ_{ijkl} can be expressed as

$$\Gamma=2M(C\otimes C)M+\mathrm{vec}[C:\Sigma(\theta)]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathrm{vec}[C:\Sigma(\theta)]'$$

where

(2) $\quad C=A*\Sigma(\theta)$,

$A=(a_{ij})$ is defined above, and $*$ donotes the elementwise product.

We say that the model $\Sigma(\theta)$ is fully scale invariant if for any $\theta\,\varepsilon\,\Theta$ and any positive definite diagonal matrix D, there exists $\theta^{\cdot}\,\varepsilon\,\Theta$ such that $D\Sigma(\theta)D=\Sigma(\theta^{\cdot})$.

Under these setup, we have the following

THEOREM.

The GLS estimator $\hat{\theta}$ defined by (1) with C in (2) is consistent and asymptotically normal, and efficient within the class of estimators in the basis of S. The minimum value $nF(\Sigma(\hat{\theta}),\ S)$ converges in distribution to a chi-squared variable under the model.

ゼロを取る確率を付加した
対数正規分布

東京理科大学理工学部　　清水　邦夫

1．降水量分布の確率的モデル化

降水量の分布は非対称で右に長く裾を引くことが多い．そのような現象をモデル化するのに好都合な分布の候補には対数正規分布，ガンマ分布，逆ガウス型分布などが考えられる．本報告では，降水量の確率的取扱いにおいて，降雨ゼロの状態もモデルに組み込むやり方を紹介した．

確率変数 X の分布関数 $G(x)$ は

$$G(x) = \Pr(X \leqq x) = (1-p)\ I(x) + p\ F(x), \quad 0 \leqq p \leqq 1$$

とする．$F(x)$ は密度関数 $f(x) = F'(x)$, $x>0$, をもつ正値連続分布の分布関数を表す．$I(x)$ は階段関数であり，$I(x)=0$, $x<0$; 1, $x \geqq 0$ を満たす．

$F(x)$ の分布型には対数正規型，ガンマ型，逆ガウス型などを選ぶことができる．もし $F(x)$ に対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の分布関数を採用したとすると，そのような離散と連続の混合分布は Aitchison and Brown (1957) ではデルタ分布と呼ばれ，また Shimizu (1988)ではデルタ対数正規分布と呼ばれている．記号で $\Delta(1-p, \mu, \sigma^2)$と表す．もし $p=1$ とすると $\Delta(1-p, \mu, \sigma^2)$ は $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に帰着する．

清水・寒河江 (1990) は，Δ 分布の直接的な拡張に当たる，２つの観測点における降水量を表す確率変数 X, Y を同時に扱う確率モデルをつぎのように与えた：

$$\Pr(X=0, Y=0) = \delta_0$$
$$\Pr(0<X \leqq x, Y=0) = \delta_1 F(x), \quad x>0$$
$$\Pr(X=0, 0<Y \leqq y) = \delta_2 G(y), \quad y>0$$
$$\Pr(0<X \leqq x, 0<Y \leqq y) = \delta_3 H(x,y), \quad x,y>0$$

ここで，$0 \leqq \delta_r < 1$ $(r=0,1,2)$, $\delta_3 = 1-\delta_0-\delta_1-\delta_2 > 0$ であり，F と G は正の値を取る何等かの１変量連続分布の分布関数を，また H は正の値を取る何等かの２変量連続分布の同時分布関数を表す．仮定の $\delta_3>0$ は $X>0$, $Y>0$ のときの X と Y の同時分布が意味をもつために付与される．F, G, H の分布型の候補には対数正規型，ガンマ型，逆ガウス型などが考えられる．もし F に $\Lambda(\mu_1^*, \sigma_1^{*2})$, G に$\Lambda(\mu_2^*, \sigma_2^{*2})$, H に２変量対数正規分布 $\Lambda_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ を採用したとすると，この分布をゼロの値を付加した２変量対数正規分布もしくは２変量デルタ対数正規分布と呼び，$\Delta_2(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^{*2}, \sigma_2^{*2}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$,

またはより簡単に Δ_2 と表す.

2. しきい値法

ＧＡＴＥ (Global Atmospheric Research Program, Atlantic Tropical Experiment) データセットの解析で，降水量がある値を越えた領域の割合と空間的平均降水量との高い相関が観察されている. この事実を説明するために，降水量が τ を越えた領域の割合と k 次のモーメントとの高い相関を説明する式

$$E(X^k) = \beta(k)\Pr(X>\tau)$$

を示せる. ここで,

$$\beta(k) = \beta_\tau(k) = \frac{E(X^k \mid X>0)}{\Pr(X>\tau \mid X>0))}$$

である. X の分布に $\Delta(1-p,\mu,\sigma^2)$ を仮定すると

$$\beta(k) = \frac{\exp(k\mu+k^2\sigma^2/2)}{1-\Phi(u)}, \quad u = (\ln\tau-\mu)/\sigma$$

であり, Kedem and Pavlopoulos (1990) の方法による最適な τ_k は

$$v(k,\tau) = \frac{\sigma^2\exp(2k\mu+k^2\sigma^2)}{[1-\Phi(u)]^4}\{[k\{1-\Phi(u)\}-\frac{1}{\sigma}\phi(u)]^2$$

$$+\frac{1}{2}[k^2\sigma^2\{1-\Phi(u)\}-u\phi(u)]^2\}$$

を最小にする値として得られる. ここに, $\Phi(\cdot)$は標準正規分布関数である.

参考文献

Aitchison,J. and Brown,J.A.C.(1957): The Lognormal Distribution,Cambridge University Press,Cambridge.

Kedem,B. and Pavlopoulos,H.(1990): On the threshold method for rainfall estimation: Choosing the optimal threshold level (Manuscript).

Shimizu,K.(1988): Point Estimation, in Lognormal Distributions: Theory and Applications,E.L.Crow and K.Shimizu eds.,Marcel Dekker Inc.,New York.

清水邦夫・寒河江雅彦(1990): ゼロを含む２変量データのモデル化と日降水量データの解析,応用統計学,19,1-13.

多重比較における検出力と各手法の特徴比較

名古屋大学工学部　松田眞一
岡山大学経済学部　永田靖

1　序論

多重比較は様々なモデルの下でなされるが，本稿では1元配置モデル

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij},\quad i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, n_i$$
μ_i：未知母数
ε_{ij} は互いに独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う

における μ_i の多重比較で対比較に関心のあるとき，すなわち仮説の族が $\{\mu_i = \mu_j : 1 \leq i < j \leq k\}$ のときを考える．

従来，Einot and Gabriel (1975, JASA) や Ramsey (1978, JASA) の研究があるが，検出力や手法の種類および比較の多様性が十分ではなかった．Einot and Gabriel と Ramsey が提案した検出力は per-pair power（与えられた母平均の対が等しくないときそれを検出する確率）と all-pairs power（母平均間に差のあるすべての対を検出する確率）である．本稿では，新たな検出力を提案し手法の比較を行う．比較する手法は Tukey の方法（標本サイズがアンバランスのときは Tukey-Kramer の方法），Tukey-Welsch の方法，Peritz の方法（それぞれQ統計量［スチューデント化した範囲の統計量］とF統計量を用いた手法がある）および Holland-Copenhaver (1987, Biometrics) の方法である．

2　シミュレーションの設定と方法

本稿では，$\sigma^2 = 1$ とし母平均 μ_i については次の4種類の配置 (*configuration*) を考えた．

- means with equally spaced configuration (EQ) : $\mu_i = (a + bi)f$
- means with minimum range (MIN, Ramsey) :

  k が偶数のとき
  $$\mu_1 = \cdots = \mu_{k/2} = -f,\ \mu_{k/2+1} = \cdots = \mu_k = f$$
  k が奇数のとき
  $$\mu_1 = \cdots = \mu_{(k+1)/2} = -[(k-1)/(k+1)]^{\frac{1}{2}} f,\ \mu_{(k+3)/2} = \cdots = \mu_k = [(k+1)/(k-1)]^{\frac{1}{2}} f$$
- means with maximum range (MAX, Ramsey) :
  $$\mu_1 = -(k/2)^{\frac{1}{2}} f,\ \mu_2 = \cdots = \mu_{k-1} = 0,\ \mu_k = (k/2)^{\frac{1}{2}} f$$
- means with square root configuration (SQ) : $\mu_i = (\sqrt{i-1} - a)bf$

これらはすべて $\sum \mu_i = 0$, $\{\sum \mu_i^2/k\}^{1/2} = f$ となる．(ただし，EQ と SQ ではそれが満たされるように定数 a, b を定める．)

一方，検出力としては次の6種類を考えた．

- A : all-pairs power [総対検出力]
- B : 母平均の差が 1.5f より大きいすべての対を検出する確率 [制約付総対検出力]
- C : 最小差に対する per-pair power [最小差検出力]
- D : 最大差に対する per-pair power [最大差検出力]
- E : 母平均間に差のあるすべての対のうち検出された対の割合 [平均棄却数比]
- F : E において母平均間の差で重み付けをした割合 [重みつき平均棄却数比]

なお，検出力 C，D は per-pair power なので手法の特徴を付加するときにのみ用いる．本稿での k, n_i の設定は次の通りである．

$$
\begin{aligned}
k = 4,\quad & (n_1, \ldots, n_k) = (6,6,6,6), (16,16,16,16)\\
5,\quad & (6,6,6,6,6)\\
4,\quad & (2,2,10,10), (4,4,4,12), (2,4,6,12), (10,10,2,2), (12,4,4,4), (12,6,4,2)
\end{aligned}
$$

シミュレーションは上の各設定の下で繰り返し数 1000 回で行った．なお，f は検出力が 0 ～ 1 の値を偏りなくとれるように k, n_i の設定および母数の配置に依存して適当に定めた．

比較は Tukey の方法を基準とした相対的な検出力曲線に 3 次曲線を当てはめて行った．

3 シミュレーション結果と考察

回帰誤差の標準偏差などにより 1%程度の比較精度が確認できた．$k = 4$, $n_1 = \cdots = n_k = 6$ のときの結果では：

- Tukey vs Tukey-Welsch (T-W が有利で A:17 ～ 19%, E:6 ～ 9%, F:6 ～ 8%; B:2 ～ 17%)
- Tukey-Welsch vs Peritz (Peritz が有利で A:8 ～ 17%, E:2 ～ 4%, F:1 ～ 2%; B:0 ～ 8%)
- Holland-Copenhaver (E:Tukey より 5 ～ 8%高く，Tukey-Welsch より 3 ～ 4%低い)
- Q 統計量 vs F 統計量 (わずかに F 統計量が有利)

標本サイズと標本数の比較に対する影響はごくわずか．アンバランスデータでも全体的にはほとんど結果が変わらなかったが，標本サイズと母平均の差の大きさの間に関連がみられた．

4 結論

検出力 E, F を総合的なものとし，それに検出力 A, C を小さな差に対する影響を見るもの，検出力 B, D を大きな差に対する影響を見るものとして併用すると手法の特徴をよく捉えることができた．

"検出力のよさ" に "計算の簡単さ" という観点も加えて手法の推薦を行うと次のような手法の推薦図式が得られる．

$$\text{Peritz(F)} \approx \text{Peritz(Q)} > \text{Tukey-Welsch(Q)} \gg \text{Tukey}$$

なお，Holland-Copenhaver の方法は多くの場合 Tukey-Welsch の方法より劣るので推薦することはできない．

Power variance function を持つ Exponential Dispersion Model

広島大学 総合科学部　　西井 龍映

Box and Cox (1964) proposed a family of power transformations such that the transformed data has clearly defined properties, e.g., constancy of variance and/or normality. It is well known that familiar distributions are closely related to the Box-Cox transformations. For example, the square transformation is a variance-stabilizing transformation of a Poisson distribution (Anscombe, 1948), and the cube transformation is a normalizing transformation of a gamma distribution (Wilson & Hilferty, 1931). We try to unify the results obtained in the literature.

Consider the exponential dispersion model with power variance function μ^p, where μ is mean. Then it is known that the its probability density function with respect to an appropriate measure is given by

$$f_\alpha(x;\lambda,\theta) = a(x;\alpha,\lambda)\exp\left(\lambda\{\theta x - \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{\theta}{\alpha-1}\right)^\alpha\}\right),$$

where $\alpha = (p-2)/(p-1)$ and $a(x;\alpha,\lambda)$ is a function independent of θ. We denote this model by $\mathrm{ED}^{(\alpha)}$. When α varies, we get important families, e.g., normal, gamma, Poisson and Inverse gaussian distributions. Jørgensen (1987) proved that there exists $\mathrm{ED}^{(\alpha)}$ when $\alpha < 1$ and $1 < \alpha \le 2$, and in other case there exists no $\mathrm{ED}^{(\alpha)}$.

We denote the signed Box-Cox transformations by

$h_q(x) = \mathrm{sign}(x)|x|^q$ $(q \neq 0)$; $h_0(x) = \mathrm{sign}(x)\log|x|$ $(q = 0)$.

Concerning variance-stabilizing transformations (VST) and normalizing transformations (NT) we have

Theorem 1. (1a) The VSF of $\mathrm{ED}^{(\alpha)}$ $(\alpha \leq 2,\ \alpha \neq 0,1)$ is given by $h_q(x)$ with $q = \alpha/\{2(\alpha-1)\}$, (1b) the VSF of the gamma family $\mathrm{ED}^{(0)}$ is given by $h_0(x) = \log x$ and (1c) the VSF of the Poisson family $\mathrm{ED}^{(-\infty)}$ is given by $h_{1/2}(x)$ (Anscombe, 1948). Further each converse of (1a)- (1c) is also valid within the class of all exponential dispersion models or within the class of all exponential families.

Theorem 2. (2a) The NT of $\mathrm{ED}^{(\alpha)}$ $(\alpha \leq 2,\ \alpha \neq 0,1/2,1)$ is given by $h_r(x)$ with $r = (2\alpha-1)/\{3(\alpha-1)\}$, (2b) the NT of the inverse gaussian family $\mathrm{ED}^{(1/2)}$ is given by $h_0(x)$ (Whitmore-Yalovsky, 1978), (2c) the NT of the gamma family $\mathrm{ED}^{(0)}$ is given by $h_{1/3}(x)$ (Wilson-Hilferty, 1931) and (2d) the NT of the Poisson family $\mathrm{ED}^{(-\infty)}$ is given by $h_{2/3}(x)$ (Blom, 1954). Further each converse of (2a)-(2d) is also valid within the class of all exponential dispersion models or within the class of all exponential families.

We can propose a new parameter estimation procedure based on the relation established in the previous theorems.

Detection of Multivariate Normal Outliers with Dispersion Slippage

筑波大学　社会工学系　　　原　　恭　彦

いくつかの多次元正規母集団の中で，他の母集団よりも，正定値行列の意味で，分散共分散行列が異なっている母集団を検出する問題を考える．この問題の最も簡単なものは，次のように書ける．

（１）

X_1, X_2, ・・・, X_nは互いに独立で，それぞれ平均ベクトルθ，分散共分散行列Σ_iのp-次元正規分布に従う．ただし，θは未知であるが共通，Σ_iは未知である．このとき，帰無仮説H_0: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_n = \Sigma$をn個の対立仮説$H_i$: $\Sigma_1 = \cdots = \Sigma_{i-1} = \Sigma_i - \Delta = \Sigma_{i+1} = \cdots = \Sigma_n = \Sigma$ (i=1, ・・・,n)に対して検定したい．ただし，Δはある集合に属する未知の正定値行列である．

このΔが$\Delta = \delta\Sigma$（Σの定数倍，$\delta > 0$）の場合に，Das and Sinha (1986)は，$\cup H_i$に対して，Locally best invariant testを求めた．Hara (1988)は，各対立仮説H_iのもとで対称な decision rule の中で最良の Invariant decision rule（２）を求めた．

まず，（１）を（ａ）正定値行列の意味で，複数のずれを持つモデルに，（ｂ）Hara (1988) の Multiple Scale-Inflation モデルを含むように，一般化した．これを Multiple Dispersion-Slippage モデルと呼ぶ．

（３）　$X = C\beta + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim N_{n\times p}(O,\ I_n \otimes \Sigma + D\Gamma D' \otimes \Delta).$

ただし，Cは計画行列，Dは<u>ずれ</u>の構造を与え，Γは<u>ずれ</u>のIndicator，βは回帰係数行列，Σは分散共分散行列，Δは<u>ずれ</u>の行列（正定値行列）である．これらC，D，Δに関する若干の条件を仮定することにより，次の定理を証明した．

定理：Multiple Dispersion-Slippage モデル（３）において，どの分散共分散行列の組合せが正定値行列の意味でずれているかを検出する多重決定問題に

対して，Hara (1988) の decision rule (2) が許容的不変かつミニマックス不変である.

さらに，Hara (1988) の decision rule (2) は，モデル (3) における上記多重決定問題に対して，Kariya and Sinha (1985) の意味で null robust, nonnull robust, かつ optimality robust である.

参考文献: Das and Sinha (1986) Ann. Statist. 14, 1619-1624.
Hara (1988) Ann. Inst. Statist. Math. 40, 395-406.
Kariya and Sinha (1985) Ann. Statist. 13, 1182-1197.