（10）統計的検定問題とその周辺

Recent Topics from Algorithmic Problems in Statistical Fields

坂田　年男　　　　　熊本大学　教養部　　数学教室

計算量の大きな統計計算についてのいくつかの話題の紹介・解説・問題提起

1．Network　Algorithm

Ｓを標本空間（有限集合），　ｆをＳの上で定義されたある検定統計量とする．
ＸがS上一様分布しているとき、$x=x_0$を観測したときに

$$p=\#\{x\in S \mid f(x)\geqq f(x_0)\}/\#S$$

は観測値x_0のｐ－値と呼ばれることがある。
検定において（１）ｐ－値を求めること　（２）ｆの分布を求めること
は基本的である。

さて、＃Ｓが極めて大きい時、ｐ－値や分布を単純な”完全数え上げ”によって計算するのは大型計算機でも時間がかかりすぎて現実的には不可能な場合がある。その様な場合には、何等かの工夫が必要である。数え上げをシミュレーションに置き換えるという方法があるが、Ｅｘａｃｔ計算のためのＮｅｔｗｏｒｋ Ａｌｇｏｒｉｔｈｍについて、解説する。
その原理は以下の通り。

（１）　層と呼ばれる点集合の族F_0，F_1，．．．．，F_kがある。
各々の層に属する点はｎｏｄｅと呼ばれる。層F_sに属するｎｏｄｅはラベル（ｓ，ｗ），$w\in F_s$　で識別される。

（２）　F_0は出発点と呼ばれる１点集合である。
また、　F_kの元は終結点と呼ばれる。

（３）　$E_s\subseteq \Lambda_{s-1}\times\Lambda_{s-1}$はｓ位のｂｒａｎｃｈ集合とよばれ，その元をｂｒａｎｃｈとよぶ（ｓ＝１，２，．．．，ｋ）。
$(w_{s-1}, w_s)\in E_s$のとき$w_{s-1}\in F_{s-1}$と$w_s\in F_s$はｂｒａｎｃｈ ｅ(w_{s-1}, w_s)によって接続しているといわれる。

（４）　全てのｂｒａｎｃｈには長さが定義され、　ｂｒａｎｃｈ ｅ(w_{s-1}, w_s)の長さを $P_s(w_{s-1}, w_s)$で表す。接続した

ｂｒａｎｃｈの列をｐａｔｈとよび、ｐａｔｈに含まれるｂｒａｎｃｈの長さの積をそのｂｒａｎｃｈの長さと定める。

（５）　すべてのｎｏｄｅにはｗｅｉｇｈｔが定義され、ｎｏｄｅ（ｓ，ｗ）のｗｅｉｇｈｔをＣ（ｓ，ｗ）で表すとき、

$$(*) \quad C(s, w) = \sum_{\substack{(s-1,\, w_{s-1}) \varepsilon F_{s-1} \\ (w_{s-1},\, w) \varepsilon E_s}} C(s-1, w_{s-1}) P_s(w_{s-1}, w)$$

で定義される.

このとき、終結点の　ｗｅｉｇｈｔ　Ｃ（ｋ，ｗ），$F \varepsilon \Lambda_s$を再帰式（＊）によって求めることをＮｅｔｗｏｒｋ法とよぶ。

このとき、計算量に関して、次の基本命題が成立する。

<u>基本命題：</u>各（ｓ，ｗ）について　ｗに接続するｓ－１層のｎｏｄｅがｓによらずＮ以下で、かつ$\# F^s = O(sN)$であるとき計算量は$O((Nk)^2)$である。ただし、$P_s(w_{s-1}, w)$の計算量は考えていない。

Ｎｅｔｗｏｒｋ－ａｌｇｏｒｉｔｈｍは離散確率変数の和の分布を求めるのに大変有効である。例えば、複数の２ｘ２表の共通オッヅの条件付検定において検定統計量を求めるときに使える。

Ｂａｃｋｗａｒｄ－Ｎｅｔｗｏｒｋ－ａｌｇｏｒｉｔｈｍなるものが同様に定義され、これは、例えば、分割表におけるＦｉｓｈｅｒのｅｘａｃｔ　ｔｅｓｔのｐ－値を求めるのに有効である。

２.一般のスコアをもつ並べ替え検定の分布を求めるのに、多項式時間の計算量をもつアルゴリズムがある。

３.対称群上の距離関数の分布や統計的諸性質を調べるのに、大きな計算量が必要な問題が幾つかある。何か、工夫が必要である。

A DYNAMIC INTERPRETATION OF LATENT SCALES IN LATENT SCALOGRAM ANALYSIS

*Nobuoki Eshima**

* Faculty of Engineering, Kyushu Tokai University, Kumamoto 862, Japan.

Abstract

Scalogram analysis proposed by Guttman (1950) is a method for ordering the subjects measured by using several binary items. In this analysis, the definiteness of responses to items is assumed, and the model for the analysis is as follows. Now, let X_i be a binary item which is an indicator of characteristic S_i $(i=1,2,\cdots,n)$ to be measured, and suppose that the characteristics S_i are ordered by difficulty with respect to a common trait, i.e., $S_1,S_2,\cdots,S_n$. In this setup, the items are orderd from X_1 to X_n in accordance with the orders of the characteristics, and the response patterns to be observed are assumed to be the following $n+1$ patterns:

$$(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),\cdots,(1,1,\cdots,1).$$

This deterministic model is Guttman's perfect scale model. When the above situation holds, Guttman mentined that the trait was "scalable", and the scale was called the Guttman scale or Guttman's perfect scale. Although the model is reasonable, in the practical situation the observed response patterns are obtained beyond the above cases. An improved version of the perfect scale model is the latent distance model which first appeared in Lazarsfeld (1950).

In many scientific fields, the response structures are more complex than the latent distance model, and in such cases the observed subjects cannot be ordered according to one latent scale. For this reason, several scaling models have

been proposed, e.g., Dayton & Macready (1976, 1980), Goodman (1975), Eshima & Asano (1988) and Eshima (1990). Eshima (1990) proposed a structured model which is an extension of Eshima-Asano's model (Eshima & Asano, 1988), and presented an ML estimation procedure for the model. Here, the above models are called "scaling models", and the analysis by use of these models, "latent scalogram analysis".

In the present study, scalogram analysis proposed by Guttman (1950) is developed into latent scalogram analysis. The present approach deals with not only linear hierarchical structures but also branching hierarchical structures. Concerning latent scales which exist in the population under consideration, a dynamic interpretation of latent scales is discussed through a mathematical viewpoint, and a method for evaluating the proportions of latent scales is proposed. Numerical examples are also presented to illustrate the present analysis.

References

Dayton, C.M. & Macready, G.B.(1976). *Psychometrika*, **43**, 189-204.

Dayton, C.M. & Macready, G.B.(1980). *Psychometrika*, **45**, 343-356.

Eshima, N.(1990). *J. Japan Statatist. Soc.*, **20**, 1-12.

Eshima, N. & Asano, Ch.(1988). *Behaviometrika*, **24**, 25-32.

Goodman, L.A. (1975). *J. Amer. Statist. Assoc.*, **70**, 755-768.

Guttman, L. (1950). The basis for scalogram analysis. In S.A. Stouffer, L. Guttman and others, *Measurement and Prediction: Studies in Social Psychology in World War II, Vol.* **4**, Princeton University Press.

Lazarsfeld, P.F. (1950). The logical and mathematical foundation of latent structure analysis, In S.A. Stouffer, L., Guttman and others, *Measurement and Prediction: Studies in Social Psychology in World War II, Vol.* **4**, Princeton University Press.

Proctor, C.H.(1970). *Psychometrika*, **35**, 73-78.

推定関数を使った均一性の検定

宮崎大学教育学部　藤井良宜

層別されたデータからある共通のパラメータを推定する場合を考える。このとき、各層でのパラメータが実際に等しいかどうかの均一性の検定が必要となる。よく知られた検定としては efficient score に基づく検定がある。Tarone (1985) は efficient score に最尤推定量の代わりに consistent ではあるが、efficient ではない推定量を代入する場合の検定を提案している。しかし、この方法では共通パラメータの推定には最尤法を用いていないにもかかわらず、均一性の検定では対数尤度の微分を用いている。そこで、共通パラメータの推定を推定関数に基づく方法で行なう場合の均一性の検定をやはり推定関数に基づいた形で提案する。efficient score に基づく検定はこの方法の特殊な場合として表現できる。また、この方法はいくつかの２ x ２分割表のオッズ比の均一性の検定に対して適用できる。

＜均一性の検定の構成＞

K層に分けられたデータ

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1} \sim F_1(\theta_1)$$
$$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2} \sim F_2(\theta_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{K1}, X_{K2}, \ldots, X_{Kn_K} \sim F_K(\theta_K)$$

に対して、パラメータθ_kの均一性の検定、すなわち

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k \equiv \theta \quad \text{v.s.} \quad H_1: \text{not } H_0$$

を考えよう。ここでは、共通パラメータの推定を最尤推定量ではなく各層でつぎの仮定を満たす推定関数 $g_k(X_k, \theta)$ を用いて行なうことにする。

<u>仮定</u>

(1)　$E_\theta(g_k(X_k, \theta)) = 0$ for any θ

(2)　$\exists V_k(\theta) : \dfrac{g_k(X_k, \theta)}{\sqrt{V_k(\theta)}} \to N(0,1) \quad (n_k \to \infty)$

共通パラメータθの推定量$\hat{\theta}$を推定方程式

$$\sum_{k=1}^{K} g_k(X_k, \theta) = 0$$

の解とする。このとき、均一性の検定に対してefficient scoreの代わりに推定関数 $g_k(X_k,\theta)$ を用いて統計量Tをつぎのように定義する。

$$T=\sum_{k=1}^{K}\frac{g_k(X_k,\hat{\theta})^2}{V_k(\hat{\theta})}$$

統計量Tの漸近分布について次の定理が成り立つ。

定理1

帰無仮説 H_0 のもとで

$$T \overset{a}{\sim} D_1+cD_2$$

ここで、D_1, D_2 は独立で、それぞれ自由度K-1および自由度1のカイ2乗分布に従う確率変数とし、

$$c=1+\frac{\sum V_k(\theta)\sum h_k^2(\theta)/V_k(\theta)-(\sum h_k(\theta))^2}{(\sum h_k(\theta))^2}\geq 1$$

但し、$h_k(\theta)=E_\theta(\dfrac{\partial g_k(X_k,\theta)}{\partial\theta})$

系

推定関数 $g_k(X_k,\theta)$ が

$$E_\theta(\frac{\partial g_k(X_k,\theta)}{\partial\theta})=\alpha V_k(\theta)$$ 但し、α は k に依存しない定数

を満たすとき、帰無仮説H_0のもとで

$$T \overset{a}{\sim} \chi^2_{K-1}$$

一般の推定関数を用いた場合には、統計量Tの漸近分布は θ に依存する。そのため、Tを用いて均一性の検定を構成するための棄却域の設定が困難である。そこで、Tarone(1985) と同じような統計量Tの修正を行なう。

定理2

$$T^*=T-\frac{\{\sum h_k(\theta)g_k(X_k,\hat{\theta})/V_k(\theta)\}^2}{\sum\{h_k(\theta)\}^2/V_k(\theta)}$$

とすると、T^* は帰無仮説のもとで、漸近的に自由度 (K−1) のカイ2乗分布に従う。

実際には、統計量TやT^* のなかの$h_k(\theta)$, $V_k(\theta)$ は θ の関数なので、それぞれ推定量を代入しなければならない。しかし、一致推定量を代入すれば、統計量TやT^* の漸近分布は変化しない。

Determining the No-Observed-Adverse-Effect Level

in Continuous Response

佐世保高専　　菊池泰樹
九州大学理学部　柳川 堯

1. はじめに

No-Observed-Adverse-Effect Level (NOAEL) とは，毒性試験において設定された dose levelのうちで，統計的に有意な毒性が認められない最大の dose である．本研究では表1のようなcontinuous response data に対する NOAEL の決定方法について考えた．Dunnett 型の多重比較検定，Pooling step-up test と呼ぶ新しい検定法を開発し，既存の Williams test と比較した．さらに AIC を利用する方法を開発し，シミュレーションによる比較を行った．

表1　Continuous Response Data

Dose Level	$d_0=0<d_1<...<d_i<...<d_k$				
Number of Subjects	n_0	n_1 ...	n_i	...	n_k
Average Response	X_0	X_1 ...	X_i	...	X_k

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2/n_i)$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_{i'}$, $(i \neq i')$
S^2 : unbiased estimator of σ^2
$S^2 \sim \sigma^2 \chi^2_\nu/\nu$, $S^2 \perp\!\!\!\perp X_i$

2. 開発した手法

μ_i は，$\mu_0 \leqq \mu_1 \leqq ... \leqq \mu_k$ と順序付けられていることを前提とする．$\hat{\mu}_i$ を，$\mu_0 \leqq \mu_1 \leqq ... \leqq \mu_k$ の制約下での mle とする．開発した手法は以下のようである．

2.1 Dunnett 型の多重比較検定 : 統計量は，$T_i=(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_0)[2S^2/n]^{-1/2}$ $(i=1,...,k)$ を用いる．k=2 の場合，NOAEL を次のように決定する :

$T_1 \geqq d_{2,\nu}(\alpha)$ ならば NOAEL=d_0，$T_1<d_{2,\nu}(\alpha)$ かつ $T_2 \geqq d_{2,\nu}(\alpha)$ ならば NOAEL=d_1，
$T_2<d_{2,\nu}(\alpha)$ ならば NOAEL=d_2.

有意点 $d_{k,\nu}(\alpha)$ の数表を k=2, 3 の場合について作成した．

2.3 A Pooling Step-Up Test : この方法は，$\hat{\mu}_i$ ではなく X_i を用い，有意な差が認められなければ，X_0，X_1，...，をプールする．k=2 の場合，$W_1=(X_1-X_0)[S^2(1/n_0+1/n_1)]^{-1/2} \geqq w_{2,1,\nu}(\alpha)$ ならば，NOAEL=d_0 と決定し，そうでなければ，$X_{01}=(n_0X_0+n_1X_1)/(n_0+n_1)$として，$W_2=(X_2-X_{01})[S^2\{1/(n_0+n_1)+(1/n_2)\}]^{-1/2}$ を計算する．もし，$W_2 \geqq w_{2,2,\nu}(\alpha)$ならば，NOAEL=$d_1$ とし，そうでなければ NOAEL=d_2 とする．有意点 $w_{k,i,\nu}(\alpha)$ の数表を，k=2, 3 の場合について作成した．この検定は，sample size が異なる場合も利用できる．

2.3 数値比較

NOAEL を正しく決定する確率を比較するために，上記の２方法と Wiliiams testについてシミュレーションを行った．$k=2$，$n_0=n_1=n_2=10$，$\mu_0=0.0$，$\sigma^2=1.0$，$\mu_2-\mu_0=c\sigma$ ($c=0.0(0.1)1.5$)とし，Case 1 ($\mu_0=\mu_1=\mu_2$)，Case 2 ($\mu_0=\mu_1\leqq\mu_2$)，Case 3 ($\mu_0\leqq\mu_1=\mu_2$) について，2000 組の original response data xij を発生させた．test size を 5% として，各 Case の correct decision の確率を推定した．Case 1 では，いずれもその確率はほぼ 0.95 に等しく，Case2，3 においても，これら３つの検定は優劣がつけ難かった．sample size が異なる場合には pooling step-up test が最良の選択といえることがわかった．

2.4 上記のアプローチの弱点

上記の手法では，sample sizeが小さくなれば，より大きい値が NOAELとして選択される．つまり，sample size が小さければ，より大きい dose level を安全と判定する．従って，検出力を大きくするように，test size を決めなければならないが，どの程度に設定すればよいかを明らかにすることは容易ではない．この困難さを AIC の利用によって回避する．

3．AIC 法

簡単のためこの手法を，k=2 の場合について説明する．$\gamma_1=\mu_1-\mu_0$，$\gamma_2=\mu_2-\mu_0$ として AIC を $L(\gamma_1,\gamma_2)$ で表す．

(1) $\hat{\gamma}_1>0$, $\hat{\gamma}_2-\hat{\gamma}_1>0$: If $L(\gamma_1=\hat{\gamma}_1,\gamma_2=\hat{\gamma}_2)$ is the largest, NOAEL=d_0,
if $L(\gamma_1=0,\gamma_2=\hat{\gamma}_2^*)$ is the largest, NOAEL=d_1,
if $L(\gamma_1=0,\gamma_2=0)$ is the largest, NOAEL=d_2.

(2) $\hat{\gamma}_1>0$, $\hat{\gamma}_2-\hat{\gamma}_1\leqq 0$: If $\hat{\gamma}$ (the mle of $\gamma=\gamma_1=\gamma_2$)$\leqq 0$, NOAEL=d_2.
If $\hat{\gamma}>0$, if $L(\gamma_1=\hat{\gamma},\gamma_2=\hat{\gamma})$ is the largest, NOAEL=d_0,
if $L(\gamma_1=0,\gamma_2=0)$ is the largest, NOAEL=d_2.

(3) $\hat{\gamma}_1\leqq 0$, $\hat{\gamma}_2-\hat{\gamma}_1>0$: If $\hat{\gamma}_2^*$ (the mle of γ_2 under $\gamma_1=0$)$\leqq 0$, NOAEL=d_2.
If $\hat{\gamma}_2^*>0$, if $L(\gamma_1=0,\gamma_2=\hat{\gamma}_2^*)$ is the largest, NOAEL=d_1,
if $L(\gamma_1=0,\gamma_2=0)$ is the largest, NOAEL=d_2.

(4) $\hat{\gamma}_1\leqq 0$, $\hat{\gamma}_2-\hat{\gamma}_1\leqq 0$: NOAEL=$d_2$.

2.3節と同一の設定の下でシミュレーションを行った．この結果，AIC 法は NOAEL 決定に対して，２節の方法より種々の面で優れていることがわかった．なお，本研究の詳細は，第３回太平洋地域統計会議のプロシーディングスに掲載予定である．

カテゴリカルデータに関する修正 Brown-La Vange 検定について

九大理　　西山　治利, 柳川　堯

1　問題の設定

dose level	d_0	d_1	d_2	....	d_k	total
response	r_0	r_1	r_2	....	r_k	r_+
				....		
total	n_0	n_1	n_2	....	n_k	N

$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$ は、互いに独立で、r_i は、$B(n_i, p_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に従っているものとし、$p_0 \le p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_k$ なる順序がわかっているものとする。この時、$p_i < p_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ となる最小となる i を求めて、$\delta = d_i$を定める。これが、問題である。

この問題として、Brown-La Vange 検定 (1990) が提案されているが、種々の弱点がある。本研究では、修正 Brown-La Vange 検定を開発し、その諸性質を調べた。

考え方として、2つの周辺を固定する。つまり、$Y = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, N, r_+\}$ を与えたときの条件付分布にもとづいて考える。

2　修正 Brown-La Vange 検定

2.1　方法

[検定統計量]

$$\bar{T}_i := (\bar{r}_i/n_i) - (r_0/n_0) \quad (\text{ただし、}\bar{r}_i := n_i \max_{0\le u\le i}\{\textstyle\sum_{j=u}^{i} r_j / \sum_{j=u}^{i} n_j\})$$

[検定手順]

(1) $H_0^{(k)} : p_0 = p_k \quad v.s. \quad H_1^{(k)} : p_0 < p_k$

$\bar{T}_k < \bar{C}_{k(\alpha)} \iff$ not reject $H_0^{(k)}$ and determine $\delta = d_k$

$\bar{T}_k \ge \bar{C}_{k(\alpha)} \iff$ reject $H_0^{(k)}$ and go to (2)

(2) $H_0^{(k-1)} : p_0 = p_{k-1} \quad v.s. \quad H_1^{(k-1)} : p_0 < p_{k-1}$

$\bar{T}_{k-1} < \bar{C}_{k-1(\alpha)} \iff$ not reject $H_0^{(k-1)}$ and determine $\delta = d_{k-1}$

$\bar{T}_{k-1} \ge \bar{C}_{k-1(\alpha)} \iff$ reject $H_0^{(k-1)}$ and go to (3)

以下同様に行う。

$\bar{C}_{i(\alpha)}$ については、次節で述べる。

2.2　数学的性質

性質 1　次の（命題1）より、検定統計量で、$(r_i^*/n_i)-(r_0/n_0)$ を用いても、$(\bar{r}_i/n_i)-(r_0/n_0)$ を用いても、この検定の *critical point* が i に関して単調非減少であるので、どちらでも構わない。ただし、

$$r_i^* := n_i \max_{0\le u\le i} \min_{i\le v\le k}(\textstyle\sum_{j=u}^{v} r_j / \sum_{j=u}^{v} n_j)$$

命題 1　$(r_j^*/n_j) > t_{j,\alpha}\ (for \quad j = i,\ldots,k) \iff (\bar{r}_i/n_i) > t_{j,\alpha}\ (for \quad j = i,\ldots,k)$
(ただし、$t_{j,\alpha}$は j に関して単調非減少とする。)

性質 2　次の（命題2）より、検定統計量で、$(\bar{r}_i/n_i)-(r_0/n_0)$ を用いても、$(\tilde{r}_i/n_i)-(r_0/n_0)$ を用いても、この検定の *critical point* が 正なので、どちらでも構わない。ただし、$\tilde{r}_i := n_i \max_{1\le u\le i}(\sum_{j=u}^{i} r_j / \sum_{j=u}^{i} n_j)$

命題 2　$X_0, X_1, \ldots, X_k$ を $M_0, M_1, \ldots, M_k$ の推定量とする。$X_0, X_1, \ldots, X_k$ に対して、$M_0 \le M_1 \le \ldots \le M_k$ を満たすように、*PAVA* を施したものを、$\bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k$とし、$X_1, X_2, \ldots, X_k$ に対して、$M_1 \le M_2 \le \ldots \le M_k$ を満たすように、*PAVA* を施したものを、$\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_k$とする。この時、$\bar{X}_i - X_0 > 0$ ならば、$\bar{X}_i = \tilde{X}_i$ である。　$(i = 1, 2, \ldots, k)$

性質 3　次の（命題3）は、$\bar{T}_k$ の検出力の単調性を示したものである。さらに、（定理1）は、$\bar{T}_i$ の不偏性を示したものである。

命題 3　$P[\bar{T}_k > d | Y, p_0 = \ldots = p_{i_0-1} < p_{i_0} = \ldots = p_k]$
$\ge P[\bar{T}_k > d | Y, p_0 = \ldots = p_{i_0} < p_{i_0+1} = \ldots = p_k]$
$(i_0 = 1, 2, \ldots, k)$

定理 1　$P[\bar{T}_k > d_k, \ldots, \bar{T}_i > d_i | Y, p_0 < p_i] \ge P[\bar{T}_k > d_k, \ldots, \bar{T}_i > d_i | Y, p_0 = p_i]$
$(i = 1, 2, \ldots, k)$

3　修正 Brown-La Vange 検定の critical point

3.1　Exact な場合

$\bar{C}_{k(\alpha)}$は、
　$\alpha \ge P[\bar{T}_k > C | Y, p_0 = p_1 = \ldots = p_k]$ を満たす最小の C とする。
$\bar{C}_{k-1(\alpha)}$は、
　$\alpha \ge P[\bar{T}_{k-1} > C | Y, p_0 = p_1 = \ldots = p_k]$ を満たす最小の C とする。
以下、同様に求める。

3.2　Approximate value

$n_0 = n_1 = \ldots = n_k$の場合を考える。$H_0^{(k)}$の下で次の定理を得る。これより、$\bar{C}_{k(\alpha)}$の approximate value を求めることができる。

定理 2　$\bar{T} := \max_{1\le u\le k} \frac{1}{k-u+1} \sum_{j=u}^{k} (\frac{r_j}{n} - \frac{r_0}{n}) / \sqrt{\frac{2r_+(N-r_+)}{nN(N-1)}}$ とおく。この時、

$$P[\bar{T} \le x | Y, p_0 = p_1 = \ldots = p_k] \sim \int F(t + x\sqrt{2})\varphi(t)dt$$

である。ただし、"$\sim$" は近似値であることを意味し、
$F(t) := \exp[-\sum_{r=1}^{\infty} r^{-1}\{1 - \Phi(tr^{1/2})\}]$　, $\Phi(t), \varphi(t)$ は、それぞれ、$N(0,1)$ の分布関数、密度関数である。

TWO SAMPLE PROBLEM IN TIME SERIES ANALYSIS

MASAO KONDO and MASANOBU TANIGUCHI
Kagoshima University and Osaka University

1. INTRODUCTION

Suppose that $\{X_t\}$ and $\{Y_t\}$ are Gaussian stationary processes with the spectral densities $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$,respectively. Here we consider the testing problem

$$H : \int_{-\pi}^{\pi} K\{f(\lambda)\}d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} K\{g(\lambda)\}d\lambda,$$

against

$$A : \int_{-\pi}^{\pi} K\{f(\lambda)\}d\lambda \neq \int_{-\pi}^{\pi} K\{g(\lambda)\}d\lambda,$$

where $K(\cdot)$ is an appropriate function.

This setting of test is unexpectedly wide, and can be applied to many problems in time series. For this problem we propose a test based on $\int_{-\pi}^{\pi} K\{\hat{f}_n(\lambda)\}d\lambda$ and $\int_{-\pi}^{\pi} K\{\hat{g}_n(\lambda)\}d\lambda$ where $\hat{f}_n(\lambda)$ and $\hat{g}_n(\lambda)$ are nonparametric spectral estimators of $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$,respectively, and evaluate the asymptotic power under a sequence of nonparametric contiguous alternatives.

2. BASIC THEOREMS

We formulate some basic theorems concerning a nonparameric testing problem. Let $\{X_t; t = 0, \pm 1, \ldots\}$ and $\{Y_t; t = 0, \pm 1, \ldots\}$ be Gaussian stationary processes with $E(X_t) = 0$ and $E(Y_t) = 0$ and spectral densities $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$,respectively.

To estimte $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ we use

$$\hat{f}_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda - \mu) I_n^X(\mu) d\mu,$$

and

$$\hat{g}_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda - \mu) I_n^Y(\mu) d\mu,$$

where $I_n^X(\lambda)$ and $I_n^Y(\lambda)$ are the periodograms constructed from partial realizations $\{X_1, \ldots, X_n\}$ and $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$.

Theorem 1. *Suppose that appropriate assumptions hold. Then*
(a) *Under the null hypothesis H,*

$$S = \sqrt{n}[\int_{-\pi}^{\pi} K\{\hat{f}_n(\lambda)\}d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} K\{\hat{g}_n(\lambda)\}d\lambda] \longrightarrow N(0, v(f, g)),$$

where $v(f,g) = 4\pi \int_{-\pi}^{\pi}[K'\{f(\lambda)\}]^2 f(\lambda)^2 d\lambda + 4\pi \int_{-\pi}^{\pi}[K'\{g(\lambda)\}]^2 g(\lambda)^2 d\lambda$.
(b) *Under the null hypothesis H,*

$$T = \frac{\sqrt{n}[\int_{-\pi}^{\pi} K\{\hat{f}_n(\lambda)\}d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} K\{\hat{g}_n(\lambda)\}d\lambda]}{\sqrt{4\pi \int_{-\pi}^{\pi}[K'\{\hat{f}_n(\lambda)\}]^2 \hat{f}_n(\lambda)^2 d\lambda + 4\pi \int_{-\pi}^{\pi}[K'\{\hat{g}_n(\lambda)\}]^2 \hat{g}_n(\lambda)^2 d\lambda}} \longrightarrow N(0, 1).$$

Here it should be noted that $\sqrt{n}$-consistency holds in Theorem 1. This is due to the fact that integration of $\hat{f}_n$ recovers $\sqrt{n}$-consistency. In view of Theorem 1 we can propose the test of H, given by critical region

$$[|T| > t_\alpha], \tag{2.1}$$

where t_α is defined by

$$\int_{t_\alpha}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)dx = \alpha/2.$$

Next we shall evaluate the asymptotic power of the test (2.1) under a sequence of spectral densities. Henceforth we denote the probability density function of $(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n) = ((X_1, \ldots, X_n), (Y_1, \ldots, Y_n))$ by $p^n_{(h_1,h_2)}(\cdot)$ if the processes $\{X_t\}$ and $\{Y_t\}$ are assumed to have spectral densities $h_1(\lambda)$ and $h_2(\lambda)$,respectively. Let $a(\lambda)$ and $b(\lambda)$ be square integrable functions on $[-\pi, \pi]$. We define

$$f_n(\lambda) = f(\lambda)\{1 + a(\lambda)/\sqrt{n}\},$$

and

$$g_n(\lambda) = g(\lambda)\{1 + b(\lambda)/\sqrt{n}\}.$$

Theorem 2. *Suppose that appropriate assumptions hold. Then*

$$T \quad \longrightarrow \quad N(\mu(f, g, a, b), 1) \quad \text{under} \quad p^n_{(f_n, g_n)}\ ,$$

where

$$\mu(f, g, a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} v(f, g)^{-1/2}K'\{f(\lambda)\}a(\lambda)f(\lambda)d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} v(f, g)^{-1/2}K'\{g(\lambda)\}b(\lambda)g(\lambda)d\lambda.$$

Therefore the asymptotic power is given by

$$\lim_{n\to\infty} P_{(f_n,g_n)}[|T| \geq t] = \int_{|x|\geq t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\{x - \mu(f, g, a, b)\}^2 dx.$$

REFERENCES

[1] Dzhaparidze,K.(1986). *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series.* Springer-Verlag.

[2] Hallin,M.,Ingenbleek,J-F. and Puri,M.L.(1985). Linear serial rank tests for randomness against ARMA alternatives. *Ann.Statist.*, 13,1156-81.

[3] Hannan,E.J.,and Nicholls,D.F.(1977). The estimation of the prediction error variance. *J. Amer. Stat. Assoc.* 72,834-840.

[4] Taniguchi,M.(1980). On estimation of the integrals of certain functions of spectral density. *J. Appl. Prob.* 17,73-83.

[5] Taniguchi,M. and Kondo,M.(1991). Nonparametric approach in time series analysis. To appear in *J. Time Ser. Anal.*

ROBUST NONPARAMETRIC REGRESSION IN TIME SERIES

Young K. Truong
Department of Biostatistics
University of North Carolina, Chapel Hill

1. Introduction

Let $(\mathbf{X}_t, Y_t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ denote a strictly stationary time series with $\mathbf{X}_t$ being $\mathbf{R}^d$-valued and Y_t being real-valued. Let $\psi(\cdot)$ be a monotone function and let $\theta(\cdot) \equiv \theta_\psi(\cdot)$ denote a function such that $E[\psi(Y_0 - \theta(\mathbf{X}_0))|\mathbf{X}_0] = 0$ almost surely. The function $\theta(\cdot)$ is called the robust conditional location functional of Y_0 on $\mathbf{X}_0$ by Boente and Fraiman (1989).

Given a realization of length n from the geometric α-mixing $(\mathbf{X}_i, Y_i), i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, the present paper considers the problem of estimating the function $\theta(\cdot)$. Note that many important time series problems can be analyzed via this set-up. Specifically, the applications include problems of estimating the autoregression function of the "present" on its "past" in univariate time series, regression function estimation and dynamic modellings based on bivariate time series. These are discussed in Examples 1–3 of Truong and Stone (1992).

2. Statement of results

Let U be a nonempty open subset of the origin of $\mathbf{R}^d$. The following smoothness condition is imposed on the conditional M-functional.

Condition 1 *The function $\theta(\cdot)$ has a bounded derivative on U.*

Condition 2 *The distribution of $\mathbf{X}_0$ and the conditional distribution of $\mathbf{X}_j$ given $\mathbf{X}_0$ have bounded densities on U.*

Condition 3 *The function $\psi(\cdot)$ is bounded and increasing with*

$$E(\psi(Y - \theta(\mathbf{x}))|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in U.$$

There exist positive constants M_2 and M_3 such that

$$|E(\psi(Y - \theta(\mathbf{x}) + t)|\mathbf{X} = \mathbf{x})| > M_2|t| \qquad \text{for } |t| < M_2^{-1}, \mathbf{x} \in U,$$
$$|E(\psi(Y - \theta(\mathbf{x}) + t)|\mathbf{X} = \mathbf{x})| > M_3 \qquad \text{for } |t| \geq M_2^{-1}, \mathbf{x} \in U.$$

Also, there exist positive constants $M_4(\geq M_3)$ and $M_5(\geq M_2^{-1})$ such that

$$\psi(y) = \begin{cases} -M_4 & \text{if } y \leq -M_5; \\ M_4 & \text{if } y \geq M_5. \end{cases}$$

In nonparametric regression estimation based on kernel method, it is necessary to assume that the marginal has a smooth distribution [see, for example, Condition H4 of Boente and Fraiman (1989)]. We adopt an approach by Stone (1980, 1982) to avoid this problem. Let δ_n, $n \geq 1$, be positive numbers that tend to zero as $n \to \infty$. For $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ and $n \geq 1$, set

$$I_n(\mathbf{x}) = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ and } \|\mathbf{X}_i - \mathbf{x}\| \leq \delta_n\}$$

and let $N_n(\mathbf{x}) = \#I_n(\mathbf{x})$ denote the number of points in I_n. Given $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, the robust conditional location functional estimator (also referred to as local M-estimators or M-smoother) is defined as the solution $\hat{\theta}_n(\mathbf{x})$ of the equation

$$\frac{1}{N_n(\mathbf{x})} \sum_{I_n(\mathbf{x})} \psi(Y_i - \hat{\theta}_n(\mathbf{x})) = 0.$$

Theorem 1 *Suppose $\delta_n \sim n^{-1/(2+d)}$ and that Conditions 1-3 hold. Then*

$$|\hat{\theta}_n(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x})| = O_p(n^{-1/(2+d)}), \qquad \mathbf{x} \in U.$$

Let C be a fixed compact subset of U having a nonempty interior. Given a real-valued function $g(\cdot)$ on C, set

$$\|g(\cdot)\|_q = \left\{ \int_C |g(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty, \quad \text{and} \quad \|g(\cdot)\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in C} |g(\mathbf{x})|.$$

The L_∞ rate of convergence is given in the following result.

Theorem 2 *Suppose $\delta_n \sim (n^{-1} \log n)^{1/(2+d)}$ and that Conditions 1-3 hold. Then there is a positive constant c such that*

$$\lim_n P\left(\|\hat{\theta}_n(\cdot) - \theta(\cdot)\|_\infty \ge c\big(n^{-1} \log(n)\big)^{1/(2+d)} \right) = 0.$$

The L_q rate of convergence is given in the following result.

Theorem 3 *Suppose $\delta_n \sim n^{-1/(2+d)}$ and that Conditions 1-3 hold. Then*

$$\|\hat{\theta}_n(\cdot) - \theta(\cdot)\|_q = O_p(n^{-1/(2+d)}), \qquad 1 \le q < \infty.$$

Remark 1. Since iid is a special case of stationary sequences, according to Stone (1980, 1982), the rates presented in Theorem 1-3 are optimal rates of convergence.

Remark 2. Collomb and Härdle (1986), Boente and Fraiman (1989, 1991) addressed the uniform consistency of local M-estimators corresponding to smooth $\psi(\cdot)$'s. The asymptotic independence used by Collomb and Härdle (1986) is formulated in terms of ϕ-mixing, which is stronger than the α-mixing adopted in this paper. Moreover, the L_∞ rates of convergence presented in the above papers are slower than the optimal rate $(n^{-1} \log n)^r$ given in Theorem 2. The L_q $(1 \le q < \infty)$ rates of convergence in Theorem 3 are more difficult to obtain and appear to be new.

References

1. Boente, G. and Fraiman, R. (1989). Robust nonparametric regression estimation. *J. Multivariate Anal.* 29 180–198.

2. Boente, G. and Fraiman, R. (1989). Robust nonparametric regression estimation for dependent observations. *Ann. Statist.* 17 1242–1256.

3. Boente, G. and Fraiman, R. (1991). Strong uniform convergence rates for some robust equivariant nonparametric regression estimates for mixing processes. *Internat. Statist. Rev.* To appear.

4. Collomb, B. G. and Härdle, W. (1986). Strong uniform convergence rates in robust nonparametric time series analysis and prediction: kernel regression estimation from dependent observations. *Stochastic Processes Appl.* 23 77–89.

5. Stone, C. J. (1980). Optimal rates of convergence for nonparametric estimators. *Ann. Statist.* 8 1348–1360.

6. Stone, C. J. (1982). Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. *Ann. Statist.* 10 1040–1053.

7. Truong, K. Y. and Stone, C. J. (1992). Nonparametric function estimation involving time series. To appear in *Ann. Statist.*

Multivariate Components of Variance に対する尤度比検定の諸性質
— 不偏性, 漸近分布, FKG 性 —

東京大学工学部　　栗木 哲

1. はじめに.

$p\times p$ 行列 $\boldsymbol{W}\sim W_p(n,\boldsymbol{\Phi})$ と, $g\sim\sigma^2\chi^2(\nu n)/\nu n$ が観測されたとき, 仮説 $H_0:\boldsymbol{\Phi}=\sigma^2\boldsymbol{I}_p$を, 対立仮説 $H_1:\boldsymbol{\Phi}\geq\sigma^2\boldsymbol{I}_p$ に対して検定する尤度比検定 T_{01}を考える. ただし, $\geq$は Löwner ordering である. また仮説 H_1を対立仮説 $H_2:\boldsymbol{\Phi},\sigma^2$は任意, に対して検定する尤度比検定 T_{12}を考える.

T_{01}, T_{12} に対応する尤度比統計量は各々

$$\Lambda_{01}=\prod_{i=1}^{m^*}t_i^{n/2}\frac{s_{m^*}{}^{n(\nu+p-m^*)/2}}{s_0{}^{n(\nu+p)/2}},\quad \Lambda_{12}=\prod_{i=m^*+1}^{p}t_i^{n/2}\frac{s_p{}^{n\nu/2}}{s_{m^*}{}^{n(\nu+p-m^*)/2}}$$

である. ここで $t_1>\cdots>t_p$ は $(1/n)\boldsymbol{W}$ の固有根,

$$s_m=\frac{\nu g+\sum_{i=m+1}^{p}t_i}{\nu+p-m},\quad 0\leq m\leq p,$$

m^* は $t_{m^*}\geq s_{m^*}, t_{m^*+1}<s_{m^*+1}$ をみたす整数とする. これらは Anderson, et al. (1986, AS) より直接導かれる.

これらの検定問題は, Rao (1965, Biometrika) の Random effects model の Multivariate Components of Variance に対する検定問題として現われる. 検定 T_{01}の不偏性や検定 T_{12}の検出力関数の単調性の証明, 尤度比検定統計量$-2\log\Lambda_{01}$,$-2\log\Lambda_{12}$の limiting null distribution の導出を行うことができる. (詳しくは, 同じ発表者による数学会 1991 年度年会 (北大) 予稿集参照.)

2. $\varphi_0(\boldsymbol{u})$ の FKG 性とその応用.

$u_i=t_i/s_i$, $1\leq i\leq p$, とおくと, Λ_{01}, Λ_{12}は u_iの非増加関数, 非減少関数であることが分かる. ここで$\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_p)$ の仮説 H_0の下での同時密度は

$$\varphi_0(\boldsymbol{u})=K(n,p,\nu)\prod_{i=1}^{p}\bar{t}_i{}^{(n-p-1)/2}\{1+\frac{\sum_{i=1}^{p}\bar{t}_i}{\nu}\}^{-n(\nu+p)/2}\prod_{i<j}(\bar{t}_i-\bar{t}_j)_+\prod_{i=1}^{p}\bar{s}_i,$$

$$\bar{t}_i=u_i\prod_{j=i+1}^{p}(1+\frac{u_j-1}{\nu+p-j+1}),\qquad \bar{s}_i=\bar{t}_i/u_i,$$

である. 補題 A.1 より次の補題を得る.

補題 2.1　$\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_p)$ の H_0の下での密度関数φ_0 は FKG 条件をみたす.

次に尤度比検定統計量Λ_{01} を含む検定関数のクラス

$$\mathcal{C}=\{\phi:(0,\infty)^p\to[0,1]\mid \phi\text{は }u_i\text{の非減少関数, }\phi\text{は定数ではない}\}$$

を考える. 補題 2.1 より次の定理を得る.

定理 2.1 ϕをクラス Cの検定関数とし, $\beta(\delta)$ を対応する検出力関数とする. ただし$\delta=(\delta_1,\dots,\delta_p)$ は $(1/\sigma^2)\Phi$の固有根. この時 $e=(1,\dots,1)$, $c=(c_1,\dots,c_p)$ とおけば

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\beta(e+\lambda c)\Big|_{\lambda=0} > 0 \qquad \Big(\sum_{i=1}^{p} c_i > 0 \text{ の場合}\Big)$$

である. これはϕが H_0 vs $H_1 - H_0$の検定として局所不偏であることを示している.

付録. FKG 不等式, FKG 条件とその十分条件.

X_iを R^1の区間, μ_iを X_i上の測度とし, $X=\prod_{i=1}^n X_i$ 上の $\mu=\prod_{i=1}^n \mu_i$ に対する密度関数φ を考える. Xの 2 点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)$ に対し, $\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i\le y_i$ $(1\le i\le n)$, $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=(v_1,\dots,v_n)$, $\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}=(w_1,\dots,w_n)$ $(v_i=x_i\wedge y_i, w_i=x_i\vee y_i)$ とする. φ が **FKG 条件**

$$\text{全ての } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X \text{ に対し} \quad \varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y})\le\varphi(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})$$

をみたすとき, 以下の性質を持つことが知られている.

定理 A.1 密度関数φ が FKG 条件をみたすとする. また g,h は X上の関数で, $\{\varphi>0\}$ で非減少 (すなわち$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\{\varphi>0\}$ に対し, $\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{y}\Rightarrow g(\boldsymbol{x})\le g(\boldsymbol{y})$, $h(\boldsymbol{x})\le h(\boldsymbol{y})$) とする. このとき **FKG 不等式**

$$\int_X gh\varphi d\mu \ge \Big(\int_X g\varphi d\mu\Big)\Big(\int_X h\varphi d\mu\Big)$$

が成立する. (もし積分が存在すれば.)

さらに g が $\{\varphi>0\}$ 上で定数でなく, h が$\{\varphi>0\}$ 上で厳密な増加関数 (すなわち $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\{\varphi>0\}$ に対し, $\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{y}\Rightarrow h(\boldsymbol{x})<h(\boldsymbol{y})$) ならば不等号は厳密に成立する.

FKG 条件に対するひとつの十分条件を与える.

補題 A.1 X上の密度関数φ は, 以下の条件 (a),(b) の下で FKG 条件をみたす.

(a) $\{\boldsymbol{x}\in X \mid \varphi(\boldsymbol{x})>0\}=X\cap D$,

$$D=\bigcap_{\alpha\in A}\{\boldsymbol{x}\mid f_\alpha(x_{i_\alpha})-g_\alpha(x_{j_\alpha})>0\}.$$

ただし A は添字集合で, 固定した$\alpha\in A$に対し f_α, g_α は非減少関数, i_α, j_αは, $1\le i_\alpha<j_\alpha\le n$ をみたす自然数.

(b) $\boldsymbol{x}\in\{\varphi>0\}$ に対し

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\log\varphi(x_1,\dots,x_n)\ge 0, \quad i<j.$$

Some Problems for Tests on the Stiefel Manifold

香川大学　　筑瀬　靖子

Let $V_{k,m}$ denote the Stiefel manifold which consists of $m \times k$ $(m \geq k)$ matrices X such that $X'X = I_k$, the $k \times k$ identity matrix. For $m = k$, the Stiefel manifold is the orthogonal group $O(k)$. A random matrix $X \in V_{k,m}$ is said to have the matrix Langevin (or von Mises-Fisher) distribution, denoted by $L(m,k;F)$, if its probability density function (p.d.f.) is given by (Downs [4]) $\exp(\mathrm{tr}\, F'X) \,/\, {}_0F_1(m/2; F'F/4)$ with respect to the normalized invariant measure $[dX]$ of unit mass on $V_{k,m}$ such that $\int_{V_{k,m}} [dX] = 1$, where F is an $m \times k$ matrix, and the ${}_0F_1$ is a hypergeometric function of matrix argument. Letting the rank of F be p $(0 \leq p \leq k)$, we write the singular value decomposition (s.v.d.) of F as

$$F = \Gamma \Delta \Theta' , \tag{1.1}$$

where $\Gamma \in V_{p,m}$, $\Theta \in V_{p,k}$, and $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\lambda_j > 0$. For uniqueness, we shall assume that $\lambda_1 > \cdots > \lambda_p > 0$ and that the first nonzero element of each column of Γ is positive. Γ and Θ indicate "orientations", extending the notion of directions for $k = 1$, and $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ are "concentration" parameters in the p directions determined by Γ and Θ. The $L(m,k;F)$ distribution has the "modal orientation" $M = \Gamma\Theta'$; it is noted that the mode is not unique when F has multiple roots λ_j or $p < k$. The distribution is "rotationally symmetric" around M; i.e., the value of the p.d.f. at $X = H_1 X H_2'$ is the same as that at X, for all $H_1 \in O(m)$ and $H_2 \in O(k)$ such that $H_1\Gamma = \Gamma$ and $H_2\Theta = \Theta$, and hence, $H_1 M H_2' = M$. The case $F = 0$ gives the uniform distribution $[dX]$ on $V_{k,m}$. See Chikuse [1], Downs [4], and Khatri and Mardia [5], for detailed discussions of statistical inference and distribution theory on the matrix Langevin distribution.

Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from the $L(m,k;F)$ distribution, with the s.v.d. (1.1), and let $Z = (m/n)^{1/2} \sum_{j=1}^{n} X_j$ be its (normalized) matrix resultant or sum. We are interested in the problem of testing the null hypothesis $H_0 : F = 0$ (or $\Delta = 0$) of uniformity, against a series of local alternative hypotheses $H_1 : F = n^{-1/2} F_0$ (or $\Delta = \Delta_1 = n^{-1/2}\Delta_0$, with the s.v.d. $F_0 = \Gamma_0 \Delta_0 \Theta_0'$). The matrix resultant Z may play an important role in the test. The distribution of Z has been given, by Khatri and Mardia [5, (3.5)], in an integral form which seems to be intractable (see also Chikuse [1] for exact sampling distribution theory based on $\sum_{j=1}^{n} X_j$).

In this paper, we derive asymptotic expansions, for large n and up to the order of n^{-3}, for the distributions of Z, $W = Z'Z$, and related statistics in connection with testing problems on F, under the hypothesis of uniformity ($F = 0$) and the local alternative hypothesis H_1 for the study of powers. The p.d.f.'s of Z and W are expanded with the limiting matrix-variate normal and (noncentral) Wishart distributions, respectively, and correction terms expressed in terms of the Hermite and Laguerre polynomials in matrix argument, respectively. The results extend Watson [6, Sect. 2.2] for $k = 1$. Further asymptotic results are presented in connection with testing problems on the $L(m, k; F)$ distribution. We derive asymptotic expansions for the p.d.f.'s of related statistics constructed from Z and W. Zonal polynomials and invariant polynomials in two matrix arguments (Davis [3]) are utilized for the derivation, together with some results on Hermite and Laguerre polynomials in one-dimensional variable and matrix argument (Chikuse [2]).

References

[1] Chikuse, Y. (1990). Distributions of orientations on Stiefel manifolds. *J. Multivariate Analysis* **33** 247–264.

[2] Chikuse, Y. (1991). Properties of Hermite and Laguerre polynomials in matrix argument and their applications. To appear in *Linear Algebra Appl.*

[3] Davis, A. W. (1979). Invariant polynomials with two matrix arguments extending the zonal polynomials: Applications to multivariate distribution theory. *Ann. Inst. Statist. Math.* **A31** 465–485.

[4] Downs, T. D. (1972). Orientation statistics. *Biometrika* **59** 665–676.

[5] Khatri, C. G. and Mardia, K. V. (1977). The von Mises-Fisher matrix distribution in orientation statistics. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **39** 95–106.

[6] Watson, G. S. (1983). *Statistics on Spheres.* Lecture Notes in Mathematics, Vol.6, Wiley, New York.

Statistical Inference in Random Coefficient Growth Curve Models

広島大学理学部　　藤越康祝

各個体に対する観測が必ずしも同一時点でない場合のランダム成長曲線モデル

$$y_i = X_i\beta_i + \varepsilon_i$$
$$\beta_i = \Theta u_i + \eta_i \qquad i = 1, \ldots\ldots, n$$

を考える。ここに，X_i：$p_i \times m$、u_i：$k \times 1$ はそれぞれ個体 i の個体内計画行列,個体間計画ベクトル，β_i：$m \times 1$ は潜在確率変数，ε_i：$p_i \times 1$，η_i：$m \times 1$ はそれぞれ独立に $N(0, \sigma^2 I_{p_i})$，$N(0, \Gamma)$ に従うものとする。また，Θ：$m \times k$，σ^2，Γ：$m \times m$ は未知パラメータで，$\sigma^2 > 0$，Γ：$m \times m \geqq 0$ である。このとき,次の問題に関心がある。

（1）モデルの適合性検定
（2）平均パラメータ Θ の推定
（3）分散パラメータ σ^2，Γ の推定
（4）Θ に関する検定
（5）β_i および新しい個体に対する β の予測

本報告では，主として E. F. Vonesh and R. L. Carter (Biometriics 43(1987), 617-628), C. G. Khatri and C. R. Rao (TR No.88-48 Center for Multivariate Analysis, Penn State Univ.) に基ずいて，上記問題に対する結果の紹介，並びに，新しい推定法の提案を行った。各個体の個体内計画行列が等しい場合 $X_1 = \ldots\ldots = X_n$ には、正確な最尤推定量が求められるが，その表示はある種の統計量の値に依存し，複雑である。このため，新たな簡便推定法を提案し，一般の場合に対しても，その拡張を与えた。

共分散行列に対する多重決定問題

広島女子大学　　西田信男

多次元正規母集団において、共分散行列に対するいくつかの多重決定問題を考え、それぞれに許容的決定方式の族を与えた。
0-1損失関数を用いBayes流の証明方法を利用した。

1.　2標本の場合の多重決定問題

2つの正規母集団 $N_p(\mu_1,\Sigma_1)$, $N_p(\mu_2,\Sigma_2)$ があるとき

(1)　H_0: $\Sigma_1=\Sigma_2$, H_1: $\Sigma_1<\Sigma_2$, H_1: $\Sigma_1>\Sigma_2$

という問題を考える。 それぞれの母集団から大きさN_1, N_2の標本をとり、(標本平均ベクトルのまわりでの) 平方和積和行列をS_1, S_2 とする。 $n_i=N_i-1$ とおく。

定理 1.　$p-1<r<n_1+n_2-p+1$, $p-1<r_1<n_2$, $p-1<r_2<n_1-p+1$, $p-1<r_3<n_2-p+1$, $p-1<r_4<n_1$ なるとき

$$T_i=\min T_j \ \rightarrow\ H_i \text{ を選択する}$$

という決定方式は任意のc_j に対して許容的である。 ただし

(2)　$T_0=c_0|S_1+S_2|^r$, $T_1=c_1|S_1+S_2|^{r_1}|S_1|^{r_2}$,

$$T_2=c_2|S_1+S_2|^{r_4}|S_2|^{r_3}.$$

問題 (1) の各仮説において共分散行列をその行列式で置き換えた問題に対しても定理1は成立する。 すなわち

(3)　H_0: $|\Sigma_1|=|\Sigma_2|$, H_1: $|\Sigma_1|<|\Sigma_2|$,

$$H_2: |\Sigma_1|>|\Sigma_2|$$

という問題に対しても同じ条件のもとで定理は成立する。 以後の問題においても同様である。

2.　3標本の場合の多重決定問題

3つの正規母集団 $N_p(\mu_1,\Sigma_1)$, $N_p(\mu_2,\Sigma_2)$, $N_p(\mu_3,\Sigma_3)$があるとき共分散行列に対する次のような多重決定問題を考える。記号等は前節に準じて用いるとする。

(4)　H_0: $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma_3$, H_1: $\Sigma_1\neq\Sigma_2=\Sigma_3$, H_2: $\Sigma_2\neq\Sigma_1=\Sigma_3$,
H_3: $\Sigma_3\neq\Sigma_1=\Sigma_2$, H_4: $\Sigma_i\neq\Sigma_j$ $(i\neq j)$.

定理 2.　ある条件（事前分布の積分可能性の条件）のもとで

$$V_i=\min V_j \ \rightarrow\ H_i \text{ を選択する}$$

という決定方式は任意の c_j に対して許容的である。ただし

(5)　$V_0=c_0|S|^r$, $V_j=c_j|S_j|^{r_{2j-1}}|S-S_j|^{r_{2j}}$,

$$V_4=c_4|S_1|^{r_7}|S_2|^{r_8}|S_3|^{r_9}$$

であり　$S=S_1+S_2+S_3$　である $(j=1,2,3)$。

この定理を利用すると$\min n_i>2(p-1)$なるとき問題(4)に対する尤度比基準および修正尤度比基準が許容的であることが導かれる。　また、問題(4)から（例えば）H_4を除いた問題に対して$V_0\sim V_3$を用いた決定方式の許容性が、定理と同様の証明法により導かれる。

以下、扱った問題のみ示す。

(6)　H_0: $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma_3$, H_1: $\Sigma_1<\Sigma_2=\Sigma_3$, H_2: $\Sigma_2<\Sigma_1=\Sigma_3$,
H_3: $\Sigma_3<\Sigma_1=\Sigma_2$.

(7)　H_0: $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma_3$, H_1: $\Sigma_1>\Sigma_2=\Sigma_3$, H_2: $\Sigma_2>\Sigma_1=\Sigma_3$,
H_3: $\Sigma_3>\Sigma_1=\Sigma_2$.

(8)　H_{ijl}: $\Sigma_i>\Sigma_j>\Sigma_l$　$(i,j,l=1,2,3;i\neq j\neq l\neq i)$.