（９）統計的漸近理論とその応用の研究

A minimax regret estimator of the normal mean with unknown variance after preliminary test

鹿児島大学理学部　　稲田浩一

1．序　正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からの大きさnの標本 $X_1,\ldots,X_n$ を用いて、母平均 μ の推定問題を考える。通常、推定量として標本平均 $\bar{X}$ を用いるが、母平均 μ に関してある種の事前情報がある場合は、その事前情報を利用すべきである。例えば、母平均 μ は μ_0 に近いという事前情報がある場合は、この事前情報を利用したものとして、母分散 σ^2 が既知のときは、次の様な推定量のクラスが考えられる。

$$\hat{\mu}(k)=k(U)\bar{X}+(1-k(U))\mu_0 \tag{1}$$

ここで、$U=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma$ で k は weight 関数である。k のとり方によっていままで研究されてきた推定量がこのクラスに含まれることがわかる。
◎予備検定推定量

$$k_1(U)=I(|U|\geq z_{\frac{\alpha}{2}})$$

Hirano[3] は、Akaike[1] 情報量規準を適用して予備検定の有意水準を定めた。
◎ Shrinkage 推定量

$k_2(U)=U^2/(1+U^2)$　のとき　Thompson[5] の推定量

$k_3(U)=1-ae^{-bU^2}$　のとき　Mehta & Srinivasan[4] の推定量

◎ Inada[2] の推定量

$$k_4(U)=w^*I(|U|<C)+I(|U|\geq C),\ w^*\in[0,1]$$

この推定量は予備検定推定量と Shrinkage 推定量を組み合わせたものと考えられる。w^* は Minimax Regret 規準によって定めた。
ここでは母分散が未知のとき Inada の推定量について考察する。

2．Minimax Regret 推定量　母分散が未知のときは次の推定量を考える。

$$\hat{\mu}(k)=k(T)\bar{X}+(1-k(T))\mu_0 \tag{2}$$

ここで、$k(T)=wI(|T|<C)+I(|T|\geq C)$, $T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sqrt{\sum(X_i-\bar{X})^2/(n-1)}$, $w\in[0,1]$ である。
目的は Minimax Regret 規準の下での Minimax Regret Weight w^* の存在性を証明することである。一般性を失うことなく、これから $\mu_0=0$ として話を進める。
$\hat{\mu}(k)$ の平均二乗誤差 (MSE) を $M(w,\mu,\sigma,n)$ で表わし、Regret 関数を次式で定義する。

$$Reg(w,\mu,\sigma,n)=M(w,\mu,\sigma,n)-\min_{0\leq w\leq 1}M(w,\mu,\sigma,n). \tag{3}$$

$\hat{\mu}(k)$ の MSE は次によって与えられる。

$$M(w,\mu,\sigma,n)=\frac{\sigma^2}{n}\Psi(w,\delta,n) \tag{4}$$

ただし、

$$\Psi(w,\delta,n)=\iint_{(n-1)C^2v>2(u+\delta)^2}\{w(u+\delta)-\delta\}^2\phi(u)k(v)dudv \tag{5}$$
$$+\iint_{(n-1)C^2v\leq 2(u+\delta)^2}u^2\phi(u)k(v)dudv,$$

$\phi(u) = exp[-u^2/2]/\sqrt{2\pi}$, $k(v) = v^{\frac{n-1}{2}-1}exp[-v]/\Gamma(\frac{n-1}{2})$, $\delta = \sqrt{n}\mu/\sigma$.
これゆえに、Regret 関数は次のように書き換えられる。

$$Reg(w,\mu,\sigma,n) = \frac{\sigma^2}{n}\{\Psi(w,\delta,n) - \min_{0\le w\le 1}\Psi(w,\delta,n)\} = \frac{\sigma^2}{n}R(w,\delta,n). \tag{6}$$

このとき Minimax Regret Weight w^* とは次式を満たすものである。

$$\inf_{0\le w\le 1}\sup_{-\infty<\delta<\infty} R(w,\delta,n).$$

いま $w_0(\delta)$, $w_1(\delta)$ をそれぞれ (7), (8) によって定義されるδの関数とするとこのとき次の 2 つの定理が証明される。

$$\min_{-\infty<w<\infty}\Psi(w,\delta,n) = \Psi(w_0(\delta),\delta,n), \tag{7}$$

$$\min_{0\le w\le 1}\Psi(w,\delta,n) = \Psi(w_1(\delta),\delta,n). \tag{8}$$

定理 1．$w_0(\delta)$ は次式 (9) によって与えられ、

$$w_0(\delta) = \frac{\delta\int\int_{(n-1)C^2v>2(u+\delta)^2}(u+\delta)\phi(u)k(v)dudv}{\int\int_{(n-1)C^2v>2(u+\delta)^2}(u+\delta)^2\phi(u)k(v)dudv} \tag{9}$$

それは非負偶関数であり、(10) を満たすような正の数δ_1が存在する。

$$\begin{array}{ll} w_0(\delta) < 1 & (\ |\delta| < \delta_1\ ), \\ w_0(\delta) = 1 & (\ |\delta| = \delta_1\ ), \\ w_0(\delta) > 1 & (\ |\delta| > \delta_1\ ). \end{array} \tag{10}$$

この定理 1 より $R(w,\delta,n)$ は次式のようになる。

$$R(w,\delta,n) = \Psi(w,\delta,n) - \Psi(w_1(\delta),\delta,n) \tag{11}$$

ただし　　$\delta = \sqrt{n}\mu/\sigma$,

$$w_1(\delta) = \begin{cases} w_0(\delta) & (\ |\delta| \le \delta_1\ ) \\ 1 & (\ |\delta| > \delta_1\ ) \end{cases}$$

定理 2．Minimax Regret Weight が存在する。

参 考 文 献

[1] Akaike, H. (1973). Information theory and an extention of the maximum likelihood principle, *2nd International Symposium on Information Theory* (eds. B.N.Petrov and F. Csaki), Akademiai Kiado, Budapest, 267-281.
[2] Inada, K. (1984). A minimax regret estimator of a normal mean after preliminary test. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 36, A, 207-215.
[3] Hirano, K. (1977). Estimation procedure based on preliminary test, shrinkage technique and information criterion. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 29, A, 21-34.
[4] Mehta, J. S. and Srinivasan, R. (1971). Estimation of the mean by shrinkage to a point. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 66, 86-90.
[5] Thompson, J. R. (1968). Some shrinkage techniques for estimating the mean. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 63, 113-122.

成長曲線モデルにおけるランダム効果分散構造の検定—Parallel Profile モデルの場合

島根大・理　　横山　隆久
広島大・理　　藤越　康祝

MANOVA & GMANOVA混合モデルの特別な場合であるParallel Profile モデルを考える。

$$X = A\underset{\sim}{\delta}\underset{\sim}{1}_p' + \underset{\sim}{1}_N\underset{\sim}{\theta}' + U \tag{1}$$

ただし、X：Nxpは変数xがN個の各個体に対してp個の時点で観測されるときのデータ行列、A：Nxkは既知の計画行列で、rank A＝k、$\underset{\sim}{\delta}$：kx1, $\underset{\sim}{\theta}$：px1は未知母数ベクトル、U：Nxpは誤差行列で各行は互いに独立かつ $N_p(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$ に従うものとする。

モデル(1)において、個体間の変動を考慮することによって得られるランダム効果分散構造の適合性に関する仮説を考える。

$$H01 : \Sigma = \gamma^2 \underset{\sim}{1}_p \underset{\sim}{1}_p' + \sigma^2 I_p \quad \text{vs.} \quad H11 \neq H01 \tag{2}$$

ただし、$\gamma^2 \geqq 0$、$\sigma^2 > 0$とする。仮説(2)に対する検定統計量として、

$$\tilde{\lambda}1 = \frac{S11\cdot 2 \; |Y2'Y2|}{S11\{(p-1)^{-1}\mathrm{tr}Y2'Y2\}^{p-1}} \tag{3}$$

が提案される。ただし、$Q1 = p^{-1/2}\underset{\sim}{1}_p'$ とし、$Q = [Q1' \; Q2']'$ をpxp直交行列、$[X \; \underset{\sim}{1}_N \; A]$ に関する平方和積和行列をVとし、対応する分割行列をVxx, Vx1, Vxa, ‥‥, とするとき、

$$Yi'Yj = QiVxx\cdot 1Qj' \quad , \quad Sij = QiVxx\cdot 1aQj' \tag{4}$$

である。$\tilde{\lambda}1$は尤度比統計量$\lambda 1$の上界を与える近似的尤度比統計量である。仮説H01のもとで、$-n\rho \log \tilde{\lambda}1$の分布関数は$M = n\rho$が大きいとき次のように展開される。

$$P(-n\rho\ \log\tilde{\lambda}1 \leqslant x) = P(\chi^2 f \leqslant x) + O(M^{-2}), \tag{5}$$

$$f = \frac{1}{2}(p^2 + p - 4),$$

$$f n(1-\rho) = \frac{1}{12(p-1)} p(p+1)^2(2p-3) + (p-1)(k-1)$$

ただし、n＝N－1である。

次に、仮説(2)に対する正確な尤度比統計量λ1を考える。

$$\lambda 1 = \begin{cases} \dfrac{S11\cdot 2\ |Y2'Y2|}{S11\ \{(p-1)^{-1}\mathrm{tr}Y2'Y2\}^{p-1}} (=\tilde{\lambda}1), & t > t^* \\ \dfrac{S11\cdot 2\ |Y2'Y2|}{\{p^{-1}(S11 + \mathrm{tr}Y2'Y2)\}^{p}} (=\lambda 0), & t^* > t \end{cases} \tag{6}$$

ただし、

$$t = \frac{1}{n} S11, \quad t^* = \frac{1}{n(p-1)} \mathrm{tr}Y2'Y2 \tag{7}$$

であり、λ0は次の仮説(8)に対する尤度比統計量である。

$$H00 : \Sigma = \sigma^2 Ip \quad \text{vs.} \quad H10 \neq H00 \tag{8}$$

$-n\rho\ \log\lambda 1$の極限分布を求めると、$-n\rho\ \log\tilde{\lambda}1$の極限分布と一致することがわかった。

参考文献

Chinchilli, V.M. and Elswick, R.K. (1985). A mixture of the MANOVA and GMANOVA models. Comm. Statist. 14, 3075-3089.

Srivastava, M.S. (1987). Profile analysis of several groups. Comm. Statist. 16, 909-926.

Yokoyama, T. and Fujikoshi, Y. (1992). Tests for random-effects covariance structures in the growth curve model with covariates. Hiroshima Math. J. 22.

Missing data のある共分散構造をもつ多変量成長曲線モデル

広島工大　　神田隆至

Potthoff and Roy の提案した多変量成長曲線モデルは

$$\underset{N\times p}{Y} = \underset{N\times k}{A}\ \underset{k\times q}{\Xi}\ \underset{q\times p}{B} + \underset{N\times p}{\epsilon}, \tag{1}$$

である。ただし、A, B は既知な計画行列で $\mathrm{rank}(A) = k, \mathrm{rank}(B) = q \le p, \Xi$ は未知母数行列、誤差行列 $\epsilon = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_N)'$ の各行は互いに独立で、それぞれ $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ に従うものとする。このモデルは complete data を扱っているが、ここでは分散構造が系列共分散構造 $\Sigma = \sigma^2 G_s(\rho) = \sigma^2(\rho^{|i-j|}), (i, j = 1, \cdots, p), (\sigma > 0, |\rho| < 1$ は未知) と一様共分散構造 $\Sigma = \sigma^2 G_u(\rho) = \sigma^2[(1-\rho)I_p + \rho 1_p 1_p']$, ($\sigma > 0, -\frac{1}{p-1} < \rho < 1$ は未知) をもつ missing data を含むモデルを考える。一様共分散構造をもつ missing data を含む場合はその型が一般のときも容易に考えられるが、系列共分散構造をもつ missing data を含む場合は一般の型は複雑になるので、Bhargava (1962) の調べたデザイン等によって生じる monotone type の missing data について述べる。それは

$$\underset{N_i\times p_i}{Y_i} = \underset{N_i\times k}{A_i}\ \underset{k\times q}{\Xi}\ \underset{q\times p}{B}\ \underset{p\times p_i}{M_i} + \underset{N_i\times p_i}{\epsilon_i}, \tag{2}$$

である。ここに、$p_i = p-(i-1), (i = 1, 2, \cdots, u), \epsilon_i$ の各行は独立、かつ $N_{p_i}(\mathbf{0}, M_i'\Sigma M_i)$, ($M_i$ は 0 と 1 からなるデザイン行列) に従うものとする。以下では、簡単のために $BM_i = B_i, M_i'\Sigma M_i = \Sigma_i$ とおく。

始めに、系列共分散構造をもつモデル (2) の場合を考える。このときの MLE は Fujikoshi, Kanda and Tanimura (1990) と同様にして求めることができる。

Theorem 1. 系列共分散構造をもつモデル (2) の Y_i $(i = 1, 2, \cdots, u)$ にもとずく Ξ, ρ, σ^2 の MLE $\hat{\Xi}, \hat{\rho}, \hat{\sigma}^2$ は次の方程式 (i)~(iii) の解である。

$$\text{(i)} \quad \hat{\Xi} = \Xi(\hat{\rho}) : \sum_{i=1}^{u} A_i'Y_i\hat{\Sigma}_i^{-1}B_i' = \sum_{i=1}^{u} A_i'A_i\hat{\Xi}B_i\hat{\Sigma}_i^{-1}B_i',$$

$$\text{(ii)} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{n}{m_1} \cdot \frac{a\hat{\rho}^2 - 2b\hat{\rho} + c}{1 - \hat{\rho}^2},$$

$$\text{(iii)} \quad (m_1 - N)a\hat{\rho}^3 - (m_1 - 2N)b\hat{\rho}^2 - (m_1 a + Nc)\hat{\rho} + m_1 b = 0.$$

ただし、$N = \sum_{i=1}^{u} N_i, n = N - k, m_1 = \sum_{i=1}^{u} N_i p_i, \hat{\Sigma}_i = \hat{\sigma}^2 G_{si}(\hat{\rho}), R_i = \frac{1}{n}(Y_i - A_i\hat{\Xi}B_i)'(Y_i - A_i\hat{\Xi}B_i), a_i = \mathrm{tr}\,(C_{1i}R_i), b_i = \mathrm{tr}\,(C_{2i}R_i), c_i = \mathrm{tr}\,R_i, a = \sum_{i=1}^{u} a_i, b = \sum_{i=1}^{u} b_i, c = \sum_{i=1}^{u} c_i, C_{1i} = \mathrm{diag}(0, 1, \cdots, 1, 0)$ で C_{2i} は省略する。(i) 式は $\mathrm{vec}\,(\cdot)$ 表現を用いると

$$\text{(i)}' \quad \mathrm{vec}\,(\hat{\Xi}) = [\sum_{i=1}^{u}(B_i\hat{\Sigma}_i^{-1}B_i' \otimes A_i'A_i)]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{u}(B_i\hat{\Sigma}_i^{-1} \otimes A_i')\mathrm{vec}\,(Y_i)$$

ともかける。また、$U_i = (A_i'A_i)^{-1/2}A_i'(Y_i - A_i\Xi B_i)\Sigma_i^{-1/2}, V_i = \sqrt{n_i}(\Sigma_i^{-1/2}S_i\Sigma_i^{-1/2} - I_{p_i}), S_i = \frac{1}{n_i}Y_i'(I_{p_i} - A_i(A_i'A_i)^{-1}A_i')Y_i, n_i = N_i - k$ とおく。このとき、

Lemma 1.

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \rho + \rho_1 n^{-1/2} + \rho_2 n^{-1} + O_p(n^{-3/2}),\\ (N/n)\hat{\sigma}^2 &= \sigma^2 + \sigma_1 n^{-1/2} + \sigma_2 n^{-1} + O_p(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -[N\sum_{i=1}^{u} N_i\{(r_i - \rho^2)\rho a^{(1)} - r_i b^{(1)} + \rho c^{(1)}\}]/[\sigma^2 \sum_{i,j=1}^{u} N_i N_j (p_i - 1) r_j],\\ \rho\sigma_1 &= b^{(1)} - \rho a^{(1)} - N^{-1}\sum_{i=1}^{u} N_i(p_i - 1)\sigma^2\rho_1, \quad r_i = p_i - (p_i - 2)\rho^2, \quad (i = 1, \cdots, u).\end{aligned}$$

ここに、$\rho_2, \sigma_2, a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}$, $(i = 1, 2)$ は省略する。

次に、MLE の漸近分布を求めると

Theorem 2. p, kを固定して $N_i \to \infty$, $(i = 1, \cdots, u)$ かつ $N_i/N_1 \to \delta_i > 0$, $(i = 1, \cdots, u)$ のとき

$$\text{(i)} \quad \mathrm{vec}\,(\sqrt{n}(\hat{\Xi} - \Xi)') \xrightarrow{d} N_{kq}(0, [\frac{\sum_{i=1}^{u}\delta_i\Gamma_i \otimes B_i\Sigma_i^{-1}B_i'}{\sum_{j=1}^{u}\delta_j}]^{-1}),$$

$$\text{(ii)} \quad \sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\rho} - \rho\\ \frac{N}{n}\hat{\sigma}^2 - \sigma^2\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N_2\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma & \beta\end{pmatrix}\right]$$

が成立する。ただし、Γ_iは省略し、$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{u}\delta_i\cdot\sum_{j=1}^{u}\delta_j p_j(1-\rho^2)^2}{\sum_{l=1}^{u}\delta_l(p_l - 1)\cdot\sum_{k=1}^{u}\delta_k r_k}$, $\beta = \frac{2\sum_{i=1}^{u}\delta_i(1+\rho^2)\sigma^4}{\sum_{k=1}^{u}\delta_k r_k}$, $\gamma = \frac{2\sum_{i=1}^{u}\delta_i\rho(1-\rho^2)\sigma^2}{\sum_{k=1}^{u}\delta_k r_k}$ である。

また、N_iの間に特別な関係がある場合のαのα_C(complete data に対するα) に対してのある種の efficiency の数値例を紹介する。一様共分散構造をもつ場合の同様の結果も報告する。

参考文献

[1] T. W. Anderson, Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some observations are missing, J. Amer. Statist. Assoc., **52** (1957), 200–203.

[2] R. P. Bhargava, Multivariate tests of hypothesis with incomplete data, Tech. Rep. No. 3, Statist. Stanford University, 1962.

[3] Y. Fujikoshi, T. Kanda and N. Tanimura, The growth curve model with an autoregressive covariance structure, Ann. Inst. Statist. Math., **42** (1990), 533–542.

[4] D. G. Kleinbaum, A generalization of the growth curve model which allows missing data, J. Multivariate Anal., **3** (1973), 117–124.

[5] R. F. Potthoff and S. N. Roy, A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems, Biometrika, **51** (1964), 313–326.

Asymptotic properties of sequential estimators of a probability density and its derivatives

新潟大学 理学部　磯貝英一

1. 問題　$X_1, X_2, X_3, \ldots$ はある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された独立で同一分布に従う確率変数列で，関数形が未知な確率密度関数 $f(x)$ を持つとする。 $p \geqq 0$ を与えられた整数とするとき，random sample size N_t の標本 $X_1, \ldots, X_{N_t}$ に基づいて $f(x)$ の p 次導関数 $f^{(p)}(x)$ $(f^{(0)}(x) = f(x))$ の推定問題を考える。Samanta and Mugisha (1981) は $f^{(p)}(x)$ $(p=0,1)$ の kernel-type の逐次 (sequential) 推定量を定義し，一様な強一致性，漸近正規性などについて論じている。 本報告の目的は $f^{(p)}(x)$ の kernel-type の逐次推定量 $f_{N_t}^{(p)}(x)$ を定義し，N_t についての適当な条件の下で $t \to \infty$ としたとき，$f_{N_t}^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)$ の正規近似の order を求めることである。Basu and Sahoo (1989) は $p=0$ に対してこの問題を扱っている。

2. 逐次推定量と結果　$r>p$ は整数とする。 以下では、実数R上で $f^{(i)}(x)$ $(i=1, \ldots, r)$ が存在すると仮定する。 $K_{p,r}$ は次の条件を満たすR上の実数値ボレル関数 $K(y)$ のすべての集合とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(y)|^i dy < \infty \text{ for } i=1,2 \text{ and } 3, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y^r K(y)| dy < \infty ,$$

$$|y K(y)| \to 0 \text{ as } |y| \to \infty,$$

$$\frac{1}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} y^j K(y) dy = \begin{cases} 1 & \text{for } j=p \\ 0 & \text{for } j \neq p, \ j=0,1,\ldots,r-1. \end{cases}$$

smoothing parameter h_n として

$$h_n = n^{-\alpha}, \quad \frac{1}{1+2r} < \alpha < \frac{1}{1+2p}$$

を考える。任意の $K \in K_{p,r}$ を与える。 $f^{(p)}(x)$ の推定量として次の逐次推定量を考える。これは fixed sample size の場合に Menon, Prasad and Singh (1984) が提案したものである。

$$f_{N_t}^{(p)}(x)=\frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t}\frac{1}{h_j^{p+1}}K\left(\frac{X_j-x}{h_j}\right).$$

$\{N_t, t>0\}$, λ はそれぞれ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の正の整数値をとる確率変数の族，正数をとる (i.e., $P\{\lambda>0\}=1$) 確率変数とする。また，$n_t\ (t>0)$ は $n_t\to\infty$ $(t\to\infty)$ を満たす正の整数値とする。

<u>定理</u>　$\{\varepsilon_t, t>0\}$ は $\varepsilon_t\to 0\ (t\to\infty)$ を満たす正数の族とする。次の条件を仮定する。ある正数 D_1, D_2, $0<\zeta\le\min\{\alpha, 1-\alpha, \alpha(1+2r)-1\}$ に対して

$$P\left\{\left|\frac{N_t}{\lambda n_t}-1\right|>D_1\varepsilon_t\right\}=O(\varepsilon_t^{\zeta/2})\quad\text{as } t\to\infty,$$

$$P\{\lambda n_t\le D_2\varepsilon_t^{-1}\}=O(\varepsilon_t^{\zeta/2})\quad\text{as } t\to\infty.$$

さらに $\{X_n, n\ge 1\}$ と λ は独立で，かつ $\sup_{-\infty<y<\infty}|f^{(1)}(y)|<\infty$, $\sup_{-\infty<y<\infty}|f^{(r)}(y)|<\infty$ を仮定する。このとき，$f(x)>0$ となる任意の x に対して

$$\sup_{-\infty<y<\infty}\left|P\{N_t^{\gamma/2}(f_{N_t}^{(p)}(x)-f^{(p)}(x))\le y\,\sigma_{1+2p}(x)\}-\Phi(y)\right|=O(\varepsilon_t^{\zeta/2})$$

as $t\to\infty$ が成り立つ，ここに $\Phi(y)$ は標準正規分布の分布関数を表し，

$$\gamma=1-\alpha(1+2p),\quad \sigma_{1+2p}^2(x)=\{1+\alpha(1+2p)\}^{-1}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K^2(y)\,dy.$$

参考文献

Basu, A.K. and Sahoo, D.K.(1989). Berry-Esseen type theorems for sequential density estimation. *Sequential Analysis* **8**, 119-134.

Menon, V.V., Prasad, B. and Singh, R.S.(1984). Non-parametric recursive estimates of a probability density function and its derivatives. *J. Statist. Plann. Inference* **9**, 73-82.

Samanta, M. and Mugisha, R.X.(1981). On a class of estimates of the probability density function and mode based on a random number of observations. *Cal. Statist. Assoc. Bull.* **117**, 23-40.

対称群上の距離から導かれる統計量の漸近分布

九州大学 理学部　　笛田 薫

1. 序　Critchlow(1986b) は対称群上の距離に基づく順位検定統計量の統一的構成法を提唱している. 今回は Spearman's footrule,Spearman's rank correlation を含む距離の族を定義し, その族に含まれる距離から Critchlow の方法によって導かれる 2 標本問題に対する検定統計量の漸近正規性について報告する.

2. Critchlow の構成法　まず,2 標本問題に対する Critchlow の統一的構成法を紹介する. 二つの母集団を母集団 1,2 とし, それぞれの分布関数を F, G とする. そして帰無仮説:$F(x) \equiv G(x)$, 対立仮説:$F(x) \geq G(x)$, かつある x_0に対しては $F(x_0) > G(x_0)$ となる, という検定問題を考える. 但し,F, G の連続性を仮定しておく. $Z_1, \ldots, Z_m$ を母集団 1 からの観測値, $Z_{m+1}, \ldots, Z_{m+n}$ を母集団 2 からの観測値とする. そして $i = 1, \ldots, N$ $(N = m+n)$ に対して$\pi(i)$ を Z_iの $Z_1, \ldots, Z_N$ の中での順位とする. このとき N次対称群を S_Nで表すと,$\pi \in S_N$となる. 次に二つの順位付け πとσが同値であることを $\{\pi(1), \ldots, \pi(m)\} = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}$ を満たすときと定義する. このとき,πを含む同値類は $[\pi] = \pi(S_m \times S_n)$ となる. 但し, $S_m \times S_n = \{\sigma \in S_N; \sigma(i) \leq m\ (i \leq m)\}$ である. また, 対立仮説に最も合致する順位付けの同値類は,$S_m \times S_n$である. これらの同値類間の距離として, 次の Hausdorff Distance を用いる.

d を S_N 上の距離とするとき,$S_N/(S_m \times S_n)$ 上の距離を

$$d^*([\pi], [\sigma]) = \max\{\max_{\beta \in [\sigma]} \min_{\alpha \in [\pi]} d(\alpha, \beta), \max_{\alpha \in [\pi]} \min_{\beta \in [\sigma]} d(\alpha, \beta)\}$$

で定義する. Critchlow は, 観測された順位付けπに対して $d^*([\pi], S_m \times S_n)$ を検定統計量として用いることを提唱している.

3. Convex sum distance から導かれる検定統計量　ここで, 対称群上の convex sum distance を定義する.

Definition 3.1

N 次対称群上の距離 d が convex sum distance であるとは,$[0,1]$ 上の関数 fを用いて

$$d(\pi, \sigma) = \sum_{i=1}^{N} f\Big(\frac{|\pi(i) - \sigma(i)|}{N}\Big)$$

と書けるときに言う. ただし,fは, 単調増加,convex で $f(0) = 0$ を満たすものとする.

この convex sum distance から導かれる検定統計量は次のようになる.

Theorem 3.1

convex sum distance から導かれる 2 標本問題に対する検定統計量は

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} f\Big(\frac{i - a_i}{N}\Big)$$

となる. 但し ,$a_1, \ldots, a_m$は$\pi(1), \ldots, \pi(m)$ を小さい順に並べ替えたもの, 同じく $a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}$ は$\pi(m+1), \ldots, \pi(m+n)$ を小さい順に並べ替えたものとする.

Theorem 3.1 で求めた検定統計量の漸近正規性を示すにはさらに仮定が必要である.

仮定 (a) $\lambda_N = m/N$としたときに,$0 < \lambda_0 < \frac{1}{2}$が存在して,全ての$N$に対して$\lambda_0 \le \lambda_N \le 1-\lambda_0$となる.

仮定 (b) fは 2 回微分可能. しかも正数 K と δ が存在して, $\lambda_0 \le \lambda \le 1-\lambda_0$である全ての$\lambda$に対して $h(x) = f(\lambda x)$ とおいたとき, $|h^{(i)}(x)| \le K|x(1-x)|^{-i-\frac{1}{2}+\delta}$, ($i = 1, 2$ 及び $0 < x < 1$) が成り立つ.

Theorem 3.2

仮定 (a),(b) のもとで $(T_N - \mu_N])/\sigma_N$ は漸近的に標準正規分布に従う. ただし,μ_N, σ_N^2は,$h_1(x) = f((1-\lambda_N)x), h_2(x) = f(\lambda_N(1-x))$ とおいたときに

$$
\begin{aligned}
\mu_N &= m \int h_1(G(x))dF(x) + n \int h_2(F(x))dG(x), \\
\sigma_N^2 &= \frac{2}{m}\Big(m^2 \int\int_{-\infty<x<y<\infty} F(x)(1-F(y))h_1'(G(x))h_1'(G(y))dG(x)dG(y) \\
&- mn \int\int_{-\infty<x<y<\infty} F(x)(1-F(y))h_1'(G(x))h_2'(F(y))dG(x)dG(y) \\
&- mn \int\int_{-\infty<y<x<\infty} (1-F(x))F(y)h_1'(G(x))h_2'(F(y))dG(x)dG(y) \\
&+ n^2 \int\int_{-\infty<x<y<\infty} F(x)(1-F(y))h_2'(F(x))h_2'(F(y))dG(x)dG(y)\Big) \\
&+ \frac{2}{n}\Big(m^2 \int\int_{-\infty<x<y<\infty} G(x)(1-G(y))h_1'(G(x))h_1'(G(y))dF(x)dF(y) \\
&- mn \int\int_{-\infty<x<y<\infty} G(x)(1-G(y))h_1'(G(x))h_2'(F(y))dF(x)dF(y) \\
&- mn \int\int_{-\infty<y<x<\infty} (1-G(x))G(y)h_1'(G(x))h_2'(F(y))dF(x)dF(y) \\
&+ n^2 \int\int_{-\infty<x<y<\infty} G(x)(1-G(y))h_2'(F(x))h_2'(F(y))dF(x)dF(y)\Big),
\end{aligned}
$$

で与えられ, そしてこれらは漸近的にT_Nの平均及び分散である.

参考文献

[1] Critchlow,D.E. (1986a). *Metric Methods for Analyzing Partially Ranked Data.* Lecture Notes in Statistics, Vol.34. Spring-Verlag, New York.

[2] Critchlow,D.E. (1986b). *A Unified Approach to Constracting Nonparametric Rank Test.* Technical Report No.376, Dept. of Statistics, Stanford University.

[3] 笛田 薫. The limiting normality of the test statistic for two sample problem induced by convex sum distance. Annals of the institute of statistical mathematics へ投稿中.

Almost Sure Invariance Principle for U-Statistics

横浜国立大学工学部　吉原 健一
山梨大学教育学部　金川 秀也

$\{\xi_j, j\geq 1\}$は可測空間X上の分布mを持つ定常な確率変数列とする．また$h(x,y)$ を$X\times X$の対称な実数値関数で

$$\iint_{X\times X} h(x,y)\mu(dx,dy) < \infty \quad \text{and} \quad E[h(\xi_1,x)] = 0,\ x\in X.$$

この時，$h(x,y)$ を核関数とするU-統計量S_nを $S_n := 2\sum_{1\leq i<j\leq [t]} h(\xi_i,\xi_j)$ と定義する．特にこれはdegree 2 のU-統計量と呼ばれる．さて$L^2:=L^2(X,\mu)$上の有界線形作用素$T_h: L^2\to L^2$を$g\in L^2$に対して $T_h g(x) := E[h(\xi_1,x)g(\xi_1)]$と定義すると，$T_h$はHilbert-Schmidt作用素で，固有値 $\{\lambda_i\}$と固有関数$\{g_i\}$を持ち，これらは各$i\geq 1$について次の性質を持つ．

$$\begin{cases} |\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|, \quad E[g_i(\xi_1)] = 0, \quad E[g_i^2(\xi_1)] = 1, \\ E[g_i(\xi_1)g_j(\xi_1)] = 0 \quad (i\neq j), \quad E[h(\xi_1,x)g_i(\xi_1)] = \lambda_i g_i(x). \end{cases}$$

さらに$h(x,y)$は$L^2(X\times X,\mu\times\mu)$における平均収束の意味で

$$h(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k(x) g_k(y) \tag{1}$$

と展開される．また$D[0,\infty)$上の確率過程$\{S(t)\,;\, t\geq 0\}$と$\{U(t)\,;\, t\geq 0\}$を次のように定義する．

$$S(t) := 2\sum_{1\leq i<j\leq [t]} h(\xi_i,\xi_j), \qquad U(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma_j^2 \left(W_j^2(t) - \frac{t}{\sigma_j^2} \right),$$

ただし$\sigma_j^2 := 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} E[g_j(\xi_1)g_j(\xi_{i+1})] > 0$を仮定する．$\{W_j, j\geq 1\} := \{\{W_j(t); t\geq 0\}, j\geq 1\}$はブラウン運動で

$$E[W_i(t)W_j(s)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sigma_i\sigma_j} \sum_{k=1}^{[nt]} \sum_{l=1}^{[ns]} E[g_i(\xi_k)g_j(\xi_l)] \quad (i\neq j).$$

(1)の表現を用いて，mixing条件の下でalmost sure invariance principle，即ち，共通な確率空間の上に$S(t)$と$U(t)$を

$$|S(t) - U(t)| = o(t) \quad \text{a.s.} \quad \text{as } t\to\infty, \tag{2}$$

が成立するように構成することができる．(2)より$S(t)$の弱収束(Hoeffding (1948), Yoshihara (1989)),

$$\left\{\frac{1}{n}S(nt),\ 0\le t\le 1\right\} \xrightarrow{D} \left\{U(t),\ 0\le t\le 1\right\} \text{ as } n\to\infty \text{ in } J_1\text{-topology of } D[0,1],$$

及び重複対数の法則(Dehling (1989)),

Almost surely $\left\{(2n\log\log n)^{-1}S(nt)\ ;\ 0\le t\le 1\right\}_{n\ge 3}$ is relatively compact and the set of its limit points coincides with some compact set K in $C[0,1]$,

が導かれる.

Theorem . *Let* $\{\xi_j\}$ *be a strictly stationary real valued random variables with zero mean and* $\sup_{j\ge 1} \boldsymbol{E}\left[\left|g_j(\xi_1)\right|^{4+\delta}\right] < \infty$ *for some* $\delta>0$*. Suppose that* $\{\xi_j\}$*is absolutely regular, i.e. there exists a sequence* $\beta(n)\downarrow 0$ *such that as* $n\to\infty$

$$\boldsymbol{E}\left[\sup_{A\in M_{k+n}^{\infty}} \left|P\left(A\,\middle|M_1^k\right) - P(A)\right|\right] \le \beta(n)\downarrow 0,$$

for all $k\ge 1$*, where* $M_i^j = \sigma\{\xi_i,\xi_{i+1},\cdots,\xi_j\}$*. Assume that* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\{\beta(n)\}^{\delta/(4+\delta)} < \infty$*. Furthermore suppose that for some* $s>0$*,* $0<\inf_{j\ge 1}\sigma_j^2 < \sup_{j\ge 1}\sigma_j^2 < \infty$ *and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k| = O(n^{-s}) \quad (n\to\infty). \tag{3}$$

Then we can redefine $\{S(t)\,;\,t\ge 0\}$*on a new probability space together with* $\{U(t)\,;\,t\ge 0\}$ *such that (2) holds.*

Example. Cramér-von Mises statistics $G_n := \int_0^1 n\{x(1-x)\}^{-1}(F_n(x)-x)^2dx$は条件(3)を満たす. ただし$F_n(x)$は一様分布の経験分布. G_nの核関数$h(x,y)$の固有値は $\lambda_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $k\ge 1$より, (3)が成り立つ.

References

Dehling, H. : The functional law of the iterated logarithm for von Mises functionals and multiple Wiener integrals, J. Multivariate Analysis, 28 (1989), 177-189.

Hoeffding, W. : A non-parametric test of independence, Ann. Math. Statist.,19 (1948), 546-557.

Yoshihara, K. : Limit distributions of degenerate U-statistics of degree two for strongly mixing sequences, (1989) preprint .

ブートストラップ法による中央値の推定について

大阪府立大学工学部
長　尾　壽　夫

1.　経験分布関数の逆関数

分布関数 $F(x)$ の逆関数 $\varphi(x)$ を次のように定める.

$$\varphi_1(x) = \inf\{\, t \mid F(t) \geq x\}, \qquad \varphi_2(x) = \sup\{\, t \mid F(t) \leq x\}$$

としたとき

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)).$$

すると，これを経験分布関数 $F_n(x)$ に対して適用すると

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{(i)} I_{(\frac{i-1}{n} < x < \frac{i}{n})} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{(i)} + X_{(i+1)}) I_{(x=\frac{i}{n})}$$

となる．ただし $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ は，$X_1, \ldots, X_n$ の順序統計量である．未知母数 $\theta(F)$ を推定する際，通常は $\theta(F_n)$ で推定する．一方 $\theta(F) = \theta(\varphi)$ であるが，一般には $\theta(F_n) \neq \theta(\varphi_n)$ である．このことを用いて Maritz and Jarrett [3] は sample median の分散の推定値を求めた．その結果は Efron [1] のブートストラップ法によるものと一致する．ここでは，$\varphi_n(x)$ として，次のように別のブートストラップ法を考える．

$$\varphi_n^*(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{(i)} I_{(Y_{(i-1)} < x \leq Y_{(i)})}$$

ただし，$Y_{(1)} \leq \cdots \leq Y_{(n-1)}$ は，(0,1) 上での一様分布からの順序統計量とし，$Y_{(0)} = 0$, $Y_{(n)} = 1$ とする．よって $\theta(F_n)$ の k 次の moment の推定量として

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{E}\theta^k(\varphi_n^*)$$

を考える．ただし，平均 E は $Y_{(1)} \leq \cdots \leq Y_{(n-1)}$ の下での平均を表す．特に $k = 1$ のとき，$\theta(F)$ の別の推定量を与えることになる．この方法は多くの場合，ブートストラップ法と同じ結果を与えるが median の場合は異なる．

2.　中央値

$X_1, \ldots, X_n$ を連続な分布関数 $F(x)$ からの標本とする．$\theta(F)$ を $F(x)$ の median とする．通常の推定量は

$$\varphi_n(\tfrac{1}{2}) = \theta(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} X_{(m+1)} & \text{if } n = 2m+1 \\ \frac{1}{2}(X_{(m)} + X_{(m+1)}) & \text{if } n = 2m. \end{cases}$$

ただし $X_{(1)} \le \cdots \le X_{(n)}$ は $X_1,\ldots,X_n$. の順序統計量である．すると，

$$M_n(X_1,\ldots,X_n) = \mathrm{E}\varphi_n^*(\tfrac{1}{2}) = \sum_{i=1}^{n} X_{(i)} P(Y_{(i-1)} < \tfrac{1}{2} \le Y_{(i)})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} C_{i,n} X_{(i)}.$$

ただし $C_{i,n} = \binom{n-1}{i-1}/2^{n-1}$. 同様に分散に対しては，

$$V_n(X_1,\ldots,X_n) = \mathrm{Var}(\varphi_n^*(\tfrac{1}{2})) = \sum_{i=1}^{n} C_{i,n}(X_{(i)} - \sum_{i=1}^{n} C_{i,n}X_{(i)})^2.$$

これらの推定量を Binomial type ということにする．また Efron のブートストラップ法，Maritz and Jarrett の方法による推定量の $C_{i,n}$ に対応する係数は

$$C_{i,n}^* = \begin{cases} \dfrac{n!}{(m!)^2} \displaystyle\int_{(i-1)/n}^{i/n} x^m (1-x)^m dx & \text{if } n = 2m+1 \\ \dfrac{(n-1)!}{[(m-1)!]^2} \displaystyle\int_{(i-1)/n}^{i/n} x^{m-1}(1-x)^{m-1} dx & \text{if } n = 2m \end{cases}$$

で与えられる．maritz and Jarret[3] によって表にされている．なお，分散のそれは上と異なり，もう少し複雑である．なおこの推定量を M-J-E type ということにする．

ここで，中央値の推定量として，ordinary type, Binomial type, M-J-E type の 3 種について，母集団分布を N(0,1)，指数分布，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の一様分布について，2 乗平均誤差を考えてた．

References

1. Efron, B. (1979), *Bootstrap methods: another look at the jackknife*, Ann. Statist. **7**, 1–26.
2. Frangos, C. C. (1987), *An updated bibliography on the jackknife method*, Commun. Statist. Theory Meth. **16**, 1543–1584.
3. Maritz, J. S. and Jarrett, R. G. (1978), *A note on estimating the variance of sample median*, J. Am. Statist. Assoc. **73**, 194–196.
4. Miller, R. G. Jr. (1974), *The jackknife: A review*, Biometrika **61**, 1–15.
5. Nagao, H. (1991), *On estimation of a median in small samples*, Math. Japon. **36**, 563–569.
6. Quenouille, M. (1956), *Notes on bias in estimation*, Biometrika **43**, 353–360.
7. Tukey, J. W. (1958), *Bias and confidence in not quite large samples* (abstract), Ann. Math. Statist. **29**, 614.

ROBUST NONPARAMETRIC FUNCTION ESTIMATION

Young K. Truong
Department of Biostatistics
University of North Carolina
Chapel Hill, N.C. 27599-7400

1 Introduction

Nonparametric regression is a method for estimating the effect of a covariate X on a response Y by using the mean of the conditional distribution of Y given X. In data analysis involving asymmetric conditional distributions such as incomes, housing values and survival times, it appears much more appealing to work with the conditional median, since results can be more easily interpreted. To formulate this regression more generally, let $G(\cdot)$ be any convex function on $\mathbf{R}^1$ with the unique minimum at the origin and define the function $m(\cdot)$ so that it minimizes (with respect to a)

$$E\Big(G(Y-a)|X=x\Big).$$

The function $m(\cdot)$ is called the generalized regression function of Y on X. For example, for $G(z)=z^2$ the function $m(x)$ is the regression function $m(x)=E(Y|X=x)$; the choice $G(z)=|z|$ leads to the conditional median function $m(x)=\text{med}(Y|X=x)$; the pth-percentile function is obtained by letting $G(z)=pz^+ + (1-p)z^-$ and a function developed from robust issues is obtained by choosing $G(\cdot)$ so that $G'(\cdot)=\psi(\cdot)$. See Hampel *et. al.* (1986) and Huber (1981).

To estimate this function, a popular method is based on the idea of local constant fit, or equivalently, the kernel method. However, the bias of this kernel method can have an adverse effect when the derivative of the marginal density or that of the regression function is large. See Härdle (1990). This problem can be repaired by considering an approach using local linear fits. Moreover precisely, let $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ denote a random sample from the distribution of (X,Y) and let $K(\cdot)$ denote a kernel function; that is, a density function. Define the local linear fit estimator $\hat{m}(\cdot)$ by setting $\hat{m}(x)=\hat{a}$, where $\hat{a}$ and $\hat{b}$ minimize

$$\sum_{i=1}^{n} G\Big(Y_i - a - b(X_i - x)\Big)K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right).$$

2 Statement of Resutls

Let $f(x)\equiv f_X(x)$ be the density function of X and $g(y|x)$ be the conditional density function of Y given $X=x$ with respect to a measure μ. Set

$$\phi(t|x)=E[G(Y-m(x)+t)|X=x].$$

We make the following assumptions:

1. The function $G(\cdot)$ is convex with a unique minimizer 0. $\phi''(t|z)$ as a function of t is continuous in a neighborhood of the point 0, uniformly for z in a neighborhood of x. Assume that $\phi(t|z)$, $\phi'(t|z)$ and $\phi''(t|z)$ as functions of z are bounded and continuous in a neighborhood of x for all small t and that $\phi(0|x)\neq 0$.

2. The kernel $K(\cdot) \geq 0$ has a bounded support. It satisfies

$$\int K(z)dz = 1, \quad \int zK(z)\,dz = 0.$$

3. The density function $f(\cdot)$ of X is continuous and $f(x) > 0$.

4. The function $g(y|x)$ is continuous in x for each y. Moreover, there exists an $\varepsilon > 0$ such that $\sup_{|x_n - x| \leq \varepsilon} g(y|x_n) \leq H(y|x)$ and that

$$\int |G'(y - m(x))|^{2+\delta} H(y|x) d\mu(y) < \infty,$$

and

$$\int \left(G(y-t) - G(y) - G'(y)t\right)^2 H(y|x) d\mu(y) = o(t^2) \quad \text{as} \quad t \to 0.$$

5. The function $m(\cdot)$ has a continuous second derivative.

Theorem 1 *Suppose above conditions hold and that $nh_n \to \infty$ and $h_n \to 0$, the estimator $\hat{m}(\cdot)$ is asymptotically normal:*

$$P\left(\frac{\hat{m}(x) - m(x) - \beta(x)h_n^2}{\sqrt{\tau^2(x)/(nh_n)}} \leq t\,|X_1, \cdots, X_n\right) = \Phi(t) + o_P(1),$$

where $\Phi(\cdot)$ is the standard normal distribution function and

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \frac{1}{2}m''(x)\int v^2K(v)dv, \\ \tau^2(x) &= \frac{\int K^2(v)dv}{f(x)} \frac{\int [G'(y - m(x))]^2 g(y|x) d\mu(y)}{[\phi''(0|x)]^2}. \end{aligned}$$

Note that the 'asymptotic bias' $\beta(x)h_n^2$ of the proposed estimator depends only on the function being estimated. This is natural from its construction — the bias came from the error in the local approximation of the underlying curve by a linear function. The asymptotic variance, however, depends on the function $G(\cdot)$. For example, the asymptotic variance of the local mean estimator differs from that of the local median estimator.

REFERENCES

1. Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J. and Stahel, W. A. (1986). *Robust statistics: The approach based on influence functions.* New York: Wiley.

2. Härdle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression.* Cambridge University Press.

3. Hastie, T.J. and Tibshirani, R.J. (1990). *Generalized Additive Models.* Chapman and Hall, London.

4. Huber, P. J. (1981). *Robust statistics.* New York: Wiley.

二項分布の一応用

鹿児島工業高専　　藤崎恒晏
鹿児島大学理学部　大和　元

1．序　いくつかの数学的命題は，その命題が確率と無関係であっても確率的に証明することができる．例えば，Weierstrass の多項式近似が二項分布を用いて示すことができることはよく知られている (Billingsley (1979))．

第1種スターリング数の性質について，Yamato(1990a,b) は，確率的証明を得ている．ここでは，二項分布の性質に着目して，第2種のスターリング数 $S(n,k)$ の性質を確率的に示す．なお，関係式

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n-1,k-1)m^{-n}=1/(m)_k \qquad (m>k-1:\text{実数})$$

については，渋谷(1986)により確率的に示されている。

第2種スターリング数とは，

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \qquad (n=1,2,\cdots)$$

を満たす $S(n,k)$ のことである．ここで，$(x)_k=x(x-1)\cdots(x-k+1)$ である．ただし，$S(n,k)=0$ $(0\leqq n<k)$，$S(n,0)=0$ $(n\geqq 1)$，$S(0,k)=0$ $(k\geqq 1)$ とする．

2．二項分布とスターリング数

$X_1,X_2,\cdots$ は 0 または 1 の値を等確率でとる独立な確率変数列とする．$k=1,2,\cdots$ に対して，$X(k)=X_1+\cdots+X_k$ とおくと，$X(k)$ は二項分布 $b(k,1/2)$ に従う．ここで，$X(0)=0$，$0^0=1$ とおく。

二項確率変数 $X(k)$ の関数の期待値は第2種スターリング数と関連がある；

『命題2．1』 $n=0,1,\cdots$ および $k=0,1,\cdots$ に対して

$$E[(-1)^{k-X(k)}\{X(k)\}^n]=k!S(n,k)/2^k. \qquad (1)$$

ここで，

$$S(n,k)=\frac{n!}{k!}\sum{}^{+}\frac{1}{r_1!\cdots r_k!}, \qquad (k=1,\cdots,n,\ n=1,2,\cdots) \qquad (2)$$

ただし，Σ^+は $r_1+\cdots+r_k=n$ を満たすすべての正の整数 $r_1,\cdots,r_k$ に関する和を表す (Charalambides & Singh(1988))．

『系 (Riordan(1968),p.226) 』

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}r^n \qquad (k,n=0,1,\cdots). \qquad (3)$$

以上の議論において，スターリング数 $S(n,k)$ が(2)によって与えられると仮定し，別の展開式(3)を系として得た．逆に，$S(n,k)$ の展開式が(3)によって与えられると仮定すると，そのとき(2)を示すこともできる．$k-X(k)$ と $X(k)$ が同じ分布に従うことを用いて次の命題が示される．

『命題2．2』 $k=1,\cdots,n$ および $n=1,2,\cdots$ に対して

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j k^{n-j}\binom{n}{j}S(j,k)=\begin{cases}0 & (n,k\text{が共に偶数または奇数})\\ 2(-1)^k S(n,k) & (\text{その他}).\end{cases}$$

二項分布 $b(k_j,1/2)$ に従う互いに独立な確率変数 Y_j $(j=1,2,\cdots)$ を考えることにより，次の命題が得られる．

『命題２．３』 $k_1,\cdots,k_m\leqq n$ $(m=2,3,\cdots;n=2,3,\cdots)$ を満たす正の整数 $k_1,\cdots,k_m$ に対して，

$$\binom{k_1+\cdots+k_m}{k_1,\cdots,k_m}S(n,k_1+\cdots+k_m)=\Sigma^*\binom{n}{r_1,\cdots,r_m}S(r_1,k_1)\cdots S(r_m,k_m)$$

ただし，Σ^*は $r_1+\cdots+r_m=n$ と $r_1\geqq k_1,\cdots,r_m\geqq k_m$ を満たすすべての正の整数 $r_1,\cdots,r_k$に関する和を表す．

『系（Riordan(1968)）』 $p+k\leqq n$ $(n=2,3,\cdots)$ を満たす正の整数 p,k に対して

$$\binom{p+k}{k}S(n,p+k)=\sum_{j=k}^{n-p}\binom{n}{j}S(n-j,p)S(j,k).$$

更に，命題２．１より次の命題が示される；

『命題２．４（Riordan(1968), p.233）』

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}(e^t-1)^k \qquad (k=0,1,\cdots;-\infty<t<\infty).$$

３．スターリング数とベル数

V, W が独立で同じポアソン分布に従うとき，条件 $V+W=k$ の下で V は二項分布 $b(k,1/2)$ に従う．これを用いて，次の第２種スターリング数の関係が示される．

『命題３．１（Riordan(1968),p.193）』

$$\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x^k=e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n x^k}{k!} \qquad (n=0,1,\cdots;-\infty<x<\infty).$$

ポアソン分布として，$P(1)$を考えることによりベル数 B_n について

$$B_n=e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$ が示される．

参考文献

[1] Billingsley,P.(1979), Probability and Measure (Wiley,New York).
[2] Charalambides,Ch.A. and Singh,J.(1988), A review of the Stirling numbers,their generalization and statistical applications,Commun. Statist,-Theory Meth.17,2533-2593.
[3] Riordan,J.(1968), Combinatorial Identities (Wiley,New York).
[4] 渋谷政昭(1986),スターリング確率分布族，応用統計学 Vol.15,No.3, 131-146.
[5] Yamato,H.(1990a), Probabilistic proofs of relations with Stirling numbers of the first kind by Dirichlet process, Statist.& Probab.Letters 10,189-193.
[6] Yamato,H.(1990b), A probabilistic approach to Stirling numbers of the first kind , Commun.Statist.-Theory Meth. 19,3915-3923.

確率クラスタリング過程

慶應義塾大学理工学部　渋谷政昭

1. 確率分割

有限集合の確率的分割の典型例は分割表であるが，これは類別が予め定まっている場合である．クラスター分析も潜在的な類別を暗黙に仮定している．それにたいして離合集散がでたらめで類別に区別のない確率統計現象，モデルは何か．

(1) 統計上の必要として，チャーノフの顔の有効性を実証するための'帰無仮説'が欲しい．
(原田・渋谷，1991，応用統計学)．

(2) 直線上の非弾性衝突の結果として確率的なクラスタリングを生じる．(Sibuya et al. 1990 Physica A)

(3) 有限数学では，順列の巡回による分割，順列の上り(下り)連による分割，ランダムグラフ，などがある．巡回による分割がもっとも単純で美しい．これを一般化する．

2. 確率クラスタリング過程

無限個の区別のない壷があり，そこに番号 1, 2, … の付いた玉 $B_1, B_2, \cdots$ をこの順にランダムに入れる．各番号の玉は1個だけで，各壷に玉は何個でも入る．B_1 をある壷に入れておく．

一般に玉 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ がいくつかの壷に入っていて B_{k+1} を入れるとき，空の壷に入る確率を p_k とする．すでに j 個の玉が入っている壷のひとつに入る確率を $(1-p_k)j/k$ とする．

$$p_k = \frac{\rho}{k-(k-1)\rho}, \quad 0<\rho<1,$$

として，$k=1, 2, \cdots$ と続ける．同じ壷に入った玉をクラスタとみなす．n 個の玉のクラスタ形成(クラスタリング)は $\{1, \cdots, n\}$ の分割である．

分割 $A=(A_1,\cdots,A_u)$, $\bigcup_{i=1}^{u} A_i=\{1,\cdots,n\}$
で $|A_i|=j$ の i の数を c_j とし、

$$c=c(A)=(c_1,\cdots,c_n),\quad c_j\geq 0,\quad \sum_{j=1}^{n} jc_j=n$$

を A のクラスタの大きさの指標とよぶ。

<u>定理</u>

上記確率クラスタリング過程の結果、n個の点の分割 A が生じる確率は $c=c(A)$ だけに依存し、

$$\rho^{u-1}(1-\rho)^{n-u}\prod_{j=1}^{n}((j-1)!)^{c_j}\Big/\prod_{i=2}^{n}(i-(i-1)\rho),$$

$$=\frac{\alpha^{u}}{\alpha^{[n]}}\prod_{j=1}^{n}((j-1)!)^{c_j},\quad u=\sum_{j=1}^{n}c_j,$$

$$\alpha=\frac{\rho}{1-\rho},\quad \alpha^{[n]}=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).$$

これから諸種の性質を導くことができる。

3. <u>ディリクレ過程</u>

壺の数を連続体濃度とし、その部分集合体に確率を導入し、それに従って新しい壺を選ぶとする。つまり壺を区別する代りに選択の確率規則を導入する。$n\to\infty$ のとき、この過程はディリクレ過程となる。(Blackwell and MacQueen 1973 A.S.) 第2節の議論をこの場合に適用するとディリクレ過程からの標本の諸性質が導ける。(Yamato 1991).

4. <u>課題</u>

定理の確率分布に従う2つの独立な確率分割の間の距離の確率分布の性質を調べたい。距離は Rand (1971, JASA) を用いる。

鹿児島大学 1991-12-6

正規化変換としての符号付き対数尤度比

西井 龍映（広島大学 総合科学部）　　柳本 武美（統計数理研究所）

指数型分布族に属する確率密度関数 $a(x)e^{\theta x-\kappa(\theta)}$ に従う確率変数 X の平均 μ は $\mu=\kappa'(\theta)$ で与えられる．この逆関数 $\theta=b(\mu)$ より pdf を

$$f(x;\mu)=a(x)e^{b(\mu)x-\kappa\{b(\mu)\}}$$

とかきなおす．このとき，次の平均に関する片側検定を考える．

$$H_0:\mu=\mu_0 \quad vs \quad H_1:\mu>\mu_0.$$

n 個のサンプルの標本平均 $\bar{X}$ に基づいて検定するとき，もっとも単純な方法は　$U=n^{1/2}\{\bar{X}-\mu_0\}/\kappa''\{b(\mu_0)\}^{1/2}$ の極限分布 $N(0,1)$ を用いることが考えられる．しかし，Uが $N(0,1)$ に収束するときの誤差のオーダーは $O(n^{-1/2})$ であり，平均や分散の調整では収束のオーダーを改良することは出来ない．ここでは正規分布への収束のオーダーが $O(n^{-1})$ 以上となるような検定統計量について考える．

1．正規化変換

$\bar{X}$ を正規化変換して検定統計量を構成する．すなわち

$$T(\kappa'(\theta))=\int\{\kappa''(\theta)\}^{2/3}d\theta$$

で定義される関数 $T(x)$ を用いて

$$V=n^{1/2}\{T(\bar{X})-T(\mu_0)\}/\{\kappa''(\theta_0)^{1/2}T'(\mu_0)\},\quad \theta_0=b(\mu_0)$$

と変換する．$\kappa_i=d^i\kappa(\theta_0)/d\theta^i\{\kappa''(\theta_0)\}^{-i/2}$ とおくとき Vの漸近平均，分散

$$E(V)=-n^{-1/2}\kappa_3/6-n^{-3/2}(21\kappa_3{}^3-20\kappa_3\kappa_4+3\kappa_5)/72+O(n^{-5/2})\equiv m_{NT}+O(n^{-5/2})$$

$$\begin{aligned}Var(V)=1&+n^{-1}(3\kappa_3{}^2-2\kappa_4)/6+n^{-2}(5551\kappa_3{}^4-7728\kappa_3{}^2\kappa_4+1539\kappa_3\kappa_5\\&+1170\kappa_4{}^2-162\kappa_6)/1944+O(n^{-3})\equiv s_{NT}{}^2+O(n^{-3}),\end{aligned}$$

で V を基準化した検定統計量の分布は次のように近似される．

定理1．　$O(n^{-2})$ の項を省略して次を得る．

$$\begin{aligned}Pr\{(V-m_{NT})/s_{NT}\le v\}&=\Phi(v)+[-n^{-1}(4\kappa_3^2-3\kappa_4)H_3/216\\&+n^{-3/2}\{(134\kappa_3{}^3-144\kappa_3\kappa_4+27\kappa_5)H_2/324+(40\kappa_3{}^3-45\kappa_3\kappa_4+9\kappa_5)H_4/1620\}]\phi(v)+O(n^{-2}).\end{aligned}$$

ただし $\Phi(v)$ は標準正規分布関数，$\phi(v)=\Phi'(v)$, $H_i=(-d/dv)^i\phi(v)/\phi(v)$（エルミート多項式）である．

2．符号付き対数尤度比

尤度関数を $L(\mu)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\mu)$ とおくと，μ の MLE は $\bar{X}$ となるため，尤度比は $LR=L(\bar{X})/L(\mu_0)$ となる．そこで符号付き対数尤度比を

$$W=sgn(\bar{X}-\mu_0)(2logLR)^{1/2}=sgn(\bar{X}-\mu_0)[2n\{b(\bar{X})\bar{X}-b(\mu_0)\bar{X}-\kappa(b(\bar{X}))+\kappa(b(\mu_0))\}]^{1/2}$$

と定義すれば，帰無仮説の下で漸近的に $N(0,1)$ に従う．Wの漸近平均，分散

$$E(W)=-n^{-1/2}\kappa_3/6-n^{-3/2}(50\kappa_3{}^3-45\kappa_3\kappa_4+6\kappa_5)/240+O(n^{-5/2})\equiv m_{LR}+O(n^{-5/2}),$$

$$Var(W)=1+n^{-1}(14\kappa_3{}^2-9\kappa_4)/36+n^{-2}(1300\kappa_3{}^4-1725\kappa_3{}^2\kappa_4+240\kappa_4{}^2+324\kappa_3\kappa_5-30\kappa_6)/720+O(n^{-3})$$

$$\equiv {s_{LR}}^2 + O(n^{-3})$$

よりつぎのように２通りの基準化を考える.

$$W_1 = (W - m_{LR})/s_{LR}, \qquad W_2 = W/({s_{LR}}^2 + {m_{LR}}^2)^{1/2}.$$

定理２.　$O(n^{-2})$ の項を省略して次を得る.

$$Pr\{W_1 \le v\} = \Phi(v) + n^{-3/2}(1660\kappa_3^3 - 1755\kappa_3\kappa_4 + 324\kappa_5)H_2\phi(v)/6480 + O(n^{-2}).$$

$$Pr\{W_2 \le v\} = \Phi(v) + [n^{-1/2}\kappa_3/6 + n^{-3/2}(125{\kappa_3}^3 - 120\kappa_3\kappa_4 + 18\kappa_5)/720$$
$$+ n^{-3/2}(550{\kappa_3}^3 - 585\kappa_3\kappa_4 + 108\kappa_5)H_2/2160]\phi(v) + O(n^{-2}).$$

W_1の分布は $O(n^{-1})$ まで $N(0,1)$ と一致するため, 正規化変換に基づく V を基準化した統計量より早く正規分布に近づく. オーダーの評価は Barndorff-Nielsen(1986) が求めている. 尤度比は W^2であるが, 漸近分布である ${\chi_1}^2$ 分布に $O(n^{-1})$ のオーダーでしか収束しない. ところが Wを基準化した W_1や W_2の自乗は $O(n^{-2})$ で収束する. ${W_2}^2$はバートレット調整をした尤度比統計量である. ここで W_2が正規分布に $O(n^{-1/2})$ で収束することに注意すると興味深い事実である.

３. 具体例

$\alpha \le 2$ を満たす αに対して, 確率密度関数が

$$f_\alpha(x;\lambda,\theta) = a_\alpha(x;\lambda)e^{\lambda\{\theta x - \kappa_\alpha(\theta)\}}, \quad \kappa_\alpha(\theta) = (\alpha-1)\alpha^{-1}\{\theta/(\alpha-1)\}^\alpha, \qquad \lambda > 0$$

で与えられる分布族を 巾分散関数を持つ Exponential Dispersion (ED) Model といい, $ED^{(\alpha)}$ で記す. ($a_\alpha(x;\lambda)$ については Nishii(1990) を参照). $X \sim ED^{(\alpha)}$ の正規化変換は $X^{(1-2\alpha)/(3-3\alpha)}$ である. 例えば

ガンマ分布	$\alpha = 0$,	の正規化変換	$X^{1/3}$,
逆ガウス分布	$\alpha = 1/2$,	の正規化変換	$logX$,
正規分布	$\alpha = 2$,	の正規化変換	X,
ポアソン分布	$\alpha = -\infty$,	の正規化変換	$X^{2/3}$.

λはサンプルサイズ n と同じような役割を果たす. λで展開して定理１, ２の展開式を得るが, 特に $\alpha = 0$ (ガンマ分布) の時, 正規化変換と符号付き対数尤度比 はそれぞれ次式となる.

$$V = 3\lambda^{1/2}\{(X/\mu_0)^{1/3} - 1\}, \qquad W = sgn(X - \mu_0)[2\lambda\{X/\mu_0 - log(X/\mu_0) - 1\}]^{1/2}.$$

このとき分布の近似式は

$$P\{(V + \lambda^{-1/2}/3)/(1 - 13\lambda^{-2}/243)^{1/2} \le v\} = \Phi(v) + [\lambda^{-1}H_3/108 - \lambda^{-3/2}(2H_2/81 + H_4/405)$$
$$+ \lambda^{-2}(17H_3/1944 - H_7/23328)]\phi(v) + O(\lambda^{-5/2})$$
$$P\{(W + \lambda^{-1/2}/3 + \lambda^{-3/2}/60)/(1 + \lambda^{-1}/18 - \lambda^{-2}/90)^{1/2} \le v\} = \Phi(v) - \lambda^{-3/2}H_2\phi(v)/1620$$
$$+ 7\lambda^{-2}H_3\phi(v)/6480 + O(\lambda^{-5/2})$$

となる.

引用文献

Barndorff-Nilesen, O. E. (1986). Inference on full or partial parameters based on the standardized signed log likelihood ratio. Biometrika 73, 307-322.

Nishii, R. (1990). The relation between the normalizing Box-Cox transformations and the exponential dispersion models with power variance functions. Tech. Repo. #279, Statistical Research Group, Hiroshima University.

線形正準リンク回帰モデルにおける推測

統計数理研究所　柳本　武美
岡山理科大学　山本　英二

1．序

回帰分析は統計手法の中でも最も頻用されている。多くの場合

$$x_i \sim L(\mu_i,\ \theta)$$

とする。ここで μ_i は平均、θ は拡散母数である。そして μ_i, あるいはその関数形 $g(\mu_i)$, が $\beta' z_i$ となる線形モデルを仮定する。分布 L が正規分布の場合には分散分析に代表される標準的な手法がある。

本講演では正準リンク回帰モデルの有用性を強調する。また推定関数の理論を援用することによって新しい推測法を提案する。この推測法は正規分布の標準的な手法、Mantel-Heanszel 推定、Mantel 検定を包含する。２項分布の場合にはこれを拡張し、ガンマ分布の場合には一連の新しい手法を導入する。

2．線形正準リンク回帰モデル

密度関数を

$$\rho(x;\pi,\theta) = \exp[\{c(\mu)(x-\mu) + C(\mu)\}/\theta + b(x,\theta)]$$

とする。ただし $C'(\mu) = c(\mu)$。上式において代表的な分布では $b(x,\theta) = C(x)/\theta + a(x) + b(\theta)$ と書けることに注意する。また本質的に Exponential dispersion model に同等である。第 i 観測値が $x_i \sim p(x;\mu_i,\theta)$ であり、$c(\mu_i) = \alpha + \beta z_i$ を仮定するとき、（連続型の）線形正準リンク回帰モデルと呼ぶ。

確率関数が、 $d(C(\mu,\theta))/d\mu = c(\mu,\theta)$ として

$$p(x;\mu,\theta) = \exp\{c(\mu,\theta)(x-\mu) + C(\mu,\theta) + b(x,\theta)\}$$

であって、$x_i \sim p(x;\mu_i,\theta)$ さらに $c(\mu_i,\theta) = \alpha + \beta z_i$ となるとき、（離散型の）線形正準リンク回帰モデルと呼ぶ。このとき θ が既知であると仮定することが多い。

様々な良い性質がある。代表的な正準リンク関数 $c(\mu)$, $c(\mu,\theta)$ を

掲げると

正規分布	μ
ガンマ分布	$-1/\mu$
負の2項分布	$\log\{\mu/(1+\theta\mu)\}$

3．推測法の構成

ここでは推定関数の理論を援用してモーメント法型の推定量、検定量を導出する。また前節の3分布に限る。またθは既知であると仮定する。

i) 観測値の pair x_i, x_j から不偏な推定関数を構成する。

ガンマ分布の場合 $g(x_i, x_j; \beta) = x_i - x_j - \beta(z_i - z_j)x_i x_j$

ii) $g(\underline{x};\beta) = \Sigma\ w(i,j)g(x_i, x_j;\beta)$ のウェイト $w(i,j)$ を求める。

$g(\underline{x};\beta) = 0$ で β を推定する。

iii) $\mu\ (=\Sigma\mu_i)$ を Σx_i で推定する。

$\hat{\mu}$ と $\hat{\beta}$ から $\hat{\alpha}$ を求める。

iv) $V\{g(\underline{x};\beta)\}$ の不偏な推定量を求める。

$T = g^2(\underline{x};\beta)/\hat{V}\{g(\underline{x};\beta)\}$ から検定統計量と信頼区間を得る。

演者らの関連した研究としては以下がある。

(1) ----- : Combining moment estimates of a parameter common through strata. (with discussion) J. Statist. Plan. Inf., 25, 187-198, 1990.

(2) ----- and Yamamoto, E.: The role of unbiasedness in stimating functions. In Estimating Function (ed. V.P. Godambe) Oxford University Press, 89-101, 1991.

(3) Yamamoto, E. and -----: Statistical methods for the beta-binomial model in teratology. To appear in Env. Health Presp.

(4) -----: The Mantel-Haenszel statistics for the extended odds ratio in the negative binomial distribution. To appear in J. Japan Statist. Soc.

(5) -----: and Yamamoto, E.: An estimating function approach to the linear canonical link regression model. (in preparation)

Nonparametric Approach for Vector Time Series

大阪大学基礎工学部　谷口正信
鹿児島大学教養部　近藤正男

本報告では，必ずしも正規とは限らないベクトル値過程の汎関数に関する検定問題を議論した。

$z(t) = (z_1(t), \cdots, z_p(t))'$ を平均 0 の p 次元定常過程とする．またこの spectral density 行列を $f(\lambda)$ とする．ここで次の検定問題を考える．

$$H : \int_{-\pi}^{\pi} K\{f(\lambda)\} d\lambda = c,$$

$$A : \int_{-\pi}^{\pi} K\{f(\lambda)\} d\lambda \neq c.$$

ここに $K\{\cdot\}$ はなめらかな関数で c は与えられた定数．さて $\hat{f}_n(\lambda)$ を $f(\lambda)$ のノンパラメトリックな推定量とする．この問題に関して $\int_{-\pi}^{\pi} K\{\hat{f}_n(\lambda)\} d\lambda$ を標準化した検定統計量 T_n を提案した．この T_n に対して spectral density matrix の列 $g_n(\lambda) = f(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{n}} a(\lambda)$ のもとでのある種の漸近効率を定義した．一般に，この漸近効率は 4次のキュムラント spectral density 行列に依存する．しかし K と f がある条件をみたすとき，この漸近効率が 4次の

キュムラント spectral density に依存しなくなる。
このための十分条件を与えた。
我々の検定問題は一見、特殊な問題に見えるが極めて種々の応用をもつように思われる。応用として次の3つを考えた。

(1) Measure of linear dependence.

(2) Time Series における主成分分析の主成分誤差に関する検定。

(3) 多変量時系列の2つ成分間の interrelation の検定。

我々のアプローチの merit は次の点である。

(1) パラメトリックな構造を仮定しなくてよい。

(2) $\hat{f}_n$ を積分すると $\sqrt{n}$ - consistency が recover されるので parametric な approach と同等のよさが期待できる。

Majorization 不等式とその応用

神戸大学教養部　垣内逸郎
南山大学経営学部　木村美善

0. 序　本報告では、(1) ある Majorization 不等式が Kimura-Kakiuchi (1989) の定理を用いて導びかれること (2) この Majorization 不等式を用いて Rieder (1978) の局所漸近モデルの下で、k標本順位統計量のベクトルがあるタイプの集合内の値を取る漸近的確率の上界と下界が得られること (3) この上界と下界から k標本の近似的同質性に対する漸近的有意水準α検定が構成でき、その漸近的最小検出力の下界が得られことを与えた。

1. Majorization 不等式　Ω_0 を $\widehat{\Omega} = \{\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \mid \sum_{i=1}^k \mu_i = 0\}$ のある空でない部分集合とし、α_r, β_r $(r = 1, \ldots, k)$ を次のように定義する。

$$\alpha_r = \inf\{\textstyle\sum_{i=1}^r \mu_{0[i]} \mid \boldsymbol{\mu}_0 \in \Omega_0\} \qquad \beta_r = \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^r \mu_{0[i]} \mid \boldsymbol{\mu}_0 \in \Omega_0\}$$

ここで、$\mu_{0[1]} \geq \cdots \geq \mu_{0[k]}$ は $\boldsymbol{\mu}_0$ の成分を大きい方から大きさの順に並べたものとする。このとき、Ω_0 を含む集合 Ω と $\mathbf{R}^k$の２つのベクトル $\boldsymbol{\mu}_M$, $\boldsymbol{\mu}(s)$ を次のように与える。

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &\Omega = \{\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \mid \alpha_r \leq \sum_{i=1}^r \mu_{[i]} \leq \beta_r, r = 1, \ldots, k\} \\ &\boldsymbol{\mu}_M = (\beta_1 - \beta_0, \beta_2 - \beta_1, \ldots, \beta_k - \beta_{k-1}) \\ &\boldsymbol{\mu}(s) = (\alpha_1 - \alpha_0, \ldots, \alpha_s - \alpha_{s-1}, -\frac{\alpha_s}{k-s}, \ldots, -\frac{\alpha_s}{k-s}), \quad s = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

ただし、$\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_k = \beta_k = 0$ とし、$\mu_{[1]} \geq \cdots \geq \mu_{[k]}$ は $\boldsymbol{\mu}$ の成分を大きい方から大きさの順に並べたものとする。

ある $s\,(= 1, \ldots, k)$ に対し、次の条件を考える。

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &\alpha_r - \alpha_{r-1} \geq \alpha_{r+1} - \alpha_r \quad r = 1, \ldots, s-1 \\ &\alpha_s - \alpha_{s-1} \geq \alpha_{r+1} - \alpha_r \quad r = s, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

このとき、(1.1) で定義された Ω は、Majorization の順序に基づき得られる Ω_0 を含む最小の集合であり、$\boldsymbol{\mu}_M$ は Ω_0 のすべての要素を majorize する最小のベクトル, $\boldsymbol{\mu}(s)$ は Ω_0 のすべての要素によって majorize される最大のベクトルであることがわかる。従って、Kimura-Kakiuchi (1989) の定理により次の二つの Majorization 不等式が与えられる。

定理　$\sum_{i=1}^k Z_i = 0$ となる *exchangeable* な確率変数 $Z_1, \ldots, Z_k$ に対し、$(Z_1, \ldots, Z_{k-1})$ が *Schur-concave* な同時密度関数を持つものとする。$D \subset \mathbf{R}^k$ は、$\mathbf{x} \in D$ かつ $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} \in D$ を満たすある集合とする。このとき、次の確率不等式 (i), (ii) が成り立つ。

(i) すべての $\boldsymbol{\mu} \in \Omega$ に対し、

$$\Pr\{\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu} \in D\} \geq \Pr(\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}_M \in D).$$

(ii) 条件 (1.2) が満たされるなら、すべての $\boldsymbol{\mu} \in \Omega$ に対し、

$$\Pr\{\mathrm{Z}+\boldsymbol{\mu} \in D\} \le \Pr(\mathrm{Z}+\boldsymbol{\mu}(s) \in D).$$

ここで、$\mathrm{Z}=(Z_1,\dots,Z_k)$, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_k)$ とする。

2. k標本順位統計量に関する Majorization 不等式　実数直線上の連続分布関数 $G_{i1}(x),\dots,G_{in}(x)$ に従う互いに独立な確率変数を $X_{i1},\dots,X_{in}$ とする ($i=1,\dots,k$)。$N(=kn)$ 個の合併標本 $X_{11},X_{12},\dots,X_{kn}$ を小さい方からならべるとき、X_{ij} の順位を R_{ij} とする ($i=1,\dots,k, j=1,\dots,n$)。

分布関数 $G_{ij}(x)$ が、Rieder (1977) により導入された縮小近傍 $\mathcal{P}(\theta_{ni};\epsilon_n,\delta_n)$ 内を動くとき、$N(=kn)$ 個の合併標本 $X_{11},X_{12},\dots,X_{kn}$ は、近傍 $\mathcal{P}^{(N)}(\boldsymbol{\theta}_n;\epsilon_n,\delta_n)$ 内を動くものとする。

関数 $a:(0,1)\to(-\infty,+\infty)$ により生成されるスコア $a_N(r)$ を持つ k標本順位統計量 $T_{Ni}=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_N(R_{ij}),(i=1,\dots,k)$ の極限分布を考えるとき、k標本順位統計量に関する Majorization 不等式が次のように求められる。

$$\begin{aligned}
&n^{1/2}(T_{N1}-\bar{a}_N,\dots,T_{Nk}-\bar{a}_N)\\
&=n^{1/2}(T_{N1}-\mu_{N1},\dots,T_{Nk}-\mu_{Nk})+n^{1/2}(\mu_{N1}-\bar{a},\dots,\mu_{Nk}-\bar{a})\\
&\qquad+n^{1/2}(\bar{a}-\bar{a}_N,\dots,\bar{a}-\bar{a}_N)
\end{aligned}$$

と書くとき、$n^{1/2}(T_{N1}-\mu_{N1},\dots,T_{Nk}-\mu_{Nk})$ は漸近的に正規分布に従い、$n^{1/2}(\bar{a}-\bar{a}_N)=o(1)$ であるので、$n^{1/2}(T_{N1}-\bar{a}_N,\dots,T_{Nk}-\bar{a}_N)$ の極限分布は、ベクトル $n^{1/2}(\mu_{N1}-\bar{a},\dots,\mu_{Nk}-\bar{a})$ の動きにより決まることがわかる。ここで、$\bar{a}_N=N^{-1}\sum_{r=1}^{N}a_N(r)$　とする。そこで、

$$\Omega_0=\{\lim_{n\to\infty}n^{1/2}(\mu_{N1}-\bar{a},\dots,\mu_{N1}-\bar{a})\mid W_N\in\mathcal{P}^{(N)}(\boldsymbol{\theta}_n;\epsilon_n,\delta_n),\ n=1,2,\dots\}$$

として、(1.1) で与えられる Ω, $\boldsymbol{\mu}_M$, $\boldsymbol{\mu}(s)$ を考えると、Majorization 不等式が求まり、極限分布の動く範囲と限界が与えられれる。

Rieder (1981) は、確率標本が近傍内にあるとき、1 標本,2 標本の位置母数に対する頑健な順位検定の問題を議論した。ここでは、k標本が同じ近傍内にあるという近似的同質性 (approximate equality) の検定問題に対する k標本順位検定を考える。このとき、$n^{1/2}(T_{N1}-\bar{a}_N,\dots,T_{Nk}-\bar{a}_N)$ に基づく k標本順位検定に対し、漸近的最大有意水準と漸近的最小検出力を得るために、k標本順位統計量に関する Majorization 不等式 (i), (ii) がそれぞれ適用され、漸近的有意水準 α の順位検定が与えられる。

参考文献

Kimura, M. and Kakiuchi, I. (1989). A majorization inequality for distributions on hyperplanes and its applications to test for outliers. *J. Statist. Plann. Inference* **21** 19-26

Rieder, H. (1977). Least favorable pairs for special capacities. *Ann. Statist.* **5** 909-921

Rieder, H. (1981). Robustness of one- and two-sample rank tests against gross errors. *Ann. Statist.* **9** 245-265

多変量極値統計量の漸近収束の理論とその応用

神戸商船大学　　　　高橋 倫也

ここでは，独立で同一分布に従う多次元確率標本の極値統計量の漸近挙動とその応用について報告する．

1． 多次元極値統計量とその漸近分布

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は独立で同一分布をする k 次元確率ベクトルで，その共通の分布関数を $F(x)$ とする．また，$X_n=(X_{1n}, \cdots, X_{kn})$ とし

$$Z_{in}=\max_{1\leqq j\leqq n} X_{ij}, \qquad Z_n=(Z_{1n}, \cdots, Z_{kn})$$

とおく（即ち，ここでは成分ごとの最大値を考える）．以下，演算は成分ごとに行い，不等式は成分ごとに成立すると仮定する．

このとき，ベクトル列 $a_n>0$，$b_n \in R^k$ $(n\geqq 1)$ が存在して，

(1)　　$(Z_n-b_n)/a_n \xrightarrow{W} H(x)$　：非退化な分布

（ここで，Hが非退化な分布とはHの第 i 周辺分布を H_i とするとき，H_i が非退化な分布，$i=1, \cdots, k$，であることを意味する．）となるとき，Hを多変量極値分布といい，FはHの吸引領域に属する（$F\in D(H)$）という．

2． 多変量極値分布の特徴づけ

定理　[Takahashi (1987, 1988)]

H は多変量極値分布とする．

$$H(x)=H_1(x_1)\cdots H_k(x_k), \quad x\in R^k$$

となるための必要十分条件は，ベクトル $p=(p_1, \cdots, p_k)\in R^k$ で

$$0<H_i(p_i)<1, \quad i=1, \cdots, k,$$

$$H(p)=H_1(p_1)\cdots H_k(p_k)$$

を満たすものが存在することである．

3． 収束の性質

定理　[Takahashi (1991)]

$$F^n(a_n x+b_n) \xrightarrow{W} H_1(x_1)\cdots H_k(x_k)$$

であるための必要十分条件は

$$F_i^n(a_{in}x_i+b_{in}) \xrightarrow{W} H_i(x_i), \quad i=1, \cdots, k$$

かつ $\exists\ p=(p_1, \cdots, p_k)\in R^k$

s.t. $0<H_i(p_i)<1, \quad i=1, \cdots, k$

$$F^n(a_n p+b_n) \to H_1(p_1)\cdots H_k(p_k)$$

である．

系　Fを2次元分布とし，H_1，H_2を1次元極値分布とする．このとき，次の各々は同値である．

1）　$F \in D(H)$，$H(\cdot,\cdot) = H_1(\cdot)H_2(\cdot)$；

2）　$F_i \in D(H_i)$，$i = 1, 2$　かつ

$$\lim_{t \uparrow x^\circ} \frac{1 - F(t, \phi(t))}{1 - F_1(t)} = 2;$$

3）　$F_i \in D(H_i)$，$i = 1, 2$　かつ

$$\lim_{t \uparrow x^\circ} \frac{\overline{F}(t, \phi(t))}{1 - F_1(t)} = 0;$$

4）　$F_i \in D(H_i)$，$i = 1, 2$　かつ

$$\lim_{t \uparrow x^\circ} \frac{\overline{F}(t, \phi(t))}{1 - F(t, \phi(t))} = 0;$$

ここで，$x^\circ = \sup\{x : F_1(x) < 1\} \leq \infty$，$\phi(t) = \overline{F}_2^{-1}\overline{F}_1(t)$，$\overline{F}_2^{-1}(p) = \inf\{x : F_2(x) \geq 1 - p\}$，$\overline{F}_1(x) = 1 - F_1(x)$
$\overline{F}(\cdot,\cdot)$はFの生存関数．

4．　2変量極値分布：パラメトリック モデル

Pickands の多変量極値分布の表現に基づく，多変量極値分布のパラメトリックモデルについての研究は Smith et al.(1990)と Tawn(1988)にある．

参考文献

Smith,R.L., Tawn,J.A. and Yuen,H.K.(1990). Statistics of multivariate extremes. Int. Statist. Rev. 58, 47-58.

Takahashi,R.(1987). Some properties of multivariate extreme value distributions and multivariate tail equivalence. Ann. Inst. Statist. Math. 39, 637-647.

Takahashi,R.(1988). Characterization of a multivariate extreme value distribution. Adv. Appl. Probab. 20, 235-236.

Takahashi,R.(1991). Asymptotic independence and perfect dependence of vector compornents of multivariate extreme statistics.
(to appear in Statist. & Probab. Letters)

Tawn,J.A.(1988). Bivariate extreme value theory: Models and estimation. Biometrika 75, 397-415.