（8）サンプリング・リサンプリング理論とその応用

一般化層別によるサンプリング・デザインと推定

文教大学 国際学部　多賀保志

サンプリング・デザイン $\{p(s),\ s \in S\}$ と，それより得られる標本 s に基づく母集団パラメター(母平均や母総計など)の推定量 $t(s)$ との組 $(p,\ t)$ をストラテジーというが，想定されるストラテジーの層の中でなるべく良いものを選ぶ際に，統計的決定理論の立場から様々な議論がされてきた．しかし，その多くは理論的にはしり，実際に応用するにはいくつかの障壁があった．

この小論では，実用的観点から応用可能でかつなるべく良い(最適に近い)サンプリング・デザインと推定法を提案するが，その主眼点は次のようである．

1) 復元サンプリング(例えば Hansen-Hurwitz ストラテジー)と非復元サンプリング(Horvitz-Thompson ストラテジー)とを統一的に議論するため，いわゆる第1次および第2次の包含確率の概念を拡張することにより，両者の推定量の分散を同じ形式で扱えるようにした(線形不偏推定量に限定して)．

2) 推定量の分散をなるべく小さくするには，拡張された第1次の包含確率 π_i を目的変量 y_i にほぼ比例するように設定することが大切であるが，そのためには目的変量 y_i と相関の高い補助変量 x_i を見つけて，$\pi_i = n\ x_i / \sum x_i$ とすればよい．そのような x_i

が見つからない場合には，線形不偏推定量にストラテジーを限定すると，単純ランダム・サンプリングが *mini-max* 解となることが示される．

3) 推定量の良さを比較するには，まず π_i を推定しておき，つぎに第2次包含確率(拡張された)をうまく設定すればよい．しかし，指定された π_i を満たすサンプリング・デザイン p の設定が，非復元サンプリングでは実現が困難である．そこで一般化層別を新しく導入することにより，その難点を解消するとともに，ほぼ最適に近いストラテジー（p^*，t^*）を求めることができた．

判別分析における統計的リサンプリング法

統計数理研究所　小西貞則
千葉大学病院　本多正幸

判別分析を実行するに当たっては、あらかじめどの群に属するか分かっている観測データに基づく判別方式の定式化と、将来観測されるデータに対する誤判別率の推定が重要な問題となる。誤判別率の推定に関しては、これまでに様々な手法が提案されてきた。基本的には、二つのアプローチの仕方があるといえる。一つは、各群(母集団)の変動を何らかの確率分布で近似して，解析的に行なうパラメトリックな方法、一つは、交差検証法(Cross-validation)に代表されるノンパラメトリックな方法である。

前者に対しては、多変量正規母集団の仮定のもとで、主として線形判別関数、二次判別関数を用いた判別方式に対する誤判別率の推定法が研究されてきた。後者のノンパラメトリックな誤判別率の推定法に関しては、実際上しばしば用いられる見かけ上の誤判別率の過小推定傾向、交差検証法による推定値の変動の大きさが指摘されてきた。しかし、ノンパラメトリックな方法は、その適用範囲の広さと柔軟さのゆえに、より一層の研究が望まれるところであった。

このような状況の中で、Efron (1979, 1982) によって紹介されたブートストラップ法は、特定の母集団確率分布を想定することなく、種々の推定量の誤差を数値的に捉えることができるということで注目を集めた。さらに、Efron (1983, 1986) は、各種の分析手法に於ける予測誤差の推定問題を理論的に定式化し、従来から用いられてきた交差検証法等いくつかの手法との比較を通して、ブートストラップ法の良さを示した。判別分析に於ける誤判別率すなわち予測誤差推定へのブートストラップ法の応用は、いわゆる見かけ上の誤判別率に対するバイアス補正という観点から研究が進められてきた (McLachlan (1980), Konishi and Honda (1990), McLachlan (1987) を参照されたい)。

本研究では、統計的リサンプリング法、特にブートストラップ法の判別分析における誤判別率推定への応用を取り上げ、以下のような研究報告を行なった。

1. 特定の判別関数、判別手法には限定せず、誤判別率（予測誤差）の一つの推定法である見かけ上の誤判別率の理論的意味付けと、そのブートストラップバイアス補正法の考え方を示した。

2. 予測誤差推定法を統計的数値計算法の枠組みの中で捉え、ブートストラップ法に基づく数値的アプローチと正規理論に基づく解析的アプローチとの相違点を示し、数値的計算法の有効性について考察した。

3. 医学に於ける鑑別診断の可能性を検討するため、三種類のデータを分析した結果を報告した。判別関数としては、線形および二次判別関数を用い、予測誤差推定法としては、見かけ上の誤判別率とそのブートストラップ補正法、交差検証法を適用した。線形判別関数に対しては、以上に加えて、多変量正規性の仮定のもとで導かれた漸近展開式 (Okamoto (1963), McLachlan(1974, 1976)) を併せて検討した。その結果、見かけ上の誤判別率のブートストラップバイアス補正の必要性、交差検証法の過大推定の傾向性など、各種の推定法の性質について報告した。さらに、予測誤差推定値に基づく線形判別関数と二次判別関数の選択の可能性を示唆し、データの特性を考慮にいれた体系的な考察を今後の研究課題とした。

参考文献

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife, *Ann. Statist.* **7**, 1-26.

Efron, B. (1982). *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans,* SIAM, Philadelphia.

Efron, B. (1983). Estimating the error rate of a prediction rule: improvement on cross-validiation, *J. Amer. Statist. Assoc.* **78**, 316-331.

Efron, B. (1986) How biased is the apparent error of a prediction rule?. *J. Amer. Statist. Assoc.* **81**, 461-470.

Konishi, S. and Honda, M. (1990) Comparison of procedures for estimation of error rates in discriminant analysis under nonnormal populations, *J. Statist. Comput. Simul.* **36**, 105-115.

McLachlan, G. J. (1974). An asymptotic Unbiased technique for estimating the error rates in discriminant analysis. *Biometrics* **30**, 239-249.

McLachlan, G. J. (1976). The bias of the apparent error rate in discriminant analysis. *Biometrika* **63**, 239-244.

McLachlan, G. J. (1980). The efficiency of Efron's "bootstrap" approach applied to error rate estimation in discriminant analysis, *J. Statist. Comput. Simul.* 11, 273-279.

McLachlan, G. J. (1987). Error rate estimation in discriminant analysis:recent advances, *Advances in Multivariate Statistical Analysis* (A. K. Gupta, ed.), D. Reidel, 233-252.

Okamoto, M. (1963). An asymptotic expansion for the distribution of the linear discriminant function, *Ann. Math. Statist.* **34**, 1286-1301.

Higher Order Asymptotic Theory for Discriminant Analysis in Exponential Families of Distributions

大阪大学 基礎工学部　谷 口 正 信

本報告では，multivariate observation X を２つの母集団 π_1 : $p(\mathbf{x};\ w^{(1)}) \in S$ と π_2 : $p(\mathbf{x};\ w^{(2)})$ に分類する問題を取り扱った．ここに S は指数型分布族とする．また $w^{(1)}$ と $w^{(2)}$ は未知母数である．母集団 π_1 と π_2 からそれぞれ training sample が得られているとする．$(w^{(1)},\ w^{(2)})$ の training sample による推定量のクラスを T とする．

本報告では classification statistics のクラスを

$$D = [\ W \mid W = \log\{p(\mathbf{x};\ w^{(1)}) \ / \ p(\mathbf{x};\ w^{(2)})\},\quad (w^{(1)},\ w^{(2)}) \in T\ ],$$

を定義して，誤判別確率に関する高次の漸近理論を展開した．すなわち $W \in D$ による誤判別確率を $M(W)$ とする．まず $EM(W) = M_1 + 1/n\ M_2 + 1/n^2\ M_3 + o(n^{-2})$ と評価する．ここに n は training sample の size である．もし $W \in D$ が $O(n^{-k})$ オーダーまで最小にするとき W は k 次漸近的最良であると定義する．このとき次の結果が得られた．$w^{(1)}$, $w^{(2)}$ の推定量として MLE を用いると，それによって得られる classification statistic は１次漸近的最良である．同様に $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ の推定量として bias 調整した MLE より得られる classification statistic は２次漸近的最良である．

この結果の特殊ケースとして Anderson W. や Cochran-Bliss classification statistic や quadratic classification statistic は夫々の判別問題において2次漸近的最良であることが示された.

このアプローチのメリットは，考える分布のクラスが正規分布に限らないこと，また種々の判別の問題が統一的に取り扱えることにある.

最後に以上の結果が，曲指数族の判別問題に対しても valid であることが示された.

欠測値と外れ値の処理

立教大学　山口和範

今日、統計ソフトウェアの普及により、多変量解析の手法が手軽に利用できるようになってきているが、欠測値を含むデータに対しては、ほとんどの統計ソフトウェアが、欠測値を含む個体をすべて取り除き、残ったデータに対して通常の解析を行う方法のみをサポートしている。ところが、調査や観測の項目数が増えると、すべての変量について数値が得られる個体の数が著しく減少してしまい、完全データのみを利用した方法は情報の損失が多大になる場合がある。そこで、不完全データをも合理的に活用する工夫が必要となる。

一般に、欠測値の処理法は次のように大別される。

(1) 欠測値を含む個体をすべて取り除き、残った部分だけを解析に利用する。

(2) 欠測値を何らかの方法で埋め合わせを行い疑似的な完全データを作成し、それを解析する。

(3) 得られたすべての観測値の周辺尤度に基づき最尤法を利用する。

(2)と(3)の方法が不完全データの部分をも活用する方法であるが、(3)の方法においては、最尤推定量を求める際に不完全データの直接的な尤度の最大化は、極めて複雑な数値計算を要す。そこで、Dempster, *et al.*(1977) により提唱された、比較的単純な方法で尤度を最大化するEMアルゴリズムが利用されるわけであるが、その利用においても、独自のプログラムをその都度つくる必要性が出てくる。

そこで、あらかじめ何らかの方法で欠測値を埋め合わせ、疑似的な完全データを作成しておけば、解析においては既存の統計ソフトウェアが利用できる。

一方、外れ値に関する問題もデータ解析において、欠かすことのできない問題である。多くの統計モデルにおいて、分布の仮定として(多変量)正規分布が用いられるが、外れ値の混入によりその仮定は破綻してしまう。そこで、Dempster, *et al.*(1980), Rubin(1983), Little(1988)等では、正規分布より裾

の重い分布を正規分布の代わりに利用することにより、外れ値が推定値などへ与える影響を軽減させることができることを示している。また、山口(1990)やYamaguchi & Watanabe(1991) では、彼らの方法を経時測定データの解析や多変量解析の一手法である因子分析への応用を与えている。

Little(1988)や山口(1990)では、EMアルゴリズムの適用により、欠測値を含むようなデータに対しても解析ができるような方法を提示しているが、そこで取り扱われている欠測値の発生機構は *Missing at Random* である。欠測値の発生機構については、Rubin(1976)でその分類を行い、欠測機構を無視できる場合の十分条件を導いているが、現実には必ずしもその条件を満たすわけではなく、欠測機構を無視できない場合の欠測値の処理法が必要となる。Little & Rubin(1987)やRubin(1987)では、*Imputation*の方法を中心に欠測機構を無視できない場合の欠測値の処理法議論されている。

そこで本報告では、裾の重い分布を利用したロバスト推定法において、欠測機構を無視できない場合の *Multiple Imputation* の方法による欠測値の処理を考察した。

参考文献

Dempster, A.P., Laird, N. & Rubin, D.B.(1977) Maximum likelihood from imcomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, B39, 1-38.

Dempster, A.P., Laird, N.M. & Rubin, D.B.(1980) Iteratively reweighted least squares for linear regression when errors are normal/independent distributed, *Multivariate Analysis*-V, (Krishnaiah, P.R. ed.), 35-57.

Little, R.J.A.(1988) Robust estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values. *Applied Statistics*, **37**, 23-38.

Little, R.J.A. and Rubin, D.B.(1987) *Statistical Analysis with Missing Data*, Wiley.

Rubin, D.B. (1986) Inference and Missing Data, *Biometrika*, **63**, 581-592.

Rubin, D.B. (1987) *Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys*, Wiley.

山口和範(1990) 誤差項に多変量tと混滑多変量正規分布を仮定した経時測定データの解析, 計算機統計学, **3**, 11-22.

Yamaguchi, K. & Watanabe, M.(1991) A Robust Method in Factor Analysis, *Symbolic-Numeric Data Analysis and Learning*, Nova Science, New York.

戦後における官庁統計の発展と今後の対応

東京理科大学工学部　奥野 忠一
東洋大学経済学部　浅井　晃

1．はじめに

戦後のわが国官庁統計の発展を調査技術の面から辿ると，①昭和２０年代のランダム・サンプリングによる標本調査の導入，②昭和３０年代のコンピュータ利用によるデータ処理の効率化，③昭和４０年代後半からの統計審議会調査技術開発部会の諸種の調査技術の開発研究，が最も顕著なものとして挙げられる．そもそも，統計調査というものは，時代の変遷を時系列的に表章する保守性と，それぞれの時代のニーズに対応しかつ将来予測に資する進歩性を，兼ね備えなければならない．必然的に調査項目が漸増し，また精細な統計の表章が増え，反面記入ミスが増えるとともに標本誤差が増大することになる．さらに，調査環境の悪化から調査拒否の増加，回収率の低下が深刻な問題になっている．これらが統計調査の抱える宿命といえよう．調査技術の進歩は，時宜に適し，将来への展望を持ち，かつ宿命を克服する，修法を開発することにある．その考えに立って，官庁統計の過去・現在を一瞥し，将来を展望することにする．

2．ランダム・サンプリングの導入

昭和２０年日本に進駐してきた米軍のスタッフのなかには，すぐれた統計の専門家がいて，日本経済再建のための統計の確立に寄与した．各省庁は，かれらの勧告を踏まえてランダム・サンプリングによる標本調査を開始したが，総理府統計局の「労働力調査」，厚生省の「栄養調査」などがそれにあたるが，ここでは農林省の「作付面積調査」について述べる．水稲の作付面積は戦前から申告・積上方式で調査されていたが，戦後の方が人手不足の戦中より約１０％少ないことが判明した．当時のきびしい供出制度の下でもヤミ米が横行していた事実と，一方食料援助を行なっている米軍の指摘もあって，実測することになった．最初昭和２２年には，利用できるフレームとしては全国5，０００万筆（地番ごとの田・畑）のリストから層化２段抽出した筆について実測を行なった．その結果は３‰の過小申告でしかなかった．もともと申告調査と同じフレームを利用したため，この程度の差しかえられなかったものと考えた．そこで翌昭和２３年の麦作についての予備調査の機に，長野県で地域抽出法による実測調査を試験的に行なった．地図上で小字程度の小地域を抽出単位として抽出し，抽出された小地域を実測する方法である．その実測値と申告面積と照合した結果，総合的に約９．１％の申告漏れがあるという所期の結果が得られた．その後多少の修正があり昭和２６年に完成したものになっている．（[1]）

3．コンピュータによるデータ処理の効率化

（１）コンピュータの導入　　昭和３０年代に入って，集計作業がパンチ・カード・システム（ＰＣＳ）によるコンピュータ化が図られ，結果公表の早期化を期したが，入力前の個票の審査などの業務がネックとなり，最初に期待したほどの早期化には至らなかった．その一方で，コンピュータ処理によるいわゆるきめつけ（Implimentation）が独り歩きしないかとの懸念があった．合計値と内訳の不一致，前月末の数字と今月初めの値との不一致，欠測値，特異値，などが検出されたときコンピュータが自動的に調整処理（キメツケ）をしてくれることは大変便利であるが，当初は十分検討されたアルゴリズムであっても，時間の経過とともに偏りを生ずる危険がある．

（２）データ・リンケージ　　最近数年間コンピュータ利用の拡大を目指して精力的に研究が進められているものにデータ・リンケージがある．同じ対象に対する異種の調査の結果を，個票レベルで結合し，情報を増し，精度を向上を図る方法である．

これを計画的に具体化した例はないが，厚生省が昭和６１年から，世帯対象のいくつかの指定統計を統合して，発足した世帯調査組織が，その適用の可能性を持っている．それは「国民生活基礎調査」（３年ごとに大規模調査，中間年は中規模調査）をマスター・サンプルとし，その副次標本を利用して「所得調査」「福祉調査」などを行なうものである．最近この調査でデータ・リンケージを行ない興味ある結果を得たという研究発表がある．発端は，「鹿児島は６０才以上の高齢者が多いにもかかわらず同居率が低い，これをどう解釈するか」であった．「国民生活基礎調査」では抽出単位である単位区内を悉皆調査する集落抽出法によっていたので，単位区内の名寄せを行なった結果，同一敷地内に住む老人世帯，いはば準同居世帯の存在が判明し，同居＋準同居を考えると特異性がないことが判明した．このことは「同居」の定義そのものの再検討を示唆している．（[2]）

４．調査技術開発部会の研究から

調査技術開発部会では，過去１８年の間に，各種推定法の改良，達成精度の計算方法，層別効果の評価，多変量解析法の応用，チェック・システム，データ・リンケージ，層別基準の再検討，などの研究を行なってきたが，ここでは比較的初期の多変量解析法を応用した２つを取り上げておく．

（１）多変量的推定法により調査対象の負担を軽減する試み　例えば，標本をほぼ同じ大きさの３群Ｇ１，Ｇ２，Ｇ３に分け，一方調査項目群も３群Ｑ１，Ｑ２，Ｑ３にわけ，Ｇ１には項目Ｑ１，Ｑ２を，Ｇ２には項目Ｑ１，Ｑ３を，Ｇ３には項目Ｑ２，Ｑ３をそれぞれ割り当て調査を実施する．各項目ごとの標本の大きさは標本全体の２／３しかないが，項目間の相関を考慮に入れた多変量的推定法で精度を向上させ，調査対象にとっては項目数が２／３になっているという計画である．実験調査の結果では，項目あたりの標本の大きさを少なくしたことによる精度の減少分の約１／３は回復でき，一方調査対象からの不完全回答の頻度が有意に少ない，という結果が得られている．（[3]）

（２）統計数字の審査方法に関する研究　　実験調査を通じて機械的に「統計的異常値検出法」を適用した場合の実証研究である．適用した方法は，１変量ごとの「スミルノフ・グラブス検定」，多変量的に「マハラノビス汎距離の最大値による検定」，「重回帰分析のスチューデント化残差の異常性の検定」であった．結果は，これらの手法がすべて正規母集団を前提にしたもので，それからのずれが判明しただけであった，これらを使うには，分布の吟味，層別，適切な変数変換が必要であった．

特に階層別平均を表章する場合に，注意を要するのは特異値の影響である．その点でロバストである Trimmed Mean などを官庁統計でも多用してもよいのではないか．

５．今後の課題　　さいごに，当面の技術開発として次のものを期待したい．

①多変量的推定法あるいは trimmed Mean を階層別及び全体の双方に用いた場合の整合性の問題．

②業務資料をフレームまたは補助情報としてもっと利用すること．

③データ・リンケージの活用，省庁内のみならず省庁間でも．

④間接測定の導入．

引　用　文　献

[1] 津村善郎：作付面積調査の後をたどって（一）「農林統計調査」昭和26年6月号

[2] 寺崎康博：準同居について，「国民生活基礎調査の総合的分析に関する研究」第61回日本統計学会大会（神戸）報告集　平成3年7月

[3] 浅井　晃：多変量的推定法により調査対象の負担を軽減する試み　昭和50年度調査技術開発報告書　昭和51年2月　全国統計協会連合会

Jackknifing and ratio estimation

防災科学技術研究所　河合　伸一
筑波大・数学系　赤平　昌文

１．はじめに

$(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ を大きさ n の無作為標本とし，X_i と Y_i $(i=1,\ldots,n)$ が $Y_i=\alpha+\beta X_i+U_i, E(X_i)=k_0\neq 0, E(U_i\,|\,X_i)=0, E(U_i^2\,|\,X_i)=n\delta$ $(i=1,\ldots,n)$，$E(U_iU_j\,|\,X_i,X_j)=0$ $(i\neq j;i,j=1,\ldots,n)$ を満たすとする．ここで，δ は定数で，$\delta=O(n^{-1})$ とする．$\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i/n, \bar{Y}=\sum_{i=1}^n Y_i/n$ とするとき，比 $\rho=E(\bar{Y})/E(\bar{X})=\beta+\alpha/k_0$ を推定する問題について考察する．ここでは ρ の推定量として，比推定量，ジャックナイフ推定量，最小２乗推定量による推定量を考え，また比推定量の偏り修正をしたものも含めて比較検討する．

２．推定量とその比較

ρ の推定量として，比推定量やジャックナイフ推定量が知られている．比推定量は，$r=\bar{Y}/\bar{X}=\beta+(\alpha+\bar{U})/\bar{X}$ で与えられる．一方，大きさ n の標本を，大きさ m の g 個のグループに分ける．よって，$n=mg$ である．ここで，$g\geq 2$ とする．各 $j=1,\ldots,g$ について，$\bar{X}_j'$, $\bar{Y}_j'$ を，j 番目のグループを除いた，残りのグループの標本平均とする．$r_j'=\bar{Y}_j'/\bar{X}_j'$ $(j=1,\ldots,g)$ とすると，ジャックナイフ推定量 r_{JK} は，$r_{JK}=gr-\{(g-1)/g\}\sum_{j=1}^g r_j'$ で与えられる．

また，ρ の推定量として，α,β をそれぞれの最小２乗推定量 $\hat{\alpha}_{LSE}$, $\hat{\beta}_{LSE}$ で推定したもの，すなわち，$\hat{\rho}=\hat{\beta}_{LSE}+\hat{\alpha}_{LSE}/k_0$ を考える．ここで，$\hat{\beta}_{LSE}=\{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})\}/\{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2\}, \hat{\alpha}_{LSE}=\bar{Y}-\hat{\beta}_{LSE}\bar{X}$ である．このとき，$E(\hat{\rho})=\rho$ となるので，$\hat{\rho}$ は ρ の不偏推定量である．

いま，$k_0=1$ として一般性を失わない．そこで $X_1,\ldots,X_n$ が互いに独立に，いずれも平均１，分散 σ^2，k 次のモーメント $\mu_k=E\{(X_i-1)^k\}$ $(i=1,\ldots,n;k=3,4,5,6)$ をもつ分布に従うと仮定する．このとき，$\hat{\rho}, r, r_{JK}$ の平均２乗誤差 (MSE) を $O(n^{-3})$ まで比較すると次の定理１のようになる．([2])

定理１．　$X_1,\ldots,X_n$ が互いに独立に，いずれも平均１，分散 σ^2，k 次のモーメント $\mu_k=E\{(X_i-1)^k\}$ $(i=1,\ldots,n;k=3,4,5,6)$ をもつ分布に従うと仮定する．このとき，$\hat{\rho}, r, r_{JK}$ の平均２乗誤差は，$O(n^{-3})$ までそれぞれ次のようになる．

$$MSE(\hat{\rho})=V(\hat{\rho})=\delta+\frac{\delta}{n}+O(n^{-3})$$

$$MSE(r)=\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left\{\frac{\alpha^2}{n^2}(-2\mu_3+9\sigma^4)+\frac{3\delta}{n}\sigma^2\right\}+O(n^{-3})$$

$$\begin{aligned}MSE(r_{JK})&=\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left\{\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{2g}{g-1}\sigma^4\right)+\frac{\delta}{n}\frac{g}{g-1}\sigma^2\right\}+O(n^{-3})\\&\geq\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left(\frac{2\alpha^2\sigma^4}{n^2}+\frac{\delta}{n}\sigma^2\right)+O(n^{-3})\qquad(g=n\text{ のとき})\end{aligned}$$

従って，$\hat{\rho}, r, r_{JK}$ ($g=n$ のとき) の平均２乗誤差を $O(n^{-3})$ まで比較すると次のようになる．
$\alpha\neq 0$, $\mu_3\leq(7/2)\sigma^4+\delta n\sigma^2/\alpha^2$ のとき，$MSE(\hat{\rho})\leq MSE(r_{JK})\leq MSE(r)$,
$\alpha\neq 0$, $\mu_3>(7/2)\sigma^4+\delta n\sigma^2/\alpha^2$ のとき，$MSE(\hat{\rho})\leq MSE(r)\leq MSE(r_{JK})$,
$\alpha=0$, $0<\sigma^2\leq 1/3$ のとき，$MSE(r_{JK})\leq MSE(r)\leq MSE(\hat{\rho})$,
$\alpha=0$, $1/3<\sigma^2\leq 1$ のとき，$MSE(r_{JK})\leq MSE(\hat{\rho})\leq MSE(r)$,
$\alpha=0$, $\sigma^2>1$ のとき，$MSE(\hat{\rho})\leq MSE(r_{JK})\leq MSE(r)$.

３．偏り修正した比推定量

定理１において $\hat{\rho}$ は ρ の不偏推定量であるが，比推定量 r およびジャックナイフ推定量 r_{JK} は高次の次数の偏りをもつ．すなわち

$$E(r)=\rho+\frac{\alpha\sigma^2}{n}-\frac{\alpha}{n^2}(\mu_3-3\sigma^4)+O(n^{-3})$$
$$E(r_{JK})=\rho+\frac{\alpha}{n^2}(\mu_3-3\sigma^4)+O(n^{-3})\quad(g=n\text{ のとき})$$

となる．そこで r と r_{JK} を比較するときには，r_{JK} は $o(1/n)$ まで偏りを持たないから，偏りを削減するように修正した上で行った方が望ましい．

まず，$\hat{\sigma}^2=\{1/(n-1)\}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ として，

$$r^*=r-\frac{1}{n}\hat{\alpha}_{LSE}\hat{\sigma}^2$$

を考えると，$\hat{\alpha}_{LSE}\hat{\sigma}^2$ が $\alpha\sigma^2$ の不偏推定量になるから，

$$E(r^*)=\rho-\frac{\alpha}{n^2}(\mu_3-3\sigma^4)+O(n^{-3})$$

となり，r の $1/n$ の次数の偏り削減が可能である．次に，この修正比推定量 r^* の平均2乗誤差を求めると，

$$MSE(r^*)=MSE(r)-\frac{1}{n}\left\{\frac{\alpha^2}{n}(\sigma^4+\mu_3)+2\delta\sigma^2\right\}+O(n^{-3})$$

になる．従って $1/n^2$ の係数の正負によって r と r^* を比較することができる．特に $\mu_3\geq 0$ のときには，

$$MSE(r^*)\leq MSE(r)+O(n^{-3})$$

であり，また，ジャックナイフ推定量 r_{JK} との比較については，

$$MSE(r^*)\leq MSE(r_{JK})+O(n^{-3})\quad(\mu_3\geq 2\sigma^4\text{のとき})$$

$$MSE(r^*)\geq MSE(r_{JK})+O(n^{-3})\quad(\mu_3\leq 2\sigma^4\text{のとき})$$

を得る．さらに，$(r_{JK}+r^*)/2$ は $1/n^2$ の偏り削減を持つ推定量である．

4．例

例1．　$X_1,\ldots,X_n$ は独立に，いずれも平均1，分散 σ^2 の正規分布にしたがうとする．このとき，十分大きな n に対して，$\hat{\rho}, r, r^*, r_{JK}$ の平均2乗誤差を $O(n^{-3})$ まで比較すると定理1および第3節より次のようになる．なお，r, r_{JK} の平均2乗誤差の値は，[3] によるものと一致する．

$$MSE(\hat{\rho})=\delta+\frac{\delta}{n}+O(n^{-3}),$$

$$MSE(r)=\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left(\frac{9\alpha^2\sigma^4}{n^2}+\frac{3\delta\sigma^2}{n}\right)+O(n^{-3}),$$

$$MSE(r^*)=\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left(\frac{8\alpha^2\sigma^4}{n^2}+\frac{\delta\sigma^2}{n}\right)+O(n^{-3}),$$

$$MSE(r_{JK})=\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left(\frac{2\alpha^2\sigma^4}{n^2}+\frac{\delta\sigma^2}{n}\right)+O(n^{-3}).$$

したがって，次のことが，$O(n^{-3})$ までいえる．

$\alpha\neq 0$ のとき，$MSE(\hat{\rho})\leq MSE(r_{JK})\leq MSE(r^*)\leq MSE(r)$.

$\alpha=0,\ 0<\sigma^2\leq 1/3$ のとき，$MSE(r_{JK})=MSE(r^*)\leq MSE(r)\leq MSE(\hat{\rho})$.

$\alpha=0,\ 1/3<\sigma^2\leq 1$ のとき，$MSE(r_{JK})=MSE(r^*)\leq MSE(\hat{\rho})\leq MSE(r)$.

$\alpha=0,\ \sigma^2>1$ のとき，$MSE(\hat{\rho})\leq MSE(r_{JK})=MSE(r^*)\leq MSE(r)$.

例2．　X がパラメータ $(\mu,\lambda)\,(\mu>0,\lambda>0)$ をもつ逆ガウス分布に従うとき，この分布を $IG(\mu,\lambda)$ と書く．密度関数は，$x>0$ のとき，$\sqrt{\lambda/(2\pi x^3)}\exp\{-\lambda(x-\mu)^2/(2\mu^2x)\}$ である．いま，$X_1,\ldots,X_n$ が独立に，いずれも $IG(\mu,\lambda)$ に従うとき，$E(X_i)=\mu$, $\sigma^2=\mu^3/\lambda$, $\mu_3=3\mu^5/\lambda^2$ より，r と r^* を比較すると，3節より，$0<\mu\leq 3/2$ のとき，$MSE(r^*)\leq MSE(r_{JK})+O(n^{-3})$, $\mu\geq 3/2$ のとき，$MSE(r^*)\geq MSE(r_{JK})+O(n^{-3})$ である．

参　考　文　献

[1] Akahira, M. and S. Kawai (1990). The optimality of the grouped jackknife estimator of ratio in some regression model. *J. Japan Statist. Soc.* **20** 149-157.

[2] 河合伸一，赤平昌文 (1991). Comparison of ratio estimator, least squares estimator and grouped jackknife estimator for regression model. 京都大学数理解析研究所講究録 **749** 1-14.

[3] Rao, J. N. K. (1965). A note on esimation of ratios by Quenouille's method. *Biometrika* **52** 647-649.

単純無作為標本および層別無作為標本に基づく単純比推定量とジャックナイフ比推定量の比較

鄭　敏（ＴＳＤ株式会社），　田栗 正章（千葉大学 理学部），
汪 金芳（千葉大学大学院 理学研究科）

1．はじめに

母集団分布 $F(x,\ y)$ から、単純無作為抽出法により取られた大きさnの標本 $\{(x_i,\ y_i)\}_{i=1}^{n}$ に基づき、X，Yの平均値 μ_X，μ_Y の比 $R=\mu_Y/\mu_X$ を推定する問題を考える。ここで確率変数 X は、Yと相関の高い補助変量である。このとき比推定量 $\hat{R}=\bar{y}/\bar{x}$ $[\bar{y}=\Sigma_{i=1}^{n}y_i/n,\ \bar{x}=\Sigma_{i=1}^{n}x_i/n]$ は、Rに対する自然な推定量と考えられる。いま単純無作為標本に対してジャックナイフ法を適用すれば、ジャックナイフ比推定量$\tilde{R}^J=n\hat{R}-(n-1)\hat{R}^{(\cdot)}$ $[\hat{R}^{(\cdot)}=\Sigma_{i=1}^{n}\hat{R}^{(i)}/n,\quad \hat{R}^{(i)}=(n\bar{y}-y_i)/(n\bar{x}-x_i)]$ が得られる。さらに標本抽出方法として層別無作為抽出法を考えれば、層別無作為標本に基づくジャックナイフ比推定量 $\tilde{R}^J_{st}$ を考えることもできる。本報告では、Rに対するこれら３種類の推定量を採り上げ、それらの偏りおよび平均２乗誤差（ＭＳＥ）について検討を行った。さらに母集団分布が２次元正規分布の場合について、数値的検討も行った。

2．単純比推定とジャックナイフ比推定の比較

単純比推定量 $\hat{R}$ とジャックナイフ比推定量 $\tilde{R}^J$ の偏りを比較すると、$\tilde{R}^J$ はn^{-1} のオーダーの偏りを改善した推定量になっていることが分かる。次に$\hat{R}$ と $\tilde{R}^J$ の ＭＳＥ を比較すると、$c_2(F)=R^2(2\mu_{21}/\mu_X\mu_Y-\mu_{12}/\mu_X\mu_Y-\mu_{30}/\mu_X)\geqq 0$ のとき、$O(n^{-4})$ の項を無視すれば、$\tilde{R}^J$ は $\hat{R}$ よりも ＭＳＥ の意味で良くなる。 ただし $\mu_{ij}=E_F[(X-\mu_X)^i(Y-\mu_Y)^j]$ $(i,j=0,1,...)$ である。特に母集団分布が２次元正規分布$N_2(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2_X,\sigma^2_Y,\rho)$ の場合には、$\tilde{R}^J$ の偏りは、$\hat{R}$ の偏りから n^{-2} のオーダーの偏りを除去したことになる。またこの場合には $c_2(F)=0$ であるから、$O(n^{-4})$の項を無視すれば $\tilde{R}^J$ は偏りおよび ＭＳＥ の意味で、$\hat{R}$ より良い推定量であることが分かる。

そこで次に、この良さの程度がどの位の値であるかを、数値的に検討した。実際に比推定が適用される場面を考慮して、ρ, c_X, c_Y, R, n の各種の値を決定し、$\hat{R}$ と $\tilde{R}^J$ の偏りおよび MSE を計算した結果、次のようなことが判明した。(1) Bias($\hat{R}$) は、n が大きいとき、または ρc_Y が c_X に近づくとき、十分小さくなる。(2) Bias($\tilde{R}^J$) は、n ≧ 100 のときほとんど無視できる。また ρc_Y が c_X に近づくとき十分小さくなる。(3) Bias($\tilde{R}^J$) は Bias($\hat{R}$) より小さい。次に MSE に関しては、次のような結果が得られた。(1) MSE($\hat{R}$) と MSE($\tilde{R}^J$) の値には、大きな差はない。特に n ≧100 の場合にはほとんど同じになる。これらの値は c_X の値に強く依存し、c_X が大きいときには、これらの値およびその差はいずれも大きい。(2) MSE($\hat{R}$)－MSE($\tilde{R}^J$) の MSE($\tilde{R}^J$) に対する効率の値は、Rの値に依存しない。

3. 層別無作為標本に基づくジャックナイフ比推定量

母集団をL層に分割し、全標本数 n を各層に比例配分する場合を考える。第 l 層のウェイトを w_l とし、層別無作為標本 $\{(x_{li}, y_{li})\}_{i=1}^{n_l}$ $(l=1, 2, \ldots, L)$ に基づく第 l 層の平均 (μ_{Yl}, μ_{Xl}) の不偏推定量 $(\bar{y}_l, \bar{x}_l)$ を利用すれば、$R=\mu_Y/\mu_X$ に対するジャックナイフ比推定量が次のように作れる。

$$\tilde{R}^J_{st} = \Sigma_{l=1}^{L} w_l \tilde{\mu}^J_{Yl}/\mu_X,$$

$$\tilde{\mu}^J_{Yl} = n_l \hat{\mu}_{Yl} - (n_l - 1)\hat{\mu}^{(\cdot)}_{Yl},$$

$$\hat{\mu}_{Yl} = \mu_{Xl}\cdot\bar{y}_l/\bar{x}_l, \qquad \hat{\mu}^{(\cdot)}_{Yl} = \Sigma_{i=1}^{L}\hat{\mu}^{(i)}_{Yl}/n_l,$$

$$\hat{\mu}^{(i)}_{Yl} = \mu_{Xl}\cdot(n_l\bar{y}_l - y_{li})/(n_l\bar{x}_l - x_{li}).$$

$\tilde{R}^J$ と $\tilde{R}^J_{st}$ の MSE の差を評価すると、MSE($\tilde{R}^J$)－MSE($\tilde{R}^J_{st}$)≧0, すなわち A≧0 が成り立つための1つの十分条件として、次が得られる。

$$\Sigma_{l=1}^{L} w_l \sigma_{Xl} (R - b_l)^2 \geq \Sigma_{l=1}^{L} w_l \sigma_{Xl} (R_l - b_l)^2$$

ここで σ^2_{Xl}, σ^2_{Yl} はそれぞれ第 l 層における X, Y の分散であり、b_l は第 l 層における回帰直線の x の項の係数である。ところで比推定が適用される多くの現実の場においては、各層における回帰直線の傾き b_l の値は、$R_l=\mu_{Yl}/\mu_{Xl}$ の値とあまり違わないものと考えられ、したがって上式が成立するものと思われる。このような場合には、層別ジャックナイフ比推定量の MSE($\tilde{R}^J_{st}$) は単純ジャックナイフ比推定量の MSE($\tilde{R}^J$) より小さくなり、層別無作為抽出法を用いることにより、推定の精度が向上することが判った。

ブートストラップ法によるワイブル過程のパラメータの推測

中央大学理工学部　鎌倉稔成

1．はじめに

近年の技術の進歩により、部品、装置、システム等の信頼度は向上しつつあるが、信頼性を評価する上で、故障事象を正しく捉えることが重要である。非修理系のデータ解析では寿命分布をデータから推定することが、信頼性の１つの評価尺度である、信頼度も求めることに対応する。通常は２つ、あるいは、３つの未知パラメータを持つ、既知の関数形の確率密度関数を仮定し、そのパラメータの推定を行なう。信頼性技術者がよく利用する分布は、ワイブル分布である。数少ないパラメータで様々な形状の分布が扱えることと、容易にパラメータを求めることができるワイブル確率紙が普及しているのがその理由である。

本報告では、繰り返して故障が起こりうる、修理系のシステム、故障という現象よりはむしろ、プログラムのバグの発生という事象そのものを含めた事象系列の統計的解析を行なうための確率モデルとそのパラメータの推測の問題について考察を与えた。

2．ワイブル過程

AMSAA(U.S. Army Materiel Systems Analysis Activity)モデル、Duaneモデル、Crowモデルといろいろな呼び方のある信頼度成長のモデルは上に定義したポアソン過程の非定常なモデルで、次のように故障強度が与えられる。

$$\lambda(t) = Kmt^{m-1}$$

ワイブル過程とも呼ばれている。このモデルでは、mが１より小さいとき、故障強度関数が時間に関して単調に減少する、つまり信頼度が向上することになる。Crow(1982)はｔ時点まで試験を行ない、その間にシステムに信頼度成長があるとするとき、その時点での瞬間MTBFの精確な信頼区間を構成している。

試験の目的は、まず、本当に信頼度成長が行なわれているかという問題であるとすると、統計的には検定の問題として定式化される。つまり、帰無仮説がm=1、対立仮説がm<1という統計的仮説検定を行なえばよい。

データ（故障時点）が$t_1, t_2, \ldots, t_n$と観測されたものとすると、尤度関数は、

$$\begin{aligned} L(K,m) &= \left[\prod_{i=1}^{n}\lambda(t_i)\right]\exp\left\{-\int_0^{t_n}\lambda(u)du\right\} \\ &= K^n m^n\left[\prod_{i=1}^{n}t_i^{m-1}\right]\exp(-Kt_n^m) \end{aligned}$$

この尤度関数の対数をとって最大化を行ない、最尤推定量を求めると、

$$\hat{m}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(t_n/t_i\right)}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(t_n/t_i\right)}$$

$$\hat{K}=\frac{n}{t_n^{\hat{m}}}$$

が得られる。

3．ブートストラップ法による推定量の分布の考察

この節では、Crow(1982)で扱っているワイブル過程に従う乱数のある実現値23個、

.2　4.2　4.5　5.0　5.4　6.1　7.9　14.8　19.2　48.6　85.8　108.9
127.2　129.8　150.1　159.7　227.4　244.7　262.7　315.3　329.6　404.3　486.2

について、パラメトリックなブートストラップ法を適用して推定量の分布について議論を与える。

ワイブル過程の場合にmの最尤推定量は偏りがあり、これは、統計量の性質から簡単に修正可能である。時間打切りの場合には、

$$\tilde{m}=\frac{n-1}{n}\hat{m}$$

故障打切りの場合には分母のn-1をn-2で置き換えた推定量が不偏なものとなる。これを、ブートストラップ法の偏り修正でみてみると次のような結果が得られる。
Efron(1982)により、偏りのブートストラップ推定値は

$$Bias=\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{N}\hat{\theta}^{*b}-\hat{\theta}$$

で与えられるのでこれに従い、この節の最初に与えた文献データについて1000回のブートストラップ標本を作り、偏りを推定すると0.040が得られる。精確な偏りの計算方式から偏りは、0.036となり、ほぼ一致した値となることがわかる。こうした分布が計算できる場合にはブートストラップ法による必要はないが、Kの推定量のように複雑で解析が困難な場合には特に有用である。Kの最尤推定量の偏りは1000回のブートストラップにより、-0.079と推定される。

さらにパラメータの推定量の平均に関しての情報だけでなく、分布全体の形状に対しての情報も得られる。

EMPIRICAL SUFFICIENCY IN NONPARAMETRIC POINT ESTIMATION BY RESAMPLING TECHNIQUES

JINFANG WANG

Faculty of Science, the Graduate School of Chiba University

1.INTRODUCTION

The classic Rao-Blackwell theorem states that an unbiased estimator can always be improved by utilizing sufficiency, unless it is a function of a complete sufficient statistic . One natural question then is that how we should proceed to solve similar problems in nonparametric situations. Such kind of queston is meaningful even in parametric cases where finding a sufficient statistic, not to say a complete sufficient statistic, is difficult. Fu and Li(1990) resently proposed a computer-intensive method on a parametric model , which, based on an arbitrary unbiased estimator, constructs a completely numerical sequence with its limit the $UMVUE$. In this report, we will attempt an even more ambitious objective of improving an initial unbiased estimator, by confinding ourselves to nonparametric model, under which the mathematical form of the population distribution is assumed to be unknown. From this initial estimator, we hope to construct a numerical sequence with its limit the theoretical improved estimator at the initial observed sample , by certain resampling procedure utilizing the empirical sufficiency of the empirical sample space at each resampling stage.

2. EMPIRICAL SUFFICIENCY BY RESAMPING SCHEMES

Suppose that F is an unknown distribution function, from which we have observed an *i.i.d.* sample $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$. Assume that $\theta(F)$ is our parameter of interest. Let $\Theta = [-M, M] \in \mathbf{R}^1$, be the parameter space, where M is a sufficiently large positive integer. Let $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ be an unbiased estimator. Our aims in this study are to (1) *improve the original unbiased estimator* $\widehat{\theta}$ *; and to* (2) *estimate the variance of the improved estimator.*

2.1 RESAMPLING AND EMPIRICAL LIKELIHOOD

Denote $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{X}$ and $\widehat{\theta}_0 \equiv \widehat{\theta}(\mathbf{X}_0)$, to indicate that $\mathbf{X}_0$ and $\widehat{\theta}_0$ is the initial sample point and initial estimate respectively. As the departing point, we discuss the problem of estimating F under the initial constraint that $\theta(F) = \widehat{\theta}_0$. Estimation of F is made by appling the ***conditional maximum empirical entropy principle***, by which the distribution with conditional maximum empirical entropy is favoured. Let $\mathbf{W} \equiv (w_1, \cdots, w_n)$ represents a probability vector , i.e., $w_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$, and $\sum_{i=1}^n w_i$=1 Let $\widehat{F}_{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^n w_i \boldsymbol{\delta}_i$, where $\boldsymbol{\delta}_i$ is the distribution function with mass 1 at X_{i0}, for $i = 1, \cdots, n$. *The empirical entropy* of $\widehat{F}_{\mathbf{W}}$, denoted by $H(\widehat{F}_{\mathbf{W}})$, is defined by $H(\widehat{F}_{\mathbf{W}}) \equiv \sum_{i=1}^n [-w_i ln(w_i)]$.

Draw $(k_1 + 1)$ *iid* samples of size n from $\widehat{F}_1$ and denote them by $\mathbf{X}_0^* \equiv \mathbf{X}_0, \cdots,$ $\mathbf{X}_i^*, \cdots, \mathbf{X}_{k_1}^*$. Let $\mathbf{\Omega}_1^* \equiv \{\mathbf{X}_0^*, \cdots, \mathbf{X}_{k_1}^*\}$ denote the empirical sample space. Let $\mathbf{N}_j^i \equiv \sharp\{X_{ki}^* : X_{ki}^* \in \mathbf{X}_i^* \text{ and } X_{ki}^* = X_j\}$. The empirical likelihood of the distribution $\widehat{F}_{\mathbf{W}}$ at the sample point $\mathbf{X}_i^*$, denoted by $l_{\widehat{F}_{\mathbf{W}}}(\mathbf{X}_i^*)$, is defined to be $l_{\widehat{F}_{\mathbf{W}}}(\mathbf{X}_i^*) \equiv$

$\prod_{j=1}^{n} w_j^{N_j^i}$, where $\widehat{F}_{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^{n} w_i \delta_i$. The parameter space $\Theta = [-M, M]$ is finely devided into m equally lengthed intervals, with endpoints $\theta_\alpha, \alpha = 0, \cdots, m$, and θ_0 being $-M, \theta_m$ being M. Under condition that $\theta(\widehat{F}_{\mathbf{W}}) = \theta_\alpha(\alpha = 0, \cdots, m)$, we have, by section 2.2, a corresponding estimate of F. This estimate is denoted by $\widehat{F}_{\theta_\alpha}$. Let $\gamma_\alpha^i \equiv \log l_{\widehat{F}_{\theta_\alpha}}(\mathbf{X}_i^*)$, and $\gamma_{i:j}^\alpha \equiv \gamma_\alpha^i - \gamma_\alpha^j$. *The information distance between two sample points* $\mathbf{X}_i^*$ *and* $\mathbf{X}_j^*$ *is defined to be* $\rho_{i,j} \equiv \sigma_{i,j}$, *where* $\sigma_{i,j}^2 \equiv \frac{1}{m}\sum_{\alpha=0}^{m}(\gamma_{i:j}^\alpha - \bar{\gamma}_{i:j})^2, \bar{\gamma}_{i:j} \equiv \frac{1}{m+1}\sum_{\alpha=0}^{m}\gamma_{i:j}^\alpha$. The contourization can be done by some proper method of cluster analysis. The contourization is denoted by $\mathbf{\Omega}_1^* = [\mathbf{X}_0^*]_1 \cup \cdots \cup [\mathbf{X}_{l_1}^*]_1$, where, for example, $[\mathbf{X}_0^*]_1$ is the contour to which $\mathbf{X}_0^*$ belongs, and 1 represents sampling stage.

2.2 CONDITIONAL EXPECTATION

DEFINITION *The first step improved estimator is defined as*

$$\widetilde{\theta}_1 \equiv \widetilde{\theta}([\mathbf{X}_0^*]_1) \equiv \frac{\sum_{\mathbf{X}_j^* \in [\mathbf{X}_0^*]_1} \widehat{\theta}(\mathbf{X}_j^*)}{\sharp([\mathbf{X}_0^*]_1)}.$$

where $\sharp([\mathbf{X}_0^*]_1)$ *is the number of points on contour* $[\mathbf{X}_0^*]_1$.

Under condition that $\theta(\widehat{F}_{\mathbf{W}}) = \widetilde{\theta}_1$, repeat above procedures. For example, estimate F by $\widehat{F}_2$, and take $k_2(> k_1)$ samples of size n from $\widehat{F}_2$ and form the second stage empirical sample space $\mathbf{\Omega}_2^*$. Contourize $\mathbf{\Omega}_2^*$, and denote $[\mathbf{X}_0^*]_2$ to be the contour to which $\mathbf{X}_0^*$ belongs. Given contour $[\mathbf{X}_0^*]_2$, take conditional expection again and we get the second stage estimate $\widetilde{\theta}_2$. Thus we get a numerical sequence of estimate of θ, $\{\widetilde{\theta}_t\}$, if we repeat the procedure endlessly. If the sequence of the sub σ-field induced by the partition at each resampling step converges to a sufficient sub σ-field $\mathfrak{S}$, then this sequence of estimates will converge to the expectation of $\widehat{\theta}$ conditional to S at $\mathbf{X}_0$, where S is any sufficient statistic which induces sub σ-field $\mathfrak{S}$. If $\mathfrak{S}$ is complete sufficient, then our improved estimator coincides with the $UMVUE$. When the convergent sequence becomes sufficiently stable, we define the estimate at stage s, $\widetilde{\theta}_s$, as our improved estimate. If the resampling procedure is stopped at the s-th step, and $\widetilde{\theta}_s([\mathbf{X}_j^*]_s)$ is defined as the conditional expectation of $\widehat{\theta}$ given the contour $[\mathbf{X}_j^*]_s$, then the variance of $\widetilde{\theta}_s$ is estimated by

$$\widehat{Var}(\widetilde{\theta}_s) \equiv \frac{1}{\sharp(\Omega_s^*)}\sum_{j=0}^{l_s}\sharp([\mathbf{X}_j^*]_s)(\widetilde{\theta}([\mathbf{X}_j^*])_s - \widetilde{\theta}_{(.)})^2,$$

where $\sharp(\Omega_s^*)$ and $\sharp([\mathbf{X}_j^*]_s)$ represent the sample points in the empirical sample space Ω_s^* and contour $[\mathbf{X}_j^*]_s$ respectively, l_s is the number of contours, and

$$\widetilde{\theta}_{(.)} \equiv \sum_{j=0}^{l_s}\frac{\sharp([\mathbf{X}_j^*]_s)}{\sharp(\Omega_s^*)}\widetilde{\theta}([\mathbf{X}_j^*]_s).$$

リサンプリング法を利用した情報量規準 ＷＩＣの適用範囲について

統計数理研究所 石黒真木夫

[WIC]

情報量規準 WICを次のように定義する。

$$\begin{aligned} WIC &= -2 \times \log f(x \mid \hat{\theta}(x)) \\ &\quad +2 \times E_{X^*}\left\{\log f(x^* \mid \hat{\theta}(x^*)) - \log f(x \mid \hat{\theta}(x^*))\right\} \end{aligned}$$

ここでデータ $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ は独立に同じ分布に従う確率変数の実現値、$f(x \mid \theta)$ は x のモデル、$\hat{\theta}(x)$ はモデルのパラメータθのデータ x に基づく推定値とする。x^*はデータからのリサンプリングに基づくブートストラップサンプルである。

[CONJECTURE]

推定量の平均と分散が有限となるパラメータ推定法の場合、WIC はモデルの平均対数尤度の不偏推定量になる。

[系] 罰則付き最尤法あるいは、モーメント法によってあてはめたモデルの情報量規準による評価が可能である。

[REASONING]

パラメータθの推定量: $\hat{\theta} = \Delta\theta + \theta_{MM}$

$$E\{\Delta\theta \, \Delta\,\theta^T\} = V$$

パラメータθの最尤推定量: $\theta_X = \Delta\theta_X + \theta_0$

$$E\{\Delta\theta_X \, \Delta\,\theta^T\} = U$$

対数尤度:

$$l_X(\hat{\theta}) = l_X - \frac{1}{2}(\Delta\theta + \theta_{MM} - \theta_X)^T H(\Delta\theta + \theta_{MM} - \theta_X)$$

平均対数尤度:

$$
\begin{aligned}
l_0(\hat{\theta}) &= l_0 - l_X + l(\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \triangle \theta_X^T H \triangle \theta_X - (\Delta\theta + \theta_{MM} - \theta_0 - \Delta\theta_X)^T H \triangle \theta_X \\
E\{l_0(\hat{\theta})\} &= E\{l_0 - l_X + l(\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \triangle \theta_X^T H \triangle \theta_X - (\Delta\theta - \Delta\theta_X)^T H \triangle \theta_X\} \\
&= E\{l_0 - l_X + l(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} \triangle \theta_X^T H \triangle \theta_X - \Delta\theta^T H \triangle \theta_X\} \\
&= E\{l_0 - l_X + \frac{1}{2}(\theta_X - \theta_0)^T H(\theta_X - \theta_0) + l(\hat{\theta}) - \Delta\theta^T H \triangle \theta_X\} \\
&= E\{l_0 - l_X(\theta_0) + l(\hat{\theta}) - \Delta\theta^T H \triangle \theta_X\} \\
&= E\{l(\hat{\theta}) - \Delta\theta^T H \triangle \theta_X\}
\end{aligned}
$$

$\Delta\theta^T H \triangle \theta_X$の期待値はブートストラップ法で評価できる。

参考文献

[1] Akaike,H.(1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, 2nd Inter. Symp. on Information Theory (Petrov,B.N. and Csaki,F. eds.), Akademiai Kiado, Budapest, pp.267-281.

[2] Efron,B.,(1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, The Annals of Statistics, 7, 1, pp.1-26.

[3] Ishiguro,M. and Sakamoto,Y.,(1991). WIC:An Estimator-Free Information Criterion, Research Memorandum No.410, The Institute of Statistical Mathematics.

[4] Sakamoto,Y.,Ishiguro,M. & Kitagawa,G.(1986). Akaike Information Criterion Statistics, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht/Tokyo.

[5] 石黒 (1991). 情報量規準とブートストラップ法と時系列解析,「時系列に関する推測の理論と応用」, 統計数理研究所共同研究リポート 31, pp.155-162.

[6] Ishiguro,M., Morita,K.-I. and Ishiguro,M. (1991). Application of an Estimator-Free Information Criterion(WIC) to Aperture Synthesis Imaging, in *Radio Interferometry* (Cornwell,T.J. and Perley,R.A. eds.), IAU Coll. 131, ASP Conference Series, Vol.19, pp.243-248.