J Jpn Ind Manage Assoc **54**, 382–389, 2004

Original

An Optimization Model for Policy Asset Allocations

Naoshi TAMANOUCHI[1] and Yasufumi SARUWATARI[1]

Abstract

Due to deregulation, domestic corporate pension plans are now allowed to allocate their assets quite flexibly. On the other hand, they have the responsibility to provide continuous and stable pension benefits for their plan participants. So, it is necessary for them to make investments from a long-term viewpoint. Policy asset allocation plays an important role in this sense. It is an asset allocation which should be kept firmly for a long period, and should also be regarded as a benchmark for Japanese corporate employees' pension plans in managing their investments. In this paper, we propose an optimization model to obtain a policy asset allocation. In order to construct a model, the behaviour of investors in actual investments is took in consideration, since actual asset allocation is determined by the actual economic environment. In addition, a down-side risk is employed as an objective function when we derive the optimization model. In particular, we present an approximation algorithm in order to solve the model efficiently. The algorithm solves relaxation problems iteratively, and seeks for the best solution under certain conditions. We implemented the algorithm and carried out some computational experiments. The results showed the validity and applicability of our model for practical use.

Key words: pension funds, pension investment, optimization, modeling

[1]University of Tsukuba
Received: February 17, 2003
Accepted: September 25, 2003

論　文

政策資産配分策定モデル

玉之内直[1], 猿渡康文[1]

本論文では，政策資産配分を策定するための最適化モデルを構築した．政策資産配分とは，厚生年金基金が資産運用を行う際に作成する，資産配分のベンチマークである．政策資産配分の策定にあたっては，年金運用の目的が加入員に対する安定的な年金給付を行うことであることを考慮しなければならない．本研究では，政策資産配分の持つ実務的な意味と，運用上の制約を考慮したモデルを作成した．提案するモデルは，非線形制約を含む最適化問題である．これに対し筆者らは，問題の構造を利用した実用的な解法を提案し，最適解の近似値を算出した．また，数値実験により，提案する解法によって得られる解の実務への適用可能性を検証した．

キーワード： 厚生年金基金, 年金資産運用, 最適化, モデル化

1. はじめに

近年，年金資産運用に関する規制が大幅に緩和された．現在，日本の代表的な企業年金である厚生年金基金(年金基金とよぶ)には，資産運用に関する規制がほとんど存在しない．そのため，年金基金は，自らの裁量の下，自由な資産運用を行うことが可能となった．その一方で，年金基金は，受給者に対する継続的，かつ，安定的な年金給付を行う責任を負う．このため，中長期的な視点に立った資産運用が求められている．

中長期的な視点に立った安定的な年金資産の運用方針を具現化する1つの方法は，5年から10年という期間にわたり堅持すべき資産配分を策定することである．また，中長期運用方針を資産配分へと具現化したものは，政策資産配分とよばれている．Brinson〔1〕や，Ibbotsonら〔2〕は，中長期の資産運用による運用の良し悪しの大部分が，作成する政策資産配分によって説明されるところが大きいことを示している．わが国においても，2000年5月，厚生省(現，厚生労働省)は，年金基金に対して，政策資産配分の策定を義務づける通達を出した．これ以降，すべての年金基金では，政策資産配分を策定することとなった．

しかしながら，資産価格は，時々刻々変動する．このため，現実の資産運用において，ポートフォリオの時価資産配分を政策資産配分の通りに維持することは，人的，金銭的な費用の増加を招く．そのため，年金基金では，時価資産配分に対して，政策資産配分からの適当な乖離幅を設けたうえで時価資産配分を管理することが一般的である．その意味で政策資産配分は，年金基金における資産配分上のベンチマークという位置づけにある．

ところで，ポートフォリオの最適資産配分の策定には，しばしば，ある期待収益率の下でポートフォリオの分散の最小化を行う，平均–分散モデル〔3〕が用いられる．平均–分散モデルにおけるリスク概念は，ポートフォリオの収益率の分散である．これに対して，年金資産運用では，約束した給付を満足させることが必要である．そのため，資産額の給付現価に対する下方乖離が，政策資産配分におけるリスクとなる．

竹原〔4〕は，適当な期待収益率のもとで，ポートフォリオの収益率の目標収益率に対する下方乖離をリスクとしてとらえた，最適資産配分の構築手法を提案している．このモデルは，目標収益率を次のように考えることで，年金資産運用のための最適資産配分の策定に対しても応用することができる．すなわち，将来の年金給付額は，予定利率によって年金現価へと割引かれる．加入員の掛金は，こうして計算された年金現価をもとに算定する．このため，現在の掛金収入によって将来の年金給付を賄うためには，年金給付の原資となる年金資産が，毎年，年金現価への割引率である予定利率の割合で増加しなければならない．したがって，年金資産運用においては，目標収益率を予定利率として用いる．

ところで，年金現価をあらわす代表的な指標として，責任準備金がある．責任準備金は，掛金収入や給付支出などの将来のキャッシュフローをもとに計算する．また，年金負債に対する年金資産の比率である積立比率は，政策資産配分の策定に大きな影響をあたえる．こうした，積立比率やキャッシュフローなどの情報は，実務上，ある程度の精度で事前に把握することができる．最適資産配分を構築するためには，いわゆる多期間モデルを導入することで，積立比率やキャッシュフローなどの情報を反映することが可能となる．

多期間モデルの研究に対する歴史は古い．これまで，

[1]筑波大学
受付：2003年2月17日
受理：2003年9月25日

多期間モデルを基礎とした最適化モデルが，さまざまな研究者によって提案されてきた．多期間モデルにおいては，当初，シナリオツリーの各ノードで最適資産配分を算出するタイプ (シナリオツリー型) が研究の主流であった．このタイプのモデル〔5〕は，意思決定のポイントがノード数分だけ存在することが特徴である．シナリオツリー型の多期間モデルでは，想定し得るノード数を増やすことにより，より精緻な意思決定が行える．

これに対し枇々木〔6〕は，シミュレーション型多期間計画モデル (シミュレーション型) を提案した．このモデルでは，入力パラメータとシナリオを現時点から最終期までのパスの形で表現する．このため，シミュレーション型の多期間モデルは，上記のシナリオツリーによる多期間モデルの表現形式に比べ，記述する問題の規模が小さいという特徴がある．また，算出すべき最適資産配分は，シナリオツリー型の多期間モデルが，シナリオツリーにおけるノードごとに算出されるのに対し，モデルを構成する各期間のみとなる．すなわち，シミュレーション型の多期間モデルでは，計算期間が1年×T期間であれば，T個の最適資産配分を算出する．

ところで，各ノード（あるいは各時点）における最適資産配分は，現時点での将来時点における最適資産配分を評価したものに過ぎない．加えて，年金基金における資産運用の目的は，加入員に対する年金給付を継続的に維持することである．したがって，政策資産配分は，各時点における資産運用の見込みに依存するものではなく，むしろ，負債側である責任準備金などをもとに決定しなければならない．

以上の問題意識を踏まえ本研究では，年金基金における政策資産配分の策定に際し，実務的観点を反映させた新たな最適化モデルを提案することを目的とする．これまでに提案されてきた多くの多期間モデルは，各意思決定時点における最適資産額を求めるものであった．これに対し本研究では，投資期間Tにわたる資産構成比が一定であるような資産配分を，期初時点における積立比率，および，期中におけるキャッシュフローを考慮して決定するモデルを構築する．投資期間Tにわたり一定の資産配分を算出する問題〔7〕は，非線形計画問題となる．本研究では，実務的な観点を利用して，非線形計画問題を線形計画問題へと帰着させる．また，こうして作成される線形計画問題を繰り返し解くことで，非線形計画問題に対する実務的に有意な近似解を算出する．

2. 政策資産配分策定モデル

2.1 政策資産配分の運営ルール

前述した通り，年金基金では，適当な乖離幅を設けることによって，時価資産配分と政策資産配分との乖離を管理している．この乖離幅は，許容乖離幅とよばれる．例として，国内債券，国内株式，現金の3資産クラスからなるポートフォリオを考える．ここで，これら3資産クラスに対する政策資産配分が，それぞれ，50%, 40%, 10%であると仮定する．国内債券，国内株式，現金に対する，政策資産配分からの許容乖離幅が，±5%, ±10%, ±5%とすると，国内株式の時価構成比は，最大でも50%，最小の場合でも30%の範囲内でなければならない．これが許容乖離幅による時価資産配分の管理である．

いま，資産クラスiに対する政策資産配分，t期における当該資産クラスiの資産構成比，および，t期における当該資産クラスiの許容乖離幅を，それぞれ，x_i，y_i^t，d_iと表すことにする．このとき，x_i，y_i^t，d_iの間には，以下の関係式が成立する．ただし，t期における当該資産クラスiの資産構成比y_i^tは，時価資産構成比と同義であり，t期末に一度リバランスを行うと仮定する．

$$|x_i - y_i^t| \le d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, t = 1, 2, \cdots, T,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^t = 1, \qquad t = 1, 2, \cdots, T.$$

ただし，n, Tは，それぞれ，資産クラス数，投資期間(5年，あるいは，10年)である．

2.2 年金資産運用のフロア

責任準備金は，年金の給付現価をあらわす1つの指標であり，年金資産額が，責任準備金を下回らない限り，給付に支障をきたすことはない．したがって，責任準備金は，年金資産運用上のフロアと考えられる．

ところで，あるt期末時点における責任準備金V_tは，$t-1$期末時点の責任準備金V_{t-1}，t時点における掛金収入，給付支出などのネットキャッシュフローC_t，および，予定利率θを用いて，下式によって近似的に計算できる．ただし，期初時点における責任準備金はV_0，また，掛金収入，給付支出などのネットキャッシュフローC_tは，すべて期央に発生するものとする．

$$V_t = V_{t-1}(1+\theta) + C_t\left(1 + \frac{1}{2}\theta\right),$$

$$t = 1, 2, \cdots, T. \qquad (1)$$

さて，当該年金基金の資産額は，F_tを年金基金のt期末時点における資産額とすると，$F_t \geq V_t$の関係を満たす必要がある．これに対し，あるt期末時点における資産額F_tが，責任準備金V_tをある一定水準下回った場合，年金基金では，不足分に対する何らかの措置を講ずる．そうした措置は，以降の掛金を引上げ，場合によっては，給付の引下げへと直結する．

2.3 政策資産配分のための目的関数

本論文では，現時点からT期末時点にいたる各資産クラスiに関する収益率の組のことをシナリオとよび，rと記述する．時点tにおける各資産クラスiの収益率は，各期独立で同一の確率分布から得られるP個の実現値によって表現する．シナリオは，以下のように記述できる．

$$r = (r^t_{s,1}, r^t_{s,2}, \ldots, r^t_{s,n}),$$
$$t = 1, 2, \cdots, T, \ s = 1, 2, \cdots, P.$$

2.2 でも述べたように，年金基金では，t期末における資産額が，責任準備金をある一定水準下回ると，掛金を変更（引き上げ）しなければならない．掛金の引き上げは，追加的な企業負担増，および，加入員への説明，掛金引き上げに対する合意形成のために多額のコスト負担を強いる．

ここで，rにおけるs番目のシナリオ（以降，単にシナリオsとする）が実現した場合のt期末における資産額をF^t_sとする．このとき，資産額F^t_sの責任準備金V_tに対する不足額は，$\max(V_t - F^t_s, 0)$となる．下式は，全期間全シナリオに関する不足額の期待値を表している．本研究では，下方リスクを最小化するため，この関数が目的関数となる．以降，期待不足額とよぶ．

$$EL = \frac{1}{TP}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{P}\max(V_t - F^t_s, 0)$$

ところで，t期におけるシナリオsによる資産額は，$t-1$期末の資産額F^{t-1}_s，t期における資産運用利回りπ^t_s，および，t期央に発生したキャッシュフローC_tによって下式のように表わすことができる．

$$F^t_s = F^{t-1}_s\left(1 + \pi^t_s\right) + C_t\left(1 + \frac{1}{2}\pi^t_s\right) \qquad (2)$$

ただし，π^t_sは,$\pi^t_s = \sum_{i=1}^{n} r^t_{s,i}x_i$であり，$x_i$は，資産クラス$i$に対する政策資産配分である．

2.4 モデルの定式化

以上をまとめると，政策資産配分は，t期におけるシナリオsの想定のもとで，資産額F^t_sの責任準備金V_tからの下方乖離$\max(V_t - F^t_s, 0)$の期待値を最小化する問題として，以下のように定式化できる．ただし，資産額F^t_sは，政策資産配分x_iを資産運用利回りπ^t_sと，$t-1$期末における資産額F^{t-1}_sとから定まる変数であることに注意を要する．

問題 P

$$\text{最小化} \quad EL = \frac{1}{TP}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{P}\max(V_t - F^t_s, 0)$$

$$\text{条件} \quad F^t_s = F^{t-1}_s\left(1 + \sum_{i=1}^{n} r^t_{s,i}x_i\right) + C^t\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^t_{s,i}x_i\right),$$
$$t = 1, 2, \cdots, T, \ s = 1, 2, \cdots, P, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y^t_i = 1, \qquad t = 1, 2, \cdots, T, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{P}\sum_{s=1}^{P} r^t_{s,i}\right) y^t_i \geq \delta_t,$$
$$t = 1, 2, \cdots, T, \quad (6)$$

$$|y^t_i - x_i| \leq d_i,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n, \ t = 1, 2, \cdots, T, \quad (7)$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \quad (8)$$

$$y^t_i \geq 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n, \ t = 1, 2, \cdots, T, \quad (9)$$

$$F^0_s = F^0, \qquad s = 1, 2, \cdots, P.$$

ただし，(6) 式におけるδ_tは，各期の最低資産運用利回り，すなわち，最低限満たすべき保証水準をあらわしている．実務的見地からδ_tは，資産額が責任準備金の85%を下回るような利回りθ_{lower}，t期おける資産クラスiのP個のシナリオの期待収益率を用いて，以下のように定めることが可能である．

$$\delta_t = \min\left(\min_i\left(\frac{1}{P}\sum_{s=1}^{P} r^t_{s,i}\right), \theta_{lower}\right)$$

3. 解　　法

3.1 解法のフレームワーク

問題 P の制約式 (4)〜(9) を満足する解を$\tilde{x_i}, \tilde{y_i}^t$とする．このとき，$\tilde{x_i}, \tilde{y_i}^t$を (3) 式に代入することで，$\tilde{F_s}^t$は再帰的に算出することができる．

シナリオ s における，t 期の責任準備金に対する資産額の不足額 L_s^t は，(1) 式，および，(3) 式を用いて，以下のようにあらわせる．ただし，L_s^t は，t 期，s シナリオにおける資産額の不足額 $\max\left(V^t - F_s^t, 0\right)$ である．

$$\begin{aligned} L_s^t &= \max(V^t - F_s^t, 0) \\ &= L_s^{t-1} \\ &\quad + \left(F_s^{t-1}\pi_s^t - V_s^{t-1}\theta\right) + \frac{C_t}{2}\left(\pi_s^t - \theta\right) \end{aligned}$$

ここで，t 期における，$t-1$ 期末の資産額 F_s^{t-1} は，t 期における資産額からみると，定数と考えてよい．したがって，t 期におけるシナリオ s の不足額 L_s^t は，t 期におけるポートフォリオの収益率 π_s^t と，予定利率 θ の大小関係によって決定される．以上より，期待不足額を最小化する問題 P は，π_s^t の θ に対する下回り率，すなわち，$\max\left(\theta - \pi_s^t, 0\right)$ の期待値を最小化することとみなすことができ，以下の問題 P' が導出できる．

問題 P'

$$\text{最小化} \quad \frac{1}{TP}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{P}\max\left(\theta - \sum_{i=1}^{n} r_{s,i}^t x_i, 0\right)$$

$$\text{条件} \quad (4)\sim(9)$$

問題 P' は，目的関数が非線形関数となっているが，以下の問題 R と等価 (証明は〔4〕など) となる．ただし，m_s^t は，政策資産配分によるポートフォリオの収益率の，予定利率に対する不足率である．したがって，問題 R の実行可能解は，問題 P の実行可能解となる．

問題 R

$$\text{最小化} \quad \frac{1}{TP}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{P} m_s^t$$

$$\begin{aligned} \text{条件} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{P}\sum_{s=1}^{P} r_{s,i}^t\right) y_i^t \geq \delta_t, \\ & \qquad\qquad t = 1, 2, \cdots, T, \quad (10) \\ & \sum_{i=1}^{n} y_i^t = 1, \qquad t = 1, 2, \cdots, T, \\ & |y_i^t - x_i| \leq d_i, \\ & \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \ t = 1, 2, \cdots, T, \\ & y_i^t \geq 0, \\ & \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \ t = 1, 2, \cdots, T, \\ & x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \\ & \sum_{i=1}^{n} r_{s,i}^t x_i + m_s^t \geq \theta, \\ & \qquad s = 1, 2, \cdots, P, \ t = 1, 2, \cdots, T, \\ & m_s^t \geq 0, \\ & \qquad s = 1, 2, \cdots, P, \ t = 1, 2, \cdots, T. \end{aligned}$$

3.2 アルゴリズム

(10) 式の左辺における $\frac{1}{P}\sum_{s=1}^{P} r_{s,i}^t$ は，ポートフォリオの期待収益率を表している．ポートフォリオの期待収益率は，(10) 式における δ_t に比例して増加する．このとき，ポートフォリオには，国内株式，外国債券，外国株式など，収益率の変動の大きい資産クラスの組み入れが増える．これにより，ポートフォリオの収益率が，θ を下回る可能性は減少する．その一方で，一度，ポートフォリオの収益率が θ を下回った場合には，θ に対する不足が増加し，目的関数値が増加する．したがって，θ に対する不足を最小化するためには，m_s^t の増加に対してポートフォリオの収益率を適当な水準まで上昇させる必要がある．

いま，問題 P の最適解 $x_i^*, y_i^{t^*}$ を与える δ_t を δ_t^* とする．δ_t^* は，明らかに以下の関係を満たす．よって，δ_t^* を所与の δ_t より，適当にとった Δ_t まで増加させると，最適解が得られる．

$$\delta_t \leq \delta_t^* \leq \Delta_t, t = 1, 2, \cdots, T$$

以上をまとめると，問題 P の解法は，以下のように整理できる．ただし，以下の解法は，$t = T$ 期におけるポートフォリオの期待収益率を変化させることにより，期待不足額を最小にする資産配分を算出するものである．

[解法]

STEP0 $j := 0$, $h := 10^{-3}$, $\bar{EL} = \infty$, $opt = 0$ とおく．

STEP1 問題 R を解く．最適解が存在しなければ STEP2 へ行く．問題 R の最適解を $\hat{x_i}^{(j)}, \hat{y_i}^{t(j)}$ とする．
問題 P の実行可能解 $\hat{F_s^{t(j)}}$ を計算する．
問題 P の目的関数値 $EL^{(j)}$ を計算し，$\bar{EL} < EL^{(j)}$ ならば $\bar{EL} := EL^{(j)}$, $opt := j$ とする．
$\delta_T^{(j+1)} := \delta_T^{(j)} + h$ とする．
$j := j + 1$ として $\delta_T^j > \Delta_T$ ならば STEP2 へ，そうでなければ STEP1 にもどる．

STEP2 $\hat{x_i}^{opt}, \hat{y_i}^{t^{opt}}, \hat{F_s^{t^{opt}}}$ を最適解の近似解として出力する．

STEP3 終了．

4. 数値実験および考察

4.1 数値実験の目的と前提条件

数値実験では，まず，シナリオ数を固定して責任準備金に対する積立比率を変化させた．これによりそれぞれの場合における政策資産配分 x_i を考察し，実務への適用可能性を評価する．また，シナリオ数，および，責任準備金に対する期初資産額を固定し，各期の資産配分 y_i^t を算出し，その意味について考察する．最後に，シナリオ数を変化させることで，モデルの感度分析を行い，実用的なシナリオ数について考察を行う．

数値実験には，国内債券，国内株式，外国債券，外国株式，および，現金等を用いた．これら5資産クラスは，わが国の年金基金において，一般的に用いられる基本的なものである．なお数値実験は，CPU が PentiumIII，450MHz，メモリー 256MByte の計算機により行い，ソルバーには ILOG CPLEX Ver.7.0（注 **1**）を用いた．

シナリオは，以下の数値にもとづき作成した．すなわち，各資産の収益率は，**表 1**，および，**表 2** の諸数値にもとづく多変量正規分布にしたがうとして，モンテカルロシミュレーションにより作成した．ただし，**表 1** の数値は，5年予測値を年率化して表示したものである．なお，**表 1** における上・下限とは，各資産クラスの各期における資産配分 y_i^t の，政策資産配分 x_i からの許容乖離幅 d_i をあらわしている．

表 1 期待収益率 (%/年)，標準偏差 (%/年)，政策資産配分からの許容乖離幅 (%)

資産クラス	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	現金等
期待収益率	3.07	5.41	4.94	6.39	0.40
標準偏差	1.69	10.43	4.61	8.90	0.56
上・下限	±3	±5	±5	±5	±2

表 2 相関係数

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	現金等
国内債券	1.000	0.394	-0.045	-0.283	0.427
国内株式	0.394	1.000	-0.203	-0.212	0.429
外国債券	-0.045	-0.203	1.000	0.716	-0.219
外国株式	-0.283	-0.212	0.716	1.000	-0.666
現金等	0.427	0.429	-0.219	-0.666	1.000

4.2 最適化モデルの性質と年金運営政策

図 1 は，シナリオ数を $P = 1{,}000$ とし，期初負債額 20,000(百万円) に対して，積立比率を 95.0%，97.5%，

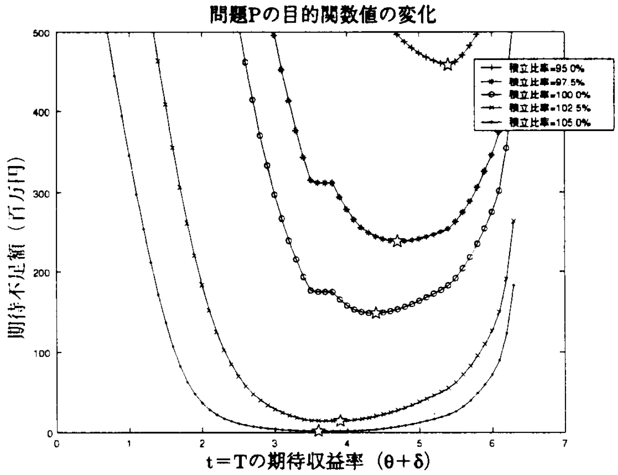

図 1 積立比率の違いによる問題 P の最適値の変化

表 3 積立比率 (%) の違いによる期待不足額 (百万円) および政策資産配分 (%) の変化 (シナリオ数=1000)

積立比率	期待不足額	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	現金等
95.0	458.7	3.0	24.4	53.4	17.2	2.0
97.5	238.7	34.6	15.1	37.0	13.2	0.1
100.0	148.3	57.7	8.2	23.3	10.9	0.0
102.5	14.4	71.8	4.1	14.5	9.6	0.0
105.0	1.8	74.2	3.4	13.2	9.3	0.0

表 4 負債側の前提 (%/年，百万円)

期初責任準備金	20,000				
予定利率	3.0				
期 (年)	1	2	3	4	5
CF	420	360	260	190	-90

100.0%，102.5%，105.0%とした場合の，問題 P の目的関数値の変化を示したものである．☆印の点は，期待不足額を最小にする点を示しており，この点を与える資産配分が政策資産配分 (**表 3**) である．保証水準は，簡単化のため t によらず一定値 0.5 とした．ただし，積立比率とは，期初負債額に対する期初資産額の比率である．また，期初責任準備金，および，各期における掛金から給付を減じたキャッシュフロー (CF と表記する) には，**表 4** の数値を仮定した．

表 3 から，政策資産配分は，積立比率が低いとき，外国債券に関する資産構成比が高く，一方で，積立比率の上昇にともない，国内債券比率が高くなることがわかる．たとえば，積立比率が 95.0%の場合の国内債券，外国債券の資産構成比は，それぞれ，3.0%, 53.4%である．ところが，積立比率が 105.0%の場合には，国内債券，外国債券の資産構成比がそれぞれ，74.2%, 13.2%と大きく変化する．後者の場合には，前者に比べ積立比率

に余裕がある．このため，責任準備金からの期待不足額を最小化するためには，より収益率の変動が小さい，国内債券が多く組み入れられることになったと考えられる．

上記の結果は，資産運用にあたり，適正な価格変動リスク (収益率の標準偏差) を負うことで，期待不足額が最小化できることを示唆している．たとえば，積立水準が 100.0%のとき，期待不足額が最小となる最終期におけるポートフォリオの期待収益率 4.2%は，責任準備金の予定利率 3.0%よりも高い．

以上の解釈は，実務的にもきわめて受け入れやすいものである．

4.3 各期の資産配分の解釈

表 5 は，予定利率として 3.0(%/年) を仮定し，現在 ($t=0$ 時点) の責任準備金 20,000(百万円) に対して，積立比率が 102.5%(20,500(百万円)) である年金基金の CF，責任準備金，および，最小平均利回りの推移を示したものである．ただし，最小平均利回りとは，ある t 期における資産額が同期における責任準備金と等しくなるような，現時点 0 期から t 期までの平均的な利回りと定義する．つまり，現時点 0 期から t 期までの平均的な利回りが，最小平均利回り以上であれば，t 期の資産額が同期の責任準備金を下回らない．

表 5 責任準備金 (百万円) と最小平均利回り (%/年) の推移

期 (年)	1	2	3	4	5
CF	90	-190	-260	-360	-420
責任準備金	20,691	21,119	21,489	21,769	21,996
最小平均利回り	0.49	1.74	2.15	2.36	2.49

いま，各期の保証水準 δ_t に対して，**表 5** における最小平均利回りを設定して本モデルにより最適化を行った結果，**表 6** が得られた．**表 6** では，政策資産配分のほかに，各期の資産配分 y_i^tを示した．

表 5 から，最小平均利回りは，期の増加とともに大きくなる．これに伴い，**表 6** では，期の推移とともに，国内債券＋現金等の構成比率が減り，国内株式，外国債券，および，外国株式の構成比率が上がっていることがわかる．

年金資産運用では，国内債券，および，現金等の元本が保証された資産クラスのことを，安全資産という．これに対し，安全資産以外の資産クラスを危険資産という．ポートフォリオの期待収益率は，危険資産を多く組み入れるほど高くなるので，最小平均利回りが増加するにしたがって，安全資産比率が減り危険資産比率が高まる．実際，1 期の安全資産比率は，63.7%であるのに対し，5 期における安全資産比率は 55.7%まで減少している．

表 6 政策資産配分 (%) と各期の資産配分 (1 期～5 期)(%)

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	現金等
政策資産配分	58.7	7.7	23.6	10.0	0.0
1 期	61.7	2.7	28.6	5.0	2.0
2 期	61.7	2.7	28.6	5.0	2.0
3 期	61.7	12.7	20.6	5.0	0.0
4 期	61.7	2.7	28.6	7.0	0.0
5 期	55.7	10.7	18.6	15.0	0.0

表 7 乱数のシード値の違いによる政策資産配分の変動幅 (%) と平均計算時間 (秒)

シナリオ数	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	現金等	平均計算時間
1000	8.9	2.6	4.9	1.5	0.2	61
2000	5.4	1.6	4.6	0.9	0.0	415
5000	4.9	1.4	2.3	1.1	0.0	2900

このように，本モデルでは，各期の資産配分 y_i^tを，政策資産配分 x_iからの許容乖離幅 d_iの範囲で決定でき，政策資産配分策定時点での各期の運用政策の立案に対しても有用である．

4.4 モデルの感度分析

本モデルでは，多数のシナリオを用いている．このため，本モデルによって算出される資産配分は，シナリオの作成方法，あるいは，シナリオ数によって変化する．

表 1，および，**表 2** をもとにシード値の異なる乱数をそれぞれ 5 回発生させ，特定のシナリオが計算結果に及ぼす影響を調べた．ただし，積立比率は，97.5%とした．また，負債側の前提には，**表 5** を用いた．

その結果，政策資産配分は，それぞれ **表 7** のように変化した．すなわち，乱数のシード値の影響は，ほとんどの場合，シナリオ数が少ないほど大きい．例えば，国内債券は，シナリオ数 1000 本，2000 本，5000 本の場合，それぞれ，約 8.9%，約 5.4%，約 4.9%となる．しかしながら，外国株式に対する政策資産配分では，シナリオ数が 2000 本と 5000 本の場合で，後者の変動幅が大きい．ただし，シナリオ数が 2000 本，5000 本の場合の変動幅は，最大の国内債券の場合であっても，上下許容乖離幅の範囲 (±3%) 内であり，十分実用的な解となっている．

一方でシナリオ数が 5000 本の場合の平均計算時間は，2900 秒であるのに対し，2000 本の場合の平均計

算時間は，415秒程度である．このことを考慮すると，実用的なシナリオ数は，2000本程度で十分であろう．

5. おわりに

資産運用のあり方には，2つの側面がある．まず，個別銘柄などの売買といった約定を，自ら行う，または，行うことのできる立場からみた資産運用である．これに対し，厚生年金基金は，専ら，資産運用を委託する第3者(運用機関)の行う資産運用の管理を行う立場である．前者の場合の資産運用は，比較的短期的な視点の資産運用である．このため，こうした資産運用モデルにとって，1年という投資期間は，非常に長期のものである．ところが，後者の立場における1年は，ほんの短期間に過ぎず，同一の枠組みで議論されることに違和感を覚える実務家は少なくなかった．

こうした問題意識の下，本論文では，年金資産運用，特に，年金ALMと同時に算出されることが多く，厚生年金基金にとって最も重要な政策資産配分の策定に焦点を当てた．政策資産配分策定モデルには，各期の資産配分も取り込んだ．

本モデルは，年金資産運用，特に，計算期間中に掛金の引き上げなどが存在しない共済などの資産運用に適しており，今後，適用可能性を検討したい．また，本モデルは，給付政策，積立政策，運用政策に対する議論を深め，年金基金運営のあり方を再考するための端緒となろう．

注

(1) ILOG CPLEXは，http://www.ilog.co.jpを参照

参考文献

〔1〕 Brinson, G.P., Singer, B.D. and Beebower, G.L.: "Determinants of Portfolio Performance II: An Update," *Financial Analysts Journal*, Vol. 47, No. 3, pp. 40–48 (1991)

〔2〕 Ibbotson, R.G. and Kaplan, P.D.: "Does Asset Allocation Policy Explain 40, 90, or 100 Percent of Performance?," *Financial Analysts Journal*, Vol. 56, No. 1, pp. 26–33 (2000)

〔3〕 Markowiz, H.: Portfolio Selection, Second Edition, Basil Blackwell, New York (1991)

〔4〕 竹原　均：「ポートフォリオの最適化」，朝倉書店 (1997)

〔5〕 Samuelson, P.: "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, pp. 239–246 (1969)

〔6〕 枇々木規雄："シミュレーション型多期間計画モデルに対する数値実験による考察，" 日本金融・証券計量・工学学会，夏季大会予稿集，pp. 81–100 (2002)

〔7〕 Maranas, C., Androulakis, I., Floudas, C., Berger, A. and Mulvey, J.: "Solving Long-Term Financial Planning Problems via Global Optimization," *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 21, pp. 1405–1425 (1997)