日本機械学会論文集(C編)
70巻695号(2004-7)

論文 No. 03-0665

拘束条件つき有限時間 minimax receding horizon 制御問題の一解法*

河 辺 徹*1, 平 田 健太郎*2

A New Approach to Finite Minimax Receding Horizon Control Problem with Constrained Conditions

Tohru KAWABE*3 and Kentaro HIRATA

*3 Department of Computer Science, Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennoudai, Tsukuba-shi, Ibaraki, 305-8573 Japan

In this paper, a new approach to robust finite RHC (receding horizon control) of constrained systems with structured uncertainties and bounded disturbances is proposed. The control problem is formulated as a minimax optimization problem of quadratic cost function with bounded constraints conditions. The proposed approach using the S-procedure can solve this problem efficiently. Numerical examples are given to show the advantage of this approach, the reduction of conservativeness, with respect to other preexisting methods.

Key Words: Finite RHC (Receding Horizon Control), S-Procedure, Minimax Optimization, Constrained System

1. は じ め に

近年，2次形式評価規範に基づく最適制御問題を，サンプリング周期毎にシフトしながらオンラインで解いて制御を行う Receding horizon 制御（以下，RHC と略記）が，特に産業用プロセス制御の分野で広く用いられている[(1)(2)]．また最近では，プロセス制御のみならずロボットやビークルなど機械系の制御に対してもRHC が応用されつつある[(3)]．RHC は，操作量や制御量に対する制約条件を制御アルゴリズムの中で陽に取り扱うことが可能なことやむだ時間系や非最小位相系でも同じアルゴリズムで対処できるなどの利点がある[(1)(2)]が，その一方で，通常の RHC の欠点として，プラントモデルの不確かさや外乱に対しロバスト性を陽には保障できない点があげられる．これは，サンプリング周期毎に解くべき最適化問題の評価規範がノミナルモデルに対して設定されるためである．一般の線形システムに対するロバスト制御系の設計理論は，90年代以降様々な手法が提案され実用化されているにもかかわらず，これに比較してロバスト性を保障する RHC 手法の提案はこれまでそれほど多くはない[(4)(5)]．

ロバスト RHC を実現するための一つの手段は，各サンプリング周期毎に解くべき最適化問題を，minimax 最適化問題に拡張することである．これはつまり，プラントモデルの不確かさや外乱が評価規範を最大化しようとするのに対し，制御入力がこれを最小化しようとする最適化問題として定式化し，これを解くことで最悪ケースを導出し，それ以上は悪くならないという意味でのロバスト性能を保障することである．しかし，一般に minimax RHC 問題は非凸最適化問題となり，解くことは難しい．最初にこの問題に取り組んだのは，Campo らの論文[(6)]であり，システムの FIR(Finite Impulse Response) の最大値を最小化する手法を提案している．その後，この FIR に対する minimax RHC 問題を取り扱ったものには，Zheng らの論文[(7)]や Allwright らの論文[(8)]がある．また，外乱に対する minimax RHC 手法については，Bemporad ら[(9)(10)]や Scokaert ら[(11)]が提案している．

一方，プラントモデルの不確かさに対する minimax RHC 問題を LMI (Linear Matrix Inequality；線形行列不等式) により解く手法を Kothare らが提案している[(12)]．さらに，Cuzzola らは Kothare の手法を改良し，その保守性を軽減している[(13)]．他にも例えば，Lee らが，プラントモデルの不確かさに対する minimax RHC 問題に対する別のアルゴリズムを提案している[(14)]．しかし，これらの提案手法は，解法の容易さから無限時間の2次形式評価関数を用いた minimax 最適化問題として定式化したものである．このことは，化学プロセスのような時間的にそれほど速く変化しない対象への

* 原稿受付 2003年6月4日．
*1 正員，筑波大学大学院システム情報工学研究科(〒305-8573 つくば市天王台1-1-1)．
*2 大阪府立大学工学部(〒599-8531 堺市学園町1-1)．
E-mail: kawabe@cs.tsukuba.ac.jp

適用ではあまり問題とはならないかもしれないが，高速に変化するダイナミクスを持つ機械系に対しては，その変化の速さに対応するために有限時間の評価関数を用いる必要がある．また，機械系のシステムに対しては状態の不連続な変化やスイッチング現象なども生じやすく，これらに対しても比較的容易に拡張して適用できる minimax RHC 手法とするためにも，評価関数を有限時間で考えておくことは重要である．

そこで本稿では，制御入力等に楕円体型の有界条件のある拘束システムを対象とし，有限時間の 2 次形式評価規範に関する minimax RHC 問題の一解法を提案する．対象とする拘束システムは，高速に変化するダイナミクスを持ち，かつ，構造化された不確かさと外乱入力を併せ持つ機械システムを想定している．提案手法は，S-procedure[15]を用いて minimax 最適化問題を効率良く解く方法であり，従来提案されている minimax RHC 手法よりも保守性を軽減できるだけでなく，楕円体型の有界条件で表される拘束システムの有限時間 minimax RHC 問題に対する一つの統一的解法となっている点が大きな利点である．

2. 問 題 設 定

経年変化や計測誤差などにより不確かさが存在するシステムを想定し，これを次式で表されるような適当な次元の離散時間システムとして表されているとする．

$$x(k+1)=(A+L\triangle R_A)x(k)+(B+L\triangle R_B)u(k)+\eta(k) \quad (1)$$

$$y(k)=Cx(k) \quad (2)$$

ここで，$x(k), u(k), y(k)$，$\eta(k)$ はそれぞれ，状態，制御入力，観測出力，外乱入力のベクトルを表すものとする．L, R_A，R_B は既知の定数行列であり，不確かさの構造を表す．$\triangle$ は，未知の有界時変なパラメータの変動を表すブロック対角な行列で，対角要素 δ_{ii} は $|\delta_{ii}|\leq 1$ の制限があるものとする．L, R_A，R_B，$\triangle$ により状態空間行列 A 及び B における構造化された不確かさを表現している．

ところで，上式の離散時間状態空間モデルに $w(k):=\triangle z(k)$ というベクトルを導入すると，

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Lw(k)+\eta(k) \quad (3)$$

$$z(k)=R_Ax(k)+R_Bu(k) \quad (4)$$

$$y(k)=Cx(k) \quad (5)$$

と書き換えることができる．このシステムに対し，制御入力 $u(k)$ にはその大きさに制限があることを仮定する．これは，実際上，コストや制御装置の制約により，制御のためのエネルギーをある一定以下の値に抑えることに相当し現実的な条件である．また，外乱入力 $\eta(k)$ に対してもその値は有界であることを仮定する．さらに，不確かさを表す時変パラメータに対し，その変動の大きさが有界であることを仮定し，これを $w(k)=\triangle z(k)$ の関係より $w(k)$ の制限として捉えることとする．すると，これら 3 つの条件は楕円体型有界制約条件として，

$$\begin{aligned} w^T(k+j)P_w w(k+j) &\leq 1 \\ \eta^T(k+j)P_\eta \eta(k+j) &\leq 1 \\ u^T(k+j)P_u u(k+j) &\leq 1 \\ (j=0,\cdots,N-1) & \end{aligned} \quad (6)$$

で表すことができ，(3)〜(5) 式で表されるシステムはこれらの制約条件をもつ拘束システムとなる．ただし，P_w, P_η, P_u は正定対称行列であり，各制約条件の重みを表す．また，^{T} は転置を表す．

この拘束システムに対し，次式で表される有限時間の 2 次形式評価関数 J を用いて，RHC 問題を設定する．

$$J(k):=\sum_{j=0}^{N-1}\{\|x(k+j+1|k)\|_Q^2+\|u(k+j|k)\|_R^2\} \quad (7)$$

ここで，Q, R は評価関数の重み定数行列であり，正定行列 $(Q,R\succ 0)$ である．また，$x(k+j|k), y(k+j|k), u(k+j|k)$ はそれぞれ，時刻 k における状態，出力，制御入力の値を用いた時刻 $k+j$ の予測値を表す．

以上により，モデルの不確かさと外乱に対し，ロバスト RHC を実現するための制御入力を求める問題は以下のような制約つき minimax 最適化問題として定式化される．

$$\min_{u(k+j|k)} \max_{w(k+j|k),\eta(k+j|k)} J(k) \quad (8)$$

subject to

$$\begin{aligned} w^T(k+j)\,P_w\,w(k+j) &\leq 1 \\ u^T(k+j)\,P_u\,u(k+j) &\leq 1 \\ \eta^T(k+j)\,P_\eta\,\eta(k+j) &\leq 1 \\ (j=0,\cdots,N-1) & \end{aligned}$$

この minimax 最適化問題は一般に鞍点解の存在が保証されず，このため，解析的に解くことは非常に難しい．それゆえ，本稿の主要な目的は，この問題をより効率よく解くことができるように変換することにある．次章ではこの方法について述べる．

3. Minimax RHC 問題の変換

まず，k ステップ毎の制御入力を一般的な RHC の設定にならい，以下のような状態フィードバック制御則で実現することとする．

$$u(k+j|k)=\begin{cases}0 & (j=0)\\ -F_0x(k+j|k) & (j=1,2,\cdots N-1)\end{cases} \tag{9}$$

ここで，F_0 はフィードバック定数行列であり，RHC の目的は，(8) 式の minimax 最適化問題を解くことで，外乱やモデルの不確かさに対して (7) 式の評価関数を最適化する F_0 を設定することである．

つづいて，以下のベクトルを導入する．

$$X:=\left[x(k+1|k)\ \ x(k+2|k)\ \ \cdots\ \ x(k+N|k)\right]^T$$

$$Z:=\left[z(k+1|k)\ \ z(k+2|k)\ \ \cdots\ \ z(k+N|k)\right]^T$$

$$W:=\left[w(k|k)\ \ w(k+1|k)\ \ \cdots\ \ w(k+N-1|k)\right]^T$$

$$\Lambda:=\left[\eta(k|k)\ \ \eta(k+1|k)\ \ \cdots\ \ \eta(k+N-1|k)\right]^T$$

(3) 式の状態方程式を繰り返し用い，これらのベクトルを使うと，

$$X=\tilde{A}x(k)+\tilde{L}W+\Lambda \tag{10}$$

$$Z=\tilde{R}_F\tilde{A}x(k)+\tilde{R}_F\tilde{L}W+\tilde{R}_F\Lambda \tag{11}$$

と表現できる．ただし，

$$\tilde{R}_F:=R_A-R_BF$$

$$F:=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -F_0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -F_0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & -F_0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}:=\begin{bmatrix}A\\ (A-BF_0)A\\ \vdots\\ (A-BF_0)^{N-2}A\end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}:=\begin{bmatrix}L & 0 & \dots 0\\ (A-BF_0)L & L & \ddots \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots 0\\ (A-BF_0)^{N-2}L & (A-BF_0)^{N-3}L & \dots L\end{bmatrix}$$

である．

さて，評価関数 J はその定義より正のスカラー値を持つことに注意して，これらの準備の下，正の値をもつ媒介変数 γ を導入すれば，(8) 式の minimax 最適化問題は次のように表現することができる．

$$\min_{F_0}\gamma \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\textbf{subject to}\quad & \max_{W,\Lambda}\ \Pi \le \gamma\\ & w^T(k+j)\,P_w\,w(k+j)\le 1\\ & u^T(k+j)\ P_u\ u(k+j)\le 1\\ & \eta^T(k+j)\,P_\eta\,\eta(k+j)\le 1\\ & (j=0,\cdots,N-1)\end{aligned}$$

ここで，

$$\Pi:=\left\{\|\tilde{A}x(k)+\tilde{L}W+\Lambda\|_{\hat{Q}}^2+\|FX\|_{\hat{R}}^2\right\},$$

$$\hat{Q}:=\begin{bmatrix}Q & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q\end{bmatrix},\qquad \hat{R}:=\begin{bmatrix}R & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & R\end{bmatrix}$$

とした．これにより，最大化に関する部分を minimax 最適化問題の目的関数から第 1 制約条件に形式上移すことができたので，もし，この第 1 制約条件式

$$\max_{W,\Lambda}\ \Pi\le\gamma \tag{13}$$

から，何らかの手段で W,Λ に関する最大化手続きが不要になれば，この制約は単なる不等式制約となり，(12) 式の minimax 最適化問題を，通常の制約つき最小化問題に変換できることになる．このことを実現するために，まず，以下の新しい基底ベクトルと変換行列を用意する．

$$\zeta:=\left[x(k)\ \ W^T\ \ \Lambda^T\ \ 1\right]^T \tag{14}$$

$$X=H_x\zeta \tag{15}$$

$$\left(H_x:=\left[\tilde{A}\ \ \tilde{L}\ \ I\ \ 0\right]\right)$$

$$FX=H_u\zeta \tag{16}$$

$$\left(H_u:=\left[F\tilde{A}\ \ F\tilde{L}\ \ F\ \ 0\right]\right)$$

$$Z=H_z\zeta \tag{17}$$

$$\left(H_z:=\left[\tilde{R}_F\tilde{A}\ \ \tilde{R}_F\tilde{L}\ \ \tilde{\Gamma}\ \ 0\right]\right)$$

$$\Lambda=H_\eta\zeta \tag{18}$$

$$\left(H_\eta:=\left[\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,I\,0\right]\right)$$

$$1=(H_1\zeta)^T(H_1\zeta) \tag{19}$$

$$\left(H_1:=\left[0\cdots 0\,1\right]\right)$$

これらを用いると，(12) 式の最適化問題の最大化手続きを伴う第 1 制約条件式は

$$\max_{W,\Lambda}\left\{\|H_x\zeta\|_{\hat{Q}}^2+\|H_u\zeta\|_{\hat{R}}^2\right\}\le(H_1\zeta)^T\lambda(H_1\zeta) \tag{20}$$

と表現できる．ここで，この式の左辺ならびに右辺はいずれも2次形式で表現されており正のスカラー値を持つことに注意すれば，もし，左辺の $\| H_x\zeta \|_{\hat{Q}}^2 + \| H_u\zeta \|_{\hat{R}}^2$ の W,Λ に関する最大値についてこの不等式が成立するなら，W,Λ に関し，その値より小さな $\| H_x\zeta \|_{\hat{Q}}^2 + \| H_u\zeta \|_{\hat{R}}^2$ のどの値についても，この不等式が成立することになる．このことは，$\| H_x\zeta \|_{\hat{Q}}^2 + \| H_u\zeta \|_{\hat{R}}^2$ について，W,Λ に関する最大化を行った後に，この不等式が成立することをチェックする必要はなく，制約条件として与えられている W と Λ（つまり，w と η）に関する楕円体型有界条件の範囲内で，

$$\left\{\| H_x\zeta \|_{\hat{Q}}^2 + \| H_u\zeta \|_{\hat{R}}^2\right\} \le (H_1\zeta)^T\lambda(H_1\zeta) \qquad (21)$$

が成り立つことをチェックすればよいことを意味する．よって，第1制約条件式から W と Λ に関する最大化手続きを消去することが出来る．この式はさらに整理して

$$\zeta^T\left(H_1^T\lambda H_1 - H_x^T\hat{Q}H_x - H_u^T\hat{R}H_u\right)\zeta \ge 0 \qquad (22)$$

となる．

また，他の制約条件式については，例えば，w に関する制約の場合，W 行列から適当な部分を取り出し，$w(k+j) = H_w^{(j)}\zeta$ の関係を満足する行列 $H_w^{(j)}$ を用意し，(14)，(19) 式を用いれば

$$(H_w^{(j)}\zeta)^T P_w (H_w^{(j)}\zeta) \le (H_1\zeta)^T(H_1\zeta) \qquad (23)$$

と表現できる．η，u に関する制約についても同様な表現が可能であり，よってこれらはまとめて，

$$\begin{array}{l}(H_w^{(j)}\zeta)^T P_w (H_w^{(j)}\zeta) \le (H_1\zeta)^T(H_1\zeta)\\ (H_\eta^{(j)}\zeta)^T P_\eta (H_\eta^{(j)}\zeta) \le (H_1\zeta)^T(H_1\zeta)\\ (H_u^{(j)}\zeta)^T P_u (H_u^{(j)}\zeta) \le (H_1\zeta)^T(H_1\zeta)\\ \qquad (j=0,\cdots,N-1).\end{array} \qquad (24)$$

とできる．

以上により，(12) 式で記述された minimax 最適化問題の全ての制約条件式は

$$\zeta^T\left(H_1^T\lambda H_1 - H_x^T\hat{Q}H_x - H_u^T\hat{R}H_u\right)\zeta \ge 0 \qquad (25)$$

$$\textbf{subject to}\quad \begin{array}{l}\zeta^T(H_1^TH_1 - (H_w^{(j)})^T P_w H_w^{(j)})\zeta \ge 0\\ \zeta^T(H_1^TH_1 - (H_u^{(j)})^T P_u H_u^{(j)})\zeta \ge 0\\ \zeta^T(H_1^TH_1 - (H_\eta^{(j)})^T P_\eta H_\eta^{(j)})\zeta \ge 0\\ \qquad (j=0,\cdots,N-1)\end{array} \qquad (26)$$

のように変換して表現できる．この形式の制約式に対しては *S*-procedure [15]が適用できるため，この結果，元の (8) 式ならびに (12) 式の minimax 最適化問題は以下のように変換可能である．

$$\min_{F_0}\gamma \qquad (27)$$

$$\textbf{subject to}\quad H_1^T\gamma H_1 - H_x^T\hat{Q}H_x - H_u^T\hat{R}H_u - \sum_{j=0}^{N-1}[\tau_j^w S_j^w + \tau_j^u S_j^u + \tau_j^\eta S_j^\eta] \ge 0$$

$$(j=0,\cdots,N-1)$$

ただし，

$$\begin{array}{l}S_j^w := (H_1^TH_1 - (H_w^{(j)})^T P_w H_w^{(j)}),\\ S_j^u := (H_1^TH_1 - (H_u^{(j)})^T P_u H_u^{(j)}),\\ S_j^\eta := (H_1^TH_1 - (H_\eta^{(j)})^T P_\eta H_\eta^{(j)})\end{array}$$

とおいた．また，$\tau_j^w, \tau_j^u, \tau_j^\eta, \tau_j^z$ はそれぞれ，半正定値をもつスカラー値パラメーターである．

なお，*S*-procedure を用いたこの変換は，ここでは十分条件しか成立しない[15]．なぜなら，変換の際に導入したスカラー値パラメータ τ_j^* が複数個存在し，いわゆるロスレスにはならないためである．このため，この変換は等価ではなく，変換後の問題を解くことで得られる RHC 制御則には若干の保守性を伴う．しかし，実際上この保守性はほとんど問題にならない程度であることが多く，それゆえ，従来提案されているロバスト minimax RHC 手法より保守性を軽減できることが十分期待できる．このことは，次章の数値例により示される．

さて，(27) 式の最適化問題は，さらに，"*Schur-complement*" [16] を使えば，以下のように表現することも可能である．

$$\min_{F_0,\tau}\gamma \qquad (28)$$

$$\textbf{subject to}\quad \begin{bmatrix} H_1^T\gamma H_1 - \Sigma & H_x^T & H_u^T\\ H_x & \hat{Q}^{-1} & 0\\ H_u & 0 & \hat{R}^{-1}\end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\tau_j \ge 0 \quad (j=0,\cdots,N-1)$$

ただし，

$$\Sigma := \sum_{j=0}^{N-1}[\tau_j^w S_j^w + \tau_j^u S_j^u + \tau_j^\eta S_j^\eta]$$

とおいた．

以上により，そのままでは解くことが困難であった元の (8) 式の minimax 最適化問題を，一般的な最適化ツール，例えば遺伝的アルゴリズムやタブーサーチなどのヒューリスティクス手法や逐次 2 次計画法などを用いて効率よく最適化を行える問題に変換可能であることが示された．

4. 数 値 例

本章では，前章で提案した変換方法を用いて導出した最適化問題による RHC 手法の有効性を簡単な数値例を用いて，従来提案されている手法との比較により示す．例題として，Wie らにより提案されているロバスト制御系設計のベンチマーク問題[17]を採用する．対象となるのは，図 1 で示す 2 つの台車がばねで連結されている機械システムである．ただし，オリジナル問題では外乱入力は想定されていないが，ここでは提案手法の有効性を示すために，外乱入力も加える．なお，このシステムはそれほど高速に変化するものではなく，制御系の設計手法としては，H∞ 制御や 2 次安定化制御を用いることも可能である．しかし，ここでは，提案手法が以下のメリットを持っていることを示すために，この数値例を用いることとする．

- 従来，RHC は化学プロセスのような，機械系と比べ，かなりゆっくりとした動作特性をもつシステムを主な対象としてきたのに対し，提案手法はこの例のような（化学プロセスに比べ，高速に変化する動作特性をもつ）機械系に対しても適用できる．
- パラメータ変動の不確かさがある場合にも対応できるロバストな RHC になっており，さらに，従来提案されている方法に比べ，保守性を軽減できる．

図 1 で示されるシステムに対し，サンプリング時間を 0.1 sec. とし，オイラーの 1 次近似を用いて離散化すると

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ \dfrac{-0.1K}{m_1} & \dfrac{0.1K}{m_1} & 1 & 0 \\ \dfrac{0.1K}{m_2} & \dfrac{-0.1K}{m_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{0.1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \eta(k)$$

$$y = x_2(k) \tag{29}$$

という離散時間状態空間モデルが得られる．ただし，m_1，m_2 は 2 つのおもりの質量，K はばね定数を表す．また，4 つの状態変数のうち，x_1 と x_2 は 2 つのおもりの位置，x_3 と x_4 はそれらの時間微分 (速度) を表す．なお，初期状態は $x(0) = [1\ 1\ 0\ 0]^T$ とする．

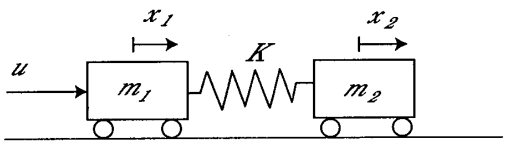

Fig. 1 Coupled spring-mass system

ここで，m_1，m_2，K にはそれぞれ次式で表される変動幅の不確かさがあることを仮定する．

$$m_1 \in \{m_1 | m_{1min} \le m_1 \le m_{1max}\},$$
$$m_2 \in \{m_2 | m_{2min} \le m_2 \le m_{2max}\},$$
$$K \in \{K | K_{min} \le K \le K_{max}\}$$

また，制御入力 u と外乱入力 η の楕円体型有界制約は，それぞれその重みを $P_u = 1$，$P_\eta = 36.0$ と設定した．以上により本数値例では，これらの条件の下，外乱ならびに，m_2 と K による構造的不確かさに対してロバストな RHC を実現することが求められる．

(7) 式の評価関数の重み行列を $Q = I$，$R = 0.5$ とし，有限時間の予測区間を $N = 10$ と設定した場合の結果を以下に示す．なお，最適化ツールとしては，ここでは，minimax ロバスト制御問題の解法ツールとして実績のある文献 (18) で提案した遺伝的アルゴリズムを用いた．ただし，対象システムが大規模な場合や予測区間 N が大きい場合には，必ずしもこの遺伝的アルゴリズムが最適化ツールとして適用できるとは限らない．そのような場合には，他に問題に適した効率の良いツールがあるかどうか，なければ，予測区間を小さくするかを検討する必要がある．

まず，3 つのパラメータの不確かさについては，

$$m_1 = 1 \quad (m_{1min} = m_{1max} = 1) \tag{30}$$
$$1 \le m_2 \le 10 \quad (m_{2min} = 1, m_{2max} = 10) \tag{31}$$
$$1 \le K \le 100 \quad (K_{min} = 1, K_{max} = 100) \tag{32}$$

とする．不確かさのあるパラメータを $k_1 := K$, $k_2 := K/m_2$ として

$$k_1 := \hat{k}_1 + \alpha_1 \delta_1 \quad (k_{1min} \leq k_1 \leq k_{1max}) \tag{33}$$

$$k_2 := \hat{k}_2 + \alpha_2 \delta_2 \quad (k_{2min} \leq k_2 \leq k_{2max}) \tag{34}$$

と変動パラメータを表すことができる．ただし，

$$\hat{k}_1 := \frac{k_{1min} + k_{1max}}{2} \tag{35}$$

$$\hat{k}_2 := \frac{k_{2min} + k_{2max}}{2} \tag{36}$$

$$\alpha_1 := \frac{k_{1max} - k_{1max}}{2} \tag{37}$$

$$\alpha_2 := \frac{k_{2max} - k_{2max}}{2} \tag{38}$$

であり，δ_1, δ_2 は変動の大きさを表すパラメーターで $|\delta_1| \leq 1$，$|\delta_2| \leq 1$ である．これらを用いると，(1) 式の $A, B, L, \triangle, R_A, R_B$ は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ -0.1\hat{k}_1 & 0.1\hat{k}_1 & 1 & 0 \\ 0.1\hat{k}_2 & -0.1\hat{k}_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$R_A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\triangle = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$R_B = \mathbf{0}$$

となる．

さて，以上の条件と準備の下，提案手法を用いた RHC 手法による閉ループ系の出力 $y = x_2$ 応答を図 2 に示す．実線は，m_2，K を変動させた場合の最良の応答，破線は最悪の応答を示している．これより，m_2 および K の不確かさならびに外乱 η に対してロバストな制御系が構築されていることがわかる．

次に，既存の手法と比べて保守性を如何に軽減できているかの評価を行うために，変動パラメータ K の最大値 K_{max} を未知として，どこまでこの K_{max} の値を大きくとって RHC 設計を行うことができるかを調べてみた．比較のため，従来提案されている Kothare らの手法[12]と Cuzzora らの手法[13]を用いた場合に同様に K_{max} の値をどこまで大きく取れるかも計算してみた．それらの結果をまとめたものが，表 1 である．

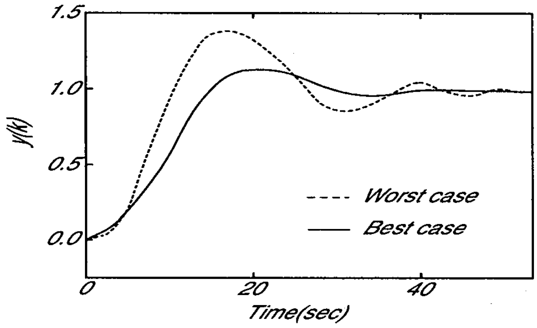

Fig. 2 Closed-loop response

Table 1 Upper boud values of K_{max}

method	K_{max}
Proposed method	88.7
Method by Cuzzola et al.	68.2
Method by Kothare et al.	45.3

表 1 の結果より，提案手法を用いた場合は，従来提案されている 2 つの手法に比べ，K_{max} の上界値をかなり大きく取れていることがわかる．このことから，提案手法は従来法よりも，設計結果における保守性をかなり軽減できることが示されたといえる．

5. おわりに

本稿では，高速に変化するダイナミクスを持ち，かつ，構造化された不確かさと外乱入力を併せ持つような機械システムを想定して，不確かさや外乱の変動範囲には楕円体型の有界条件があり，また，制御入力や出力にも制限があるような拘束システムに対する minimax ロバスト RHC 問題の効率的解法を提案した．提案手法は，S-procedure を用いて minimax RHC 問題を効率良く，かつ従来提案されている手法より保守性を軽減して解くための方法である．本稿では，状態フィードバック則を用いる場合のみを対象としたが，状態推定を行う必要があるような場合でも，この状態推定誤差に対するロバスト性を議論したい場合においても，誤差の見積もりが楕円体型有界条件で抑えられるならば，提案した手法でまったく同様に取り扱うことが可能である．また，例えば，出力値に対する制限や，観測ノイズが存在するような場合でも，それら

に対する拘束条件が楕円体型有界条件で表されるならば，これらも，まったく同様に取り扱うことができる．その意味において，本提案手法は，楕円体型の有界条件で表される拘束システムに対する有限時間 minimax RHC 問題の統一的解法となっており，適用範囲が広いといえる．それゆえ，従来通常の RHC 手法の適用が困難であると思われていた，不確かさを伴ったり，高速に変化するダイナミクスを持つ機械システムへの適用も十分可能である．また，近年話題となっている，状態の不連続な変化やスイッチング現象などを伴うハイブリッドシステムに対するロバスト制御系の設計手法としても，比較的容易に拡張して適用できることが期待される．これらのシステムへの適用可能性の解析や拡張が今後の課題である．

謝　辞

第一著者は，本研究に関して数々の貴重なご助言を頂いたスイス連邦工科大学の Manfred Morari 教授に深く感謝いたします．また第一著者は，本研究の一部を遂行するにあたり，平成 12 年度電気通信普及財団の研究助成 (長期海外研究援助) ならびに文部科学省科学研究費補助金 (No.15560373) の助成を受けました．ここに記して感謝します．

文　献

(1) C.E. Garcia, D.M. Prett and M. Morari, "Model Predictive Contrl: Theory and Practice - a survey", *Automatica*, **25**-3, (1989), pp. 335–348

(2) J.B. Rawlings, " Tutorial Overview of Model Predictive Control", *IEEE Contr. Syst. Magazine.* **20**-3, (2000), pp. 38–52

(3) W.B. Dunbar and R.M. Murray, "Model Predictive Control of Coordinated Multi-vehicle Formations", *Proc. 2002 Conf. Decision and Contr.*, (2002), pp. 4631–4636

(4) A. Bemporad and M. Morari, "Robust Model Predictive Control: A Survey" In A. Garulli, A. Tesi and A. Vicino editors, *Robustness in Identification and Control*, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.245), Springer-Verlag, (1999), pp. 207–226

(5) D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao and M. Scokaert, "Constrained model predictive control: Stability and optimality", *Automatica*, **36**-6, (2000), pp. 789–814

(6) P.J. Campo and M. Morari, "Robust Model Predictive Control", *Proc. 1987 American Contr. Conf.*, (1987), pp. 1021–1026

(7) Z.Q. Zheng and M. Morari, "Robust Stability of Constrained Model Predictive Control", *Proc. 1993 American Contr. Conf.* , (1993), pp. 379–383

(8) J.C. Allwright and G.C. Papavasiliou, "On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses", *Syst. Control Lett.*, **18**, (1992), pp.159–164

(9) A. Bemporad, "Reducing Conservativeness in Predictive Control of Constrained Systems with Disturbances", *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Contr.*, (1998), pp. 1384–1389

(10) A. Bemporad and A. Garulli, "Output-feedback Predictive Control of Constrained Linear Systems via Set-membership State Estimation", *Int. Journal of Control*, **73**-8, (2000), pp. 655–665

(11) P.O.M. Scokaert and D.Q. Mayne, "Min-Max Feedback Model Predictive Control for Constrained Linear Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **43**-8, (1998), pp. 1136–1142

(12) M.V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari, "Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities", *Automatica*, **32**-10, (1996), pp. 1361–1379

(13) F.A. Cuzzola, J.C. Geromel and M. Morari, "An Improved Discrete-time Robust Approach for Constrained Model Predictive Control", *Proc. 2001 European Contr. Conf.*, (2001), pp. 3759–3764

(14) J.H. Lee and Z. Yu, "Worst-case Formulation of Model Predictive Control for Systems with Bounded Parameters", *Automatica*, **33**-5, (1997), pp. 768–781

(15) S. Boyd and C.H. Barratt, "*Linear Controller Design: Limits of Performance*", Prentice-Hall, (1991)

(16) K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover, "*Robust and optimal control* ", Prentice-Hall, (1996)

(17) B. Wie and D.S. Bersteins, "Benchmark problems for robust control design", *J. Guidance, Contr. Dyn.*, **15**, (1992), pp. 1057-1059

(18) T. Kawabe and T. Tagami, "Adaptive encoding GA based Robust Control Configured Design Method", *Proc. IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications* , (2001), pp.225–230