日本統計学会誌
第36巻，第1号，2006年9月
65頁～77頁

事前に決定された精度を持つ同時推定法

高田佳和*，青嶋　誠**

Simultaneous Estimation Procedures with Predetermined Accuracy

Yoshikazu Takada* and Makoto Aoshima**

多変量正規分布の平均ベクトルの成分の一次結合に関する同時推定，特にその精度が事前に決定されている場合に関する推定方法について述べる．分散・共分散行列が未知の場合，標本数を事前に決めると，その条件を満たす推定方法を構成することができないことが知られている．ここでは，標本数を初期標本から定める二段階推定法による構成方法について述べる．

This paper deals with the problem of simultaneously estimating linear functions of the components of a multivariate normal mean vector with predetermined accuracy. When the covariance matrix is unknown, it is well-known that there exists no fixed-sample size procedure that meets the requirement. We report two-stage estimation procedures which determine sample sizes based on pilot samples.
Key Words and Phrases: Multivariate normal distribution, simultaneous estimation, predetermined accuracy, two- stage estimation procedure.

1. はじめに

$\theta_1,\cdots,\theta_p$ を $p(\geq 2)$ 個の未知母数とし，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_p)'$ とする．与えられたベクトル $\ell=(\ell_1,\cdots,\ell_p)'$ 方向への $\boldsymbol{\theta}$ の射影に興味がある．ただし，ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ の長さは1，すなわち $\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{\ell}=1$ とする．$\boldsymbol{\theta}$ の $\boldsymbol{\ell}$ 方向への射影ベクトルは $\theta_\ell\boldsymbol{\ell}$ と表せる．ここで，$\theta_\ell=\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{\theta}=\sum_{i=1}^p\ell_i\theta_i$ は，$\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{\ell}$ 方向へ射影したときの $\boldsymbol{\theta}$ の位置を表している．この位置 θ_ℓ を推定したい．$\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_p$ を $\theta_1,\cdots,\theta_p$ の推定量としたとき，θ_ℓ の推定量は，$\hat{\theta}_\ell=\sum_{i=1}^p\ell_i\hat{\theta}_i$ で与えられる．θ_ℓ の推定方法としては，区間推定と点推定が考えられる．どちらの推定方法を用いるにしても推定の精度を事前に決められた値以上になるように推定量 $\hat{\theta}_\ell$ を構成したい．区間推定の場合，$\hat{\theta}_\ell$ と θ_ℓ の差が決められた値 $d(>0)$ 以下，点推定の場合は $\hat{\theta}_\ell$ の分散が決められた値 $W(>0)$ 以下にしたい．又，興味のある方向 ℓ がいくつかある場合や，データ収集後に興味のある方向が新たに出てくる場合等が考えられる．これらのことを考慮すると，区間推定の場合

$$P(|\hat{\theta}_\ell-\theta_\ell|<d,\ \text{すべての長さ 1 のベクトル}\ \ell)\geq 1-\alpha$$

を満たす推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_p)'$ を構成する必要がある．ここで，$1-\alpha(0<\alpha<1)$ は同時信頼区間の信頼係数を表す．又，点推定の場合

---

* 熊本大学工学部数理工学科，〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1.
** 筑波大学大学院数理物質科学研究科，〒305-8577 つくば市天王台 1-1-1.

$$E(\hat{\theta}_\ell-\theta_\ell)^2\leq W,\quad \text{すべての長さ1のベクトル}\ \ell$$

を満たす推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を構成する必要がある．不等式

$$(\hat{\theta}_\ell-\theta_\ell)^2\leq\|\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\|^2$$

を用いると（$\|\boldsymbol{c}\|=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}$），区間推定の場合

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)\geq 1-\alpha \tag{1}$$

点推定の場合

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\|^2\leq W \tag{2}$$

を満たす推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を構成すればよいことがわかる．（1）または（2）を満たす推定量の構成方法について述べる．

2節においては，$\boldsymbol{\theta}$ が多変量正規分布の平均ベクトルである場合，3節においては，$\boldsymbol{\theta}$ が $k(\geq 2)$ 個の多変量正規分布の平均ベクトルの一次結合である場合，（1）または（2）を満たす推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の構成方法について述べる．どちらの場合においても，多変量正規分布の分散・共分散行列は未知とする．このとき，標本数を事前に決めると，（1）または（2）を満たす推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は構成できないことが知られている．例えば，Takada (1998) 参照．本稿では，Stein (1945) の二段階推定法を用い，（1）または（2）を満たす推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の構成方法について述べる．4節は，まとめとし，5節は付録で，2，3節の幾つかの新しい結果の証明を与えている．二段階推定法の総合報告については，例えば，Aoshima (2002) を参照のこと．

2. 多変量正規分布

$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2,\cdots$ は互いに独立，平均ベクトル $\boldsymbol{\theta}$，未知の分散・共分散行列 Σ を持つ p 次元正規分布（$N_p(\boldsymbol{\theta},\Sigma)$）に従う確率ベクトルの列とする．$n$ 個の標本 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ が得られたとき，$\boldsymbol{\theta}$ の推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を標本平均ベクトル $\bar{\boldsymbol{X}}_n=1/n\sum_{i=1}^n\boldsymbol{X}_i$ とする．このとき $\bar{\boldsymbol{X}}_n$ が，（1）または（2）を満たすには，標本数 n をどのように定めればよいかを述べる．

2.1 同時信頼区間

この小節においては，（1）を満たす標本数 n の定め方について述べる．Σ の最大固有値を $\lambda(Ch_{\max}(\Sigma))$ とすると

$$\begin{aligned}P(\|\bar{\boldsymbol{X}}_n-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)&\geq P(n(\bar{\boldsymbol{X}}_n-\boldsymbol{\theta})'\Sigma^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}_n-\boldsymbol{\theta})<nd^2/\lambda)\\&=F_p(nd^2/\lambda)\end{aligned}$$

ここで，F_p は自由度 p のカイ二乗分布の分布関数を表す．u を $F_p(u)=1-\alpha$ を満たす定数とすると，Σ が既知ならば，標本数 n を

$$n\geq n_d=u\lambda/d^2 \tag{3}$$

となるように定めると（1）が満たされる．しかし，Σ が未知であるので，二段階推定法は，初期標本を用いて λ を推定し，n_d を真似て全標本数を決定する．

先ず，Σ が一般の場合の Healy (1956) の方法について述べる．$\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ を大きさ $m(>p)$ の初期標本とし，その標本分散・共分散行列を

$$S_m=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}_m)(\boldsymbol{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}_m)' \tag{4}$$

とし，λ を $\hat{\lambda}=Ch_{\max}(S_m)$ で推定する．（3）を真似て全標本数を

$$N_1=\max\left\{m,\left[\frac{a_1\hat{\lambda}}{d^2}\right]+1\right\} \tag{5}$$

とする．ここで，$a_1=(m-1)pf_1/(m-p)$, f_1 は自由度 $(p, m-p)$ の F 分布の上側 100α %点，$[x]$ は x を越えない最大の整数を表す．$N_1>m$ ならば，その差 N_1-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{X}_{N_1}$ を抽出する．$\boldsymbol{\theta}$ の推定量を $\bar{\boldsymbol{X}}_{N_1}=1/N_1\sum_{i=1}^{N_1}\boldsymbol{X}_i$ とすると

$$P(\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_1}-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)\geq 1-\alpha$$

となり，（1）が満たされる．Aoshima (2000) は，a_1 を，それより値の小さい $a_1^*=pf_1^*$ で置き換えても，（1）が満たされることを示している．ただし，f_1^* は自由度 $(p, m-1)$ の F 分布の上側 100α %点．

次に，分散・共分散行列 Σ に構造が仮定できる場合について述べる．Mukhopadyay and Al-Mousawi (1986) は

$$\Sigma=\sigma^2H \tag{6}$$

の場合を扱っている．ここで，$\sigma(>0)$ は未知，H は既知の $p\times p$ 対称行列とする．このとき

$$\lambda=h\sigma^2 \tag{7}$$

となる．ただし，$h=Ch_{\max}(H)$. $m(>1)$ 個の初期標本 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ から，σ^2 を

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{p(m-1)}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}_m)'H^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}_m) \tag{8}$$

で推定し，（7）より λ の推定量を $\hat{\lambda}=h\hat{\sigma}^2$ とする．（3）式を真似て

$$N_2=\max\left\{m,\left[\frac{a_2\hat{\lambda}}{d^2}\right]+1\right\} \tag{9}$$

を全標本数とする．ここで，$a_2=pf_2$ で，f_2 は自由度 $(p, p(m-1))$ の F 分布の上側 100α %点を表す．$N_2>m$ ならば，その差 N_2-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{X}_{N_2}$ を抽出する．$\boldsymbol{\theta}$ の推定量を $\bar{\boldsymbol{X}}_{N_2}=1/N_2\sum_{i=1}^{N_2}\boldsymbol{X}_i$ とすると

$$P(\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_2}-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)\geq 1-\alpha$$

となり，（1）が満たされる．

Hyakutake, et al. (1995) では，分散・共分散行列が intraclass correlation model と呼ばれる構造を持つ場合，すなわち

$$\Sigma=\sigma^2\begin{pmatrix}1 & \rho & \cdots & \rho\\ \rho & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \rho\\ \rho & \cdots & \rho & 1\end{pmatrix} \tag{10}$$

の場合を扱っている．ここで，$\sigma(>0), \rho(-1/(p-1)<\rho<1)$ は未知とする．このとき

$$\lambda=\max(\tau_1, \tau_2) \tag{11}$$

となる．ここで，$\tau_1=\sigma^2(1+(p-1)\rho), \tau_2=\sigma^2(1-\rho)$ である．$m(>1)$ 個の初期標本 $\boldsymbol{X}_1,\cdots, \boldsymbol{X}_m$ から，（4）の S_m を求め，τ_1, τ_2 の推定量を

$$\hat{\tau}_1=\frac{1}{p}\mathbf{1}_p' S_m \mathbf{1}_p, \quad \hat{\tau}_2=\frac{1}{p-1}(tr(S_m)-\hat{\tau}_1)$$

とし，(11) より，λ を $\lambda'=\max(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ で推定する．ただし $\mathbf{1}_p=(1,\cdots, 1)'$, $tr(S_m)$ は S_m のトレースを表す．（3）式を真似て

$$N_3=\max\left\{m, \left[\frac{a_3\lambda'}{d^2}\right]+1\right\}$$

を全標本数とする．定数 $a_3(>0)$ は

$$P(U_1+(p-1)U_2<a_3)=1-\alpha \tag{12}$$

を満たすように定める．ここで，U_1, U_2 は互いに独立で，それぞれ自由度 $(1, m-1)$, $(p-1, (p-1)(m-1))$ の F 分布に従う確率変数．$N_3>m$ ならば，その差 N_3-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{m+1},\cdots, \boldsymbol{X}_{N_3}$ を抽出する．$\boldsymbol{\theta}$ の推定量を $\bar{\boldsymbol{X}}_{N_3}=1/N_3\sum_{i=1}^{N_3}\mathbf{X}_i$ とすると

$$P(\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_3}-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)\geq 1-\alpha$$

となり，（1）が満たされる．尚，Hyakutake, et al. (1995) の論文では (12) を満たす定数 a_3 の数表を与えている．

Takada and Hyakutake (1997) では，(10) を一般化した

$$\Sigma=\sigma_1^2 A_1+\cdots+\sigma_\ell^2 A_\ell \tag{13}$$

の場合を扱っている．ここで，$\sigma_i(>0)$ は未知，A_i は $p\times p$ の既知の対称行列で，その階数を $r_i(i=1,\ldots, \ell)$ とすると

$$\sum_{i=1}^{\ell} A_i=I_p, \quad \sum_{i=1}^{\ell} r_i=p$$

を満たす．I_p は $p\times p$ の単位行列を表す．実際，(10) の Σ は，$\ell=2, \sigma_1^2=\tau_1, \sigma_2^2=\tau_2, A_1=(1/p)1_p1_p', A_2=I_p-A_1$ と置くことにより (13) の形に表される．更に

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

の場合も含んでいる．ただし，$\sigma_i>0(i=1,\ldots, p)$ は未知とする．(13) の場合における標本数の定め方に関しては，上記の論文参照．

2.2　同時点推定

この小節では，（2）を満たす標本数 n の決め方について述べる．

$$E\|\bar{\boldsymbol{X}}_n-\boldsymbol{\theta}\|^2=tr(\Sigma)/n$$

より，もし，Σ が既知ならば，標本数 n を

$$n \geq n_W = tr(\Sigma)/W \tag{14}$$

となるように選べば，（2）が満たされる．しかし，Σ は未知なので，二段階推定法では，初期標本を用いて $tr(\Sigma)$ を推定し，n_W を真似て全標本数を定める．

先ず，Σ が一般の場合の Kubokawa (1990) の方法について述べる．$m(>3)$ 個の初期標本 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ から Σ を（4）の S_m で推定し，(14) を真似て，全標本数を

$$N_4=\max\left\{m, \left[\frac{a_4 tr(S_m)}{W}\right]+1\right\} \tag{15}$$

とする．ただし，$a_4=(m-1)/(m-3)$. $N_4>m$ ならば，その差 N_4-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{X}_{N_4}$ を抽出する．$\boldsymbol{\theta}$ の推定量を $\bar{\boldsymbol{X}}_{N_4}=1/N_4\sum_{i=1}^{N_4}\boldsymbol{X}_i$ とすると

$$E\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_4}-\boldsymbol{\theta}\|^2\leq W$$

となり，（2）が満たされる．

次に，分散・共分散行列 Σ に構造が仮定できる場合について述べる．Σ が（6）で与えられるとする．このとき

$$tr(\Sigma)=\sigma^2 tr(H) \tag{16}$$

となる．$p=2$ のとき $m(>2)$ 個の，$p\geq 3$ のとき $m(>1)$ 個の初期標本 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ から σ^2 を（8）の $\hat{\sigma}^2$ で推定し，(14) を真似て，(16) より全標本数を

$$N_5=\max\left\{m, \left[\frac{a_5\hat{\sigma}^2 tr(H)}{W}\right]+1\right\} \tag{17}$$

とする．ただし，$a_5=p(m-1)/(p(m-1)-2)$. $N_5>m$ ならば，その差 N_5-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{X}_{N_5}$ を抽出する．$\boldsymbol{\theta}$ の推定量を $\bar{\boldsymbol{X}}_{N_5}=1/N_5\sum_{i=1}^{N_5}\boldsymbol{X}_i$ とすると

$$E\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_5}-\boldsymbol{\theta}\|^2\leq W \tag{18}$$

となり，（2）が満たされる．(18) の証明は付録参照.

次に，intraclass correlation model を一般化した (13) の場合について述べる．このとき

$$tr(\Sigma)=r_1\sigma_1^2+\cdots+r_\ell\sigma_\ell^2 \tag{19}$$

となる．ここで，$r_i(i=1,\ldots,\ell)$ は $A_i(i=1,\ldots,\ell)$ の階数である．$r=\min(r_1,\ldots,r_\ell)$ とおく．$r=1$ のとき $m(>3)$ 個の，$r=2$ のとき $m(>2)$ 個の，$r\geq 3$ のとき $m(>1)$ 個の初期標本 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ から，$tr(\Sigma)$ を (19) より，（4）の S_m を用いて $tr(S_m)$ で推定する．(14) を真似て全標本数を

$$N_6=\max\left\{m, \left[\frac{a_6 tr(S_m)}{W}\right]+1\right\} \tag{20}$$

とする．ただし，$a_6=r(m-1)/(r(m-1)-2)$. $N_6>m$ ならば，その差 N_6-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{X}_{N_6}$ を抽出する．$\boldsymbol{\theta}$ の推定量を $\bar{\boldsymbol{X}}_{N_6}=1/N_6\sum_{i=1}^{N_6}\boldsymbol{X}_i$ とすると

$$E\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_6}-\boldsymbol{\theta}\|^2\leq W \tag{21}$$

となり，（2）が満たされる．(21) の証明は付録参照．

Σ が一般の場合の N_4 と N_6 は形は同じであるが，$r>1$ のとき，全標本数は N_6 の方が N_4 よりも少なくなる．

3. k 個の多変量正規分布

$\Pi_1,\ldots,\Pi_k$ を k 個の多変量正規分布に従う母集団とし，Π_i の母集団分布は $N_p(\boldsymbol{\mu}_i,\Sigma_i)$ で，$\boldsymbol{\mu}_i,\Sigma_i$ は未知とする $(i=1,\ldots,k)$．このとき，$\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_k$ のある一次結合

$$\boldsymbol{\theta}=\sum_{i=1}^k c_i\boldsymbol{\mu}_i \tag{22}$$

とする．ただし，$c_i(i=1,\ldots,k)$ は零でない既知の実数．Π_i からの大きさ n_i の標本を $\boldsymbol{X}_{i1},\cdots,\boldsymbol{X}_{in_i}$ とし，$\bar{\boldsymbol{X}}_{i(n_i)}=\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{X}_{ij}/n_i$ とする $(i=1,\ldots,k)$．(22) の $\boldsymbol{\theta}$ を

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n=\sum_{i=1}^k c_i\bar{\boldsymbol{X}}_{i(n_i)} \tag{23}$$

で推定する．ここで，$\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_k)$．このとき，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ が（1）または（2）を満たすには，各母集団からの標本数をどのように定めればよいかを述べる．

3.1 同時信頼区間

この小節においては，（1）を満たすための各母集団からの標本数の定め方について述べる．$\lambda_i=Ch_{\max}(\Sigma_i)(i=1,\ldots,k)$ とすると，(23) より

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}\|^2\leq(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta})'\left(\sum_{i=1}^k\frac{c_i^2}{n_i}\Sigma_i\right)^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta})\left(\sum_{i=1}^k\frac{c_i^2}{n_i}\lambda_i\right)$$

従って

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)\geq F_p\left(d^2\left(\sum_{i=1}^k\frac{c_i^2}{n_i}\lambda_i\right)^{-1}\right) \tag{24}$$

このことから，各母集団からの標本数 $n_i(i=1,\ldots,k)$ を

$$d^2\left(\sum_{i=1}^k\frac{c_i^2}{n_i}\lambda_i\right)^{-1}\geq u \tag{25}$$

$(F_p(u)=1-\alpha)$ となるように選べば，(24) より（1）が満たされることがわかる．標本数はできるだけ小さい方がよいので，(25) を満たす標本数 $n=(n_1,\ldots,n_k)$ の中で，$\sum_{i=1}^k n_i$ を最小にする標本数を求めると

$$n_{id}=\frac{a}{d^2}|c_i|\sqrt{\lambda_i}\sum_{j=1}^k|c_j|\sqrt{\lambda_j},\quad i=1,\ldots,k \tag{26}$$

となる．しかし，$\lambda_i(i=1,\ldots,k)$ は未知なので，二段階推定法では，各母集団からの初期標本をもとにして，それらの値を推定し，n_{id} を真似て各母集団からの標本数を定める．

先ず，分散・共分散行列が一般の場合の Aoshima, et al. (2002) の方法を述べる．母集団 Π_i からの大きさ $m(>p)$ の初期標本を $\boldsymbol{X}_{i1},\cdots,\boldsymbol{X}_{im}$ とする $(i=1,\ldots,k)$．

$$S_{im}=\sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{X}_{ij}-\bar{\boldsymbol{X}}_{i(m)})(\boldsymbol{X}_{ij}-\bar{\boldsymbol{X}}_{i(m)})'/\nu,\quad i=1,\ldots,k \tag{27}$$

$(\nu=m-1)$ を求め，λ_i を $\hat{\lambda}_i=Ch_{\max}(S_{im})$ で推定する．(26) を真似て Π_i からの全標本数を

$$N_i=\max\left\{m,\left[\frac{b_1}{d^2}|c_i|\sqrt{\hat{\lambda}_i}\sum_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{\hat{\lambda}_j}\right]+1\right\},\quad i=1,\ldots,k \tag{28}$$

とする．定数 $b_1(>0)$ は

$$H_{p,\nu}(b_1)=1-\alpha \tag{29}$$

を満たすように定める．ここで，

$$H_{p,\phi}(u)=\min_{\tau_1>0,\ldots,\tau_k>0}E\left\{F_p\left(\frac{u\Sigma_{i=1}^{k}\tau_iZ_i}{\phi\Sigma_{i=1}^{k}\tau_i/Z_i}\right)\right\} \tag{30}$$

$Z_1^2,\ldots,Z_k^2$ は互いに独立で自由度 ϕ のカイ二乗分布に従う確率変数列で，$Z_i=\sqrt{Z_i^2}$, $i=1,\ldots,k$. $N_i>m$ ならば，Π_i から，その差 N_i-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{im+1},\ldots,\boldsymbol{X}_{iN_i}$ を抽出する．$\bar{\boldsymbol{X}}_{i(N_i)}=\Sigma_{j=1}^{N_i}\boldsymbol{X}_{ij}/N_i$, $i=1,\ldots,k$ を求め，$\boldsymbol{\theta}$ を

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\sum_{i=1}^{k}c_i\bar{\boldsymbol{X}}_{i(N_i)}$$

で推定する．ここで $\boldsymbol{N}=(N_1,\ldots,N_k)$．このとき

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_N-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)\geq 1-\alpha$$

となり，(1) が満たされる．

しかし，$H_{p,\phi}(u)$ は非常に複雑な関数であるので，定数 b_1 を求めるために，その下限が提案されている．

$$G_{p,\phi}(u)=k\int_0^{\infty}F_p\left(\frac{ux}{\phi}\right)(1-F_\phi(x))^{k-1}f_\phi(x)dx$$

とおくと

$$H_{p,\phi}(u)\geq G_{p,\phi}(u) \tag{31}$$

が成立する．ここで，$f_\phi(x)$ は $F_\phi(x)$ の確率密度関数を表す．従って (29) を満たす b_1 の代わりに

$$G_{p,\nu}(b_1)=1-\alpha \tag{32}$$

を満たす b_1 を用いても (1) が成り立つことが分かる．Aoshima et al. (2002) では，(32) を満たす b_1 の数表が与えられている．ただし，$p=2$ のときは，$G_{2,\phi}(u)$ よりも良い下限が得られている．詳細は，上記の論文を参照．

次に，分散・共分散行列に構造が仮定できる場合について述べる．Takada and Aoshima (1997) では，

$$\Sigma_i=\sigma_i^2H_i,\quad i=1,\ldots,k \tag{33}$$

の場合を扱っている．ただし，$\sigma_i(>0)$ は未知であるが，H_i は既知の $p\times p$ 対称行列とする $(i=1,\dots,k)$．(33) より

$$\lambda_i=h_i\sigma_i^2,\quad i=1,\dots,k \tag{34}$$

となる．ただし，$h_i=Ch_{\max}(H_i),\ i=1,\dots,k$. Π_i からの大きさ $m(>1)$ の初期標本を $\boldsymbol{X}_{i1},\cdots,\boldsymbol{X}_{im}$ とする $(i=1,\dots,k)$．σ_i^2 の推定量

$$\hat{\sigma}_i^2=\sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{X}_{ij}-\bar{\boldsymbol{X}}_{i(m)})'H_i^{-1}(\boldsymbol{X}_{ij}-\bar{\boldsymbol{X}}_{i(m)})/\tilde{\nu},\quad i=1,\dots,k \tag{35}$$

$(\tilde{\nu}=p(m-1))$ を求め，(34) より λ_i の推定量を $\tilde{\lambda}_i=h_i\hat{\sigma}_i^2$ とする $(i=1,\dots,k)$．(26) を真似て Π_i からの全標本数を

$$\tilde{N}_i=\max\left\{m,\left[\frac{b_2}{d^2}|c_i|\sqrt{\tilde{\lambda}_i}\sum_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{\tilde{\lambda}_j}\right]+1\right\},\quad i=1,\dots,k \tag{36}$$

とする．定数 $b_2(>0)$ は (30) の関数を用いて

$$H_{p,\tilde{\nu}}(b_2)=1-\alpha \tag{37}$$

を満たすように定める．$\tilde{N}_i>m$ なら，Π_i から，その差 $\tilde{N}_i-m$ 個の標本 $\boldsymbol{X}_{im+1},\cdots,\boldsymbol{X}_{i\tilde{N}_i}$ を抽出する．$\bar{\boldsymbol{X}}_{i(\tilde{N}_i)}=\Sigma_{j=1}^{\tilde{N}_i}\boldsymbol{X}_{ij}/\tilde{N}_i,\ i=1,\dots,k$ を求め，$\boldsymbol{\theta}$ を

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{N}}=\sum_{i=1}^{k}c_i\bar{\boldsymbol{X}}_{i(\tilde{N}_i)}$$

で推定する．ここで $\tilde{\boldsymbol{N}}=(\tilde{N}_1,\dots,\tilde{N}_k)$．このとき

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{N}}-\boldsymbol{\theta}\|^2<d^2)\geq 1-\alpha$$

となり，(1) が満たされる．

しかし，(37) を満たす b_2 を定めるのは非常に困難であるので，(31) の下限より

$$G_{p,\tilde{\nu}}(b_2)=1-\alpha \tag{38}$$

を満たす b_2 を用いても (1) が満たされる．(38) を満たす b_2 の値の数表に関しては，Takada and Aoshima (1997) を参照.

Aoshima and Takada (2005) では，分散・共分散行列が (13) の構造

$$\Sigma_i=\sigma_{i1}^2A_1+\cdots+\sigma_{i\ell}^2A_\ell,\quad i=1,\dots,k,\ 1\leq\ell\leq p \tag{39}$$

を持つ場合を扱っている．ここで，$\sigma_{ij}>0(i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,\ell)$ は未知とする．この場合における各母集団からの標本数の定め方に関しては，上記の論文参照.

3.2 同時点推定

この小節では，(2) を満たすための各母集団からの標本数の定め方について述べる．(23) より

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}\|^2=\sum_{i=1}^{k}c_i^2tr(\Sigma_i)/n_i$$

従って，各母集団からの標本数 $n_i(i=1,\dots,k)$ を

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^2 tr(\Sigma_i)/n_i \leq W \tag{40}$$

となるように選べば，（2）が満たされる．標本数はできるだけ小さい方がよいので，(40) を満たす標本数 $n=(n_1,\ldots,n_k)$ の中で，$\Sigma_{i=1}^{k} n_i$ を最小にする標本数を求めると

$$n_{iW}=|c_i|\sqrt{tr(\Sigma_i)}\sum_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{tr(\Sigma_j)}/W, \quad i=1,\ldots,k \tag{41}$$

となる．しかし，$tr(\Sigma_i)(i=1,\ldots,k)$ は未知なので，二段階推定法では，各母集団からの初期標本をもとにして，それらの値を推定し，n_{iW} を真似て各母集団からの標本数を定める．

先ず，分散・共分散行列が一般の場合における Aoshima and Takada (2002) の方法を述べる．母集団 Π_i からの大きさ $m(>3)$ の初期標本を $\boldsymbol{X}_{i1},\ldots,\boldsymbol{X}_{im}$ とする（$i=1,\ldots,k$）．(27) の S_{im} を求め，$tr(\Sigma_i)$ を $tr(S_{im})$ で推定する．(41) を真似て Π_i からの全標本数を

$$R_i=\max\left\{m, \left[\frac{b_3}{W}|c_i|\sqrt{tr(S_{im})}\sum_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{tr(S_{jm})}\right]+1\right\}, \quad i=1,\ldots,k \tag{42}$$

とする．ここで，$b_3=(m-1)/(m-3)$．$R_i>m$ なら Π_i から，その差 R_i-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{im+1},\ldots,\boldsymbol{X}_{iR_i}$ を抽出する．$\bar{\boldsymbol{X}}_{i(R_i)}=\Sigma_{j=1}^{R_i}\boldsymbol{X}_{ij}/R_i$, $i=1,\ldots,k$ を求め，$\boldsymbol{\theta}$ を

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_R=\sum_{i=1}^{k} c_i \bar{\boldsymbol{X}}_{i(R_i)}$$

で推定する．ここで $\boldsymbol{R}=(R_1,\ldots,R_k)$．このとき

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_R-\boldsymbol{\theta}\|^2 \leq W$$

となり，（2）が満たされる．

次に，分散・共分散行列に構造が仮定できる場合について述べる．分散・共分散行列が (33) で与えられるとする．このとき

$$tr(\Sigma_i)=\sigma_i^2 tr(H_i), \quad i=1,\ldots,k \tag{43}$$

となる．$p=2$ のとき Π_i から大きさ $m(>2)$ の，$p\geq 3$ のとき Π_i から大きさ $m(>1)$ の初期標本 $\boldsymbol{X}_{i1},\ldots,\boldsymbol{X}_{im}$ から σ_i^2 を (35) の $\hat{\sigma}_i^2$ で推定する（$i=1,\ldots,k$）．(41) を真似て (43) より Π_i からの全標本数を

$$\tilde{R}_i=\max\left\{m, \left[\frac{b_4}{W}|c_i|\sqrt{\hat{\sigma}_i^2 tr(H_i)}\sum_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{\hat{\sigma}_j^2 tr(H_j)}\right]+1\right\}, \quad i=1,\ldots,k \tag{44}$$

とする．ここで，$b_4=\tilde{\nu}/(\tilde{\nu}-2)(\tilde{\nu}=p(m-1))$．$\tilde{R}_i>m$ なら Π_i から，その差 $\tilde{R}_i-m$ 個の標本 $\boldsymbol{X}_{im+1},\ldots,\boldsymbol{X}_{i\tilde{R}_i}$ を抽出する．$\bar{\boldsymbol{X}}_{i(\tilde{R}_i)}=\Sigma_{j=1}^{\tilde{R}_i}\boldsymbol{X}_{ij}/\tilde{R}_i$, $i=1,\ldots,k$ を求め，$\boldsymbol{\theta}$ を

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{R}}=\sum_{i=1}^{k} c_i \bar{\boldsymbol{X}}_{i(\tilde{R}_i)}$$

で推定する．ここで $\tilde{\boldsymbol{R}}=(\tilde{R}_1,\ldots,\tilde{R}_k)$．このとき $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{R}}$ は

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{R}}-\boldsymbol{\theta}\|^2 \leq W \tag{45}$$

となり（2）が満たされる．(45) の証明は付録参照．

次に，分散・共分散行列が (39) で与えられるとする．このとき

$$tr(\Sigma_i)=\sum_{j=1}^{\ell} r_j\sigma_{ij}^2,\quad i=1,\dots,k \tag{46}$$

ここで，$r_i(i=1,\dots,\ell)$ は $A_i(i=1,\dots,\ell)$ の階数である．$r=\min(r_1,\dots,r_\ell)$ とおく．$r=1$ のとき Π_i から大きさ $m(>3)$ の，$r=2$ のとき大きさ $m(>2)$ の，$r\geq 3$ のとき大きさ $m(>1)$ の初期標本 $\boldsymbol{X}_{i1},\dots,\boldsymbol{X}_{im}$ から (27) の S_{im} を求め，(46) より $tr(\Sigma_i)$ を $tr(S_{im})$ で推定する．(41) を真似て Π_i からの全標本数を

$$M_i=\max\left\{m,\left[\frac{b_5}{W}|c_i|\sqrt{tr(S_{im})}\sum_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{tr(S_{jm})}\right]+1\right\},\quad i=1,\dots,k \tag{47}$$

とする．ただし，$b_5=r(m-1)/(r(m-1)-2)$．$M_i>m$ なら Π_i から，その差 M_i-m 個の標本 $\boldsymbol{X}_{im+1},\dots,\boldsymbol{X}_{iM_i}$ を抽出する．$\bar{\boldsymbol{X}}_{i(M_i)}=\sum_{j=1}^{M_i}\boldsymbol{X}_{ij}/M_i,\ i=1,\dots,k$ を求め，θ を

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_M=\sum_{i=1}^{k}c_i\bar{\boldsymbol{X}}_{i(M_i)}$$

で推定する．ここで $\boldsymbol{M}=(M_1,\dots,M_k)$．このとき $\hat{\theta}_M$ は

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_M-\boldsymbol{\theta}\|^2\leq W \tag{48}$$

となり，（2）が満たされる．(48) の証明は付録参照．

分散・共分散行列が一般の場合の $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{M}$ は形は同じであるが，$r>1$ のとき，全標本数は $\boldsymbol{M}$ の方が $\boldsymbol{R}$ よりも少なくなる．

4. おわりに

本稿では，事前に精度が決定されている同時推測問題における標本数の定め方について，二段階推定法を用いた方法について述べてきた．二段階推定法を用いるときの問題は，初期標本数 m をどのように選ぶかである．少なすぎても，多すぎても，全標本数は，分散・共分散行列が既知のときの標本数 $n_d(n_{id},\ i=1,\dots,k)$, $n_W(n_{iW},\ i=1,\dots,k)$ に比べて，必要以上に多くなる傾向がある．初期標本数の選び方に関しては，色々提案されているが，いまだに決まった方法はないように思われる．この問題に関しては，Mukhopadhyay (2005)，及び，その論文の参考文献を参照．

二段階推定法以外でも，Hall (1981) の三段階推定法，Chow and Robbins (1965) の逐次推定法を適用し，（1）または（2）を満たす推定量 $\hat{\theta}$ の構成を行うことはできる．詳しくは，Ghosh, Mukhopadhyay and Sen (1997) を参照．二段階推定法と異なり，これらの推定法は，漸近的（d または W が小さいとき）にしか（1）または（2）を保証していない．このことは，その推定法の実際の適用において，その信頼性が保証されないかもしれない．しかし，全標本数に関しては，理論的にもシュミレーションによる比較においても，これらの推定法は二段階推定法より優れていることが知られている．今後，これらの推定法の信頼性が示されれば，二段階推定法に替わる推定法として期待できる．

本稿で述べた内容以外で，Aoshima and Takada (2000) は，比較対照実験において，事前に精度が決められている同時推定問題を扱っている．また，Aoshima and Kushida (2005) は，(22) の θ について成分間の多重比較を考え，事前に精度が決められている対比較 (MCA)・

最良との比較（MCB）・対照との比較（MCC）を扱っている．

5. 付　　録

(18) の証明

(17) より，$N_5 \geq a_5 \hat{\sigma}^2 tr(H)/W$．従って

$$E\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_5}-\boldsymbol{\theta}\|^2 = E(tr(\Sigma)/N_5) \leq \frac{W}{a_5} E\left(\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2}\right) = W$$

となり，(18) が証明される．最後の等式は，$p(m-1)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ が自由度 $p(m-1)$ のカイ二乗分布に従うことから得られる．

(21) の証明

(13) より，つぎの条件を満たす $p\times p$ の直交行列 Tが存在する．

$$T'\Sigma T = diag(\underbrace{\sigma_1^2,\ldots,\sigma_1^2}_{r_1},\ldots,\underbrace{\sigma_\ell^2,\ldots,\sigma_\ell^2}_{r_\ell})$$

ここで，$diag(a_1,\ldots,a_p)$ は対角行列を表し，その対角成分が，$a_1,\ldots,a_p$ である．このことから

$$(m-1)tr(S_m) = \sum_{i=1}^{\ell} r_i \sigma_i^2 W_i$$

と表すことができる．ここで，$W_1,\ldots,W_\ell$ は互いに独立で，$r_i W_i$ の分布は自由度 $r_i(m-1)$ のカイ二乗分布 $(i=1,\ldots,\ell)$．従って (19) より

$$\frac{tr(\Sigma)}{tr(S_m)} = (m-1)E\left\{\left(\sum_{i=1}^{\ell}\tau_i W_i\right)^{-1}\right\} \leq (m-1)\max_{i=1,\ldots,\ell}\{E(W_i^{-1})\} = a_6 \qquad (49)$$

ここで，$\tau_i = \tau_i\sigma_i^2/\Sigma_{j=1}^{\ell} r_j\sigma_j^2,\ i=1,\ldots,\ell$．第二の不等式の証明は，Kubokawa (1990) を参照．(20)，(49) より

$$E\|\bar{\boldsymbol{X}}_{N_6}-\boldsymbol{\theta}\|^2 = E(tr(\Sigma)/N_6) \leq \frac{W}{a_6} E\left(\frac{tr(\Sigma)}{tr(S_m)}\right) \leq W$$

となり (21) が示される．

(45) の証明

(43) と (44) より

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{R}}-\boldsymbol{\theta}\|^2 = E\left(\sum_{i=1}^{k} c_i^2\sigma_i^2 tr(H_i)/\tilde{R}_i\right) \leq \frac{W}{b_4} E\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{k}|c_i|\sqrt{\sigma_i^2 tr(H_i)/V_{im}}}{\Sigma_{i=1}^{k}|c_i|\sqrt{\sigma_i^2 tr(H_i)V_{im}}}\right)$$

$$= \frac{W}{b_4}\sum_{i=1}^{k} E(U_{im}V_{im}^{-1}) \qquad (50)$$

ここで，

$$V_{im} = \frac{\hat{\sigma}_i^2}{\sigma_i^2}, \quad U_{im} = \frac{|c_i|\sqrt{\sigma_i^2 tr(H_i)V_{im}}}{\Sigma_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{\sigma_j^2 tr(H_j)V_{jm}}}, \quad i=1,\ldots,k$$

U_{im} と V_{im}^{-1} の共分散が非正になることから $E(U_{im}V_{im}^{-1}) \le E(U_{im})E(V_{im}^{-1})$, $i=1,\dots,k$ が得られ，この不等式と $E(V_{im}^{-1}) = \tilde{\nu}/(\tilde{\nu}-2)$, $i=1,\dots,k$ を（50）の右辺に用いることにより

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{R}}-\boldsymbol{\theta}\|^2 \le WE\left(\sum_{i=1}^{k} U_m\right) = W$$

となり，（45）が満たされる．最後の等式は，$\Sigma_{i=1}^{k} U_{im}=1$ より得られる．

<u>(48) の証明</u>

（46）と（47）より

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_M-\boldsymbol{\theta}\|^2 = E\left(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 tr(\Sigma_i)/M_i\right) \le \frac{W}{b_5} E\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{k}|c_i|\sqrt{tr(\Sigma_i)/\tilde{V}_{im}}}{\Sigma_{i=1}^{k}|c_i|\sqrt{tr(\Sigma_i)\tilde{V}_{im}}}\right)$$

$$= \frac{W}{b_5}\sum_{i=1}^{k} E(\tilde{U}_{im}\tilde{V}_{im}^{-1}) \tag{51}$$

ここで，

$$\tilde{V}_{im} = \frac{tr(S_{im})}{tr(\Sigma_i)}, \quad \tilde{U}_{im} = \frac{|c_i|\sqrt{tr(\Sigma_i)/\tilde{V}_{im}}}{\Sigma_{j=1}^{k}|c_j|\sqrt{tr(\Sigma_j)\tilde{V}_{jm}}}, \quad i=1,\dots,k$$

（49）より，$E(\tilde{V}_{im}^{-1}) \le b_5$, $i=1,\dots,k$ が得られ，不等式

$$E(\tilde{U}_{im}\tilde{V}_{im}^{-1}) \le E(\tilde{U}_{im})E(\tilde{V}_{im}^{-1}),\ i=1,\dots,k$$

と $\Sigma_{i=1}^{k}\tilde{U}_{im}=1$ を（51）の右辺に用いることにより

$$E\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_M-\boldsymbol{\theta}\|^2 \le WE\left(\sum_{i=1}^{k}\tilde{U}_{im}\right) = W$$

となり，（48）が示される．

謝辞．査読者の方には貴重なコメントを頂きました．ここに記して，お礼申し上げます．また本研究は，科学研究費補助金 15500188，16650059 から研究助成を受けております．

参 考 文 献

[1] Aoshima, M. (2000). Second-order properties of improved two-stage procedure for a multivariate normal distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **29**, 611–622.

[2] Aoshima, M. and Takada, Y. (2000). Second-order properties of a two-stage procedure for comparing several treatments with a control, *Journal of the Japan Statistical Society*, **30**, 27–41.

[3] Aoshima, M. (2002). 論説：二段階標本抽出による統計的推測，数学 **54**, 365–382.

[4] Aoshima, M., Takada, Y. and Srivastava, M. S. (2002). A two-stage procedure for estimating a linear function of K multinormal mean vectors when covariance matrices are unknown, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **100**, 109–119.

[5] Aoshima, M. and Takada, Y. (2002). Bounded risk point estimation of a linear function of k multinormal mean vectors when covariance matrices are unknown, *Advances on Theoretical and Methodological Aspects of Probability and Statistics*, Balakrishnan, N. ed., Taylor and Francis, New York, 279–287.

[6] Aoshima, M. and Kushida, T. (2005). Asymptotic second-order efficiency for two-stage multiple comparisons with components of a linear function of mean vectors, *Advances in Ranking and Selection, Multiple Comparisons, and Reliability: Methodology and Applications*, Balakrishnan, N., Kannan, N. and Nagaraja, H. N.

eds, Birkhäuser, 191–211.

[7] Aoshima, M. and Takada, Y. (2006). Second-order efficiency for two-stage estimation of a linear function of normal mean vectors when covariance matrices have some structures, *Sequential Analysis*, **25**, 327–345.

[8] Chow, Y.S. and Robbins, H. (1965). On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 457–462.

[9] Ghosh, M., Mukhopadhyay, N. amd Sen, P. K. (1997). *Sequential Estimation*, Willey, New York.

[10] Hall, P. (1981). Asymptotic theory of triple sampling for estimation of a mean, *Annals of Statistics*, **9**, 1229–1238.

[11] Healy, W. C. Jr. (1956). Two-sample procedures in simultaneous estimation, *Annals of Mathematical Statistics*, **27**, 687–702.

[12] Hyakutake, H., Takada, Y. and Aoshima, M. (1995). Fixed-size confidence regions for the multinormal mean in an intraclass correlation model, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **15**, 291–308.

[13] Kubokawa, T. (1990). Two-stage estimators with bounded risk in a growth curve model, *Journal of the Japan Statistical Society*, **20**, 77–87.

[14] Mukhopadhyay, N. and Al-Mousawi, J. S. (1986). Fixed-size confidence regions for the mean vector of a multinormal distribution, *Sequential Analysis*, **5**, 139–168.

[15] Mukhopadhyay, N. (2005). A new approach to determine the pilot sample size in two-stage sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 1275–1295.

[16] Stein, C. (1945) A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance, *Annals of Mathematical Statistics*, **16**, 245–258.

[17] Takada, Y. and Aoshima, M. (1997). Two-stage procedures for estimating a linear function of multinormal mean vectors, *Sequential Analysis*, **16**, 353–362.

[18] Takada, Y. and Hyakutake, H. (1997). Fixed-size confidence region by multivariate two-stage procedure when the covariance matrix has a structure, *Journal of the Japan Statistical Society*, **27**, 37–44.

[19] Takada, Y. (1998). The nonexistence of procedures with bounded performance characteristics in certain parametric inference problems, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **50**, 325–335.