関数表現の様相の記述研究(２)

——表現世界の再構成モデルを用いて——

磯　田　正　美

関数表現の様相の記述研究(2)

——表現世界の再構成モデルを用いて——

礒田正美

はじめに

これまで筆者は，数学的知識の構成過程（数学化過程）に対する規範的モデルである表現世界の再構成モデルを設定（礒田 1984a, 1993, 1999b）し，その過程に基づく学習活動を学習指導過程において実現することを意図して，学習指導過程の構成のための基礎的研究を進めている。その一貫として，これまで数学的知識の構成過程が，段階としての水準とその移行によって記せることを van Hiele の思考水準論を前提に明らかにしてきた（van Hiele 1958, 1959, Freudenthal 1973, 礒田 1985）。そして，その構成過程が学校数学へも適用しえることを例証するために，これまで関数領域において数学史および教材にみる層と子どもの発達にみる層を調査，対比し，関数の水準を設定し，確認してきた（礒田 1985, 1987a, 1987b, 1989, 1995a）。特にその確認は，海外における先行調査研究の諸結果が，関数の水準によって解釈しえることを示すことでもなされた（礒田 1995a）。そして，他方で，水準移行の実態を知るために指導による実際の水準移行の様相を調査してきた（礒田 1991b, 1997）。その一貫として前回の報告(1)では，実態調査を基に，第0水準から第1水準への移行までの関数領域における思考の変容の様相を，表現世界の再構成モデルに従って記述した（礒田 1997）。今回の報告でも，同じモデルを用いて，第1水準から第2水準までの移行とその様相を記述しえるかどうかを主題にして，表現世界の再構成モデルが水準移行の様相を記述する枠組みとなることを確認していく。そして，報告(1)で得た結果と総合して，学習指導による水準移行の実態を表現世界の再構成モデルを基に総括する。このような水準移行の実態把握は，数学的知識の構成過程からみた関数指導の課題を特定する意義をもつ。その課題の特定は，別に報告されている（例えば礒田 1999a）。

本稿の構成は以下の通りである。

本報告は報告(1)（礒田 1997）に継続する報告であり，研究方法に相当する，表現世界の再構成モデル，関数の水準，そして調査方法は，前稿と同じであるので割愛し，以下では必要に応じて本文で参照するにとどめる(注1)。詳しくは，報告(1)を参照されたい。

1．第1水準から第2水準へ

以下，本章では，第1水準から第2水準への移行期の特徴を，表現の再構成モデルに従って記述する。第1水準は，「数量間の関係（対象）を，変化や対応の規則（研究方法）で考察できる」水準，「算術（主要表現言語）で関係を表現

する」水準である。第2水準は，「変化や対応の規則（対象）を，関数の式やグラフ（研究方法）で考察できる」水準，「代数・幾何（主要表現言語）で関係を表現する」水準である。

記述に際して，対比の必要上，第1水準の特徴を再録する。これまでの研究（磯田 1989）から，小6既習（本調査データでは，小6既習とは中1以後を指す）が該当することがわかっている。報告(1)で記した面接結果から，第1水準の子どもの表現には次のような特徴が認められた。

〈第1水準の特徴〉

特徴1．事象を伴う場合はもちろん，事象を伴わない場合も含めて（比例などの）表が関係表現として意味をなす。

特徴2．表の横の見方に加えて，xの～倍がyというような縦の見方もできる。

特徴3．比例反比例を事象の分析，考察の基準にできる。

以下では，第1水準に続く第2水準への水準の移行の様相を記述する。

1－1．第2水準への移行期／旧表現の再構成

これまでの研究（磯田 1989）によれば，第2水準への移行は中1～高1（本調査では中2～高2データが該当，調査は1990年実施）に渡る学習指導によるものと考えられる。そこでは扱う関数が一次から二次へと漸次拡張されていく。ここでは，その指導内容を参照して，第2水準に応じての第1水準の表現の再構成に注目して，その特徴を指摘する。

調査結果を表現の再構成モデルと対照した結果，第2水準への移行として特に，報告(1)で述べた「［2］旧表現の再構成」局面に現れる様相として次の特徴を記せる。

〈第2水準への旧表現の再構成時期に現れる特徴〉

特徴1．表，式，グラフという表現の存在は知っているが，未知の「関数を調べる」という語用が意味をなさない。

特徴2．事象における関係の判断基準が表から式に変わり始める。

特徴3．第2水準への移行のための指導を受けると，事象そのものを意識的に分析し表現する力は失われるか，後退する。

以下，それぞれの特徴を得た根拠を示す。

特徴1は，中1から関数という用語を学ぶにもかかわらず，中1既習（調査データでは中2）の生徒が第2水準と判定できない最大の理由である。それは，代数や幾何的な言語が未熟なだけではなく，関数を調べるという語用自体が意味をなさないこと，すなわち，関数が考察の対象とは未だなり得ていないことを示している。

問J（問番号Jは報告(1)から続く通し記号）は直接それを聞いた設問である。ペーパーテストの結果では，関数と比例既習の中2生徒の多数が白紙であったことから，中1で関数を学んできたにもかかわらず，この時期の大多数の生徒には何を聞いているか設問が意味をなさなかったことを示している[注2]。

問J．（中2以降で未習関数を提示して出題） y＝3x＋2がどのような関数かを調べたい。どのように調べたらよいだろう。調べ方を書こう。

P13（中2：移行期）「（筆者）かいてなかったんだけど，何かかいてみようと思いましたか。問題の意味がつかみにくくて。（筆者）どこがですか。調べかたというのがわかりませんでした。『どのような関数か調べたい』というところが。（筆者）y＝3xがどのような関数か調べたいというんだっららどうかな。よくわかりません。（筆者）関数ってどんなもの。xが変化すると対応するyが変化するのが関数。（筆者）変化の様子を調べるのに何をしますか。表とかグラフをかく。（筆者）そういう解答は思い浮かびましたか。いえ，思いませんでした。」

このP13の反応に現れるように，表とかグラフの存在は知っているが，表とかグラフをかけば関数の様子が調べられるという発想自体をこの時期の生徒は持っていないのである。

問Jに対して中2生徒にわずかに認められたのは表である。面接生徒の中には，唯一，次のような生徒がいた。

P14（中2：移行期）「（テストのときは）よくわかんなかったんだけど，どういうふうにし

たら，んと，比例とかとかかわるかってことなんで，グラフを作るとか表とかをかけばよいのかなと（面接調査を通じてのそれまでの説明から類推して答えている)。（筆者）テストのときわからなかったのはどうして。『どのような関数か調べたい』と聞かれたとき何をすればよいかわからなかった。（筆者）今できますか。グラフをかいて形を調べればわかるし，でも，問10（1次関数のグラフから立式を求める設問）のようなグラフだったらよくわからないし…。関数って意味はだいたいわかるんだけど，どういうふうに調べたらよいかというのがわからなかった。これが比例とかなら，わかったかもしれないんだけど」

P14の発言によれば，「どのように比例しているか」なら答えられたという。それは，表・式・グラフで比例を表現した既習に基づいており，やはり，未知の関数を調べるには何をすべきかということは，この生徒の場合でも意味をなしていない。実際，その発言は設問の一次関数で言えば「どのような一次関数か」に相当しており，設問の文脈「どのような関数かを調べる」とは一般性において隔たりがある。「どのような比例かを調べる」ならば答えられ「どのような関数かを調べる」には答えられなかったことは，算術概念の（正負への）拡張としての比例概念までは考察対象にしたものの，一般的な意味での関数を考察対象とすることが困難である実態を例証している。問Jで「どのような関数かを調べる」という設問の意味が解されない背景には，中1の比例学習では，変域の拡張以外，既知の事項を扱う点が指摘できる。比例の拡張可能性を話題にしながら，比例を関数として調べても，拡張の方に意識が向くために，関数を調べたという意識が生じ難いという教材の特徴が現れている。

特徴2は問Dに対する事象の分類基準に式を当てる者が現れはじめることを根拠としている。

P15（中2；移行期）「それぞれの式を，yとかxとかを使って作ってみると～。（筆者）比例反比例で分けようとは思いませんでしたか。式を立てて，そう思ったけど，最初は式を考えました」

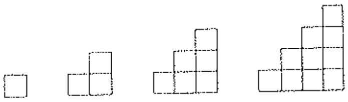
問Dは「2倍3倍すると～」というように倍比例分析で比例か反比例かを判断すれば解ける，すなわち第1水準の算術的な比例概念で判別できる問題である。P15がわざわざ立式したのは，式を判断基準としたためであり，中1以降での（関数の）式表現の強調がその背景にあると考えられる。「式を立てて，（比例・反比例の違い）と思ったけど，最初は（まず）式を考える」というような，式を基準とした関数表現の傾向は中1移行の指導を経る毎に増大していく。後述するように，この特徴2は，次節でさらに顕著に現れるので，旧表現の再構成を特徴付ける意味で特徴2は，次に述べる特徴3との関わりで注目される。

問D．（小4（記号改）～高3）
下のア～エの文は，xとyに関係があります。読んでみると，1つだけxとyの関係がちがうものがあります。その文を○でかこみなさい。
ア．1時間に40km走る車は，x時間ではykm走る。
イ．1mで500円のリボンは，xmではy円になる。
ウ．面積が12㎠の長方形は，たての辺の長さxcmではよこの辺の長さはycmになる。
エ．1mで30gのはりがねは，xmではygになる。

特徴3は，礒田 1990で報告済みである。本調査に先行した研究であるが，ここでは説明の必要上，その調査問題と結果を番外1，2として再録する。番外1，2の調査は，数量関係内容の指導後（3学期末）に行っており，指導前に行った本調査データ（1学期初め）とは学年解釈が1学年ずれる。番外1，2の調査学年に＋1学年して読むと今回の調査対象者と既習内容が整合する。

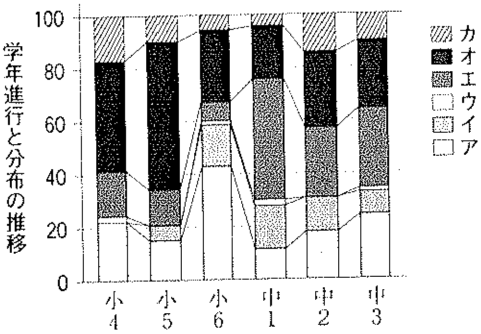
番外1は，表に対する比例関係の適用力を学年毎に調査したもので，小6から中3まで6割前後（有意差なし，M. Isoda 1996）の正答率であることを示している。番外2は，事象における比例関係の発見，適用を求めた出題である。番外2の(2)では中1，中2で比例と表現した生徒が7割に及ぶにもかかわらず，同じ番外2の

番外２　（礒田 1990；小４～中３出題）
一辺の長さが１cmの正方形の紙を，下の図のように階段の形につんでいきます。次の問いに答えなさい。

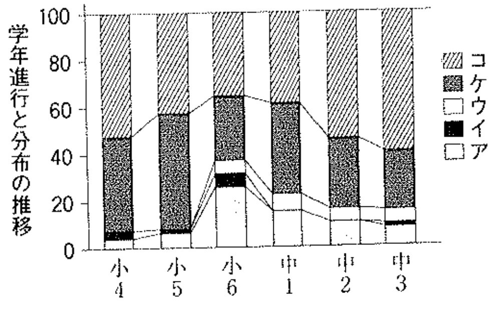


(1)階段の段数を増やしていくとき，まわりの長さはどのようにかわっていきますか。
また，そのわけもかきなさい。

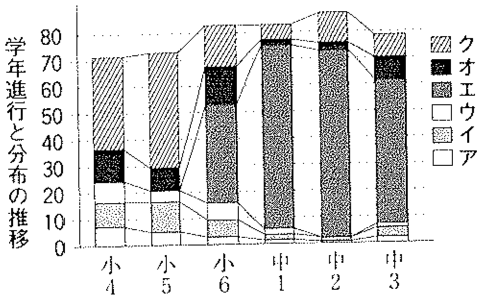
周りの長さは
ア．４cmずつ増えていく。
イ．２倍，３倍と増えていく。
ウ．正しい式を書いた。
エ．その他：増えていく。
同じように増えていく。
オ．誤答
カ．無答



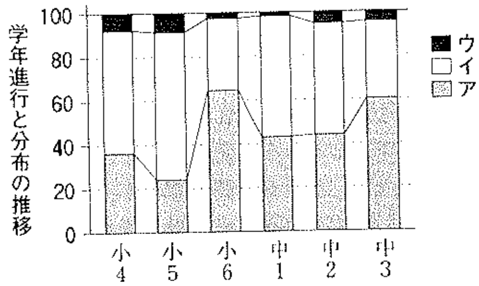
そのわけは
ア．事象を言葉で表現して説明する。
例．正方形のまわりの長さが４cm。
イ．表から
ウ．言葉の式（比例も含む）
ケ．その他（含む誤答）
例．１段ずつ増えているから。
コ．無答

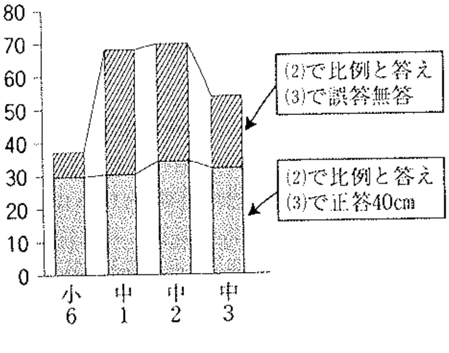


(2)階段とまわりの長さとはどのような関係になっていますか。
ア．具体的に１例記述。
例．段数が４だと，縦の長さも４。
イ．増えれば増える。
ウ．１段増えれば，４cm増える。
エ．比例する；ア～ウとの複合も含む。
オ．言葉の式；ア～ウとの複合も含む。
カ．文字（x，△など）式；ア～ウとの複合も含む。
キ．オ又はカと比例；ア～ウとの複合も含む。
ク．その他，誤答
ケ．空白



(3)10段のとき，まわりの長さは何cmですか。
ア．40cm
イ．誤答
ウ．無答

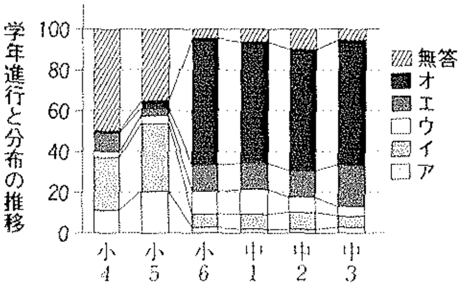




番外1　（礒田 1990：小4～中3出題）
下の表は，yがxに比例するときのx，yの値をあらわしている。PとQの値は次のどれですか。

x	3	6	P
y	7	Q	35

ア．P＝14，Q＝31
イ．P＝10，Q＝24
ウ．P＝10，Q＝31
エ．P＝14，Q＝15
オ．P＝15，Q＝14



(3)の正当率では，中1，中2は，小6，中3に対して二割近く下がっている（有意差あり，M. Isoda 1996）。番外2の(2)で比例を認めて，(3)に正答した生徒は3割と一定しているのに対して，比例を認めながら誤答した生徒は中1，中2で突出している。(2)の関係表現は，比例に限らず多様な表現が可能ではあるにせよ，この結果は，関数として比例を学んだ中1，中2が，第1水準の小6と同様に表（番外1）へは比例関係を適用できているのに，小6とは異なり事象（番外2）へは比例関係を適用できなくなることを含意している。これは，第2水準への移行に際して，第1水準の主たる言語である表での算術表現はなお保たれているが，第1水準で得意であった第1水準らしい事象の捉え方ができなくなってきていることを示している。

1－2．第2水準への移行期／新表現の生成規則構成

表現の再構成モデルと調査・面接結果を対照した結果，第2水準への移行期として，特に「[3] 新表現（関数の式，グラフ，表表現）の生成規則の構成」すなわち，第2水準らしい表現言語の構成に現れる様相として次の特徴を記せる。

〈第2水準への新表現の生成規則構成時期に現れる特徴〉

特徴1．1次関数の表・式・グラフの関係を解し，利用できる。

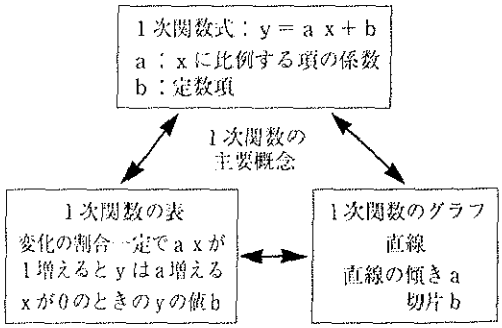
特徴2．「関数を調べる」という語用が意味をもち，調べる際に式，グラフを重視するようになる。表もその役割を失わない。

特徴3．事象の関係を判別する基準が式になる。

特徴4．変化の割合が一定でない関数の学習後，表で対応を読む傾向は強まる。

以下，それぞれの特徴を得た根拠を示す。

中2の一次関数の学習以降では，それぞれの関数表現の生成規則を構成すべく，表・式・グラフを利用して調べることが行われる。表・式・グラフは，関数表現の生成規則を探る源泉となる。



特徴1は上図のような1次関数表現の翻訳に関わる概念ネットの獲得を指している。このような表現の相互翻訳可能な1次関数の概念ネッ

問K．（中3～高2出題）
右の表は，関数y＝2x＋5の表です。
この表では
「xの値が1増加するとyの値は2増加します」
同じことは，
下の関数y＝2x＋5のグラフを利用しても説明できます。グラフ上で説明してみよう。

	1	1	1	1	1	1	
x	－3	－2	－1	0	1	2	3
y	－1	1	3	5	7	9	11
	2	2	2	2	2	2	

トを獲得した生徒は，問Kに対して「例えば（0，5）から右へ1いくと上に2上がって～」というような解答をするようになる。このような事象ぬきで示された表に対してグラフ上の解釈を答えることは，第1水準の子どもには困難であった。

特徴2について述べる。1次関数の特徴を，表・式・グラフのそれぞれの表現を利用して調べて，表現相互の関係を学習することにより，「関係を調べる」という言葉が意味をなすようになる。先の問J（中3の場合，未習の関数 $y=x^2$ で出題している）についてこの時期の生徒は次の様に述べている。

P16（中3；移行期）「どんな種類の関数か聞いているのかと思って，調べかたは，グラフとか表に表したらよいと思った。（筆者）表とグラフならどちらがよいと思いますか。表よりグラフの方が変化の様子がわかるから，グラフの方がいいと思う。（筆者）「関数 $y=2x+1$ と関数 $y=x^2$ を比べよ」と問われたら何をしますか。…グラフをかいて，比べればよいと思う。（筆者）表をかいて比べようとは思いませんでした。書こうとは思いませんでした。」

P17（中3；移行期）「（問題の）意味がわからなかったんだけど，関数を調べよというのだから x と y の関係を調べればよいということだと思って，グラフをかけば関係が目で見てわかるようになるからグラフがよいと思った。」

代数で関係を表現する第2水準への移行期の生徒の中でも，表，式，グラフ表現それぞれにおける特定の規則性によって特定の関数が生成，表現されることを認めた生徒になると，未知の関数 $y=x^2$ を調べることができるようになる。そして，表，グラフのうちでも，グラフをかいてみるのがよいと考えるようになっている。このような考えは，2乗に比例する関数の学習後の高1（問Jを $y=x^2+2x+1$ で出題した）でさらに強化されている。

P18（高1；移行期）「（筆者）$y=(x+1)^2$ と変形して，表を作ってグラフをかくと書いてくれたんだけど，表はグラフをかくためですか。はい。（筆者）関数を調べるとき表を使いますか，グラフですか。グラフ。」

学年があがるにつれて，調べる際にはこのように式，グラフに焦点化されていることがインタビューからわかる。中3既習の高1生までは特定の関数しか知らない為，表の役割が残っている。例えば $y=-x^2$ の表から式を求める設問では，必ずしもグラフを利用せず，表から2倍3倍すると4倍9倍になることから2乗に比例すると判断する。これは，表の規則性が読みとりやすい2乗に比例する関数までなら有効な方法である。しかし，2次関数の一般形を扱って以後の第2水準の生徒は，グラフをかかなければどの関数かの立式判断がしにくいなどから，表はそのような有効性を減じ，関数の種別を判別する主要な役割を，失っていくわけである。

特徴3について述べる。礒田(1990)で述べたように中学校での学習を通じて，立式力が増大していく。その結果，前出問Dの事象の判別では，次の様に式を判別基準にすることが一般的になる。

P19（高1；移行期）「1（ア）は何km走るだから，y＝～。（筆者）あ，式を考えてくれたのね。はい。（筆者）関係が違うものと聞かれたら，その関係を式で表して調べればいいと思う。はい。（筆者）比例とか反比例とかは考えましたか。はい。（筆者）どっちで考えたのかな。比例の式で考えました。」

「比例の式で考えた」とは，比例の定義が式であることに基づいており，倍比例や増加の様子という事象での比例の特質よりむしろ，式を意識する傾向を示している。

特徴4は，礒田(1990)によっている。これは今回の調査データではないが，説明の必要から番外3として再録しておく。調査は，数量関係内容の指導後であり，学年を＋1学年して読むと，今回の調査学年と既習内容が整合する。

表を横に読む（yの変化だけ読む，xとyの伴って変わる様子を読む）傾向は，第2水準への移行のための指導を受けている中学校段階では，いずれの場合でも中1，中2で高い。中1から一貫して表の対応の見方（縦の見方）は指導されるが，中3で，縦に読む傾向が顕著に増

番外3 （礒田 1990；小4～中3）
次の表をみて考えたこと，気がついたことをかきなさい。

(1)

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

(1)の結果：数字は％	小4	小5	小6	中1	中2	中3
表を縦に読む	32	26	24	14	16	35
表を横に読む	45	61	42	48	49	35
両方の読み	1	3	8	10	11	11

(2)

x	1	2	3	4
y	6	5	4	2

(2)の結果：数字は％	小4	小5	小6	中1	中2	中3
表を縦に読む	15	20	18	7	8	15
表を横に読む	48	67	56	47	45	31
両方の読み	2	2	7	0	1	5
反比例を含む誤解	1	0	3	12	15	8

(3)

x	1	2	3	4
y	2	8	18	32

(3)の結果：数字は％	小4	小5	小6	中1	中2	中3
表を縦に読む	21	31	38	21	20	50
表を横に読む	15	31	27	15	11	9
両方の読み	0	0	0	0	2	3

大する。２乗に比例する関数の場合，表の変化の割合が一定でないため，横に読んで解釈することが困難である。その結果，縦の読み，すなわち対応の見方が強化され，横に読むことが容易い比例や一次関数も含めて，読み方が変わったものと考えられる。

１－３．第２水準

第２水準は，「関係（変化や対応の規則など；対象）を，関数（の式やグラフ；研究方法）で考察できる」水準，「代数・幾何（主要表現言語）で関係表現する」水準である。これまでの研究からは，第２水準は高１（本調査データでは高２）以降が該当することがわかっている。表現の再構成モデルと調査・面接結果を対照した結果，次の特徴を記述できる。

〈第２水準の特徴〉

特徴１．関数を調べる際に，式グラフは相互に翻訳しあう表現というより，一連の活動として一体化した表現となる。

特徴２．表からの立式では，グラフが介在するようになる。

特徴１について述べる。関数を調べる場合，第２水準への移行期ですでに，表はその役割を減じる傾向にある。第２水準ではさらに，「式では～。グラフでは～」というように，式とグラフを別表現と意識して考察するのではなく，一連の活動において一体表現とみなして議論する。問Ｊ（未知の関数として $y=x^3-x$ で出題）に対する生徒の反応を例にしよう。

Ｐ20（高２；第２水準）「x^3-x は $x(x^2-1)$ で，$x(x-1)(x+1)$。（筆者）そうだね，他に調べかたないですか。後は必ず通る所を調べるとか。（筆者）グラフをかいて調べるわけか。２次関数（$y=ax^2$）だったらここ（頂点を指して）が０になるんで，同じように０になるところを調べたら，この場合だったら，ｘが０だったら必ず０だし～」

Ｐ20は，はじめに式を因数分解する事で，式の特徴を探ろうとしている。その結果，$x(x-1)(x+1)=0$ の解を見通している。そして「グラフでは～」と表現の変更を説明の際にはっきり宣言することなく，それがｘ軸との交点であることと結びつけている。そこでは「式は～で，グラフでは～」という別表現に改めて意識するのではなく，式とグラフを一連の行為の中で一体に表現して考察するようになっている。さらに，Ｐ20の考察には，「$x(x-1)(x+1)=0$ の解」を調べるという目的が定まっている。移行期では，「関数を調べる」という問いに対して，表式グラフをかくと答える場合でも，問いの意味が今一つ判然とせず具体的な課題意識を欠く傾向にあった。それに対して，第２水準の生徒の場合では，問いの意味が「式の標準

形，グラフの概形，交点」などを求めることと解され，何をすべきかという具体的な行為も現れてくる。

式グラフ（および表）が一体化してしまう傾向は，先の問Kについての発言においても認められる。

P20（高2；第2水準）「どうやって説明したらよいのかわからない，んー。（筆者）問題文の意味はわかりますか。はい，式をみればわかるし，表でもわかるし，グラフでもわかるけど，説明するって，どういうふうにするのかわからない（何を説明すれば説明になるのかわからない），グラフでは1ふえたら2ふえるし。（筆者）それをかこうと思わなかったってことですか。そういうふうにかくってことなら，なんでもなかったんだけど。（筆者）あたりまえと思いましたか。そういえるかもしれないけど，みたらすぐわかるし，そっから何をかくのかと思って。」

P20はわかっていながら問Kに無答だった。理由は表でもグラフでも，わかることは同じとみているため，同じことを答える必要を感じなかった，すなわち，式，表，グラフが表すことをここでは一つとみなしたためである。移行期では「表では〜。グラフでも〜」ということは，異なる表現で同じ内容を表す意義があるが，表式グラフが一体化した第2水準の生徒においては，それは1つの内容になってしまっている。その結果，「そっから何かくのか」すなわち，さらに何が言えるかというように考えて，無答となったのである。

特徴2について述べる。扱う関数の種類が増大する為，立式では，表から直接でなく，グラフからの関数の判別が必要になる。そのことを，問Lに対する生徒の反応から示す。

問L．それぞれの表のような関係があるとき，yをxの式で表そう。

(2)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	−9	−4	−1	0	−1	−4

P20（高2；第2水準）「多少わかんなかったんだけど，どうやったっけかな，あ，下に開いた2次関数のグラフで。（筆者）2次関数と気がついたのはいつですか。表みたら，1次関数かなって思ったんだけど，そうなっていないので，グラフで考えたんだけど。」

P21（高2；第2水準）「(1)y＝ax＋bとおいて。どうして。xが0でyが10で，あと，（xが）1，2，（yが）8，6だから1次関数と思って。(2)んと，グラフちょっとかいて，形が2次関数になるから，$y=-x^2$を平行移動したものだなと思って。（筆者）(1)は表からもとめて，(2)はグラフで考えたんだけど，どちらのやりかたがいいと思いますか。やっぱりグラフをかいたほうがいいと思います。」

P22（高2；第2水準）「(2)はグラフから，(1)は表をみてるうちに1次関数ってわかった。（筆者）グラフをかいてみるのと表から直接とどちらがいいですか。グラフで考えるのは最後の手段で，できれば直接求められるほうがいい。」

一次関数以外の関数の判別に，グラフが用いられる背景には，様々な関数の表現についての理解が深まり，表現の変更が負担でなくなっている上，一次関数以外の関数では表からではどのような関数かを特定しにくいことを知っているためである。第2水準以前では，表は，立式に対して主要な役割を担っていたのであるが，第2水準ではその主要な役割をグラフが担うことになるのである。

1－4．補遺：第3水準への移行と第3水準

第3水準は，「関数（対象）を，導関数・原始関数（研究方法）で考察できる」水準であり，微分積分を主要言語表現とする水準である。他の水準移行が，数年をかけて漸進的に遂げられていくことで，学年進行による思考の変容を読みとれたのに対して，第2水準から第3水準への移行は，普通，天下り式・形式的に，微分積分指導として短時間で済まされる。そのため，本論文のように，表現世界の再構成過程を学年対比によって議論することは困難である。そこで以下では，今後，その詳細を検討する際の資料を残す意味で，表現世界の再構成過程を外て，調査からわかる移行と第3水準の特徴を補足し

ておく。

1－4－1．第2水準からみた第3水準への移行

第2水準から第3水準への移行は，微分法の導入によってなされ，極限及び微分の算法を中心に指導される。当該学年の関数内容が未習の段階で調査する今回の調査では，移行期のデータは取得できなかった。以下では，第2水準の生徒の発言から，第3水準へ至る移行の手がかり，契機となる発言を示し，補遺とする。

第2水準の生徒は，問Mに対して，これまでの方法では対処できないことを理解し得る。

> 問M．下は関数$y = x^3 - 2x^2$（ただし，$0 \leqq x \leqq 2$）のグラフをおおまかにかいたものである。$0 \leqq x \leqq 2$の区間で，yの値を最大にするxの値を求めなさい。

P22（高2；第2水準）「（筆者）書いてないけどどう考えた。因数分解したら，xが出るかなとおもったんだけど，グラフが交わったところじゃないからね。（筆者）式に数を代入することを考えなかった。細かい数を代入すると，計算がたいへんそうだったから。」

P20（高2；第2水準）「（筆者）解けてないけどどう考える。xにこの間の数を代入してみて。（筆者）グラフを読もうとはしなかった。グラフはよめないから。（筆者）なんで代入してやらなかったのかな。そういうやり方やったことないんで，なんかやりかたがあるんだろうと思って。」

両者は，グラフをみた段階で，代入しても正確な解が求められないと判断して，解答はしなかったのである。第2水準までのような表で関数の値を調べるアプローチでは，この課題に対してアプローチできないことを即認めている。そこでは，すでに表は機能を失っている。解が出ないことを知りつつも，次のように答えた者もいる。

P21（高2；だい2水準）「グラフをみて，なんか代入して，xが1に近づくと小さくなるから，$x = 1$にしました。（筆者）もっと小さい所ないですか。あると思うんだけど，今の頭でやってもムリだから。」

このように未知の関数を調べる上で，表，式，グラフだけに頼った方法では限界があることを第2水準の生徒は認めている。第2水準の生徒は，問J（$y = x^3 - x$）の関数の調べかたについて，$y = x^3$と$y = -x$の合成を考える等，関数を複数の関数で説明することは経験している。合成は，微分積分のように関数間の関係を積極的に利用する方法とまでは言えないものの，整関数に限って言えば有効なアプローチが残されていることを彼らは学ぶ機会がない（礒田 1994，竹内 1997）。

1－4－2．第3水準の特徴

第3水準の特徴として次の特徴を記述できる。

〈第3水準の特徴〉

特徴1．どのような関数か調べるとは，微分法によりグラフをかくことである。

特徴2．2つの導関数$y = x^n$と$y = x^{n-1}$を比較する場合，導関数・原始関数の関係で理解する。

特徴1について述べる。問J（$y = x^3 - x$；高3既習）に対して，微分法を利用してグラフをかくと考えたことについて，次の様に語っている。

P23（高3；第3水準）「教科書でみるような問題と同じように（「調べよ」の題意を解釈して），微分して，0とおいて極値を調べる。（筆者）関数を調べるには微分をすればよいと思いますか。あのどのような関数かっていうことを，グラフがどのような形になるかっていうように解釈したんで。」

P24（高3；第3水準）「これも（問Mの極小値を求める問題と）同じく，微分して，増加減少を調べて～中略～。（筆者）問Jを読んだとき違和感をもちましたか。問題文が変だとは思いましたけど，こうやればいいと思って。～中略～どのような関数かって，やっぱりグラフをかけばよいかなって思うし。」

第3水準の生徒は，どのような関数かを調べる方法を微分法によりグラフをかくことに求めている。

特徴2について述べる。問Nに対して以下の

様に答えている。

P23（高3；第3水準）「最初，問題の意味がわからなかったんですが，これを微分したらこれなんで，導関数が正だから，$y=x^3$は，変化の割合がいつも正で，常に増加する関数ってわかります。」

P24（高3；第3水準）「多少違和感あったけど，導関数だから。（筆者）微分するっていうことは，関数を導関数で説明することだってことを聞いた問題ないんですけど，それについてどう思いますか。はい，そう思います。」

数学上では微分法は，一次近似や，極限の延長線上で説明される。しかし，P24の発言に表れるように，高等学校で扱う直感的な微分法は，実態としては，関数を関数で説明する方法として生徒は認めている。

2．水準移行と表現世界の再構成

ここでは水準の移行過程を記述するという本論文の主題に照らして，以上の結果を総合して，表現世界の再構成モデルが水準移行の過程をどのように記述するか，そしてどのように水準移行の学習指導への示唆を与えるかを述べる。

2－1．水準移行の様相

報告(1)で述べたように水準判定のための問題を各学年100名以上に課し，その学年で期待される水準に達しているか，もしくはおおむね達しつつあると予想される抽出時5名以上を選んで面接し，その結果を表現の再構成過程のモデルに照らして，各水準及び移行期の特徴を以上のように概括した。改めて，その特徴を基準に，逆に被面接者の水準を特定すれば，次の図のようになる。ただし，van Hiele の水準は元々カリキュラム開発と関連して設定されたおおまかな理論であり，水準は文脈に応じて変動し得る性格を備えている（礒田 1986）ので，ここで行った水準の特定は，この調査方法に依存している。対角線上に分布するのは，もともと達成度の高い者を抽出した結果に依存しており，van Hiele 水準の区別で話題になるような水準の特定の困難な子どもは，本論では議論の対象としていない。

報告(1)と本論で述べた結果が，これまでの筆者の研究（礒田 1997aなど参照）と比較して新しい点は，水準の移行過程に該当する移行期を「旧表現の再構成」と「新表現の生成規則構成」として区分し，それぞれ移行の様相として特徴付けられることを示した点である。ただし，報告(1)で述べた通り，この二つは過程として相補的な性格を備えており，序列的と言うより並列的な性格を備えていて，水準の意味での段階ではない。報告(1)と本論で得た結果を前提とすれば，並列的な一面を備えながらも，両者には，次のような性格分けがある。

「旧表現の再構成」とは，「移行すべき水準の言語表現に準じて，それまでの水準の言語が再構造化される層」である。そこでの特徴は，「それまでの水準ではできたことができなくなったり，説明の仕方や解答の仕方が変わったりする」点にある。第1水準から第2水準への移行に際して，表における比例関係処理はできるのに，事象における比例関係の処理はできなくなってしまうなどはその典型である。

報告(1)で述べた第0水準から第1水準への

被面接者の水準分布

		小4	小5	6	中1	中2	中3	高1	高2	高3
第0水準		6	2	1						
移行	旧表現再構成		4	1	1					
	新表現生成		2	4	2					
第1水準					3	3	1	1		
移行	旧表現再構成				1	2	3	2		
	新表現生成					1	2	1		
第2水準							1	4	5	
第3水準										5

移行に際しては，問A「1000円で買い物をする」場面での第0水準と移行期の子どもの反応の相違も，この再構造化を示す顕著な例である。実際，第0水準の子どもは「高いものを買えば，おつりは減る」という示された状況に対して，「払うお金は増える」というように，与えられた世界で起こる状況そのものを思い浮かべて，話題にしていないことにまで連想が及び，他の事象との比較ができなくなっている。移行期の子どもは，与えられた数量関係を特定して比較できるようになる。逆に言えば，第0水準の子どもは数量関係を明確に特定せずに状況をあれこれイメージするため，一変数的な増加や減少などの様々な連想が生まれるものと考えられる。対する移行期の子どもは，数量関係に注目できるようになり，第0水準の子どものようにあれこれ連想することはしなくなるのである。

「新表現の生成」とは，「移行すべき水準の言語表現が，できるようになっていく層」である。そこでの特徴は，「それまでには認められなかった表現や，適切に使えなかった表現が使えるようになる」点にある。第2水準への移行に際しては，式・グラフが自由に使えるようになっていくことなどは典型である。

報告(1)で述べた第0水準から第1水準への移行に際しては，1あたりへの注目が顕著な例である。日常語を背景とした第0水準の子どもの場合，「人一倍努力する」「倍々」という語用に，累加との混乱がみられ，「1あたりの何倍」という意識は乏しかった。一あたりへの注目は，その混同を断ち切って表，式において新しく生成された表現とみなすことができるのである。

「旧表現の再構成」と「新表現の生成」とは，表現世界の再構成過程モデルから導出した層である。水準移行に横たわるこの二つの変容の様相を特徴付けることができたのは，数学化の過程の詳細を特定するために準備された表現世界の再構成過程モデル（礒田 1992）が，発達の様相を検討する枠組となりえたことを示唆している。

2－2．水準移行の総括

上述の水準移行の記述枠組としての成立確認によって水準の移行過程の様相を記述しようとする本論の主題は完了した。ここでは，付随的な結果として，第2水準までの水準移行について示唆的にまとめておく。

2－2－1．第0水準から第1水準へ

報告(1)で述べた結果を基に，次のように総括できる。第0水準と第1水準は，どちらも事象の数量関係を探求する文脈にあり，数量関係を問う特定の文章題，例えば立式するような問題に対して，同じ解答をする場合も少なくない。違いは第1水準が数量関係を対象とした考察ができる点にある。すなわち，第0水準は，複数事象を比較するための関係概念や比較するための手立てを保持しないのに対して，第1水準は保持している。もちろん，第0水準でも，特定事象に対して演算決定ができる。しかし，与えられた事象を意味世界にして考える傾向が強いため，問A「1000円で買い物をする」場面で，「高いものを買えば，おつりは減る」という示された状況に対して，「払うお金は増える」というように，与えられた世界で起こる状況そのものを思い浮かべて，話題にしていないことにまで連想が及び，他の事象との比較ができなくなるのである。その意味で，第0水準の子どもの思考は，「場面（事象）依存型」といえよう。それに対して，第1水準では，比例を典型とする一般性のある関係概念を保持しているので，問Aのような問題に対して，そのような関係概念を基準にパッと答えられる。個々の事象そのものを意味世界にして考察するのではなく，関係概念を意味世界として事象を類別し得るからである。その意味で，第1水準の子どもの思考は，場を越えた「関係依存型」と言えるのである。

第0水準から第1水準への移行で顕著に認められる変容は，倍と累加が切り離され，倍と1あたりが結びついていく点である。報告(1)で述べたように，第0水準では累加的に倍という言葉を使う場合があるが，第1水準では「1あたりの何倍」という用法や「2倍3倍すると2倍3倍になる」というような用法を用いるようになる。その変容は，表の見方で言えば，従属変数に着目した表の見方から二変数に着目した

表の見方への変更を含むものである。

2－2－2．第1水準から第2水準へ

第1水準と第2水準の違いは，第1水準までは事象を探求する，事象を念頭に討議する文脈にあるのに対して，第2水準以後は，関数を探求する，表，式，グラフを念頭に関数を議論する文脈にある点にある。そこでは，大規模な認知構造の変更や言葉の変更が迫られる。

比例を例にしよう。すでに述べたように，小6の比例既習児童の方が，中1の関数としての比例既習の生徒より，事象へ比例を適応する力が高いことを指摘した。中1の関数としての比例の学習は，事象の探求力を損なう効果も備えているのである。このような結果は，第2水準への移行のための指導が，第1水準までに達せられた認知構造を再構成していくことを物語っている。面接では，立式方略の変容も認められた。実際，第1水準までは立式方略は多様に指導されるが，移行期では立式方略も一層形式的になり，例えば公式に代入にすることによる定数決定が指導される。その結果，第1水準では，1あたりに着目して立式する場合が多かったが，第2水準への移行時は，商一定に着目して立式する場合も増加した。1あたりに着目しての立式は，事象を念頭にした考察をしたことを示唆しているのに対して，商一定に着目しての立式は，（対応）表から立式したことを示唆している。これを，表の性格の違いとして言えば，第1水準はあくまでも事象の表という性格が強く，第2水準では関数の対応を意識しての対応表という性格が強いと言える。同じ表現でも，その意味や役割が異なること示す例である。

従来，小学校の比例と中学校の比例は，「なぜ同じことを二度扱うのか。指導効率が悪い。」というような論があった（例えば石田一三 1989）。そして，中学校でやるから小学校の比例はわからなくてよいという扱いさえも主張されてきた。しかし，このような子どもの考え方の違いは，第1水準までの小学校と，第2水準への移行をめざす中学校とでは扱っている教材の内実が全く異なることを示しており，中学でもう一度扱うから小6の比例は簡略にというような考え方は，水準の違いによる思考の相異を無視した誤った論調とみることができる。しかし，その一方で，事象への関数の活用力が損なわれる事態は望ましくなく，第2水準への移行に際して事象への活用力育成については，実験・観察を通じて関数を調べるなどの取り扱いと関わって改めて吟味の必要があると言えよう。

第1水準の子どもが使う言葉と第2水準の子どもが使う言葉は，第0水準と第1水準の差異以上に大幅に異なっている。第1水準の中心的な言葉は表であり，それが「関係依存型」の思考を促進していると考えられる。それに対して，第2水準の中心的言葉は式・グラフであり，それが「関数式依存型」の思考を促進していると考えられる。特に移行期では，一次関数の場合に認められるように，表，式，グラフは別々の表現であるが，複数の関数を既知とする第2水準では，表式グラフは関数式を中心に一つの表現であるかのごとく扱いを受ける。そこでは，既知の関数について，式をみればグラフが，グラフをみれば式が同時的に意識できる状態がすでにできあがっているのである。

注1）調査結果の報告を主題とする本論では，すでに報告済みの表現世界の再構成過程のモデル及び関数の水準のオリジナリティを話題にする議論は割愛した。それぞれの最近の研究における位置づけについては，表現世界の再構成過程のモデルの設定については礒田（1993）において，その後の展開については，例えば，礒田（1999b）で言及している。また，関数の水準については，礒田（1995a），Isoda（1996）において行っている。

注2）「関数を調べる」という視野は，次期指導要領では，強調された。筆者は，関数の思考水準を話題にした当初から，その重要性を提案したが，15年前には，ほとんど，話題にされなかった。

参考文献

P. M. van Hiele (1959) “La peneede lenfan la. geometry” Bulletin de l Enseigment Public de

Mathematics, de. l Emseigment Public No. 198, pp. 199-205

P. M. van Hiele and van Hiele-Geldof (1958) "A method of initiation into geometry at secondary schools" 'Report on Methods of Initiation into Geometry', J. B. Wolters, pp. 67-80

石田一三（1989）「比例反比例の指導」明治図書

礒田正美（1984）「数学化の見地からの創造的な学習課程の構成に関する一考察～ H. Freudenthal の研究をふまえて～」筑波数学教育研究　第3号　pp. 60～71

礒田正美（1985a）「数学化と反省的思考に関する一考察～数学化の見地からの創造的な学習課程の構成～」筑波数学教育研究　第4号　pp. 86－100

礒田正美（1985b）「関数の認識段階とその指導に関する研究」日本数学教育学会誌「総会特集号」第67巻　p. 283, p. 399

礒田正美（1986）「Dina van Hiele-Geldog の博士論文における水準の移行の為の指導に関する一考察」筑波数学教育研究5号　pp. 69－81

礒田正美（1987a）「関数の思考水準とその指導に関する研究」日本数学教育学会誌「数学教育」，第69巻3号　pp. 2－12

礒田正美（1987b）「関数の水準の思考水準としての同定と特徴付けに関する一考察」日本数学教育学会第20回数学教育論文発表会発表要項，日本数学教育学会誌「論究」(1988推薦再掲載)，vol. 49・50, pp. 34－38

礒田正美（1989）「小中高にわたる関数の活用法及び表現法の発達と関数の水準」日本数学教育学会第23回論文発表会論文集　pp.7－12

礒田正美（1990）「数学化における言語の再構成課程に関する一考察」日本数学教育学会第23回数学教育論文発表会論文集　pp. 19－24

礒田正美（1991a）「ブロックを利用しての十進位取り記数法指導過程の批判的考察」北海道教育大学岩見沢分校年報いわみざわ　第12号　pp. 43－51

礒田正美（1991b）「関数の水準の移行過程における思考の様相に関する調査研究」日本数学教育学会第24回論文発表会論文集　pp. 67－72

礒田正美（1993）「学習過程における表現と意味の生成に関する一考察～数学化過程における言語の再構成の場合～」『数学教育学の進歩』東洋館　pp. 108－125

礒田正美（1995a）「van Hiele の水準の関数への適用の妥当性と有効性に関する一考察」筑波数学教育研究　第14号　pp. 1－16

M. Isoda et al (1995b), 'Hoffers Material Shows Us the Nature of Japanese Culture and van Hiele Theory in the Class Room', Paper presented Research Precession in the 73rd Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, USA

礒田正美（1995c）「関数を調べる活動の復権」中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(2)　pp. 34－43

M. Isoda (1996), 'The Development of Language about Function: An Application of van Hiele's Levels', Edited by Luis Puig and Angel Gutierrez, Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 3, pp. 105-112

礒田正美（1997a）「曲線の表現史からみた代数，幾何，微積分の関連に関する一考察筑波数学教育研究　第16号　pp. 1－16

礒田正美（1997b）「関数表現の様相の記述研究(1)」筑波大学教育学系論集第22巻第1号　pp. 25－36

礒田正美（1999a）「関数領域のカリキュラム開発の課題と展望～テクノロジーによる探究学習と関数感覚の育成～」日本数学教育学会編『日本の算数・数学教育1998　算数・数学教育カリキュラムの改革へ』pp. 203－220

礒田正美(1999b)「数学の弁証法的発展とその適用に関する一考察～『表現の再構成過程』再考～」筑波数学教育研究　第18号　pp. 11－20

竹内智則（1997）「テクノロジーで変わる基礎解析」中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(4)　pp. 124－132

Research on the Representation Changes about Functional Thinking (2) Using the Model of Reconstruction on the Representation World

Masami ISODA

This paper aims to discribe the development of functional thinking and to propose discussion for teaching about functional thinking. To describe the development of functional thinking, I proposed the levels of functional thinking [Isoda 1985~] using the van Hiele's [1958]. To discuss the transition between levels, I proposed the model of Reconstruction on the Representation World [ISODA1993] which discusses the changes of representation. This paper and the previous paper [Isoda 1997b] focused on the observation and analysis of the transition using the interview data bay the model. This paper is a continuation of the previous paper described the following transion based on the model.

The reconstruction of representation of Level 1; Students used to discuss the relation of table instead of using the intuition of real world situation which had been used to discuss at Level 0.

The construction of productive method of Level 2; Student could begin to explore function using table, equation and graph.

Level 2; Students explore unknown function and in the case of known function, they could not distinguish its table, equation and graph because all of representations are integrated.

The result of this paper and the previous paper indicate that the model discribes the transition preocess well.