i2007.tex

医学系　物理（１学期）

物理学系　青木保夫

電話　内線　４２５１

電子メール　　yaoki@tac.tsukuba.ac.jp

２００７年の追加
電磁気学、原子と分子、X 線撮影の物理を後半に追加した。

１学期は青木, ２・３学期は新井が担当し、この講義ノートは１学期に青木の講義で使用する。

一般的な参考文献

１）医歯系の物理学　赤野松太郎・鮎川武二・藤代敏幸・村田浩　著　東京教学社
最初はこの教科書を使用するつもりであったが、書き進む内に、全部書いてしまった。２，３学期はこの教科書に戻る予定である。
2) 物質の世界 木下是雄 著 培風館
原子を中心とする物質観を紹介しながら、物理の基本を分かりやすく解説している。
３）理科年表　国立天文台編集　丸善
自然科学全般の色々なデータを集めた本として、各学生が手元に置いておくのが適当と思う。毎年１１ー１２月頃に次年度版が出版される。このノートの中の数値や単位系はこの理科年表に依拠している。個人的には２ー３年に一度購入している。
４）恐竜の力学　R．M．アレクサンダー著　坂本憲一訳　地人書館
５）ヒトの足　”この謎にみちたもの”　水野祥太郎著　創元社
後の二つは動物の運動機能を力学的に考察したもので、力学を応用する読物の例として適当と思う。
恐竜の足跡の化石はあるが、あの長い尻尾をひきずった化石は見付かっていない。この疑問を解いたのが最後の本の著者、医学部の先生、であったと記憶しているのでここに引用した。

１学期は主に力学を講義し、題材が必要になる時は出来るだけ地球や身近な話題を採用した。

成績評価は、レポートと学期末の試験の成績に依る。

レポートはこの講義ノートに登場する問題を解き、該当ページ終了後２週間以内に学務課のレポート提出箇所に提出したもののみが、採点の対象となる。後の整理の都合上、A ４サイズのレポート用紙を使用する事。
試験も授業の一部であると思っているので、問題を解くのに必要と思われる常識的な参考書、データ・公式集、計算機等は持ち込可とするので、各自今から準備しておく事を勧める。(この項目は１学期のみ意味がある)。

目次

内部エネルギーに付いて
表面張力
８) 固体の力学的パラメータ
ヤング率
剛性率 (ずれ弾性率)
ポアッソン比
体積弾性率

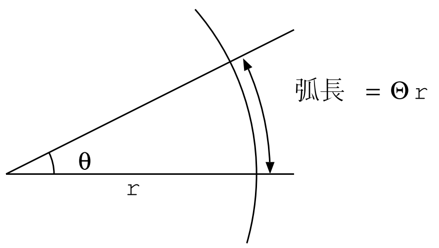
１) 単位と次元

定量的に現象を記述するためには、万人に共通の尺度が必要である。このために、独立国家は度量衡を定めた。 その後、国際的に統一する必要性が生じ、現在では SI(国際) 単位系と呼ばれる単位系が最も広く使用される単位系である。

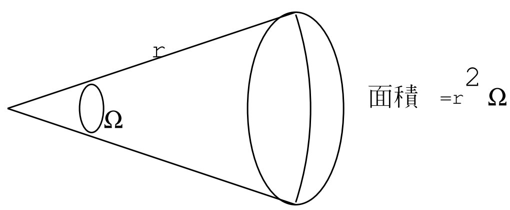
SI 単位系では７個の基本単位として、時間、長さ、質量 (重さの概念を正確に定義したもの)、電流、温度、物質量、光度を定義し、更に平面と立体の２種類の角度を補助単位ときめている。

平面角と立体角

角度のラディアン（ｒａｄ）とステラディアン（ｓｒ）は SI の委員会でも異論があったらしいが、補助単位として認知された。ラディアンは常識的な角度の１８０度の事をパイ (π) と呼ぶと言うだけで了解されるだろう。復習しておくと、平面上に交わる２本の直線を引き、その２本の直線のなす角度を以下の様に定義する。２直線の交点を中心として任意の半径の円を描く。２本の直線と円の交点で作られる円弧の長さと半径との比を２直線のなす角度と呼ぶ。単位はラディアンである。１ラディアンは６０度よりも少し小さい。



平面角



立体角

立体角の概念は、平面角を３次元に拡張したものである。例えば、傘の広がり具合を思い浮かべると良い。傘を少し広げるとか大きく広げるという時、定量的にはどのように言えば良いかという事を考えてみると、立体角という概念が必要な理由が理解できよう。空間の１点を頂点とする錐体を考える。この錐体の頂角を大きくしたり小さくしたりすると、立体的な角度という概念を作る事ができる。錘体の頂点に対して張る３次元的な角度を立体角という。定量的な定義は、上に説明した平面の角度の定義を参考にして、以下の様にする。錘体の頂点を中心として任意の半径の球を描く。錐体の側面と球面とは交わり、球面の一部を切り取ると考える。この球面から切り取られた部分の面積と半径の２乗の比をこの立体角と定義する。立体角の最小値は当然０である。錐体が平面に広がると球面の半分を切り取るのでこの時の立体角は 2π である。即ち、z 軸上の一点から無限に広い全 x-y 平面を見込む立体角は 2π である。全球面が内部の一点を見込む立体角はこの２倍の 4π である。別の言い方をすれば、ある閉じた空間の内部から閉じた壁を見込む立体角は 4π である。面積が S の平面を、１点から距離 r の点に、面の垂線を点の方向に向けた時の立体角はほぼ S/r^2 である。

面積が一定の平面が定点を見込む立体角が r の２乗に反比例するという事と、万有引力や静電気に関するクーロンの法則が同じく r の２乗に反比例するという事とは密接な関係にある。質点からの万有引力や、電気的なクーロン力は四方八方に一様に伝わり、途中で減衰しないという事を表している。

問　太陽を大きさを無視できる光源（点光源）だと近似する。太陽から出た光の何%が地球を照らしているか？

ついでの問 太陽から地球に降りそそぐ、エネルギーを太陽定数という。人工衛星レベルでは大体１．４ｋW/m^2 程度である。この１%を光合成で澱粉に変えられるとすると、地上には何人の人間が収容出来るか？

逆に、人間の基礎代謝量を１日１０００ kcal と仮定すると、地球上の人間全体では、この太陽からの輻射エネルギーのどの程度の部分を光合成で澱粉に変えねばならないだろうか？

問 放射線対策の３要素は時間・距離・遮蔽といわれる。^{137} Ｃｓのγ線源から１m離れるのと、２５ｃmに近付くのとではどの程度被曝量は異なるだろか?

時間

時間はもともとは１日の長さや月の満ち欠けを基本としていたのだろうが季節の概念と陰暦の１２ケ月という長さは整合性が悪いので、陰暦は太陽暦にとってかわられた。１日を２４時間、１時間を６０分、１分を６０秒と定義する。しかし、１日をどのように定義するかはかなり難しい様である。太陽の南中から次の南中迄を１日と定義した時代もあるが、原子時計の精度で測定すると地球の自転周期は一定では無いことが分かって来た。例えば、太陽と月の引力を受けて、海水が地球上を動くと、自転周期も影響を受けるだろう。現在では、Cs 原子が出す光の周期を基準として、１秒 (sec) を定義しているので、１年の長さは、原理的には年によって変化する。

時間と密接に関連した概念として時刻という概念がある。時刻の国際標準として、協定世界時を使用している。上の説明の様に地球の自転周期は一定では無いので、地球の自転が遅くなると閏秒を挿入している。最近では６月と７月の間又は１２月と１月の間が１秒だけ長くなっている年がある。最近１５０年ほどの観測結果から逆算すると１８００年代末迄は地球の自転はやや加速気味であったがそれ以降ずっと減速している。原因は分かっていない。

現在の測定技術では、時間は最も精度の良い測定が簡単に出来る物理量である。諸君の持っている時計の精度を確認してみよ！この観点から、対象とする測定量を時間に変換して、時間を測定するのは非常にうまい測定方法である。例えば、月に鏡を置いて地球からの光の反射を観測し、往復の時間を測定すれば地球と月の距離が原理的には３秒以下で測定できる。

長さ

長さの単位にはメートル (m) が使われる。この単位はフランス革命の産物として地球の子午線の長さを基準として定められた。その後、この定義を具体的に表現したメートル原器にとって変わられ、さらにある種の光の波長を基準とする等の変遷の後、真空中の光の速さと時間から長さを定義するようになった。現在の知識の範囲では、光の波長により真空中の光速度が変わるという事は無いので、基準となる波長は定められていない。

質量

質量の単位はキログラム（ｋｇ）であり、定義は１０００ cc の水の質量だったが、長さの基準の測定精度が向上すると質量の方も追随して改定せねばならないのは不便である

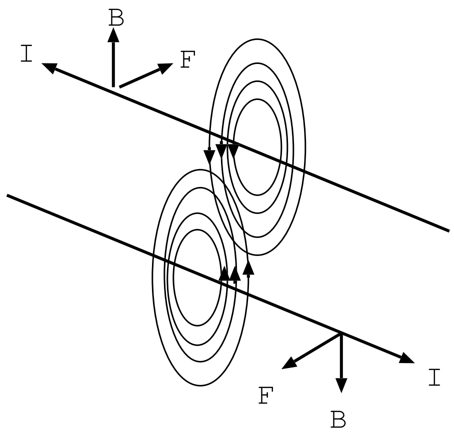
(独立性が無いとか従属していると表現される)。水に溶け込んでいる空気の量や、成分元素の同位元素存在比を問題としだすとこの定義ではお手上げになる。

質量は現在でもキログラム原器を基準としていて、原子的な物を基準とする世の中の流れに対抗している。硅素原子の質量を標準にしようという動きがあるが、同位元素の分布が世界中で、一定だという保証がないといった問題がある。

質量によく似た概念として重さがある。重さとは、地球が物体に及ぼす見掛けの引力の大きさの事である。例えば、赤道上と北極とでは、遠心力の大きさが異なるし、地球の中心からの距離も異なるので、同一の物体でも重さは異なる。気圧や空気の温度が変わるなら、浮力も季節に依存して変化しているはずだ。

電流

電流の単位は細い２本の無限に長い仮想的な導線に同じ大きさの電流を流した時に導線の単位長さ当たりに働く力の大きさを利用して決める。力の単位はニュートンの運動方程式を使えば自動的に決まる。



電流が流れると周囲に磁場を作る。その磁場が他方の電流に力を及ぼす。二つの電流の向きが同じ (平行) 時は引力が働き、逆向き (逆平行) の時は斥力が働く。この両者で力の向きは異なるが大きさは等しい。この力の大きさで、電流の大きさをきめる。電流の単位は A(アンペア) を用いる。電流と磁場との関係を研究したフランスの物理学者の名前をとっている。

ここまでの４個の基本単位の記号を４つ並べて MKSA 単位系と呼ぶ事もある。

温度

温度の定義はつきつめるとかなり難しいが、常識的には熱い物ほど温度が高い。熱さ、冷たさの目安を定量的に与えてくれるものだとしておこう。物質を構成する原子や分子の運動エネルギーが大きければ温度が高い。温度はこの、運動エネルギーに以拠して定義されている。これから、完全に静止している分子の集団温度は最低の温度であり、これを絶対０度とする。記号は K を用いる。イギリスのケルビン卿の名前に因んでいる。絶対０度より低い温度はこの定義からは出て来ないが、温度の高い方には原理的な上限が無い。しかし、ある種の物理学者は負の温度という概念を使用する。

物質量

化学でおなじみのモルである。正確な定義は、０．０１２ kg の質量数１２の炭素原子核

からできた中性炭素原子の個数 (いわゆるアボガドロ数) と同数の個数の原子や分子の集団に含まれる物質量。原子や分子以外にイオンや電子の集まりでもよい。化学反応は原子数の整数比で起こるので、質量で議論するよりもモルを使う方が便利である。

光度

光源の明るさの単位である。周波数を固定した単色の点光源からのある立体角当りに放出されるエネルギーで定義している。単位は cd(カンデラ) を用いる。ある種のロウソクの明るさを基準とする白熱電球の明るさで表現された時期がある。日本語では燭光とも呼ばれる。

光源の強さが一定でも遠くに行けば、距離の２乗に反比例して暗くなる。照らす方の明るさの対極として、照らされる方の明るさの単位としては照度という概念があり、ルクス（lux,lx）という単位が使われる。

基本単位は、時間の秒（sec）、長さのメートル (m)、質量のキログラム (kg)、電流のアンペア (A)、温度の度 (K)、物質量のモル (mole、又は mol)、光度のカンデラ (cd) であるが、時として、これらの単位は大きすぎたり小さすぎたりするので、これらの単位に接頭語を付けて大きな単位や小さな単位を表す。

10 の巾乗指数を示す接頭語

巾指数	記号	読み		巾指数	記号	読み	
１８	E	exa	エクサ	−1	d	deci	デシ
１５	P	peta	ペタ	−2	c	centi	センチ
１２	T	tera	テラ	−3	m	milli	ミリ
9	G	giga	ギガ	−6	μ	micro	マイクロ
6	M	mega	メガ	−9	n	nano	ナノ
3	k	kilo	キロ	−12	p	pico	ピコ
2	h	hecto	ヘクト	−15	f	femto	フェムト
1	da	deca	デカ	−18	a	atto	アット

大きな数に対応する接頭語は大文字で書くが小さな方は小文字である。但し、kg はキロとグラムがくっついたものでは無いという解釈である。kg で一つの単位である。しかし、１ｇのことを１ｍｋｇ（ミリ kg) とは言わない。長さの基本単位メートルと１０００分の１の記号 (ミリ) とは同一記号である。

代表的な数値例

時間

ビッグバンから現在迄の時間は、観測された宇宙の果てとハッブル定数から約１００億年と推定されているが、誤差は１０億年以上あるだろう。

地上に人類の先祖が出現してから、５００万年。どの段階を先祖と呼ぶかで１００万年という説もあるだろう。

ネアンデルタール人とクロマニヨン人との主役交替が２から５万年前。

世界で一番古い土器が日本 (？) で作られてから、約２万年。
もっとも寿命の長い生物は？（縄文杉は縄文時代から生きているという説もある）
人類の寿命は５０－１００年。鼠の寿命は約１年。
胃壁の細胞が入れ替わるのが２週間。
心臓から出た血液がもう一度心臓に戻ってくるのに要する時間は？
細胞分裂はどれくらいの時間でおきるかな？
人間が足を動かすのに要する時間は大体１秒。
脚気の診断に膝蓋けん反射が使われる事がある。膝を叩いてから足が上がるまでの時間は？ これから神経の伝達速度を概算出来るか？
草履虫の鞭毛が動く時の１周期の長さは？
ハ調のラの音は約２．５ミリ秒の周期を持つ。(４４０ Hz)
カメラのシャッター速度は、早い方で約１ミリ秒、ストロボの発光時間は０．１ミリ秒程度
水素原子の１ｓ軌道を電子が１周するのに要する時間はどれくらいだろうか？ 化学反応が起こる時間はこれよりも遅いだろうし、生物の時間はこれよりもずっとずっとゆっくりしているだろう。
可視光線の周期は fsec 程度。

長さ

地球の半径は約６４００ km。
高速道路の出入口の距離は大体１０ km。
人間が１分間に歩ける距離は１００ m。大きな木の高さも１００ m。
人間が両手を広げると約１．５ m(１尋)。肘の長さが１尺、足の大きさが 1 foot、親指の周囲が 1 inch。
１円硬貨の直径が２ cm、厚さが１．５mm。
髪の毛の太さが５０－１００ミクロン。
大腸菌の大きさは約１ミクロン。
可視光線の波長は４００－８００nm。
水素原子の直径はほぼ ０．１ nm。
代表的な原子核の直径は １０ｆm。

質量

地球の質量は５．９７４ x １０^{24}kg、太陽はこの３３万倍重い
大きなタンカーは１０万トン以上ある。ジャンボジェットは数１００トン、乗用車で約１トン、１２５ｃｃのバイクで１００ kg。
人間の体重は約５０ kg。人体の各部分の質量は？
卵の質量は？ ブラキオサウルスでは？　鶏だと？　魚だと？
鉄だと１ｃｃで約８ g、水は１ｃｃで１ｇ、空気だと１ｃｃで１．２ mg 程度、地上で一番密度の大きな元素は？　目を宇宙に向けると、中性子星や白色ワイ星というすごい密度の物体もある。
水分子１個の質量は１８ｇをアボガドロ数で割ればよい。

問 もしも怪獣図鑑の様なものがあれば、ゴジラの密度を概算し、白金やイリジウム

の比重と比較してゴジラの怪獣振りを確認せよ。

問 鉛原子核の半径を７ fm、質量数を２０８としたとき、この原子核の密度を計算せよ。この程度が最大密度である。逆に宇宙空間の平均密度は？

組み立て単位

基本単位を組み合わせて複雑な単位を作り、これを組み立て (誘導) 単位と呼ぶ。以下によく使われる誘導単位を例示する。対象の大きさを表すのに、数値と単位を組み合わせて使用するが、単位を明示するために括弧［］で括る場合もある。

面積は長さの２乗、体積は長さの３乗の次元を持つ。
［面積］＝［長さ^2］,［体積］＝［長さ^3］
面積や体積という概念はこの SI 単位系が作られるよりもずっと古い歴史を持つので民族や言語により各種の固有の単位を持っている。
密度は単位体積当たりの質量である。［密度］＝［質量／体積］＝［ｋｇ／ｍ^3］
走った距離を走行に要した時間で割れば (平均) 速度を得る。［速度］＝［長さ／時間］＝［m/sec］
瞬間の速度は位置座標を時間で微分すれば良い。
速度が時間的に変化する割合として加速度を定義するので、速度を時間で微分すると加速度になる。［加速度］＝［速度／時間］＝［m／ｓｅｃ^2］。地表付近で自由落下する物体はほぼ９．８［m／ｓｅｃ^2］の加速度をもち (重力加速度)、g という記号をもちいる。この加速度は質量や物質にはよらない。　細かい事を言うと、この重力加速度の値は場所に依る。
力はニュートンの法則により定義される。［力］＝［質量 · 加速度］＝［ｋｇ · m／ｓｅｃ^2］
この最後の単位にはニュートンという名前がつけられていて、Nという記号を使う。地球が地表付近の質量１ｋｇの物体に及ぼす引力は１ｋｇ f、１ｋｇ重と書かれる事もあるがこれは約９．８Nに当たる。
圧力は単位面積当たりの力である。［圧力］＝［力／面積］＝［N／ｍ^2］
これにも固有の名前が付いており、パスカルと呼ばれ，Ｐという記号を使う。１気圧は約１０１３ｈＰ (ヘクトパスカル) である。この書き方は紛らわしいから物理屋ならば１．０１３×１０^5 Ｐと書くだろう。血圧が１００という事は、１００mmHｇ (１００ミリメートル水銀柱と読む) の圧力があるという事だから、１．３３×１０^4 Ｐとなる。
エネルギーは仕事と同じ次元を持つ。
［エネルギー］＝［仕事］＝［力×力の方向に動いた距離］＝［ｋｇ · ｍ^2／ｓｅｃ^2］。
この次元の固有の名前はジュールと呼ばれ、記号はＪである。運動エネルギーはｍｖ^2／２と書ける事を知っていると、上の次元はすぐに書き下せる。
物体の回転運動に対する駆動力として、力のモーメント (トルク) という概念がある。この力のモーメントの次元も仕事の次元と同じである。仕事はスカラーである

が、トルクはベクトルである。

栄養学では、１ｃｃの水の温度を１度Ｃ上げるのに要するエネルギーを１カロリーと呼ぶ。１カロリーは約４．２Ｊである。成人が一日に必要なエネルギーはこの単位ではかると、非常に大きくなりすぎるのでこの１０００倍を単位として使う事がある。

仕事率は単位時間にした仕事と定義する。［仕事率］＝［仕事／時間］＝［Ｊ／ｓｅｃ］

これにはワットという名前が付けられていて、記号はWである。馬力という単位も見掛けるが、７４０－７５０Ｗの事であり、フランス語圏と英語圏で定義が異なる。　出力という言葉も仕事率という意味で使われる。成人の消費エネルギーを一日当たり２４００ kcal とすると、大体１００Wに当たる。

電荷は基本量と考える人もいる。この時は電流を組み立て単位という事にする。単位時間に通過した電荷が電流であるから、［電荷］＝［電流・時間］＝［A·sec］=[C]

この量をクーロンと名付け記号Ｃを使う。電子の電荷は -1.6×10^{-19}C である。不思議な事に、陽子の電荷量は符号を除いて、電子の電荷と非常に良い精度で一致している。人間の体内には正・負いくらの電荷があるか計算してみよ。

１Ｃの電荷を動かすのに１Ｊの仕事を必要とする電位差を１ボルト (V) と呼ぶ。

［電位差］＝［電圧］＝［仕事／電荷］＝［J／C］＝［V］

日本では家庭用の商用交流は、実効値が１００ボルト（瞬間最大電圧は約１４０ボルト）に設定されている。エネルギー輸送効率という観点からは２００Ｖにした方が良いが、事故時の危険率が上がる。

１ボルト (V) の電位差で１アンペア（A）の電流を通す物体の電気抵抗を１オーム（Ω）とよび、このとき物体中で１Wのエネルギーが（熱として）消費される（発生する)。［電気抵抗］＝［電圧／電流］＝［V／A］＝［Ω］

家庭用の商用交流で、１００Wの電気器具を使っているときは、１Aの電流が流れている。

問 地球は１気圧、摂氏２０度に換算して、厚さ７ｋｍの空気で一様に覆われていると仮定する。半径１００ｋｍ、９５０ｈＰという台風が発生したとする。この台風で地上ではどの程度の質量の空気が動いただろうか？この空気の量は地球の質量のどれくらいの割合にあたるか？大体の、桁を評価してみよ。

２）運動の記述方法

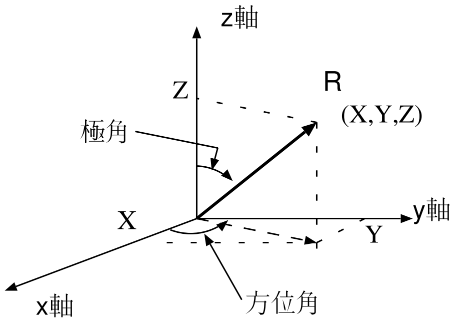
位置の記述

位置は基準となる点を一つ取り、基準点からの方向と距離で指定するのが一般的である。基準点として、何か唯一の点をとる絶対的位置の表示方法と、基準点をその時々で適宜選択する相対的表示がある。相対的表示も原点を設定した後は、これに拘ることもある。原点を固定し、方向のかわりに座標値の組で位置を表現する方法もよく使用される。

原点を適当に設定し、３本の座標軸をお互いに直交するように描き、座標軸には等間隔に目盛を付ける。この座標を発想者の名前をとりデカルト座標と呼ぶ。３本の座標軸にｘ、ｙ、ｚと名前を付け、ｘ軸、ｙ軸、ｚ軸と呼ぶ。ｘ、ｙ、ｚの順番は、右手系をと

る。右手系の定義は、右手の親指、人指し指及び中指をお互いに直交させた時、この順にｘ、ｙ、ｚと名前を付ける。この並び方と同等な、すなわち適当に座標系を回転したり、原点を移動するとこの右手のｘ、ｙ、ｚ軸に重なる様な座標系を右手系と呼ぶ。この右手系とは独立な座標の取り方として、左手系がある。右手系と左手系は、鏡に映した関係にあり、平衡移動と回転だけでは絶対に重なり合わない。右手系から左手系へ移すような座標変換をパリティー変換と呼ぶ。右手系を鏡に映すと、左手系になる。

ｘ軸とｙ軸が同時に含まれる面が１枚ある。この平面をｘｙ面と呼ぶ。ｙｚ面、ｚｘ面も同様に定義される。



デカルト座標系に１点Ｒをとってくる。この点Ｒからｙｚ面迄の距離をＸ、ｚｘ面迄の距離をＹ、ｘｙ面迄の距離をＺとする。３つの数字（Ｘ、Ｙ、Ｚ）を点Ｒの座標と呼ぶ。原点Ｏの座標は（０、０、０）である。原点Ｏと点Ｒの距離Ｌはピタゴラスの定理から簡単に計算できる。

$$L = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

この３つの数字（Ｘ、Ｙ、Ｚ）を並べたものを（３次元）ベクトルとも呼ぶ。この数字の並びの第１番目の数字を第１成分（ｘ成分）と呼ぶ。ｙ、ｚ成分に対しても同様。成分をここでは横に並べて書いたが、縦に書くのが主流である。縦に並べるか、横に並べるかを、ここでは区別しない。(区別する流儀もある。) このベクトルという概念を位置その他の物理量の記述に利用する。ベクトルを普通の数から区別するために、文字の上に矢印を付けたり、太い文字を使う時もある。２次元の面内での運動を記述するならば、成分が二つだけのベクトルを用いる。

ベクトルの和や差は各成分の和や差を成分とするベクトルで定義する。二つのベクトルを $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$、$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とすると $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ である。ベクトルの定数（ｃとする）倍は、各成分をｃ倍したものであるとする。$c\vec{a} = (ca_x, ca_y, ca_z)$。数ｃは実数であるとしておく。従って、差とは－１倍してから和を作る事である。ベクトルの和や定数倍という概念を使うと、以下の様に全てのベクトルを、基本単位ベクトルと数 (スカラー) との積で表現出来る。

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \times (1, 0, 0) + a_y \times (0, 1, 0) + a_z \times (0, 0, 1) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

ここで、$\vec{e}_x \equiv (1, 0, 0)$,　$\vec{e}_y \equiv (0, 1, 0)$,　$\vec{e}_z \equiv (0, 0, 1)$ を x,y,z 方向の基本単位ベクトルと呼ぶ。ベクトルの定数倍という概念とベクトルの長さという概念を使うと、任意のベクトルは長さ１のベクトル (単位ベクトル) にその長さ (大きさ) を掛けたものであるとも言える。

二つのベクトルの積の定義にはスカラー積とベクトル積の２種類がある。

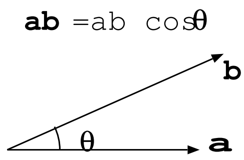
スカラー積とベクトル積

二つのベクトルの成分毎の積和をスカラー積と定義する。スカラー積である事を明示するために、二つのベクトルの真中に点を打つ。$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$。右辺を見れば明らかな様に、結果は一つの数字（スカラーと呼ぶ）である。二つのベクトルとして、ベクトル $\vec{a}$ を２回使い、先のピタゴラスの定理を思い出すと、ベクトル $\vec{a}$ の長さの２乗が計算できる。

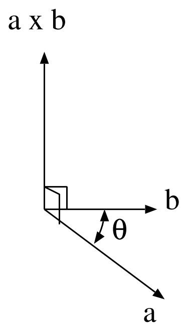
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$$

ベクトル $\vec{a}$ の長さを文字 ａ で表はした。

二つのベクトルの大きさ（長さ）を ａ、ｂ とし、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度を θ とすると $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$ とも書ける。二つのベクトルが直交するときには結果は０であり、平行ならば最大値ａｂ、反平行であると－ａｂになる。



スカラー積



ベクトル積

ベクトルａ、ｂの先端同志を繋いでできるベクトルを $\vec{c}$ とすると

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

とかける（向きにより負号が付くが)。この式を２乗する（自分自身とのスカラー積 $\vec{c}\cdot\vec{c}$ を作る）と

$$\vec{c}^2 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

この式は余弦定理そのものである。

例えば、仕事Wは物体に働く力 $\vec{F}$ と力の方向に動いた距離との積で定義されるから、一定の力 $\vec{F}$ が作用した結果、物体がうごいたとし、始点と終点の位置ベクトルを $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ とすると、この力Ｆがした仕事Wはスカラー積を用いて、次式で与えられる。

$$W = \vec{F}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

問 落差１００ｍのダムから落ちた水は、地球がその引力で水を１００ｍ動かしたと考えられる。この時１ m^3 の水に対して、地球のした仕事はいかほどか？もしこの仕事が全部水の温度上昇に使われたとすると、水の温度は何度上がるか？

この水が、１度の傾斜の川を１ｋｍ下る場合は上と同じ考えでは、何度水温が上がるか？

ベクトル積は次の様にして定義される。

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

この定義は覚え難いがベクトル積 $\vec{d}$ のｘ成分はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のｙ成分とｚ成分の積を反対称に並べたものと覚えるとよい。ベクトル積の結果は新しいベクトルであり、大きさはベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{b}$ の作る平行４辺形の面積に等しい。ベクトル $\vec{d}$ の向きは右ねじを押し込むとき、ベクトル $\vec{a}$ から $\vec{b}$ の方に回すとするとこの右ねじの進む方向である。ベクトル $\vec{d}$ の大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行ならば０であり、直交する時に最大である。

問 基本単位ベクトルの相互間のベクトル積について、以下の関係式を確認せよ。

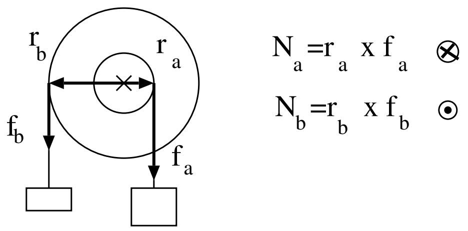
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

問 $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z, \vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$ とベクトルを成分に分け、上の問の結果を使い、ベクトル積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を評価し、ベクトル積の定義を確認せよ。

問 ベクトル ａ，ｂ が与えられた時、ｘ軸をベクトル ａ に平行にとり、ｙ軸をベクトル ｂ がｘｙ面内に来るように選び、$\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさが、ベクトル ａ と ｂ が作る平行四辺形の面積に等しい事を示せ。
ヒント ベクトル ｂ をベクトル ａ に平行な成分と垂直な成分に分けてみよ。

原点とは別の点、位置 $\vec{r}$ に力 $\vec{f}$ が作用している時、$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f}$ で定義されるベクトル $\vec{N}$ を原点のまわりの力のモーメント、力の能率、曲げモーメント、トルク等の名前で呼ばれる。



図では、二つの滑車が共通の回転軸に固定されているとする。右の負荷に対するモーメントが大きければ、図で時計方向に滑車は回りだす。この時の回転方向により、右ネジは紙面にもぐり込む方向に進む。このネジの進む方向が、位置ベクトル $\vec{r}_a$ と 力 $\vec{f}_a$ のベクトル積の向きである。図の丸の中に点がある記号は向きを表現し、自分に向かって飛んでくる矢の方向と同じである。逆に、丸に×印は自分から飛んで行く矢羽根が見える向きを示している。図で $\vec{N}_a$ と $\vec{N}_b$ との大きさの大小で回転方向が変化する事に気付けば、ベクトル積の言われも了解しやすいと思う。竿秤という重さを測る道具を知っているだろう。支点の両側の力の能率が吊あう位置を調べて、標準の重さの何倍かを知る事ができる。

これらの、支点から見た作用点までの位置ベクトルと力ベクトルとのベクトル積を作ると、このベクトル積が回転軸と一致する事が分かる。ベクトル積は回転と密接に関係を付ける事が出来る。

手で本を持ち上げる時、肘の関節から本を持つ指へ向かうベクトルが位置ベクトル $\vec{r}$ に対応し、本を引っ張る重力が力 $\vec{F}$ に対応する。この重力のモーメントに対抗して、腕の筋肉と肘のけんが、(とう骨と尺骨) を引き上げる。肘からけんまでの距離は短いので、腕には大きな力が必要であり、関節には大きな破壊力がかかる。この破壊力を直接骨で支えると、骨は壊れてしまうから、軟骨をクッションとして間接的に支える工夫がされている。

ｘ、ｙ、ｚ軸の向きを全部変えると、(極性) ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ の符号はかわるが、ベクトル積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は符号を変えないという変った性質を持つ。このような性質を持つベクトルは軸性ベクトルと呼ばれる。

３つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ が作る６面体の体積Ｖは $V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ と書ける。この式は、$\vec{a}\to\vec{b}$、$\vec{b}\to\vec{c}$、$\vec{c}\to\vec{a}$ と $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ をこの順番に入れ換えても変らない。

例えば方解石の結晶の体積は、３個の稜に対応するベクトルと、この関係式を利用して計算出来る。

問　次の恒等式を確認せよ。

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

これらの関係式は後で、角運動量のところで利用する。特に、後半の式で二つのベクトルを同一で、長さが１のベクトル $\vec{e}$ に等しいと置くことにより、次式を導け。

$$\vec{a} = \vec{e}(\vec{a}\cdot\vec{e}) - \vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{a})$$

この式により、任意のベクトル $\vec{a}$ を 単位ベクトル $\vec{e}$ に平行な成分と直交する成分の和（差）として表現できる。最後の問から、ベクトル積は二つのベクトルの直交成分の間の関係を抜きだし、スカラー積は平行成分の間の関係を議論するのに適している事が分かる。

ベクトルの微分

今後、ベクトルの微分が多く登場する。デカルト座標でのベクトルの微分とは、その成分を微分して作られるベクトルであるとする。例えば、位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ を時刻 t で微分すると、$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ で定義される速度ベクトルになる。ベクトル $\vec{r}$ を $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ の様に基本単位ベクトルと変数との積和で書くと、ベクトル $\vec{r}$ を微分したいならば、x、y、z を t で微分すれば良いことが了解できる。しかしデカルト座標以外のベクトルだと、展開に使用した単位ベクトルの方も (時間的に) 一定ではないので、こちらも微分の対象となる。

ベクトルのスカラー積やベクトル積の微分に対しては、以下の関係式が成立する。

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

これらの関係は、積の成分を書いてみるとすぐに納得出来るだろう。

注　ここでは、座標系を一つ定義し、この座標系を基準としてベクトルを定義したが、ベクトルそのものは座標系から離れても考える事が出来る。

運動の記述

等速直線運動

時刻をｔとし、2 個の定ベクトル $\vec{d},\vec{v}$ を用いて位置 $\vec{r}(t)$ が次の関係で表せるとする。

$$\vec{r}(t) = \vec{d} + \vec{v}\,t$$

$\vec{r}(t=0) = \vec{d}$ であるから、この $\vec{r}$ は時刻ｔ＝０に位置 $\vec{d}$ を出発し一定速度 $\vec{v}$ で動いている点の軌跡を記述している事が分かる。上の式を時刻ｔで微分すると

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}$$

であり、位置座標を微分すると速度になる事が分かる。この関係式をもう一度時間で微分すると

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{0}$$

右辺の $\vec{0}$ はベクトルとしての０（ゼロベクトル）である。０ベクトルは、その成分が全て０であるベクトルの事である。

速度 $\vec{v}$=一定という式を時刻 $t = 0$ から t まで積分すると最初の式に戻る。加速度＝０という式から出発して２回時刻で積分しても、積分定数を適当に調節するだけで実質的に同じ結論になる。

等加速度運動

加速度は位置座標の２階微分として定義されているので、加速度 $\vec{a}$ と位置ベクトル $\vec{r}(t)$ との間に以下の関係式が成立する。

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}$$

この関係式を２回積分すると、

$$\vec{r}(t) = \vec{a}t^2/2 + \vec{b}t + \vec{c}$$

ここで、$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は積分定数（ベクトル）であり、$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は時刻ｔ＝０での速度と位置という意味を持つ。地表付近の運動は、この式で近似される場合が非常に多い。この場合の物体の加速度を重力加速度と呼び通常ｇという記号が使われ、ｇの値は９．８ｍ／秒 ^{2} 程度である。

初速度ｖで地表から鉛直に打ち上げられた物体のｔ秒後の高さ h(t) は、

$$h(t) = v\,t - \frac{gt^2}{2}$$

と表せる事は高校物理で習っただろう。

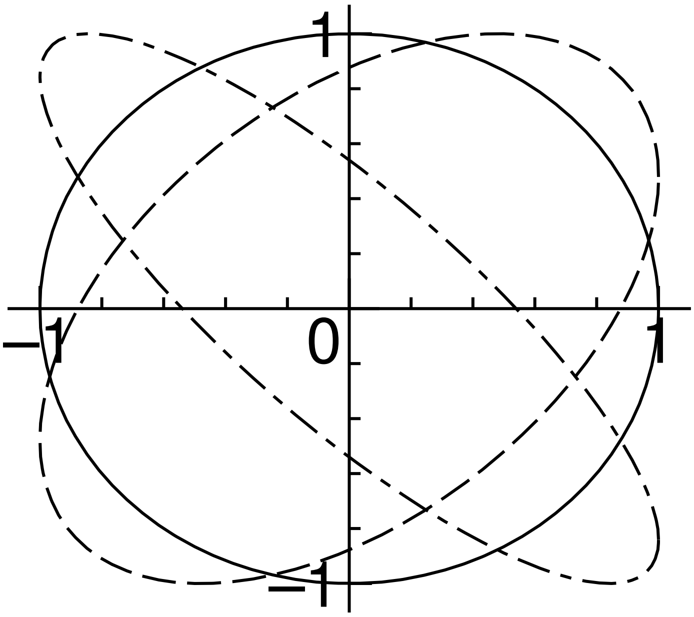
楕円軌道

二つの直交する単位ベクトルを $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ とする。$a, b, \omega_x, \omega_y, \phi_x, \phi_y$ を定数とし、位置ベクト

ル $\vec{r}$ が時刻 t と共に以下の様に変化すると仮定する。

$$\vec{r}(t) = a\ \cos(\omega_x t + \phi_x)\,\vec{e}_x + b\ \sin(\omega_y t + \phi_y)\,\vec{e}_y$$

この一般式で記述される図形をリサージュの図形と呼ばれている。特に $a = b,\ \omega_x = \omega_y$ という条件がなりたつならば、この式は楕円を与える。



この図では、$a = b = 1,\ \phi_x = 0$ と固定し、$\phi_y = -1, 0, 0.5rad$ と変えている。位相差 $(\phi_x - \phi_y)$ が 0 と異なると、楕円の長軸や短軸は座標軸に対して傾く。この軌跡に対する回転軸を記述するベクトルは $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ の方向を向いている事に注意。

この楕円軌道の中心は原点であるが、中心を原点からベクトル $\vec{c}$ の位置にずらすには、一定のベクトル $\vec{c}$ を加えれば良い。螺旋軌道を描かせるには、このベクトル $\vec{c}$ を一定ベクトルでなく、上の例で与えた等速直線運動を $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ の方向にさせれば良い。

このように、複雑な運動を簡単な運動の和で書き表す事を、**重ね合わせ**と呼ぶ。複雑な現象を簡単な部分に分割して理解、記述することは科学の基本的な態度である。

角速度 ω_x と ω_y の比が有理数ならば、軌道は閉じるが無理数ならば軌道は閉じない。

リサージュの図形の式で角速度 ω は共通と考えると、軌道は一般的に楕円を描くが、この楕円の式を時刻 t で微分すると

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -a\,\omega\vec{e}_x \sin(\omega t + \phi_x) + b\,\omega\vec{e}_y \cos(\omega t + \phi_y)$$

もう一度微分すると

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -a\,\omega^2\vec{e}_x \cos(\omega t + \phi_x) - b\,\omega^2\vec{e}_y \sin(\omega t + \phi_y) = -\omega^2\vec{r}(t)$$

位置ベクトル（座標）を時刻で 2 階微分した物理量を加速度と呼ぶから、上の関係から、（楕）円運動をする物体の加速度は現在位置 $\vec{r}(t)$ に比例し、符号が反対である。太陽の回りを周回する地球の運動を後で考える。

問　$a = b, \phi_x = \phi_y$ を仮定すると、ここで与えた軌道は円軌道であるが、このときベクトル $\vec{r}(t)$ と $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ の内積を作ることにより、円運動に対しては位置と速度ベクトルが直交する事を示せ。速度と加速度の組み合せならばどうなるか？

円軌道を描く場合には、粒子の現在位置と加速度との間に、この問を解くと分かるように特別の関係がある。

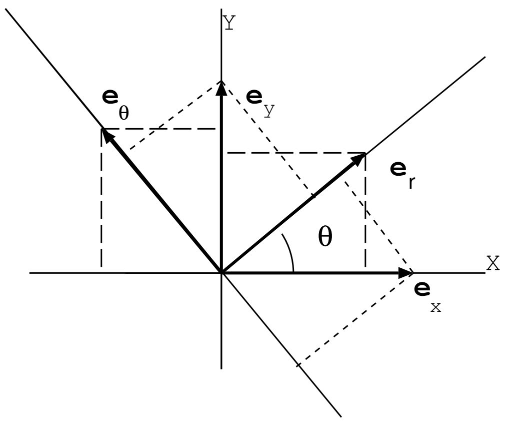
２次元の極座標、速度と加速度

質点の運動を記述するのに、座標系を使用する必要がある。一般的な傾向としてデカルト座標を使うが、問題に依っては極座標を使うのが便利である。先ず、２次元の極座標を定義する。質点の位置ベクトル $\vec{r}$ をデカルト座標では (x, y) と書く。ここで、次の関係で極座標 (r, θ) を定義する。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

ｒはベクトル $\vec{r}$ の長さであり、θ はｘ軸とベクトル $\vec{r}$ のなす角度である。ｘ＝０ならば上の式では θ は定義出来ないが、ｙ＞０ならばπ／２、ｙ＜０ならば $3\pi/2$ とする。ｙ＜０の時、$\theta = -\pi/2$ と定義する人も多い。こうしてもｒ＝０ならば θ は不定である。

デカルト座標のｘ、ｙ軸の単位ベクトル $\vec{e}_x$,　$\vec{e}_y$ とし、極座標の単位ベクトルを $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ とする。$\vec{e}_r$ は原点から $\vec{r}$ に向う長さ１のベクトルであり、$\vec{e}_\theta$ は θ の増す向きを向いた長さ１で、$\vec{r}$ に直交するベクトルである。



このデカルト座標と極座標の２組みの単位ベクトルの間には次の関係がある。

$$\left(\begin{array}{l} \vec{e}_r = \vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta \\ \vec{e}_\theta = -\vec{e}_x\sin\theta + \vec{e}_y\cos\theta \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} \vec{e}_x = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta \\ \vec{e}_y = \vec{e}_r\sin\theta + \vec{e}_\theta\cos\theta \end{array}\right.$$

点 (ｘ、ｙ) が動いていると、即ち、ｘとｙが時間の関数だとすると、ｒとθも時間の関数である。ここで、$\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ は時間に依存しないが、$\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$ は時間に依存する。時間微分は、

$$\dot{\vec{e}}_r \equiv \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \omega\{-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y\} = \omega\vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta \equiv \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \omega\left(-\cos\theta\vec{e}_x - \sin\theta\vec{e}_y\right) = -\omega\vec{e}_r$$

これらの式で、$\omega \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$ を角速度と呼ぶ。単位ベクトルは長さが変らないから、微分すると自分に直交したベクトルが登場する。

問 ベクトルの長さが一定という条件、$\vec{a}\cdot\vec{a}$ ＝一定という式を時間で微分し、ベクトル $\vec{a}$ とその時間微分が直交していることを示せ。

円軌道の場合には、この条件が成り立っている。円軌道の時の位置と速度の関係を問うた問題を思い出せ！

速度ベクトル $\vec{v}$ を極座標で表すと、

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y = (r\vec{e}_r)' = r'\vec{e}_r + r(\vec{e}_r)' = r'\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\theta$$

第１項はベクトルの長さが変化すると速度が変る事を示し、第２項は位置ベクトルの向きが変化する時に、回転運動に伴う、０でない寄与を生じる。

加速度 $\vec{a}$ は速度の時間微分であるから

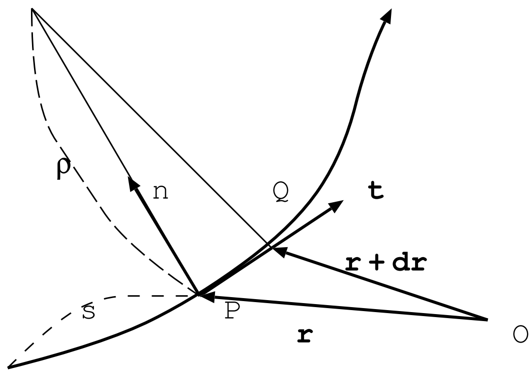
$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_\theta$$

加速度を極座標で表現する上の式で、動径方向第２項は遠心力に関係する。角速度の２乗に比例しているから必ず負であり、$\vec{e}_r$ とは逆の方向 (回転の中心方向) を向いている。

角度方向の成分はｒと角度方向の速度 $v_\theta = r\theta'$ の積 (rv_θ) を時間微分している。この表現は分かりにくいかも知れないが、実際に微分を実行すると正しい事が確認出来る。後で、この項は角運動量に関係している事がわかる。ｒで割っているのも、覚えておくと後で力のモーメントが登場したときに理解が早いだろう。ｒを一定にして角度を微小量 $d\theta$ だけ変化させたとき、変化量は $r\,d\theta$ となり、ｒに比例して大きくなり極端な場合には、微小量と言えなくなるからであると了解しておいても良い。

接線、法線と曲率半径

質点が平面内を運動し、ある曲線を描くとする。フィギュアースケーターが氷上に描く軌跡を想定してもらいたい。その軌跡は一般に複数の点を滑らかに繋いだものだ。この軌跡を特徴付けるパラメータとしての接線、法線と曲率半径を導入する。先ず軌跡のうえに一点を固定し出発点とする。この軌跡の上に２点Ｐ、Ｑをとり、出発点からの距離をｓ、ｓ＋ｄｓとする。ｄｓは１次の微小量である。原点Ｏから、ＰとＱへの位置ベクトルを $\vec{r}$,　$\vec{r} + d\vec{r}$ とする。



接線

ｄｓを無限小としたとき、ベクトル $d\vec{r}$ は接線の方向を向いていることは自明だろう。またベクトル $d\vec{r}$ の長さはｄｓに等しい事も明かであろう。ゆえに両者の比は、長さ１のベクトルになる。接線方向の単位ベクトル $\vec{t}$ を次式で定義する。

$$\vec{t} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}$$

法線

接線方向の単位ベクトル $\vec{t}$ は軌跡が直線ならば、ｓに依らず一定である。逆に、$\vec{t}$ がｓと共に変化するならば、軌跡は曲っているといえる。$\vec{t}$ がｓと共に変化する割合を、次の様に書く。

$$\frac{d\vec{t}}{ds} \equiv \kappa\vec{n} = \frac{\vec{n}}{\rho}$$

$\vec{t}$ の大きさは一定値１であるが、向きが変化していると微分しても０になるとは限らない。このｔベクトルを微分して作られたベクトルの向きをきめる単位ベクトル $\vec{n}$ を主法線ベクトル、κ を曲率、ρ を曲率半径と呼ぶ。半径は一般に正の量であるとするが、曲率 κ は内向きに曲がる時と外向きに曲がる時を区別するならば正にも負にもなる量であるから、上の定義式の後半は符号に要注意である。点Ｐで軌跡に内接する円の半径が曲率半径 ρ になっている事を後で確認する。法線ベクトルは、この内接円の中心を向いている。曲率半径が大きくなるほど、軌跡の曲り方はゆるやかとなる。曲率半径が無限大の曲線の事を直線と呼ぶと、直線と曲線を同時に扱える。この曲率半径の逆数で定義される曲率 κ は、絶対値が大きければ大きい程急カーブを描いた軌跡になる。高速道路や鉄道線路でカーブが急な場合、道路や線路の傍らの標識にＲ＝１００ｍ等の表示を見掛ける事がある。この表示は多分曲率半径を示しているのだろう。曲率半径が小さいと、遠心力が大きくなるので運転に慎重さが要求される。

$\vec{t}$ と $\vec{n}$ をこれまでに一番慣れているデカルト座標で書くと、理解しやすくなるかも知れない。点ＰとＱの座標を（ｘ、ｙ）、（ｘ＋ｄｘ、ｙ＋ｄｙ）とすると $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$、$\vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$

この式をもう一度ｓで微分して絶対値をとると、曲率半径の逆数になる。

$$\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} = \frac{1}{\rho}$$

原点を中心とする半径Ｒの円に対して、どのように表現されるかも具体的に確認しておこう。この円の方程式を以下の様に書こう。

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

軌道の長さｓは正のｘ軸との交点から測ると $s = R\theta$ と表せるから、独立変数は角度 θ とすればよい。接線ベクトルは、

$$\vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{ds} = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

確かに、右辺は長さ１のベクトルであり、ベクトル $\vec{r} = r(\cos\theta, \sin\theta)$ と直交している。

もう一度微分すると

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{n}/\rho = \left(\frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = -(\cos\theta, \sin\theta)/R$$

この式の最右辺から法線ベクトルは $\vec{r}$ の逆向きであり、最左辺と比較すると、曲率半径 ρ は円の半径Ｒに等しい。曲率が２階微分に関係した量である事も明らかだろう。

３次元空間の一般的な曲線では、もう一つの法線（陪法線）と曲線の捻れの割合を表すパラメータが登場するが、ここでは省略する。複雑な軌道を描くジェットコースターや東京から筑波センターへのバスに乗ったら、常磐道と東北道の分岐点付近の高速道路の描く立体曲線を眺めながら、曲線の振舞いと記述方法に思いを巡らしてもらいたい。

問 地球は１日に１回の割合で自転していて、赤道半径は６３７８ｋｍとする。赤道付近での自転速度はいかほどか？ マッハ１で飛んでいるジェット機の速度と比較してみよ。

地球は、１年で太陽の回りを１回まわっているとする (公転)。この公転運動の軌道半径を 1.5×10^8 ｋｍとすると、公転運動の速度はいくらか？

地球の自転や公転に関係した遠心力を計算してみよ。赤道上と、北 (南) 極とで自転に起因する遠心力はどれくらい異なるか？

公転に起因する遠心力の向きを考える。昼には太陽は、頭の上にあるから、遠心力は下を向いている。夜になると、太陽は地球の反対側を照らしているので、遠心力は頭の上の方を向いているに違いない。では、地球の見掛けの重力は夜と昼とで、どれくらい異なるのだろうか？この太陽の地球の見掛けの引力に対する影響は非常に小さい。

３）力と運動量

力は経験的には良く知られた概念であり、物体の運動状態を変化させる原因であると認識されている。又、力はベクトルである。本来は落下すべき物体に力を作用させて静止させることもできる。この時は力が働いているのに運動状態が変化していないではないかという反論が来そうであるが、この場合には地球からの引力 (F_g) と物体を支える力 (F_s) とは大きさが同じで向きが逆向きであり、結果的に両者が相殺している $(F_g + F_s = 0)$ と考えておく。

Newton は、運動を記述するパラメータとして**運動量**という概念をつくり、物体に力が作用するとその物体の運動量が変化すると考えた。

力が作用する → 物体の運動量が変化する

運動の状態は、物体の質量が大きければ大きい程変化させにくく、質量が小さければ小さい程変化させやすいから、運動量は質量に比例すると考えられる。この様な観点からは、質量は運動状態を変化させようとする原因 (力) に対する抵抗と考えられるし、現状を維持しようとする慣性の大きさと考えてもよい。こうして、運動状態の変化から定義される質量は慣性質量とも呼ばれる。

運動の状態は、速度が大きければ大きい程変化させにくく、小さければ簡単に変化させ得る。運動量は速度にも比例すると考えるのが自然だろう。これらの判断から運動量 $\vec{p}$ を質量 m と速度 $\vec{v}$ との積として定義する。

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

この式の右辺に登場する質量はただの数 (スカラー)、速度はベクトルだから右辺そのものはベクトルである。したがって運動量もベクトルである。

運動を記述する量 (運動量) は質量や速度の単調増加関数であることは常識的に納得できるだろうが、関数形までもがすぐに納得出来るわけでは無いかも知れない。単一の物体の運動と、この運動物体を仮想的に二つに分けた後でゆるく繋いだ状態での運動と比較して見ると, 両者は実質的に同じでなければならないだろう。これから質量に比例すると結論つけられる。このように、実際には実験していないが、頭の中で実験しながら考える手法を思考実験とよぶ。次に速度依存性について。mv がいいのか mv^2 の方が妥当なのかは、歴史的に混乱があった。後者 mv^2 は後で見るように、運動エネルギーの 2 倍という意味がつけられてこの議論は収束した。

こうしてＮｅｗｔｏｎの運動方程式は、物体に働く力 $\vec{F}$ とその運動量 $\vec{p}$ の時間的な変化率との関係として以下のように与えられる。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

この左右両辺共にベクトルである。

この式の様に、**変化率＝ (比例係数)**$\times$**(変化の原因)** という式は、微分方程式と呼ばれている。微分方程式は運動の記述手法として発明され発展して来た。物理だけでなく、工学の分野でも現象の記述に微分方程式が使用される事は非常に多い。数学的知識としての微分や、この逆操作としての積分は現象を定量的に記述するのにどうしても必要である。簡単な公式は理科年表の後ろの方にまとめられている。

質量が一定の時、この運動方程式は以下のように加速度 $\vec{a}$ を用いて書かれることの方が多い。

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

数式を書くときに、原因を右辺に、結果を左辺に書くと言う習慣を認めると、$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ という式は、運動方程式と呼べるが、$\vec{F} = m\vec{a}$ という書き方だと、力を定義している様に見える。物体 (の重心) が動かない時は、力が全然働いていないか、又は複数の力が働いているが全体として相殺しているかのどちらかである。物体が静止している状態を考えるのが静力学である。物体に一定の加速度が働くとき、移動距離を時間の関数としてグラ

フに描くと放物線になる。これが放物線の定義だ。地球の表面を平面で近似でき、空気の抵抗が無視出来るならば、物体が落下する時の運動は一定加速度で精度良く近似できる。

ここで考えた運動方程式は、大きさを無視できる物体に対して適用でき、質点力学と呼ばれている。例えば、惑星の運行に適用され成果をあげた。大きさを無視できない物体（剛体）は重心運動以外に回転する事もあるので、この並進と回転の二つの自由度にたいする運動方程式に、Newton の運動方程式を書き換える必要がある。また力を加えると、変形してしまう物体は、重心が定義できない場合も多々あるので、もっと自由度を増やした考え方が必要である。

問　運動量 $\vec{p}$ を速度 $\vec{v}$ の関数だとすると、（$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$）と書くと、

$$\vec{p} = a\vec{v} + v^2\vec{b} + cv^2\vec{v} + v^4\vec{d}\cdots$$

と書ける。ところで、速度の ” 向き ” のみを変えたとき、” 運動量 ” も ” 向き ” のみが変化するべきだ。向きを変えるという事を式で書けば、$\vec{v}$ や $\vec{p}$ の符号を変える事である。この時、$\vec{b} = \vec{d} = 0$ であることを示せ。この様な思考実験から運動量は速度の奇関数である事が分かる。

特殊相対論では運動量 $\vec{p}$ と速度 $\vec{v}$ との間に以下の関係をおく。$\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 。この式の分母は v の偶関数であり、全体としては奇関数になっている 。

力積

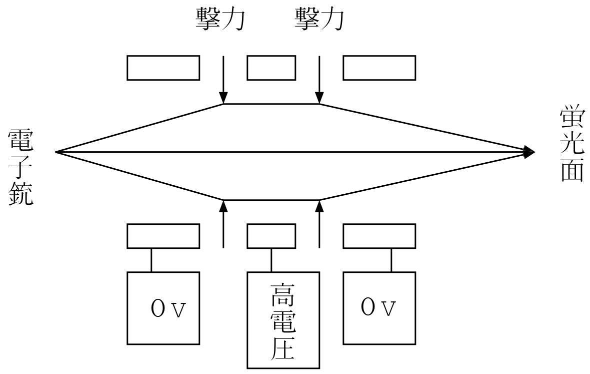
もう一度ニュートンの運動方程式を書こう。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

力が一定ならば、この運動方程式を積分するのは簡単である。積分する最初と最後の時刻を t_0, t_1 として

$$\vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = (t_1 - t_0)\vec{F}$$

この式の左辺は二つの時刻 t_0 から t_1 迄の経過時間の運動量の変化量を示す。右辺は、この時間内に働いた力を積分したもので、力積と名付ける。人間生活での時間と比較して非常に短い時間に大きな力（撃力）が加わって運動状態を変えるような現象では、力の時間的な変化を追跡することは困難だが、その時でも積分量には意味が付けられるので、力積を運動量の変化量として使う場合がある。電子やイオンのビームを収束させる時には、このような概念が使われる。例えば、テレビジョンのブラウン管のソケット近くを見てみよう。そこには、電子源としてのフィラメントとフィラメントから放出された熱電子を加速する加速電極以外に複数の電子レンズと呼ばれる円筒電極がしつらえてある。これらの円筒電極の中心軸を通過する電子は加速又は減速されるだけだが中心軸からはずれた位置を通過すると、中心軸の方向に軸からの距離に比例して大きくなるような、力積を与えるように設計されている。



中心軸からはずれたところを通る電子ほど沢山の復元力を受けるならば、高電圧をうまく調節すると、電子はブラウン管の蛍光面で焦点を結ぶ。このような機構を電子レンズと呼ぶ。ＴＶやオシロスコープの focus やシャープネス等のつまみがこの機構に対応する。

運動量の増加（減少）量は力積に比例するが、これは力とその力が作用する時間の積である。この作用時間が関係した例として、高速のイオンが物質中を通過する場合を考える。物質中の電子はイオンが近くに来たときのみイオンから大きな力を受ける。力を受けた時のみ電子の状態が変化し、原子は励起されたりイオン化される。力を受ける時間は入ってくる高速イオンのエネルギーが高いほど短い。従って高エネルギーのイオンが物質に入射すると、最初は非常に短い時間で電子のそばを通過するので、電子に与えるエネルギーは小さく、停止寸前には速度が遅いので、力が働く時間は長くなり、多くの運動エネルギーを電子に与える。力が作用する時間は速度に反比例するから、入射イオンのエネルギーに反比例して電子がもらうエネルギーは大きくなる。勿論、入射イオンの速度が、このイオンの束縛状態電子の速度よりも早いと言う条件付での話である。この事実を利用し、陽子線や重粒子線を癌の治療に用いる事が出来る。人体中に癌が発生しているとする。体外から高速のイオンを癌めがけて照射し、エネルギーを調節して癌細胞の位置でイオンが停止するようにしておくと、停止直前に大きなエネルギーを電子に与えるので癌細胞が他の体細胞よりも大きな被害を被る。筑波大学でも癌治療用の陽子シンクロトロンを設置している。

4) 質点の力学

例１　力が働かない時：　力＝０をニュートンの運動方程式に代入すると加速度＝０という結論になる。これは、運動の記述の最初の例と同じだから、等速直線運動になる。

我々は、議論の出発点としてデカルト座標の存在を認めていたから、加速度が０ならば直線運動となるのは当然の結論であるが、ニュートンはこの事実を力学建設の第１原理とした。但し、ニュートンは ” 加速度 ” ではなく ” 力 ” と言っている。力と加速度を等価だとしているところが、ニュートンの目の付け処である。ついでに、ニュートンの運動方程式というのは、第２原理である。

例２　一定の力が働くとき：　加速度が一定であるから、等加速度運動になる。

例３　原点からの距離に比例する力が働くときの運動。運動の方向をｘ軸にとり、質

量をｍ、力の比例係数をｋとすると、運動方程式は、

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = kx(t) \quad \text{又は} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \omega^2 x(t) \quad \text{但し } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

この式を書き下す時にはｋ＞０を仮定している。この微分方程式の一般解は

$$x(t) = A\exp(\omega t) + B\exp(-\omega t)$$

と書ける。ここでＡとＢは定数であり、例えばｔ＝０での x、と $\frac{dx(t)}{dt}$ の値をきめれば、以後の（ｔ＞０での）x の値は完全に決定される。時間の経過と共に、最初の項はいくらでも大きくなり、第２項はいくらでも絶対値が小さくなる。このような変化を指数関数的な変化 (増加、または減少) と呼ぶ。マルサスが人口の増加を幾何級数的と言っているのがこれと同じ増加傾向である。この様な質点の運動は例えば、垂直断面が直角双曲線の電磁石や電極で囲まれた領域を運動するイオンの軌跡として近似的に実現される。（Ｑレンズとして知られている）

$k = 0(\omega = 0)$ の時は、等速直線運動になる。

ｋ＜０の時は、運動方程式は以下のように符号を外に出しておく。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \quad \text{今度は } \omega^2 = -\frac{k}{m} \; > 0$$

加速度が現在位置に比例し、その比例定数が負という例は、楕円軌道のところで登場した。

この微分方程式の一般解は、以下の様に書かれる。

$$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) = E\cos(\omega t - \delta)$$

ここで、Ｃ、Ｄ、Ｅ、δ は定数であり、以下の関係にある。

$$C = E\cos\delta, \qquad D = E\sin\delta$$

最後の式を $E\cos\omega(t - \delta/\omega)$ と書くことにより、上の一般解をｓｉｎとｃｏｓの重ね合わせで書くことは、時刻の原点を δ/ω だけずらす事と同等で有ることをが分かる。　ｋ＜０の場合は、即ち原点に引力の源があるときは、質点の運動はいくら時間が経過しても運動領域は原点からの距離が $\sqrt{C^2 + D^2} = E$ の範囲に限定される。また、ｓｉｎやｃｏｓは周期２π の周期関数だから、位相 ωt 又は $\omega t - \delta$ が２π だけ変化する時間 $T = 2\pi/\omega$ 毎に運動は元に戻り、単振動と呼ばれる。単振動の例としては、先に挙げたイオンの電・磁場 (Q レンズ) 中の運動で、電・磁場の符号（極性）を変えると実現される。

フックの法則が成立するバネにおもりを吊した時の振動や、振子時計の振子の運動も振幅が小さい時には単振動で近似できる。分子の励起状態の自由度としても、振動は非常に大切である。固体の温度は固体を構成する原子や分子の振動の大きさで大体きまっている。

ここに登場したような２階微分方程式は、自由に決定できるパラメータが２個ある事が、数学的に示されている。１階の微分方程式ならば一つしか自由パラメータは存在し

ない。　この様な微分方程式だけでは決らないパラメータを決める条件を、初期条件とか境界条件と呼ぶ。今の例で、独立変数 ｔ は時刻だから ｔ＝０での条件を ‘初期’ 条件と呼ぶのは了解できよう。一般の微分方程式では ｔ は必ずしも時刻とは限らない。例えば絃の振動を記述する微分方程式を与えても、両端で絃が固定されているのか、自由端なのかで解 (振動) の様子は変る。この時には、微分方程式の解に含まれるパラメータをきめる条件には境界条件という言葉を使うのが妥当だ。

今の運動方程式の例で、初期条件がどのように定数Ｃ、Ｄを決めるかを例示しよう。初期条件をｔ＝０で、ｘ＝ａ、ｘ ’＝ｂであるとしよう。一般解にｔ＝０を代入し、このときの値をｘ＝ａとすると、Ｃ＝ａときまる。また、一般解を ｔ で微分し、その後 ｔ＝０を代入すると $x'(t=0) = D\omega$ であり、これがｂと等しいから、Ｄ＝ b/ω と決る。このように、運動方程式を与えてこれを解いたとしても、運動の様子は一意には決まらない。運動状態を一意に決定するためには、更に初期 (境界) 条件を与えないといけない。

エネルギー積分、位置エネルギーと運動エネルギー

例３の $k<0$ の場合の運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

の両辺に $\dfrac{dx(t)}{dt}$ を掛け、少し変形すると次式を得る。

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2\right\} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{kx(t)^2}{2}\right)$$

この式は、逆算すると簡単に確認できる。　ここで、

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}v^2, \quad V = \left(\frac{kx(t)^2}{2}\right) = \frac{k}{2}x^2$$

と置くと、次の様な見やすい関係式に書き換えられる。

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

ここで、質量と速度の２乗の積の半分で定義される物理量 Ｔ を運動エネルギーと名付ける。一方、Ｖ（ｘ）、即ち ｘ で微分し符号をかえると力（– ｋｘ）が導かれる量を、位置エネルギー（ポテンシャル）と呼ぶ。運動エネルギーと位置エネルギーの和は時間が経過しても変らないので、これを**エネルギー保存の法則**と呼ぶ。エネルギー保存の法則の一つの例であるというのが正しいが・・・。このポテンシャルの定義から分かるように、微分したら０になるような定数をポテンシャルに加えたものもやはりポテンシャルという意味を持っている。だから、ポテンシャルやエネルギーには定数を加えるという自由度がある。エネルギーの原点をどのように定義するかは、議論の過程ではっきりと定義しておかないといけない。ニュートン力学の範囲ではエネルギーは相対的な概念で有るが、特殊相対性理論を持ち出すと、速度には上限が登場するのでエネルギーのゼロ点にも意味があり、静止エネルギーという概念が登場する。

物理では、時間が経過してもある物理量の値が変らないとき、その物理量は保存されるとか、保存則が成立すると表現する。保存量が存在する事を積分が存在するともいう。

今の場合にはエネルギー積分が存在するという。

強制振動と共鳴

単振動する可能性のある物体を周期的にゆする問題の例として、以下の運動方程式を考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + f\sin(\Omega t)$$

ここで ω、Ω、f は定数であり、f は単位質量当たりの駆動力の最大値である。先の単振動の例では、$f = 0$ であり、２π／ωの周期で振動した。この振動を、固有振動とよぶ。f が０で無い時のこの方程式は、定数変化法を知っていれば、三角関数の微積分だけで一般解を書き下せるが計算が少し面倒だから、次の様に考える。解を $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ と二つに分けて書き、$x_1(t)$ は $f = 0$ の時の一般解だとしておく。

$$x_1(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

この x_1 の項は f や Ω を含まないから外部からの力には全然関係しない。逆に $x_2(t)$ は、外部からの駆動力に反応するように書かねばならないから、次の様に書いてみる。

$$x_2(t) = C\sin\Omega t$$

ここで、C は定数であり、微分方程式を満足するようにきめる。その結果、一般解は次式となる。

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t - \frac{f}{\Omega^2 - \omega^2}\sin\Omega t$$

x_2 の項は外部からの強制力と同じ振動数で振動するが、その振幅は固有振動数と外部からの強制力の振動数の差に関係している。特に、差 $\Omega^2 - \omega^2$ が小さくなると、振幅は極端に大きくなる。ここでは、摩擦による抵抗の効果を考慮していないので無限大にまで大きくなる。このように、固有振動数と外部からの強制力の振動数とが一致するときの運動を共振とか共鳴と呼ぶ。幾らか共振の例を拾ってみよう。

ラジオやテレビの選局つまみは、放送局から空中に発射される電波と同じ周波数の電波に共振するように、アンテナ付近の電子回路の固有周波数を調節している。共振すると、チューナー回路の電子振動の振幅が非常に大きくなる。

筑波センターの北の端に宇宙センターがある。ここに揺るぎ石という大きな岩が水の中に置いてある。この岩は重心の近くで支えられていて、固有振動数と同じ周波数でゆすると、数１０トンの岩も簡単に手で動かせる。

物質に色がついて見える理由は、物質中の電子はそれぞれ固有振動数を有し、白色光の内、固有振動数に近い振動数の光をよく跳ね返すから、跳ね返された光の振動数に対応した色がついて見える。又は、固有振動数の光だけ良く吸収するからその補色に見える。

電子レンジを加熱用に使用することがある。この電子レンジは水分を含まないものに対しては加熱効率が非常に悪い。電子レンジ内部では、水分を選択的に加熱している。

弦楽器や鍵盤楽器には、固有振動を励起しやすい構造につくってあり、外部から弦をひっかいたり叩いたりすると、固有振動が励起される。固有振動は１種類だけではなく、複数の固有振動が同時に励起されるために同じハ調のラの音を出しても、楽器により音色は異なる。

強制振動の例では、出発点とした運動方程式の右辺に外部からの強制力が登場するが、この強制力は時間に依存しないポテンシャルでは表現できない。従って、この例ではエネルギーは保存しない。外部のエネルギーから振動系にエネルギーが供給されているからである。共振は外部の駆動力からエネルギーを効率的に貰うが、貰いすぎて破壊にまで至る場合もある。地震時の建築物の倒壊の様に、時には大きな事故の原因となる。

もう一つ、解を見ての注意事項。共鳴項 x_2 の分母 $\Omega^2 - \omega^2$ は Ω を共鳴点付近で変化させると符号が変る。式だけを見ると当然だとして感激しないだろうが、振動の位相ががらりとかわる。A＝B＝0、f＝1として、ω を固定して、Ω を変えながらｘの振 動の様子をグラフに書いてみよ。押している時に手前へ来て、引いたらむこうへ行く天の邪鬼の様な振舞をする場合もある。慣性が有るために、駆動力に対して結果がワンテンポ遅れる現象は自然現象だけでなく、社会現象としてもよく観察される。海で鰯がよく捕れたり、秋刀魚が捕れなくなるという魚種交替のモデルとしてもこの遅延効果を考える人がいる。純抵抗に交流電流を流すと、電圧（外部から電子にかかる力）と電流（外力に駆動された電子の運動）とは同位相である。即ち、電圧が最大の時に電流も最大となる。しかし、回路にコイルやコンデンサーが入ると、電圧と電流が最大となる時刻は一致しない。この現象を、位相が進むとか位相が遅れると呼ぶ。コイルやコンデンサーにエネルギーが蓄えられている為、このエネルギーによる慣性も運動をきめる固有時間の決定に参加しているのが原因である。

ここでは、固有振動数と同じ周波数で力を加えると共振がおこるという事を示した。一般的な傾向として、外力の振動数が一つに決まっている事は少なく、整数倍の波の重ね合わせである事が多い。この場合には、基本波以外に複数の高調波も励起される。管楽器や弦楽器の音色が楽器に依るのはこのためである。外力の基本周波数が与えられた時、その整数倍の高調波を含むことは珍しい事では無いが、この逆に、固有振動数の２倍の周波数で力を加えても、共振が起こる場合がある。この例を挙げよ。分からなければ、公園へ行って、ブランコにでものりながら考えてみよ。（物理の教科書にはこの例としてメルデの実験というものがある）

万有引力の法則

質量がm及びMの二つの質点間には、引力が働きこの引力を万有引力と呼ぶ。万有引力は以下の特徴を有する。

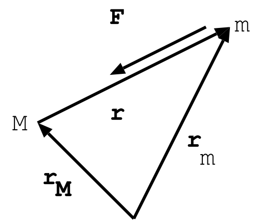
１）万有引力は質量に比例する。従って、引力の大きさはmとMの積に比例する。万有引力はどちらか一方のみが他方に及ぼしているという事は無い。お互い様である。

２）力の大きさは、質点間の距離の二乗に反比例する。

３）力の大きさは、物質の種類には依存しない

銅でも鉄でも水でも空気でさえも、質量が同じならば全く同じ引力が作用する。（だから地球には空気が有る！）。力を $\vec{F}$、二つの質点の位置ベクトルを $\vec{r}_m$ と $\vec{r}_M$、その差を $\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$ とすると

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



ここで、ｒはベクトル $\vec{r}$ の長さである。上の式で単位ベクトル $\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ は力の方向と向きを与えるためにくっつけてある。この力は質量Mの質点が質量mの質点に及ぼす力である。逆に質量mの質点が質量Mの質点に及ぼす引力は、位置ベクトルｒの定義を逆にしなければならない。この結果、力も向きだけが逆になる。

二つの物体間に力が働くとき、一方が他方に及ぼす力は、立場を逆転すると力の向きのみが逆転する事を一般的な原理と考えて、これを作用・反作用の原理と呼ぶ。例２や例３ではこの作用・反作用の原理が成立しないように見える。これは２質点間の力の問題を１質点の運動問題に還元した為だと考えておく (p 40-41 参照)。ここでは質量が与えられていて、万有引力を規定したが、物体に働く万有引力の大きさを利用して逆に質量を定義してもよい。万有引力を用いて定義した質量を重力質量と呼び、原理的には慣性質量とは異なる概念である。実験的には慣性質量と重力質量の比は物質に依存しないことが高い精度で確認されている。この比例係数を無次元の１となるように他のパラメータを決めている。このとき、万有引力定数ＧはＭＫＳ単位系では、$6.7 \times 10^{-11}[N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}]$ 程度の数値を有し、４桁の有効数字でしか決っていない。他の基本的な物理定数の有効数字の桁数と比較すると、万有引力定数は極端に精度が悪い物理定数である。このことは、ある種の条件下で比較すると、万有引力が非常に弱い為である。G の測定に関して２０００年に進歩があったが、まだ国際的には公認されていない。

問 水素原子を陽子と電子が電気的な引力と万有引力とで引き合っている体系だと考える。この時、電気的な引力と万有引力の大きさの比を評価せよ。

ニュートンの運動方程式と万有引力とを用いて、月は何故地球に落ちて来ないか？ハレー彗星が次に地球上で観測される時期等が示されて、ニュートン力学が広く信用されるようになった。潮の干満も定性的には簡単に説明できる。ここでは、惑星の軌道が楕円である等のケプラーの法則を導いてみる。

惑星の軌道

出発点となる運動方程式は以下の通りである。

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GmM\vec{r}}{r^3}$$

具体的にイメージするため、質量Ｍとｍの物体を太陽と地球としておこう。この運動方程式には３個の積分が存在することが知られている。これらをひとつずつ説明しな

がら、運動方程式を解いていこう。
１） エネルギー積分。　これは、微分して符号を変えたものが右辺の力になるもの（ポテンシャル）を見つければよい。以下のＶ（ｒ）がそのポテンシャルになっている。

$$V(r) = -\frac{GmM}{r}$$

このポテンシャルの式でr→ ∞ としてみると０になる。エネルギーの原点を無限遠方にとっている事になる。このポテンシャルをｘで微分すると力のｘ成分が導ける事は、以下のようにして確認できる。ポテンシャルの独立変数はｘ、ｙ、ｚの３個あるが、力のｘ成分を計算するときは、ｙとｚを固定してｘだけが少し変化したと考えて微分に持ち込まねばならない。ｙとｚを固定してｘだけで微分するという記号を $\frac{\partial}{\partial x}$ という普通の微分記号のｄを ∂ で置き換える事にする。

$$(\vec{F})_x = -\frac{\partial V(r)}{\partial x} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{x}{r}$$

他のｙ、ｚ成分についても同様。このポテンシャルを用いると、エネルギーの保存則は以下の形に書ける。運動エネルギーの式を少し書き換えて、

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\vec{v}^2$$

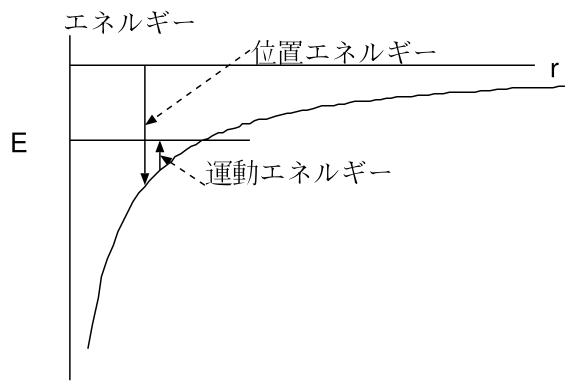
とすると、

$$T + V = E$$

E は初期条件できまる定数であり、全エネルギーと呼ばれる。運動エネルギーは必ず正又は０でなければならないから、次の不等式が成立する。

$$E \geq -\frac{GMm}{r}$$

Ｅが正なら正の数ｒ (運動領域) に対して何も制限はつかないが、Ｅが負だとｒはある値よりも大きな値はとれないので、運動領域が制限される。例えば、地球の全エネルギーＥが負であり、太陽の束縛を離れて無限のかなたに飛び去る事はない。



仕事の概念について

上では、ポテンシャルの式から無造作にエネルギー保存の式を導いたが、ここで仕事という概念を説明しておこう。単振動のところで、ポテンシャルを導いた様に、運動方程式の

両辺に速度ベクトル $\vec{v}$ をスカラー的に掛けると、左辺からは運動エネルギーの項が登場した。左辺の変形を丁寧に書くと、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

次に、運動方程式の右辺からポテンシャルエネルギーが登場するところを見ておこう。出発点は、力と速度の内積である。ここで力をポテンシャルの微分で書くと、少し見慣れない記号を使うが、微分の概念を知っていれば考え方は了解出来るだろう。

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

と形式的には書いた訳である。これで左右両辺が時間微分の形に書けたから、積分定数をＥとおくとエネルギー保存の式が導けた訳である。これからがこの部分の本題。左辺を $\vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$ と書き換えて、力 $\vec{F}$ と動いたベクトル ｒ の内積を動くのにかかった時間で割っているとみる。(この物理量を仕事率という)

エネルギー保存の式を時刻で微分してから、出発点から到達点まで時刻で積分すると、

$$\int_{出}^{到}\frac{d(T+V)}{dt}dt = 0。$$

書き換えると、

$$T_{到} - T_{出} = -\int_{出}^{到}Vdt = -\int_{出}^{到}\frac{\partial V}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_{出}^{到}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

この式の最初と最後だけを見比べると、運動エネルギーの到達点と出発点での差が、力を軌道に沿って積分したものと等しい事を示している。$T_{到} > T_{出}$ だと仮定して話をすると、この差の分だけ、力が仕事をして物体の運動エネルギーが増えたと考えられる。その意味で、右辺の積分を力がした仕事と呼ぶ。この右辺の積分で、被積分関数である力 F が一定であると仮定して積分の外に出すと、積分は出発点と到達点の位置ベクトルの差となる。この時には (力の運動方向成分)x(動いた距離) ＝ (仕事) という見慣れた式になる。

力がポテンシャルの微分で表現されている時には、仕事は出発点と到達点でのポテンシャルの差で表せるから、途中の軌道には依存しない。このような場合、即ち力がポテンシャルの微分で表せる場合、保存力と呼ぶ。保存力が働いているならば、エネルギーの保存則が成立する。

２）角運動量積分

次式で定義される量は時間的に変化せず、角運動量と呼ばれる。

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = \vec{r}\times\vec{p}$$

ここで、速度ベクトルを $\vec{v}$, 運動量ベクトルを $\vec{p}$ とした。速度ベクトルは位置ベクトル $\vec{r}$ を時刻で微分したものであり、運動量ベクトルは先に登場したように、質量と速度ベクトルの積である。実際、角運動量が時間に依存しないことは、$\vec{L}$ を時刻で微分し、$d\vec{v}/dt$ を運動方程式で置き換えて、$\vec{r}\times\vec{r} = 0$ を利用するとよい。同一ベクトルのベクトル積が０となることは、ベクトル積の定義を思い出すと自然に導ける。

質量mは定数であるから、角運動量が時間に依存しないという事は、次式で定義される面積速度の２倍が時間に依らない定数であることを意味する。

$$\vec{S} = \vec{r} \times \vec{v}$$

右辺がベクトル $\vec{r}$ と $\vec{v}$ の作る平行四辺形の面積であることはベクトル積のところで説明した。惑星の軌道運動に対して面積速度が一定であることはケプラーが報告している。

ケプラーはこの面積速度一定という結論をどのようにして導いたのだろう？ 諸君の内に楕円の焦点から楕円上の任意の２点に至る２本の直線と楕円軌道で囲まれた部分の面積を正確に計算出来る人は何人いるだろう？

角運動量が一定だと、地球は軌道面と呼ばれる $\vec{L}$ に垂直な一定の面内を運動する。逆に言うと、角運動量ベクトル $\vec{L}$ は軌道面に垂直であり、もしも軌道に回転軸を考える事が出来るならば、回転軸の方向を向いている。

３）離心率ベクトルの積分

以下で定義される離心ベクトルは時間的に変化しない。

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{v} \times \vec{L}}{GMm} - \frac{\vec{r}}{r}$$

この式は以下の関係式を利用し、時間微分を計算すれば確認できる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} + \frac{\vec{v}}{r}, \qquad \vec{r} \cdot \vec{v} = r\frac{dr}{dt}$$

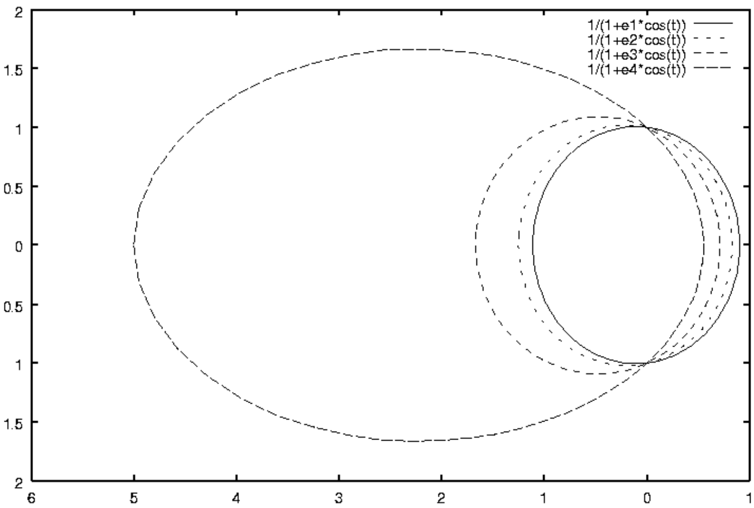
$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = -\frac{GMm}{r^3}\{r\frac{dr}{dt}\vec{r} - r^2\vec{v}\}, \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$\vec{\epsilon}$ と $\vec{r}$ のスカラー積を作ると、地球の軌道を与える次式が導かれる。

$$r = \frac{\ell}{1 + \epsilon\cos\theta} \qquad 但し、\ell \equiv \frac{L^2}{GMm^2}$$

ここで、θ はベクトル $\vec{\epsilon}$ と $\vec{r}$ のなす角度である。

ϵ は離心率であり、１より大きければ軌道は双曲線であり、１ならば放物線、１より小さければ楕円、０ならば円となる。$|\epsilon| < 1$ の時、軌道の式で $\theta = 0(\pi)$ を代入すると、分母が最大 (小) となるので、r は最小 (大) となる。ここで定義した離心率ベクトルは太陽 (引力中心) から近日点の方向を向いたベクトルである事がわかる。



図は離心率が 0.1, 0.2, 0.4, 0.8 の場合である。

これまでの計算から、地球は周期運動をするので、近日点は引力中心が動かないならば、動かない事がわかる。しかし、水星の近日点が移動する事は長い間議論を呼んだ。万有引力に r^{-3} の項があると説明がつくという話もあったが、今では一般相対論が正しいという一つの証拠と考えられている。

ここでの計算では、太陽と惑星だけが万有引力で引き合っていると仮定した時には、惑星の近日点は移動しないという結論であった。実際には、木星の影響がかなり大きいために、近日点は移動する。しかし、このような他の惑星からの影響は計算により評価できる。水星の近日点移動は角度にして１００年間に約５６００秒程度であり、その内４１秒程度だけは、ニュートン力学の範囲で説明出来なかった。ある意味でこの数値が、ニュートン力学の精度を与えている。

問　$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$ を地球の軌道の式に代入し、ｘとｙの関数として書き下すことにより、軌道が楕円となることを確認せよ

$\vec{\epsilon}$ の大きさは $\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}$ を計算するとよい。このとき、v^2 はエネルギーの保存則を用いて消去すると、

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{GMm}\right)^2$$

ここで、$\vec{v}$ と $\vec{L}$ は直交しているから、$|\vec{v}\times\vec{L}| = vL$ である。先に説明した様に地球のエネルギーＥは負だから、離心率は１より小さく、楕円軌道を描く事が分かる。惑星の軌道が楕円であることもケプラーにより報告されている。

離心率の式を見ると、束縛状態（Ｅ＜０）に対しては、角運動量 Ｌ が大きいほど離心率は小さくなる（円に近い軌道を描く)。質量がＭとｍの物体を原子核と電子だとすると、プランク定数を 2π で割った量を $\hbar$ として、Ｌ＝０のとき ｓ 軌道、$L = \hbar$ の時 ｐ 軌道、$L = 2\hbar$ の時ｄ軌道等と呼ぶが、エネルギーが同じならば ｓ 軌道に対して離心率が一番大きく、ｐ 軌道がそのつぎに離心率が大きい。ｓ 軌道が一番丸いという誤解を耳にする事があるので注意を喚起したい。この誤解は、電子の軌跡と分布とを混同しているのが原因だろう。

太陽 (と地球の重心) の回りを公転する地球のエネルギーは負である事を説明した。束縛エネルギーが負だと地球は太陽の束縛からは絶対に逃れられない。これと良く似た現象で面白い例を紹介しよう。自由空間に置かれた中性子の寿命 (半減期) は約９００秒あり、陽子、電子と (反) 中性微子に崩壊する。中性子の半減期は、万有引力定数と同じように基本的でありながら測定精度が良くない物理量の見本の様な量である。さて、中性子と陽子とが束縛状態を作る事があり、重陽子と呼ばれている。天然の水素の約０．０１５％が重陽子で出来ている。この重陽子の寿命は無限大と考えられている。束縛状態を作ったために, 寿命が極端に伸びている。物理学者は, エネルギーの保存則の為に, 崩壊が禁止されているという表現を使う。束縛状態にあると、寿命が延びる話をしたが、逆にエネルギーを与えると寿命が短くなる例として、核消滅という話題がある。原子炉で作られた放射性廃棄物にうまくエネルギーを与えてその半減期を短縮する事が原理的には可能である。

ここで出発点とした運動方程式で地球の質量をM、物体の質量をmとすると、地上での落体の運動に適用できる。この時、両辺をmで割ると、運動方程式は落体の質量に依存しないという有名なガリレイの実験が説明できた事になる。

一般に質量の大きな物体には大きな力を加えないと動かないのに、万有引力では質量の大きな物体には大きな力が働いているのは驚異的な事である。この結果、重い物体も軽い物体も同じ重力加速度で駆動される。この知識と後に出てくる剛体の運動方程式を知っていると、重錘を付けて重くするほど振動数が大きくなる (要は重い程早く動く) 装置を工夫できる。

ケプラーの第３法則と万有引力の法則に付いて

ケプラーはチコの膨大な観測データを基に、惑星運動について３つの規則性を報告している。二つは前に登場した、軌道は楕円であり面積速度は一定であるというものであった。３番目は、惑星運動の周期Ｔの２乗は平均軌道半径ａの３乗に比例するというものである。そこで、1）周期の２乗を $T^2 = k\,a^3$ と書き、2）太陽からの引力と地球の軌道が円軌道であると考えたときの遠心力が吊り合っていると仮定すると、万有引力は距離の２乗に反比例するという関係が以下のように簡単に推定される。遠心力は $f_{cen} = ma\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 ma}{T^2}$ と書けるから、周期Ｔの２乗に反比例する。仮定１）により分母は $k\,a^3$ で置き換えられ、遠心力 (吊りあっていると考えると、引力) はａの２乗に反比例する。太陽と地球の間の引力が距離の２乗に反比例することはニュートン以前に関係者には想像されていて、天文学者のハレーがニュートンを訪ねて、引力が距離の２乗に反比例すると仮定したら地球の軌道はどうなりますかと問うたところ、ニュートンはたちどころに楕円になると答えたそうです。（ニュートンもこの問題を以前に考え、計算を済ませていた！）ニュートンに教えられて、各種の彗星の軌道を計算し、ハレーはハレー彗星の出現を予想し、彼の死後この予想は正しいと確認された。

問　ケプラーの第３法則を以下の方法で導け。

１）惑星の楕円軌道の長径と短径をａとｂとする時、$b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$ と表せることを示せ。

２）上の結果を用いて、惑星軌道が一周期に描く面積を計算せよ。この面積と、面積速度を用いて、一周期Ｔを表せ。

ヒント 面積速度 x 周期＝楕円の面積である。円軌道でなければ、遠心力の公式は使用できない。

３）軌道のパラメータを消去して、Ｔとａの関係を作り、ケプラーの第３法則を導け。

問 太陽からは、太陽風と呼ばれる小さな粒子が飛んで来ると言う。この粒子の、太陽表面での初速度はいかほどか？あまり、初速度が小さいと、太陽の作るポテンシャルに束縛される事に注意せよ.

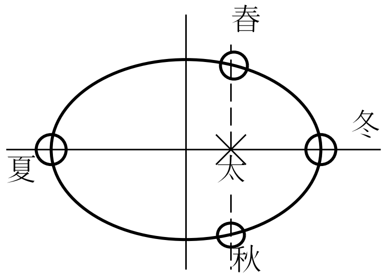
問 絶対温度が T の気体分子はほぼ、kT 程度の運動エネルギーを持つとする。ここで、k はボルツマン定数と呼ばれる定数であり、気体定数 R をアボガドロ数 N_A で割った値である。水素原子や酸素原子の３００Ｋの温度での速度を計算せよ。地球の温度が絶対温度で何度になると、これらの原子は地球の引力を振り切って大気圏外に飛び出すか？

地球に大気があるという事は、地球が過去に上で計算したような高温にはなっていなかったと結論して良いだろうか？

地球が太陽の回りを公転している事は衆知の事実である。この証拠として、「恒星」と「季節の星座」という概念を挙げておこう。「恒星」の存在は、これらの星の位置が相対的にほとんど変化しないという証拠である。季節の星座があるという事は恒星の位置を基準とした、我々の夜の時刻が一日に４分 (２４時間/３６５日) ずつ変化している事の現れである。このずれは、地球からみた恒星と太陽の運動が異る事を意味する。地動説ならば、太陽の運動を他の恒星運動から区別する理由を探さねばならない。地球が太陽の回りを公転していれば、太陽を特別視するのは当然である。

次ぎに、地球の公転軌道が楕円である事を示す証拠を一つ提示しよう。毎日決まった時刻に太陽の位置を天空上に書き込もう。例えば、カメラを固定して毎日一定の時刻に太陽の写真を取る。同じ事であるが、太陽が南中する時刻を記録しても良い。１年後に、太陽の軌跡を見るとアラビア数字の８の字を描いているのが判るだろう。地軸が傾いているだけならば、楕円を描くはずだが。。２重周期が観測されるはずだ。

地球の公転軌道が太陽を焦点の一つとする楕円である事を認める。



図の様に、公転面内で太陽を通り短軸に平行な直線と楕円の交点に春分点と秋分点がある事は分かるだろう。こう結論する理由は、地球の自転軸が約２３．５度, 交点面に垂直な軸から傾いている事に起因する。公転軌道の離心率が小さく、自転軸が傾いている事が夏と冬がある原因である。

近日点と遠日点のどちらが夏で、どちらが冬かと言うのは考える価値のある問題である。公転軌道のについて、面積速度が一定であるというのが、判断の指導原理となる。図で、春・夏・秋・太 が作る半楕円の面積は、春・太・秋・冬が作る面積よりも大きい事が判る。

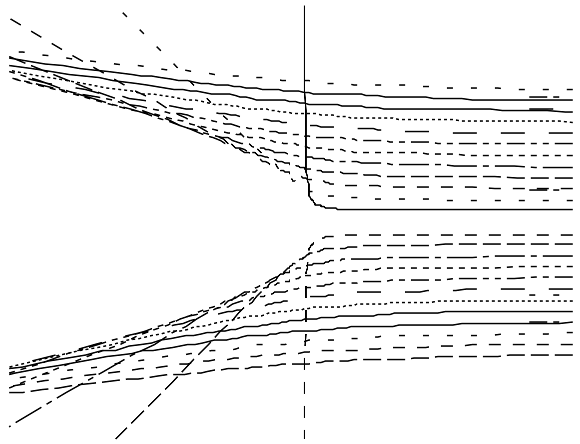
一方、秋分の日から春分の日迄の日数は、春分の日から秋分の日迄の日数よりも短い事は、２月が前者に含まれるから、すぐに判る。この二つの事実から、上の図の様に日本の夏に地球は太陽から一番遠いとこ

ろにあると結論し、上の図を書いた。

実は、もう一つ判断せねばならない事がある。二つある楕円の焦点の内、北極星から見た時、太陽は図焦点にある事はどのような観測事実から結論出来るのだろう？

時間があれば考えてみよ。

万有引力の下での運動の軌跡は、エネルギーが負ならば楕円だから閉じている。即ち、周期運動をする。一方エネルギーが正ならば一般には双曲線を描き、一度だけ太陽 (引力中心) に近ずき、後は遠ざかるのみである。このように、Ｅ＞０の運動は一般に散乱と呼ばれ、近代物理学の研究手段の一つとして、非常に大切な地位を占めている。加速器という言葉を聴いた事があるだろうが、加速器を利用する実験の大部分が散乱の実験である。Ｅ＞０の例として、ラザフォードの実験を取り上げよう。彼らは、α粒子が各種物質の薄膜でどのように散乱されるかを研究していた。一回散乱の確率をｐ、そのときの平均散乱角を $\overline{\theta}$ とすると、２ $\overline{\theta}$ の角度で散乱される確率は p^2、３ $\overline{\theta}$ の角度で散乱される確率は p^3 程度と推定される。彼らの例では、$\overline{\theta}$ は０．１ラディアン以下であり，ｐも１より十分小さいはずであった。α粒子の散乱がこのような確率過程だと仮定すると、散乱確率は角度とともに急激に小さくなるはずである。ところが、９０度以上の角度に散乱される現象が発見され、しかも後方ではあまり角度に依存しないという結果を得た。この時の驚きを、ラザフォードは一枚の紙で砲弾が跳ね返されたと表現している。彼はα粒子の散乱過程を１回散乱だと仮定して、上で与えた軌道の式と同じ式を用いて、散乱確率を表す式を作り、実験結果を再現するのに成功した。(唯一の違いは、引力と斥力の違いである。) こうして、原子核という概念やラザフォードの原子模型が確立した。コンピュータが利用できるならば、軌道の式でエネルギーを一定とし角運動量を色々と変えながら、軌道をグラフに描いてみよ。散乱されるずっと前では、入って来るα粒子の軌道が平行になるようにそれぞれの軌道を回転して、散乱の様子を見ると面白い。下の図はその一例である。ここではラザフォードの実験に合わせて、斥力を仮定している。そのため、先の惑星軌道の式と較べると、符号が異なる部分が登場する。図を見ると、”はずれ”粒子は散乱角が小さく、”当たり”粒子は大きな角度に散乱されている事が分かる。



少し、進んだ学生へ

散乱の確率を予想する時、散乱角の平均値 $\overline{\theta}$ の符号を考慮しなかった。符号を考慮すると、$+\overline{\theta}$ で散乱される確率 p は、$-\overline{\theta}$ の角度で散乱される確率と等しいから、２ $\overline{\theta}$ の角度で

散乱される確率は p^2 よりも小さくなる。大きな角度に散乱される確率は、この効果を考慮すると極端に小さくなる。興味があれば、確率の本の酔歩という節を読んでみよ。更に、散乱の角度がいつも平均値に等しいという仮定ももっともらしくないと感じたら、拡散という現象へと勉強をすすめよう。肺の中で、酸素と炭酸ガスが入れ替わる現象はなぜおこるか？を考えると、拡散という現象も必要である。

”ニュートン”力学についての若干のコメント

第１法則（慣性の法則）について

運動方程式で”力”＝０とすれば自動的に導かれる結論を法則として登場させる必要は毛頭無い！という主張から、こんな法則が何故ニュートン力学の先頭に置かれたのだろうという疑問を持つだろう。現代的な意味からこの疑問を持つ方が自然だと感ずるので、この命題が置かれた歴史を振り返っておこう。

先ず、”力”は物体が運動する原因であるという認識があった。しかし運動という概念はあいまいであった。即ち”速度”が０でなければ物体は運動しているという主張を認めたのである。そうすると、空中に石を投げるとこの石は暫く運動を続けそのうちに地に落ちるという経験事実を説明せねばならない。この石の運動中にどんな力が働いているのか？力が働いていないならば、（やがてではなく即座に）石は止まる（落下する）はずであるという考えが背後にある。古くは空気の存在を認め、空気が石の後ろに回り込み、この回り込んだ空気が石を押すと考えた人もいる。ニュートンの時代の人も慣性力という内在的な力の存在を認め、この力が原因となり石は運動を続けられると考えたらしい。慣性力による運動と外力による運動の重ね合わせ（力の重ね合わせではない！）として現実の運動を説明したわけである。この慣性力を想定して、第１法則という命題が提示された訳である。現代では、慣性力は”力”ではなく、運動エネルギーとして定式化されている。

さて、第１法則の現代的な存在意義を、絶対静止系又は座標系の存在を認めるために必要だと解釈する人もいる。しかし、我々は議論の出発点として座標系の存在を暗黙のうちに仮定してので、第１法則の法則としての存在価値は無い。歴史の遺物だろう。

第２法則（ニュートンの運動方程式に付いて)

ニュートンの運動方程式を現在のような微分方程式の形に書いて、これこそが”質点”の運動を記述する基本方程式だと唱い上げたのはオイラーであり、ニュートンから５０年程度後の事である。ニュートンは万有引力を導入し、幾何学と極限操作を用いて、”天才的”方法でケプラーの観測事実を説明した。ニュートンと同じ様な結論をライプニッツが微分の概念をあらわに用いて導いた。ここに、ヨーロッパ大陸とイギリスで微分の開祖は誰かと言う論争が始まった。日本人として言うと、幾何学と極限操作ならば、ニュートンよりも古くから日本で円周率を計算するのに使った人が居ますよ！

ライプニッツの手法はその後、ヨーロッパ大陸で改良を重ねられ、オイラーにより、質点の概念と共に一応の完成をみた。オイラーは質点力学だけでなく、独楽の運動や流体力学に”場”の概念を用いる等でも、名を物理分野に残している。次の時代に出て来る解析力学の基本的な方程式はオイラーの方程式と呼ばれている。これらの物理を学ぶには、微分や積分という言葉に代表される、解析学という数学の知識が不可欠である。

解析力学

オイラーの力学の段階では先ず座標系を設定し、この座標系の中に質点を置き、この質点に働く力を洞察により導き、運動方程式を実際に書き下すという準備作業が必要であった。問題を解く前のこの準備作業は、明示的に力が与えられていなければ、経験を要する困難な作業である。例えば、二つの質点を軽い棒で繋いだ場合でも、一方の質点の運動が棒を伝わって他方の質点に影響を与える。

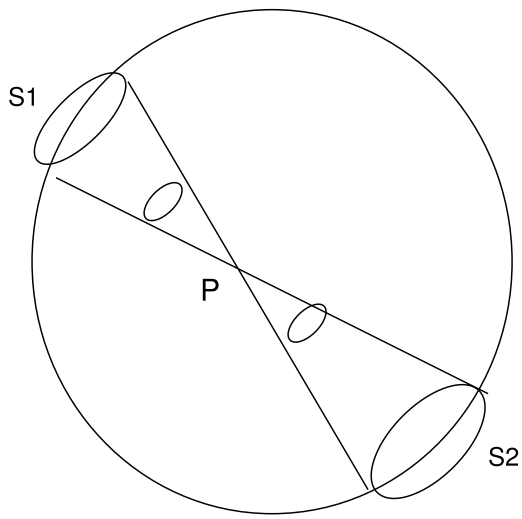
もっと複雑な場合には。。。仮想仕事というアイデアを出発点とし、変分法という数学的手段を利用し、最小作用の原理という原理に統一し、上に述べた経験を要する作業を、解析学さえ知っていれば、誰にでもできる単純作業に置き換えたのはラグランジュ（Lagrange) であった。彼がまとめた力学は解析力学と呼ばれている。解析力学で主役を演じるのは運動エネルギーとポテンシャルという概念であり、力はもはや主役の座を失っている。また固定的であった座標系の役割もかなり後退している。ラグランジュが発明したラグランジアンという概念は解析力学のみならず、現代物理にも、不可欠な概念である。
古典力学の発展を振り返って見ると、ガリレオが耕し、ニュートンが種を蒔き、オイラーが育て、ラグランジェが収穫したと言えるだろう。

有限の大きさの物体からの万有引力

太陽と地球という例では、太陽も地球も大きさを持たない数学的な意味での点と考えて（質点）運動を議論した。有限の大きさを持つと、万有引力の大きさも変化するのではないだろうかという疑問が登場するのも自然だろう。ところが、距離の２乗に反比例するという性質を持つ力に対しては、次の様な特殊な性質がある。

一様な密度を持つ球殻の内部では、どこに居ようとも、この球殻からは引力を受けない。
球対称に質量が分布しているならば、全質量を重心に集めてこれを質点と考えたときの引力と、有限の大きさをもって質量が分布しているときとでは、外部からは区別できない

先ず前半を立体角の概念を用いて説明しよう。非常に薄い球殻の内部の一点Ｐに入ったと想像してみよう。Ｐを通る直線を考え、この直線を中心軸としＰを頂点とする円錐を考える。このような円錐は当然２個存在する。球殻がこれらの円錐によって切りとられる部分をＳ１、Ｓ２とする。次の３点に注意する。



１）このときＳ１とＳ２が点Ｐを見込む立体角は等しい。
２）Ｓ１及びＳ２がＰ点に置かれた質点に及ぼす引力の大きさは立体角に比例し、向きは反対である。

３）全球殻はそれぞれ対向する、上の意味で引力を相殺する部分に分割できるから全体としても引力は０である。

立体角の定義をもう一度振り返り、万有引力の式の内、$\dfrac{\vec{r}}{r^3} = \vec{e}_r/r^2$ と書き換えると、理解し易かろう。無限小の面Ｓ (面積も S と書く) が点Ｐを見込む立体角Ωは、Ｓの面積を持ち、ＰからＳの方へ向くベクトル $\vec{S}$ を考えると、次の様にベクトル $\vec{S}$ と上のベクトルの内積（スカラー積）として定義される。

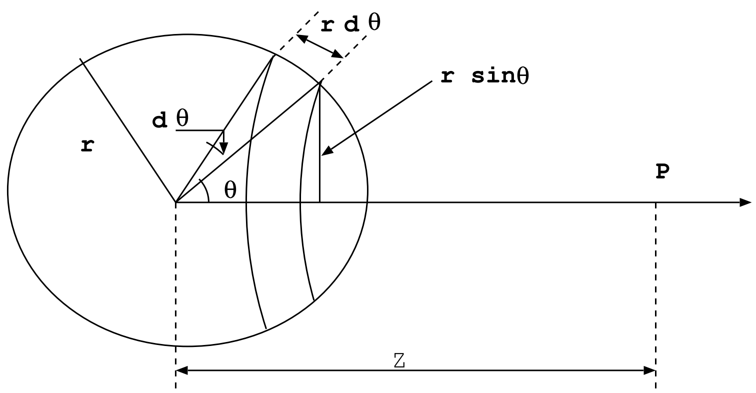
$$\Omega = \vec{S} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{S} \cdot \vec{e}_r/r^2$$

微小部分Ｓの質量は、Ｓの面積に比例するという事実にも注意しておこう。

”密度が一定ならば万有引力は立体角に比例する”から、密度を倍にして立体角を半分にしても引力は同じなのだ。勿論、厚さは無限小である事を仮定していますよ。上の結論を、上半分の球殻を対象として、別の観点でみてみよう。この半球殻のＰ点に及ぼす引力は、積を一定にして、立体角をどんどん小さくして密度をどんどん増していってもよい。この一定にした積は球殻の質量に比例している事に注目しておこう。球殻全体としては、このような半球殻と等価な引力を及ぼす点が２個Ｐを対称点として作られるので、全体の引力は０である。

前の見方では、無限個の微小部分毎に相殺させたが、後半では微小部分を有限の大きさの部分に統合し、それらの寄与を全体として相殺させた。前の見方を微分的観点、後者の見方を積分的観点と考える事ができる。

次に球殻の作るポテンシャルを球殻の外部から観察する。面質量密度が σ、半径 r の球殻を原点に置き、z 軸上、原点から Z の点 P につくるポテンシャルを、各表面部分が P 点に作るポテンシャルの和 (積分) として評価しよう。Z 軸を中心軸、原点を頂点とし、半頂角が θ と $\theta + d\theta$ の二つの円錐が球殻から、半径 $r \sin\theta$、幅 $r\,d\theta$ の帯状部分を切り取るとする。



この部分の質量は $2\pi\sigma r^2 \sin\theta d\theta$ であり、P からの距離 R は R= $\sqrt{r^2 + Z^2 - 2rZ\cos\theta}$ である。この帯が作るポテンシャルは、P 点に置かれた質点の質量を１としておくと $dV = -\dfrac{G2\pi\sigma r^2 \sin\theta\, d\theta}{R}$ であるので、このポテンシャルを $0 < \theta\pi$ の区間で積分すれば良い。

$$V(\text{球殻}) = -2\pi\sigma G r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2 + Z^2 - 2rZ\cos\theta}}\, d\theta$$

この積分は $x = \cos\theta$ と変数変換すると簡単に実行できる。$Z > r$ であることに注意すると、積分の結果

$$V(\text{球殻}) = -\frac{4\pi\sigma r^2 G}{Z} = -\frac{Gm}{Z}$$

最後の結果は、$(4\pi\sigma r^2)$ を球殻の質量mで置き換えてある。質量 m を使うと、この球殻のつくるポテンシャルは半径には依存しない。更に、最右辺の式は質量mの質点が距離 Z の位置に作るポテンシャルそのものになっている。言葉で言い替えると、密度一定の球殻の作るポテンシャルは、その質量を中心に集めた時にできる質点の作るポテンシャルに等しい。内部が詰まった球は、このような球殻を集めて作る事ができるから、球がつくるポテンシャルは全質量が原点に集中したときのポテンシャルに等しい。このことは、導き方から分かるように、密度が半径に依存していても成立する。

注１ ここでは球殻のつくるポテンシャルを用いた。直接、球殻からの力を積分しようとすると、計算はもう少し面倒になる。ポテンシャルでなく力とすると、上の積分は分母の平方根記号が取れる。しかし、ｚ軸の回りの対称性を考慮すると、力のｚ軸成分のみが残り、ｚ軸成分を取り出そうとすると、被積分関数に、$\frac{Z - r\sin\theta}{\sqrt{r^2 + Z^2 - 2rZ\cos\theta}}$ を掛ける必要がある。最終的に実行しなければいけない積分は以下の様になる。

$$\text{力}\ (\text{球殻}) = -2\pi\sigma G r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta(Z - r\cos\theta)}{\{r^2 + Z^2 - 2rZ\cos\theta\}^{3/2}} d\theta$$

力のある人は、適当な力学の参考書を見て、チャレンジしてもらいたい。力のかわりに、ポテンシャルを導入すると計算が簡単になる良い例だと思う。

注２ 各部分からの寄与を足し算するだけで全体の寄与が計算できている。この事情を、重ね合わせの原理が成り立っていると言う。万有引力は、反粒子に対しても引力であるので、何かの影になると引力が弱くなるという事は無い。(万有引力遮断装置は作れない！)

注３ 万有引力も静電気に関するクーロンの法則もどちらも、いわゆる逆２乗の法則と言われるように、距離の２乗に反比例している。これに伴い、球殻の内部 (金属でないと静電気にたいしては成立しないが) では力が働かないという類似点がある。

しかし相違点もある。質量に負の値はありえないが、電荷には正と負があるので静電遮蔽という現象がある。また、電荷は金属中を自由に動き回れるので、導体の内部では、形に依らず力は働かない。

テイラー展開、地上での重力加速度と潮汐力

独立変数ｘの関数 ｆ(ｘ) を考える。この関数は以下の様に（ｘ－ａ）の級数に展開出来るだろう。

$$f(x) = f_0 + f_1(x - a) + f_2(x - a)^2 + \cdots$$

展開係数 $(f_0, f_1, f_2, \cdots)$ は以下の様に簡単に決められる。ｘ＝ａを代入すると、右辺は初項だけが残るから、 $f_0 = f(x = a)$ である。次に両辺を一度微分してから、ｘ＝ａを代入すると、右辺では第２項のみが残るから $f_1 = f'(x = a)$ となる。２回以上微分する時は、べき乗の項から階乗の因子が登場することに注意すると、第ｎ番目の項は

$$f_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x=a}$$

この様にして、何回でも微分可能な関数は級数に展開できる。
例えば、以下の様なテイラー展開はよく利用される。

$$\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 + \cdots, \qquad (|x| < 1)$$

簡単な場合は、理科年表の後ろに例がある。
また、きっちりした公式集では等号で結ぶのでなく、波線 ~ で左右の辺を結んでいる場合もある。この時は漸近展開と呼ばれテイラー展開とは少し異なる。右辺が数学的には収束しない場合に使われる。
問 テイラー展開に $1/(x-a)$ の様な逆べきの項が登場しない理由は？又、逆べきの項が登場するのはどの様な場合だろう？気になる人は、ローラン展開という言葉を調べてみよ。

指数関数 e^x に付いて

記号から理解できるように、ｅという数のｘ乗というのが定義である。e^x は $\exp(x)$ と書かれることも多い。ｅの値は、２．７２程度の大きさの実数である。だから e^x は 2^x よりも大きく 3^x よりも小さい。ｅは超越数だから、無限級数としてしか定義出来ない。指数関数は以下の様に定義してもよい。

$$\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ここでｘ＝１と置くとｅは簡単に計算出来、収束もかなり良いから実用的な定義でもある。ここで０！＝１である。電卓や計算機を持っているならば、$\exp(x)$ のグラフを方眼紙と片対数のグラフ用紙に書いてみよ。
指数関数の級数展開式をｘで微分してみると、定数項は０になって消えるが、ｘの項が定数項になる。一般に第ｎ項がｎ－１項に横滑りするだけだから、微分しても変化しないという、不思議な性質を持つ。

$$\frac{d\exp(x)}{dx} = \exp(x)$$

もう一度微分すると

$$\frac{d^2\exp(x)}{dx^2} = \exp(x)$$

ところで、三角関数 $\sin x$ や $\cos x$ はこの微分方程式と較べると符号だけ異なる次の微分方程式の解である。

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -f(x)$$

これらの微分方程式を見比べると、指数関数と $\sin x$ や $\cos x$ は何か深いところで繋がりがあると想像される。ｙ＝ｉｘ（ｉは虚数単位）と置いてみると、

$$\frac{d}{dx} = i\frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = -\frac{d^2}{dy^2}$$

だから、$\exp(ix)$ は $\sin x$ や $\cos x$ と以下のオイラーの関係式を得る。

$$\exp(ix) = 1 + ix - x^2/2 - ix^3/6 + x^4/24 + ix^5/120 + \cdots = \cos(x) + i\sin(x)$$

という等式が成立する事が分かる。この式を見ると虚数の不思議さや、ｅという最初は馴染みが無かった変な数が登場する理由も何となく分かるだろう。

ガウスはこのオイラーの関係式を用いて、任意の代数方程式は複素数の範囲で必ず根を持つという代数学の基本定理を証明している。

先に、力が変位に比例するという運動方程式を解いた。その時、力の比例係数ｋが正か負かで解が三角関数になったり、指数関数になったりしていた。ここで登場した複素数の指数関数を使うと、正負の場合分けを行わなくとも統一的に解を書き下す事が出来る。

問　三角関数の倍角公式や３倍角公式というのがあった。上のオイラーの関係式から簡単に導ける次の等式を用いて、２倍角と３倍角の公式を導いてみよ。

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

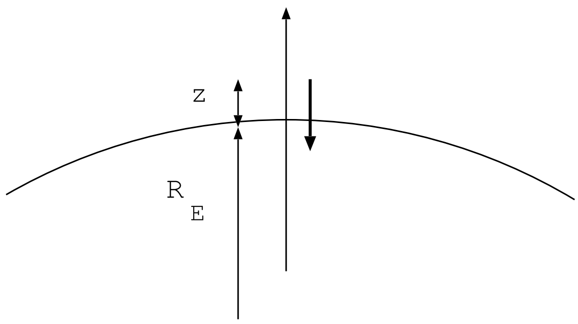
問　e^π と π^e ではどちらが大きいか？ ヒント $\pi = e(1 + \frac{\pi - e}{e})$ と変形し、対数をとってから級数展開してみよ。

潮汐力

地球の引力 f を地表からの高さをｚとして地表面で展開すると、

$$f(R_E + z) = -\frac{GMm}{(R_E + z)^2} = -\frac{GMm}{R_E^2}\left(1 - 2\frac{z}{R_e} + 3\frac{z^2}{R_E^2} - \cdots\right)$$

ここで、R_E は地球の半径である。

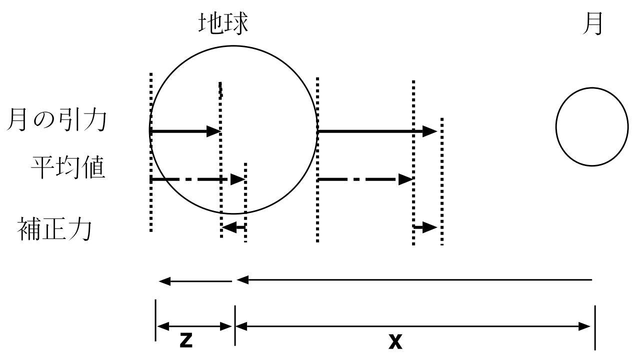


右辺の第１項のみを考慮し、第２項以降を無視すると地球の引力に起因する重力加速度は何処でも一定値 ｇ（$= \frac{GM}{R_E^2}$ ）となる。精度の高い測定をしたり、ｚが地球の半径（６４００ｋｍ）と較べられる様になると第２項以下を無視する近似が成立しなくなる。

問 地球の作る重力ポテンシャルを地球表面で展開し、地表付近で高さｈの位置に置いた質量ｍの物体が持つ位置エネルギーはｍｇｈと書ける事を示せ。

次に、地球と月の関係を考える。月の引力を地球の重心の回りでテイラー展開する。月の引力は平均的には地球の重心に作用し、上のテイラー展開の第１項で与えられる。月と地球は相互の重心のまわりを楕円軌道を描いて運動している。この運動には、この第１項が効いている。地上に居ると、地球と一緒に運動しているので、この第１項の効果は体感出来ない。

平均からはずれた部分は第２項で与えられ、ｚに比例しているので地球の表面の月側とその反対側とで符号が異なる。平均値からのずれを考えるとは、地球の重心を止めてそれには平均的には月の重力は働いていないと思えば良い。その時に第２項は月側では引力でありその反対側では斥力である。



すなわち、月の引力の平均値からのずれの寄与 (図の補正力) は、地球の表面を両側から引っ張るように働いている。だから、月はほぼ一日に一回地球の周りを回るのに汐の満ち干は日に２回ある。１日周期の原因で半日周期の現象が起こっている！

月の潮汐力が地球での汐の満ち干の原因である事を認めると、その逆はないのか？という疑問が生じる。即ち、地球が月に潮汐力を及ぼしているはずだと考えられる。興味があれば、月の詳しい形を調べてみよ。球形からどの程度歪んでいるか？という意味である。

更に、何故月は地球に一方の面だけを向けて、月の裏側を地球から隠しているのかという事も調べてみると良いだろう。

更に言うと、一ヵ月の長さは何故一ヵ月か？、１億年前にも一ヵ月の長さは一ヵ月か？も勉強してみると面白いだろう。

問 地球の公転軌道は主に太陽の引力できまっている。ところが潮の干満を主に決めているのは、太陽の引力ではなく月の引力である。何故、弱いはずの月の引力が太陽の引力よりも、潮の満ち干には重要な原因となっているのだろう。上に与えた式を見ながら、考えてみよ。

問 星の王子様という童話がある。あるとき星の王子様は身長と同じ程度の直径の星を訪れている。この時、足の裏と頭のてっぺんとで、引力はどの程度異なるか？

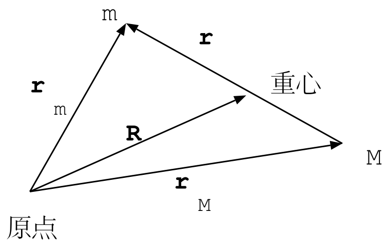
宇宙ステーションでの人工重力発生装置として、ステーション全体をゆっくりと回転させる案を子どもの頃に読んだ事がある。最外周の室内に人間が立った時の潮汐力の大きさはどの程度だろう？立ちくらみはしないのだろうか？

キリンは頭上の葉を食べる時と水を飲む時とで、血圧をどのように処理しているのだろうか？

5) 重心の運動と相対運動

質量 m と M の質点があり、それらの位置ベクトルを $\vec{r}_m$ と $\vec{r}_M$、それ等に外部から働く力（外力）を $\vec{F}_m$ 及び $\vec{F}_M$、それ等がお互いに及ぼす力（内力）を、$\vec{f}_{M\to m}$ 及び $\vec{f}_{m\to M}$ とする。

但し、作用・反作用の原理に依り内力の和は０になる、即ち $\vec{f}_{M\to m} + \vec{f}_{M\to m} = 0$。



相対座標と重心座標

この系の運動方程式は以下のように書ける。

$$m\frac{d^2\vec{r}_m}{dt^2} = \vec{F}_m(\vec{r}_m) + \vec{f}_{M\to m}(\vec{r}_m - \vec{r}_M)$$

$$M\frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \vec{F}_M(\vec{r}_M) + \vec{f}_{m\to M}(\vec{r}_m - \vec{r}_M)$$

力がどのような独立変数の関数であるかが分かるように、独立変数を明示しておいた。一般的傾向として内力はこのように、相対座標の関数である。そこで、運動方程式の独立変数を相対座標 $\vec{r}$ と重心座標 $\vec{R}$ に変数変換してみる。

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M \qquad \vec{r}_m = \vec{R} + \mu/m\vec{r} = \vec{R} + M\,\vec{r}/(M+m)$$

$$\vec{R} = \frac{M\vec{r}_M + m\vec{r}_m}{m+M} \qquad \vec{r}_M = \vec{R} - \mu/M\vec{r} = \vec{R} - m\,\vec{r}/(M+m)$$

ここで $\mu \equiv mM/(m+M)$ は換算質量と呼ばれる。

上の式を時刻で２回微分し、先に書いた運動方程式を代入すると、次の運動方程式になる。

$$(m+M)\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_m + \vec{F}_M$$

及び

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{M\to m} + \mu\{\vec{F}_m/m - \vec{F}_M/M\}$$

前半の式は、重心の運動は全質量が重心に集まり、全外力も重心に働き、内力は重心には全然働かないとした時の運動と同じである事を示している。

他方、相対運動に対しては、その質量が換算質量 μ であるかのように振舞う。相対運動に影響を与えているのは、内力の一方と外力を変形した力である。$\vec{F}_m$ には μ/m、$\vec{F}_M$ には μ/M という因子が掛かっているから、単位質量当りの外力を換算質量の物体に焼き直したときの外力の差が相対運動に影響していると言える。

先の太陽と地球の相対運動を思い起こしてみると、外力は働いていないから内力だけを考えれば良いが、mを地球の質量としたのは間違いであり、質量は換算質量で置き換え

ておかねばならないと言える。観察眼の鋭い学生ならば、先の地球の軌道の解析では、問題はベクトル $\vec{r}$ の符号を除いて二つの質点は完全に対称なはずだのに、結果をみると非対称になっていた事に疑問を抱いたはずだ。例えば半直弦 ℓ や 離心率 ϵ^2 の式を見返し、もう一度この観点から先の経過と結論を見直してみよ。問題や方程式が有る種の対称性を持つとき、結果も同じ種類の対称性を持つべきだという考え方は非常に大切である。今世紀の物理は対称性を対象として発展したと言っても過言ではない。

原子核と電子の系（原子）では、同位元素といって陽子数（原子番号）は同じであるが中性子数の異なる原子核でできた原子の混合物である場合がある。質量数が異なる原子核で出来ていても同じ元素ならば、化学的な性質は酷似している。しかし原子核の回りを周回している電子の換算質量は正確には同じでないから、少しは束縛エネルギーに違いがある。この違いをアイソトープシフトと呼ぶ。アイソトープシフトはウランの濃縮に利用出来るかもしれない。化学反応の反応速度に、質量の相違が関係していると、面白い利用方法が考えられる。例えば二枚貝の殻には $CaCO_3$ が含まれているが、高温時に作られた殻には ^{18}O が多く含まれているが、低温時に作られた殻には少ない。^{18}O の濃度を測ると、殻が作られた時の温度を推定できる。

問　換算質量の定義から、一方が他方よりも極端に重い時は換算質量を、軽い方の質量で近似出来ることを示せ。

問　先の地球の軌道運動に対して、換算質量を持ち込むとどの部分がどのように変更されるか？

問 地球と月の重心は地球の重心からどれくらい月にむかった位置にあるだろうか？

この位置は地球の内部だろうか、又はすでに地球の外だろうか？
太陽と地球という組合せの場合にはどうなるだろうか?

問　質量が m_1 と m_2 の質点が、遠く離れた点に及ぼす引力は質量が（$m_1 + m_2$）の質点が両者の重心に有るときの引力と近似的に等しい事を示せ。
ヒント　m_1 と m_2 の引力を重心座標 $\vec{R}$ と相対座標 $\vec{r}$ で表現し、$R >> r$ だと仮定して R の回りに展開する。

問 人間が歩く時に、重心は上下しているだろう。一方、水平に重心を動かすには、重力に逆らって仕事をする必要は無い。１日１万歩とし、１歩歩くたびに２ｃｍ重心を持ち上げるとすると、体重が６０ｋｇの人は、どれだけのエネルギーを消費しているか？

エネルギー消費に比例して、乳酸やピルビン酸を筋肉中で作っている。疲れ無くするには、エネルギー消費を少なくするのも一つの考え方だろう。重心の上下動を減らす様な歩き方を工夫せよ。

馬の歩き方に普通の馬と足の運び方と異なるものがある。シートンの動物記や、蒙古襲来絵詞にある蒙古馬の歩き方。普通の馬の歩き方とどこが違うのか調べてみよ。

ついでに、象と鰐の足の運び方も調べて見よ。

次に、この２質点系の運動エネルギーＴを、重心の速度 V と 相対速度 v を用いて計算しよう。運動エネルギーは二つの質点の運動エネルギーの和だから、

$$T = mv_m^2/2 + Mv_M^2/2 = (M+m)V^2/2 + \mu v^2/2$$

後半の式は独立変数を重心運動と相対運動に書き直したものである。運動エネルギー

も、全質量が重心に集中したと考えて計算した重心の運動エネルギー（後半の右辺第１項）と換算質量を有する質点の運動エネルギー（第２項）の和の形に書け、両者は全く独立である。即ち、$\vec{V}\cdot\vec{v}$ といった項は登場しない。

このようにして、２質点の運動は全ての外力が重心に集まった時の重心の運動と、相対運動とに分離して考える事が出来る。相対運動とは、定義から分かるように、質量Ｍの粒子に乗って質量ｍの粒子を見た時の運動であって、重心に乗って質量ｍの粒子を見た運動では無いことを注意しておく。

もっと一般化して質点が多数集まった系 (質点系) や剛体の運動においても重心運動と重心に乗って見た (重心が仮想的に止まっていると考える) 運動とに分けられる。このとき、重心の運動は全部の質量が重心に集まり、全部の外力が重心に集中した時の運動方程式と同じである事が証明できる。次に、この事情を説明しよう。

質点系の運動方程式

複数 (ｎ個) の質点の集まりを考え, この系を質点系と呼ぶ。ある時刻での各質点の位置ベクトルを $\vec{r}_i$ とし、各質点に働く力を外力 $\vec{F}_i$ と内力 $\vec{f}_i$ の和としよう。内力 $\vec{f}_i$ は質点系内のｉ以外の全ての質点からの力 $f_{j->i}$ の和として表せ、しかも $f_{j->i}$ と $f_{i->j}$ とは作用・反作用の法則により大きさが等しく、向きは逆向きであるので両者を加えると０になる。

各質点の運動方程式は、以下の通りである。

$$m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

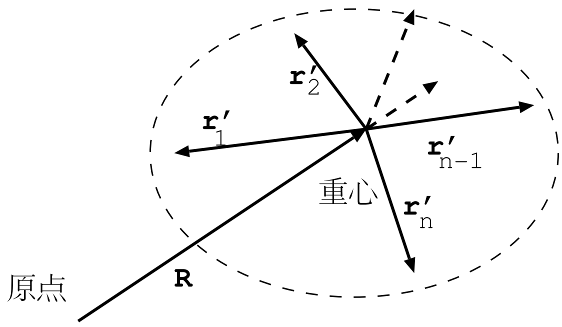
これらのｎ個の運動方程式を単純に加えると、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i F_i$$

ここで、新しく登場したＭとベクトル $\vec{R}$ は全質点系の質量と重心の座標であり、次の定義で与えられる。

$$M = \sum_i m_i, \qquad M\vec{R} = \sum_i m_i\vec{r}_i$$

この定義は少し天下りのところがあるが、この後で運動エネルギーや角運動量を計算すると合理的な定義である事が了解出来るだろう。重心の運動方程式には内力は登場しない。結局、重心の運動は質点系の全ての質量が重心に集まり、全ての外力が重心に作用すると考えたときの質点の運動と同じである。この様な訳で、質点の運動を考える事に意味がある。



次に、質点の位置ベクトル $\vec{r}_i$ を重心から見た位置 $\vec{r}'_i$ で書いておこう。

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

質点の速度 $\vec{v}_i$ は、この式を時刻で微分すると明らかな様に、重心の速度 $\vec{V}$ と重心から質点を見た時の速度 $\vec{v}'_i$ の和として表せる。

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$$

質点系の運動エネルギーTをこの関係を用いて書き換えよう。

$$T = \sum_i m_i v_i^2/2 = MV^2/2 + \sum_i m_i {v'_i}^2/2$$

右辺第１項は重心の運動エネルギーであり、第２項は重心から見た質点系の運動エネルギーである。注意するべきは、重心の定義を用いると、$\vec{V} \cdot \sum_i m_i \vec{v}'_i$ の項が登場しなくなる事である。即ち、重心の運動の様子は全て第１項に含まれていて、質点系の内部の運動エネルギーには影響を与えないという事である。

この事情を次に、質点系の全角運動量 $\vec{L}$ について調べてみよう。

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = M\vec{R} \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i = \vec{L}_G + \sum_i \vec{L}'_i$$

ここで、右辺第１項 $\vec{L}_G (= M\vec{R} \times \vec{V})$ は重心の角運動量である。即ち、質点系の全角運動量は重心の角運動量と重心のまわりの角運動量との和で与えられる事をこの式は示している。

次に、この式の左辺を時刻で微分して角運動量が時間的にどのように変化するか調べよう。個別粒子の角運動量の和を時刻で微分し、質点の運動方程式を代入すると、

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i m_i \{\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt}\} = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i)$$

最後の式で、内力が万有引力や静電気力の場合の様に２粒子間の距離のみの関数であり、力の方向がこの２粒子間の位置をつなぐ方向を向いている時は第２項は０になる。ここでは、このような場合に限定する。この限定の例外は磁気的現象では良く観察されるが当面このような現象を取り上げないという事である。即ち、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{N}_i = \vec{N}$$

この式から、質点系の全角運動量は、外力のみが働くと考えて計算した力のモーメント $\vec{N}$ で駆動される事が分かる。逆に、内力の力のモーメントは重心の角運動量には何の影響も与えない。

保存則という概念を使うと、**外力が働かない質点系では、重心の運動量や角運動量は保存する**といえる。

問 内力を $\vec{f}_{j->i} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ の様に仮定した時、内力の力のモーメントが０となることを確認せよ。

次に、右辺の力のモーメントを重心からの座標を用いて書くと、

$$\vec{N} = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

右辺第１項は、重心の運動方程式を用いると、重心が原点の回りに持つ角運動量の時間変化であることがわかる。残りの項は質点系が重心の回りに有する角運動量の時間変化である。

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i, \quad \frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

まとめると、**質点系の運動は全質量と全外力が重心に集まったと仮定した時の、重心の運動と、重心を固定して重心から各質点を見た時の質点の運動の重ね合わせとして表現出来る。**

星雲は無数の星の集合体であり、質点系と考えられる。この星雲の全体としての運動は星雲の重心の運動と星雲の重心の回りの回転とで記述出来る。ゆとりがあれば、暗黒物質 (ダークマター) という SF 紛いのキーワードを持った本を読んでみるのも面白いだろう。太陽系内の惑星が同一平面内を運動していたり、土星に輪がある理由も、ここで紹介した理論が基礎になっている。

６) 剛体の運動：角速度と慣性能率

質点系内の任意の二つの点間の距離 $r(=|\vec{r}|)$ が時刻に依らず一定ならば、この系の形は時間が経過しても変化しない。このような系を剛体と呼ぶ。先に学んだ様に質点系の重心運動は、内部運動とは独立に考えて良いので、重心は静止していると考えて議論する。相対距離が一定だから、回転の自由度だけを問題にすればよい。重心を止めて考えているから、回転運動の軸（回転軸）は必ず重心を通る。（回転軸とは回転運動により位置が変化しない点の描く直線の事である）

剛体の運動を記述するのに必要な角速度を少し形式的に導入しよう。

剛体は運動状態に依らずに、内部の２点間の距離が一定な物体と定義した。剛体内部に２点Ｐ、Ｏを取り、ＯからＰへのベクトルを $\vec{r}_P$ とする。定義により、$\vec{r}_P \cdot \vec{r}_P$ は一定である。この式を時刻ｔで微分してみると、$\vec{r}_P \cdot \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{r}_P \cdot \vec{v}_P = 0$。ここで $\vec{v}_P$ はＯから見たＰの速度ベクトルである。この式は、ベクトル $\vec{r}$ とベクトル $\vec{v}$ は直交していると読める。円運動をする質点に対しては、位置ベクトルと速度ベクトルが直交していた事を思い出そう。ベクトル積の定義を思い起こすと、ベクトル $\vec{r}_P$ と直交する全てのベクトルはベクトル $\vec{r}_P$ と何かあるベクトル $\vec{\omega}$ とのベクトル積で表現出来るから以下のように書ける。

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

この $\vec{\omega}$ を角速度ベクトルと呼ぶ。この $\vec{\omega}$ はＯを固定すると、剛体に共通で有ることが、以下のようにして証明出来る。Ｏ、Ｐ以外にもうひとつ点Ｑをとる。ＯからＱへのベクトルを $\vec{r}_Q$ とし、ＱからＰへのベクトルを $\vec{r}_{PQ}$ とすると、$\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \vec{r}_{PQ}$。この式を時刻ｔで微分すると $\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{v}_{PQ}$。上と同様の議論をすると、何かあるベクトル $\vec{\omega}_Q, \vec{\omega}_{PQ}$ を用いて、$\vec{v}_Q = \vec{\omega}_Q \times \vec{r}_Q$、$\vec{v}_{PQ} = \vec{\omega}_{PQ} \times \vec{r}_{PQ}$ と書ける。この式を、$\vec{\omega}$ を使って書き換えると、

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q + \vec{r}_{PQ})$$

他方、

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{v}_{PQ} = \vec{\omega}_Q \times \vec{r}_Q + \vec{\omega}_{PQ} \times \vec{r}_{PQ}$$

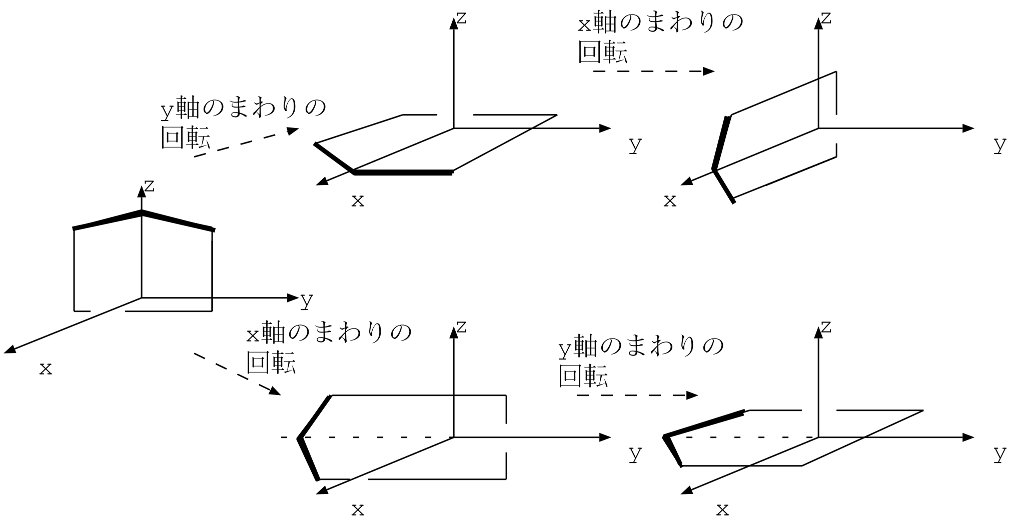
この式は任意の $\vec{r}_Q$ に対して成立するから、$\vec{\omega} = \vec{\omega}_Q = \vec{\omega}_{PQ}$ が成立する。即ち、角速度はOを固定すると、剛体に共通である。角速度ベクトルはOを固定すると、剛体に共通で有ることを説明したが、別の点O’をもう一つの原点として、O、O’、Pの３点に同じ手法を適用すると、角速度ベクトルは原点の取り方に依存しない事が導ける。実用的には、先に述べた様に、重心を原点にとるのが一般的には合理的である。

ここで、形式的に導入した角速度ベクトル $\vec{\omega}$ の意味付けが必要である。回転を記述するには、回転軸の方向（２個のパラメータ）及び、この軸の回りの回転角（１個のパラメータ）の計３個のパラメータが必要である。ベクトルは３個の成分を持つから、回転をベクトルで記述するというのは合理的でありそうだ。剛体の回転を記述する角速度ベクトルは回転軸の方向を向き、角速度の大きさを持つと定義すれば良い。ベクトルの向きは回転の方向に右ネジを回したときに右ネジが進む方向とする。

剛体の各部分の回転速度は、原点からの距離ではなく、回転軸からの距離に比例するのは直観的に明らかだから、ベクトルｒの回転軸に直交する成分だけが回転速度に効いてくる。ベクトル $\vec{r}$ の回転軸に直交する成分はベクトルｒと回転軸の角度を θ とすると $r\sin\theta$ と表される。これに、１秒あたりの回転角を掛けると速度になるというのは直観的に良く分かる。ベクトル積 $\vec{\omega}\times\vec{r}$ の大きさは、$r\omega\sin\theta$ で与えられるが、これもベクトル積の定義と一致している。

これで、剛体の回転を記述するのに角速度というベクトルを使用するのが妥当だと理解できた事にして先へ進もう。

注１　回転という操作はかなり注意を要する。ルービックキューブで遊んだ人にはおなじみの事であるが、ｘ軸の回りに９０度回転しその後ｙ軸の回りに９０度回転するのと、この回転の順番を逆にしたものとは結果が異なる。



回転角が無限小だと、この順番を変えたときの結果の差は２次の無限小になるので無視しても構わない。無限小回転に関係している角速度は和の順番に関係しないベクトルとしても良いが直接有限角の回転を問題とするときには注意が必要である。

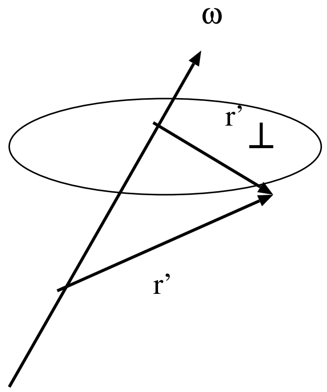
注２　ベクトル積の所で注意したが、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{\omega}$ を鏡に映してみると、面白い。

角速度が定義出来ると、剛体の回転エネルギーを角速度を用いて表せる。質点系の運動エネルギーは重心の運動エネルギーと重心から見た質点の運動エネルギーの和であるが、今は重心は考えなくて良いので、重心から見た剛体の各部分の位置ベクトル $\vec{r}_i$ に対応し

た運動エネルギーのみを評価する。剛体は実際には質点では無いが、位置 $\vec{r}'$ を中心とする体積が dv の微小部分を質点と考え、その密度を $\rho(\vec{r}')$ とし、和を積分で置き換える。

$$T_{rot} = \int \rho(\vec{r}')dv(\omega \times \vec{r}')^2/2 = \omega^2 \int \rho(\vec{r}')dv{r'_\perp}^2/2$$

ここで、$r'_\perp$ という見慣れない記号は、位置ベクトル $\vec{r}'$ の先端から回転軸までの距離である。



通常はこの積分の部分は慣性能率と呼ばれ記号 I が使われる。

$$I \equiv \int \rho(\vec{r}'){r'_\perp}^2 dv$$

この慣性能率を使うと、剛体の回転運動のエネルギー T_{rot} 簡単に記述出来る。

$$T_{rot} = I\omega^2/2$$

質点の運動エネルギーと比較すると、(慣性) 質量と慣性能率、速度と角速度とが対応している。

慣性能率が大きい剛体ほど角速度が小さくても多くの運動エネルギーを蓄えられる。慣性能率を大きくするには、回転軸から遠くに物質を分布させるのが良く (即ち $r_\perp$ を大きくする)、逆に小さくする為には、回転軸を長くしてでも小さな半径の場所に物質を配置する。滑らかな運動を実現するために、回転軸に大きなはずみ車 (フライホイール) を取り付ける場合がある。蒸気機関車の動輪の大きな理由がここにある。

独楽は回転エネルギーを主に芯と地面との摩擦で熱エネルギーに変換しながら回っている。直径を大きくするほうが慣性能率が大きくなるので良くまわる独楽ができる。大きさが同じならば木製のものよりも鉄製独楽の方が良くまわるはずである。

次に、重心のまわりの角運動量と角速度の関係を考えてみよう。上と同じように、質点系の角運動量を密度を持ったある分布に拡張すればよい。

$$\vec{L}' = \int \rho(\vec{r}')dv\vec{r}' \times \vec{v}' = \int \rho(\vec{r}')dv\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

ここで、ベクトルの 3 重積が登場した。ベクトルの 3 重積に付いては、以下の関係式がある。(成分に分けて検算するのが直接的で、手取り早い)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

この関係式を上の積分の式に用いると、重心の回りの角運動量は、角速度に平行な部分とそうでない部分に分けられる。

$$\vec{L}' = \vec{\omega}\int \rho(\vec{r}')dv r'^2 - \int \rho(\vec{r}')dv\vec{r}'(\vec{\omega}\cdot\vec{r}')$$

この式を使って運動を議論するのは、１年生の段階では数学的な準備が出来ていないので、角運動量ベクトルと角速度ベクトルが平行な場合のみを取り上げる。この近似が有効ならば、以下の関係に両者はある。

$$\vec{L}' = I\vec{\omega}$$

ここで、Ｉは先に登場した慣性能率である。この近似が有効なのは、剛体が細い棒であってその回転軸が棒に直交している場合、薄い板であって回転軸が板に直交している場合等がある。回転対称性を有する剛体の、回転対称軸の回りの回転もこの近似で扱える場合である。

重心を原点として、重心の回りの角運動量と角速度の関係を真面目に書き下してみる。簡単の為に、ダッシュを除いておく。定義から

$$\vec{L} = \int \rho(\vec{r})dv\{(x^2+y^2+z^2)(\omega_x\vec{e}_x+\omega_y\vec{e}_y+\omega_z\vec{e}_z) - (x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)(x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z)\}$$

成分に分けて露わに書くと、

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

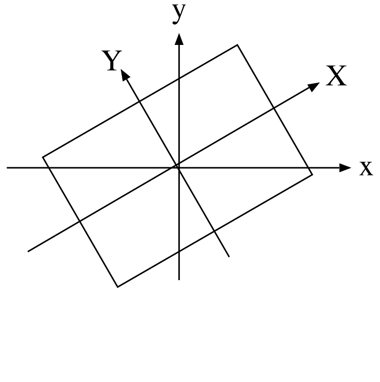
$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

ここで以下の積分を定義した。

$$I_{xx} \equiv \int dv\rho(\vec{r})(x^2+y^2+z^2-x^2), \qquad I_{xy} \equiv I_{yx} \equiv -\int dv\rho(\vec{r})xy$$

その他の下付き記号に付いても同様な組合せで計算する。ここで定義された９個の積分の内、６個が独立であり、剛体の質量分布 (形) と座標系の選び方に依存する定数である。ここで書き下した角運動量と角速度との関係は複雑であるが、旨く座標系を選ぶと簡単になる。即ち旨く座標系を選ぶと、角運動量と角速度が平行となる軸が３本存在し、これらの３本の軸は直交していることを証明することが出来る。角運動量と角速度とが平行となる軸の事を、慣性主軸と呼ぶ。興味のある人は、線形代数という数学部門の固有値と固有ベクトルという部分を学習してもらいたい。座標系を選べば $I_{xy} = 0$ となることを、以下の例で示しておこう。



左図の二つの座標系を取り上げると、$I_{xy} = 0$ であるが、$I_{XY} \neq 0$ は自明であろう。

質点と剛体とでは、質量と慣性能率、運動量と角運動量、速度と角速度が対応関係にある。上の式を見ると、回転は先に角速度を使うのが良いと書いたが、角運動量を用いても良いと言える。角運動量を使うと、回転のエネルギーは以下の様に与えられる。

$$T_{rot} = \frac{\vec{L}' \cdot \vec{L}'}{2I}$$

慣性能率が分母に現れるので、角運動量が一定ならば、慣性能率が大きい方が運動エネルギーは小さい。

原子や分子の世界を記述するときには、角速度ではなく角運動量が基本的な物理量として登場する。先に水素原子の軌道に対してもｓ、ｐ，ｄ軌道等は角運動量を指定して議論をしていた。これは、次の様な事実を考慮した結果である。もう一度、惑星の軌道の議論で角運動量積分が登場した過程を考えてみよう。角運動量を定義し、この角運動量を時刻で微分し $\vec{r}$ と運動量の時間微分 $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ とのベクトル積を計算した。運動方程式を用いると、力が $\vec{r}$ と並行ならばこのベクトル積は必ず０になる。万有引力や静電気に関するクーロンの法則はこの関係を満足している。この様に、力の方向が相対座標の方向を向いている力を中心力と呼ぶ。まとめると、中心力ならば角運動量積分が存在する。この様に、角運動量積分が存在する時は、角運動量を目安にして状態を区別するのが合理的だ。

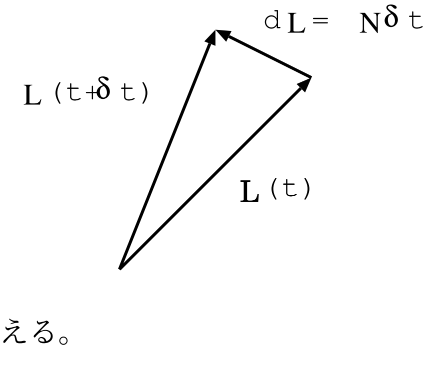
例題の前に、剛体の回転に対する運動方程式をもう一度書いておこう。

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

ここで、角運動量を重心のまわりのものだと仮定すると、右辺の外力のモーメントも重心の回りに評価する。質点と剛体の運動方程式を比較すると、運動量と角運動量、力と力のモーメントが対応している事が分かる。

力の能率はトルクとも呼ばれる。ベクトル積の定義により、角運動量の変化の方向はトルクの向きであるから、力に直交している。力をかけると、その力と直交する方向に角運動量ベクトルは変化する。回転軸を鉛直軸から少し傾けて回転中の独楽の支点から見ると、重心に地球の引力が下向きに働いているので，トルクの方向は水平方向となる。従って角運動量の時間的な変化の方向はこのトルクの方向である。回転軸は下向きには運動しないので独楽の重心を下向きに地球が引っ張るからといって独楽が倒れるわけでは無い。式で書くと、時刻 t、$t + \delta t$ での角運動量を $\vec{L}(t + \delta t), \vec{L}(t)$ と書くと

$$\begin{aligned} \vec{L}(t + \delta t) &= \vec{L}(t) + \frac{d\vec{L}}{dt}\delta t \\ &= \vec{L}(t) + \vec{N}\delta t \end{aligned}$$



即ち、時間 δt の間に、角運動量は $\vec{N}\delta t$ だけ増える。

剛体に対して運動方程式がどのように変更されるかという例として、椅子は何故倒れないか？をまず取り上げてみよう。その次に、直径の同じ中空のパイプとむくの棒を坂

で転がしてどちらが先に坂下に着くかを比較してみる。

椅子は何故倒れないか？

これは、大学生を馬鹿にするな！と怒られそうなタイトルであるが、剛対の安定性を考える為に取り上げよう。椅子には４本の足があり、全体の質量をＭとしよう。重心は地球から、Ｍｇだけの引力を受けている。この地球の引力は、４本の足に分散され, 各足は $m_i g, (i = 1, \cdots, 4)$ の力で床を押している。逆に床が、各足のところでこの大きさの力で椅子が床にめりこまない様に押し上げている。重心にかかる外力は、重力と床が押し上げる力の和であるから、$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ が成立していると、重心にかかる力の和は０になるから重心は動かない。まわりくどい言い方だが、これで重心が動かない理由が分かった。

しかし、椅子が重心のまわりに回転する自由度がまだ残っている。次に、これを力のモーメントを用いて調べよう。椅子の近くに原点をとり、椅子の重心をベクトル $\vec{R}$ で表わそう。また、椅子の４個の足までのベクトルを $\vec{r}_i (i = 1, \cdots 4)$ とする。重力は重心に働くとするから重心のまわりの力のモーメントには寄与しない。床が椅子の足のところを持ち上げる力のつくるモーメント $\vec{N}$ を計算する。

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{4} (\vec{r}_i - \vec{R}) \times m_i \vec{g} = (\sum_i m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} - (\sum_i m_i) \vec{R} \times \vec{g} = 0$$

最後の式に到着するときに重心の定義式 $\sum_i m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$ を利用した。

これで、椅子は重心のまわりに回転しない。重心が各支点のつくる４辺形の内部にあれば、椅子は倒れない。逆に、支点への荷重の分散割合と重心の関係が上に示した関係式を満足しないと椅子は倒れてしまう。時々、レッカー車の転倒事故のニュースに接するが、重心位置を考え違いしたのだろう。免震設計の建物は、カウンターバランスを使用している場合がある。体を動かしたり重い物を持ち上げる時や、ロボットを設計するときにも重心の動きが少ない様にしなければいけない。

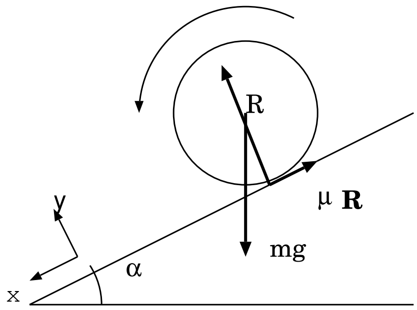
剛体の安定性を考えるのに、ここでは重心に働く力と重心の回りの力のモーメントを評価した。もう一つの考え方は、仮想変位という概念を使い、重心の位置エネルギーを考える。現在の位置から、少しだけ重心を前後左右に動かしてみる。剛体を傾けてみると言っても良い。この時に、重心の高さが増えるならば、その方向には復元力が働くので現実問題として、その方向に倒れる事は無い。位置エネルギーを微分して符号を変えたものが力だった事を思いだそう。位置エネルギーが減る様な方向が無ければ、剛体は安定である。

安定性に関する面白い話題を二つ提供しよう。一つは卵を立てる話である。卵の殻は完全な平滑面ではないので、重心位置をうまく制御すると卵を鏡の上に立てる事が出来る。１０代の終り頃の敏捷性があると、１０分間の練習で５０％程度の確率で成功するだろう。挑戦する人は、ゆで卵の尖った方を下にして立ててみよ。これも僕の経験では不可能ではない。

丸いさいころ。外見上は球だが、転がすと１－６のどれかの目を上にして止まるさいころを知っているだろうか？内部に適当な仕掛けをしておくと、こんな物も作る事が出来る。１－６の目以外に、どんな目の数の球状さいころを作る事が原理的に可能だろうか？

坂道を転がる棒とパイプ

棒とパイプの半径をａ、坂道は水平に対し角度αだけ傾いているとする。坂道に沿って、下向きにｘ軸、これに直角にｙ軸をとる。ｚ軸は特に考える必要はない。
棒やパイプは滑べらずに転がり落ちると考え、質量は当面ｍとしておく。ｙ軸方向には、重力のｙ成分 $-mg\cos\alpha$ と坂道からの抗力 R が逆向きに働く。ｘ軸方向には、重力の斜面成分 $mg\sin\alpha$ と摩擦力 $-\mu R$ が作用する。



$$mx'' = mg\sin\alpha - \mu R$$
$$my'' = -mg\cos\alpha + R$$

ここで ’ と ” は時刻についての１階と２階の微分を示す。

回転に関する方程式は、慣性能率を I、角速度をωとすると、

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = a\mu R$$

最後の式は、μR が棒やパイプと坂の接触面に働く外力 (摩擦力) をあらわし、これに半径ａをかけると、摩擦力の重心のまわりのモーメントになっている。束縛条件は、ｙ軸方向には動かないという事と、ｘ軸方向には滑べらないという条件がある。式で書くと、y’ ＝ｙ” ＝０、とｘ’ ＝ａωである。ｙの式は実質的には使用しない。抗力を消去し、ｘについての束縛条件の式を t で微分した後にωを消去すると、$mx'' = mg\sin\alpha - Ix''/a^2$。この式を $m(1+\frac{I}{ma^2})x'' = mg\sin\alpha$ と書いて見ると、慣性質量が見掛け上 $(1+\frac{I}{ma^2})$ 倍に増えたが、重力質量は変わらないと考える事ができる。右辺の駆動力 $(mg\sin\alpha)$ は一定であるのに、左辺では質量以外に慣性能率分だけエネルギーをもらう部分が増えている。このため坂道を転がる物体の形により、落下速度が異なる。この微分方程式を１度積分すると

$$x' = \frac{g\ \sin\alpha}{1+I/ma^2}\,t + v_0$$

もう一度積分すると

$$x = \frac{g\ \sin\alpha}{2(1+I/ma^2)}t^2 + v_0\,t + x_0$$

ここで、v_0 と x_0 は積分定数であり、t ＝０での速度と x 座標という意味をもつ。初速度０で坂道に沿って距離 D だけ落ちるのに要する時間 T は

$$T = \sqrt{\frac{2D(1+I/m\,a^2)}{g\sin\alpha}}$$

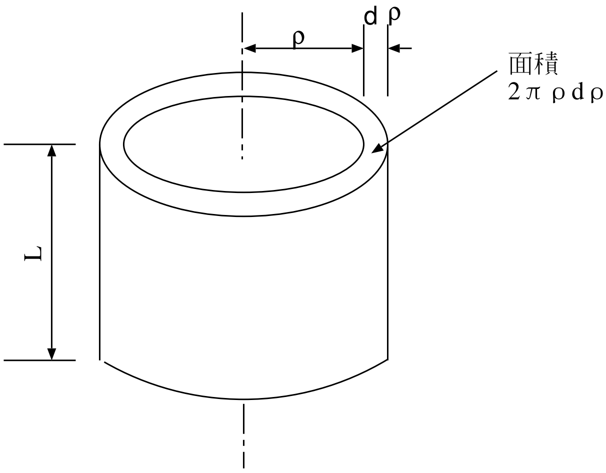
この時、重心の運動エネルギーＫと、回転のエネルギーＲは以下の様に表せる。

$$K = mv^2/2, \quad R = I\omega^2/2 = Iv^2/2a^2$$

ただし、$v = \dfrac{g\sin\alpha T}{1+I/ma^2}$。

問 K ＋ R を計算し、これが垂直方向の落下距離 $D\sin\alpha$ に対する位置エネルギーに等しい事を示せ。

次に棒とパイプに対して、慣性能率をつぎに計算しよう。棒の場合。中心軸を z 軸とすると、長さ L の棒の慣性能率 I(棒) は以下の積分を実行すれば良い。



$$I(\text{棒}) = L\int_0^a \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{Ma^2}{2}$$

但し、ここでは比重を１として体積を質量Mで置き換えた。パイプの慣性能率 I(パイプ) は、パイプの外径と内径をａ，ｂとすると、半径ａの棒の慣性能率から半径ｂの棒の慣性能率を差し引けばよい。質量は最終的なパイプの質量mを用いると $I(\text{パイプ}) = m\frac{a^2+b^2}{2}$ となり、質量で割り、半径の２乗を掛けると、相対的にはパイプの方が慣性質量は見掛け上大きくなる。従って、質量の重い棒の方が軽いパイプよりも早く坂道を転がり落ちる。

もしもガリレオが斜面を用いた落体の実験を球を使わずに棒やパイプで行っていたら、重い方が軽い物よりも早く落ちると結論しただろうか？落体の実験では形に付いて何も言っていないのではないかと推察される。

注 この例で注意すべき事は、斜面を用いる事で、重力加速度が g から $g\sin\alpha$ に減少していると解釈出来る事である。万有引力を遮断する事はできないが、見掛け上弱める事はこのようにすれば可能である。他に、見掛けの重力を弱める方法はないだろうか？考えてみよ。

角運動量の例

角運動量の例は定性的に述べておこう。

地球は、一日に一回転の割合で自転している。赤道付近での地表速度を計算してみよ。赤道上空の空気はこの自転に引っ張られて、動きだすだろう。しかし、空気は地球に剛体的には束縛されていないので、遅れながら自転について行く。だから赤道付近では風は東から西に向かって吹いている。ところで、日本上空ではジェットストリームと呼ばれる風が、地球の自転を追い越すように、西から東に向かって吹いている。これが原因だろうが、羽田から福岡へ行く飛行機の所要時間は逆向きよりも時間が１５－２０分余計にかかっている。何故、日本の上空では地球の自転よりも高速の風が吹いているのだろう

か？地球物理の本を調べてみよ。(ハドレー循環という項目をみつけると良い)

先に潮汐力の話をした。地球が偏平でしかも自転軸が２３．５度傾いているので太陽に近い側と遠い側とで太陽からの引力は強さが異なる。地球の重心に働く平均的な力との差を考えると、近い側では引力であり、遠い側では斥力となる (太陽による潮汐力)。この力のモーメントにより、地球の回転軸は約２６，０００年周期の歳差運動をする。この結果、現在の地球の回転軸を伸ばすと北極星の方向を向いているがその内に北極星はこの地軸の方向からはずれてしまい、北極星という名前は過去の遺物となる。その時でも子熊座のα星という名前は正しい。

両手をはなして自転車にのり、又はオートバイに乗って、カーブを曲がる時には身体を傾けて、高速回転している車輪にトルクを与えて、車輪の有する角運動量の向きを変えている。慣性主軸という単語を先に導入した。３本の慣性主軸を回転軸とする運動のうち、慣性能率が最大 (小) となる軸の回りの回転は非常に安定である事が証明されている。車輪は慣性能率が最大となる軸を回転軸としている。自転車やバイクが走行中の車輪の角運動量を計算してみよ。低速運転中の自転車は倒れやすいが、高速運転中に自転車を倒すのは易しい事では無い。

土星にはリングがある事は、ガリレイ以来良く知られている。

この存在原因の一端は、角運動量の保存則と密接に関係している。無数の粒子がお互いに、影響しあって運動しているとしよう。影響しあっているとは、粒子間で運動エネルギー、運動量、角運動量等のやりとりがある事を言う。

この物理量内、角運動量を取り上げよう。個別の粒子の角運動量を $\mathbf{l}_i$, $\{\imath = 1, 2, \cdots, N\}$ とする。角運動量の保存則を認めると、$\mathbf{L} \equiv \sum \mathbf{l}_i$ は、内部で粒子群がどの様な運動をしているかには無関係である。この総和ベクトル $\mathbf{L}$ の方向を z 軸に選ぶ。即ち、$L_x = L_y = 0$ である。

複数の粒子が影響し合い、自分が持つ角運動量の一部をやりとりすると持ち過ぎの部分を相手に与える方向でやりとりは起こるだろう。その結果、各粒子の角運動量の x、y 成分はどんどん少なくなり最後にはほとんど０となると予想される。各粒子の持つ角運動量 $\mathbf{l}_i$ の x、y 成分が０となった暁には、角粒子は全て x-y 平面で運動する様になる。このプロセスを認めると、最初に立体的にどのように分布していても時が経つと平面内の運動に落ち着く。

従って、土星の廻りに微粒子を無数にばらまいて運動させても、時間と共に平面運動に収束する。太陽系の惑星が全て、一つの公転面内を運動するのも、角運動量の保存則に起因すると考える事が出来る。

問 密度一様な球の角運動量を半径と自転周期の関数として計算せよ。この式に定数を適当に代入して、太陽の持っている角運動量を推定せよ。次に、木星の質量、公転周期及び公転半径から木星の公転に対する角運動量を推定せよ。この両者の値を比較せよ。もしも太陽から木星が産まれたならば、当然太陽の角運動量の方が断然大きいだろう。

この計算を地球と月の関係に適用するのも、面白いだろう。

７) 多数の粒子が作る系

相互作用

先に、万有引力は一方が他方に一方的に引力を及ぼすのではなく、お互い様であると書いた。このようにお互いにエネルギーや運動量を交換しあう事が力を及ぼす事であると考える。角運動量その他の物理量を交換する場合もある。このような観点から、粒子間に引力や斥力が働くことを、粒子が相互作用すると言う。力の源をつけて表現するときは、例えば重力の相互作用、電気的な相互作用等の形容詞を付けて表現する。

重力の相互作用は万有引力で表現されている。これが、逆二乗の法則に従うのは、重力の力線が無限の彼方まで、真っ直ぐに、しかも途中で一様に広がることを除けば、減衰せずに伝わるからである。重力を伝える空間が一様でないと、この事情も影響を受ける。一般相対論は、この事情を詳しく調べている。重力レンズや歪んだ空間という表現を耳にした事があるだろう。空間が歪むと光も直進せずに湾曲しながら進む。

ところで力線とは何だろう？　電磁気学の基礎方程式を書いた Maxwell は力線はゴムの様に伸び縮みして引っ張りあい、力線同志はお互いに反発しあうと考えた。電荷間を繋ぐ電気力線が縮もうとするから電荷間に引力が作用し、力線同志はお互いに反発し合うと考えると、力線は空間的に一様に分布する傾向を示す。空間的に力線が伝わる速度が、光速度である。この考えは、現実を説明するには便利だが力線という仮想的な概念を導入しているので少し正鵠を得ているとは言い難い。

湯川は相互作用のイメージとして、次の様なモデルを作った。キャッチボールという遊びを思い出そう。一方Ａから他方Ｂにボールをなげる。Ｂはこのボールを受取り、次にボールをＡに投げ返す。ここで、ボールを抽象化しよう。ボールはエネルギーや運動量をＡからＢへ輸送する媒体であると考えると、ＡからＢへ又は逆の方向にエネルギーや運動量が送られるという事は、何かボールの様にエネルギーや運動量（角運動量、電荷・・・）を有する粒子がやり取りされるであり、このような粒子をやり取りすることが、相互作用することである。例えば、光子は電磁気的な相互作用を媒介する粒子である。キャッチボールをするとき、いろんなボールが使えるように、光子にも振動数、進行方向、運動量または角運動量、偏極方向等の属性がある。光子が運ぶエネルギーはその振動数に比例する（アインシュタイン）。

原子核の中で、陽子や中性子がお互いに引力を及ぼすのは中間子という粒子がやりとりされている為であると湯川は考えた。

問 ^{56}Fe を ^{55}Mn と陽子がくっついて出来た原子核と考えよう。この原子核から陽子を一つ取り出すのに必要な (陽子の束縛) エネルギーは約 5.8 ＭｅＶである。ここで、１ MeV というのは約 $1.6 \times 10^{-13} J$ のエネルギーである。陽子と ^{55}Mn の距離を５ｆmだと仮定して、このときの万有引力のポテンシャルエネルギーを計算し、ここに与えた束縛エネルギーと比較よ。万有引力のポテンシャルで GMm を $\dfrac{25e^2}{4\pi\epsilon_0}$ で置き換えると、電気的な相互作用のポテンシャルが計算できる。ここで、２５ｅはマンガン原子核の持つ電荷であり、e^2 となっているのは、陽子の電荷が更に掛けられた為である。

これらの大きさを比較すると、原子核の中で働いている力 (核力)、電気的な力、万有引力といった力の大きさを比較できた事になるだろう。但し、ここでは束縛エネルギーとポテンシャルエネルギーを混同して比較している事になる。当然の事ながら、束縛エネルギーの値 (正) はポテンシャルエネルギー (の期待値

の絶対値) よりも小さくなければならない。正しく比較できたならば、今世紀の始めころから、特殊相対論とは別の観点から言い出された、原子核エネルギーについて少し知る事が出来るだろう。原子核の存在を発見したラザフォードは、ニュートンのりんごの故事を引用して次の様にのべている。“背後でポトンとりんごの落ちる音がしたので、すぐ近くにりんごがなっているものと思って後ろを振り向いた。ところが近くには枝さえ見付からず、はるか高いところにのみりんごがなっていた。”

短距離力

２粒子間に働く力を考えてみる。万有引力が働くのは、惑星や恒星間の様な宇宙現象が主である。日常生活に万有引力が登場するのは、地球との間に働く重力だけと仮定してほぼ間違い無い。例えば、１ｍの定義の様に高い精度を要求される場合にも、万有引力の効果は考慮されていない。

大きさの比較の一つの具体例として、質量十万トンの船が、１００ｍの距離に置かれた同じ質量の船から受ける万有引力 F_g と、１ｍ／ｓの風速のそよかぜによる力 F_w を比較してみよう。

$$F_g = \frac{6.7 \times 10^{-11}(10^8)^2}{100^2} = 67N$$

次にそよ風の及ぼす力を概算する。船の断面積を５ｍ×１００ｍ＝５００ｍ^2 と仮定しよう（自信のある数字ではないが)。　先ず空気の密度は $1.2mg/cm^3 = 1.2kg/m^3$ とする。一秒間に船にあたる空気の質量は、$1.2kg/m^3 \times 500m^2 \times 1m/s = 6 \times 10^2 kg/s$。この質量の空気が $1m/s$ の風速で跳ね返されるとすると、一秒当たりの運動量の変化 δP は $\delta P = 6 \times 10^2 kg/s \times 1m/s \times 2 = 1.2 \times 10^3 kg \cdot m/s^2$。一秒当たりの運動量変化は、船の受ける力に等しいから $F_w = 1.2 \times 10^3 N$

この例のように、非日常的と思える質量の物体に対してさえも、万有引力よりそよ風の方がずっと大きな影響を及ぼす。風速 $1m/s$ というのは、気象庁の風力階級表によると風力１、風見には感じず、煙のなびくのを見て風が吹いていることが分かる程度の非常に弱い風である。このように、日常生活を支配する力は万有引力では無く、ずっと影響力を有する原因があるはずだと想像出来る。

我々の日常生活を統べる ” 力 ” は何か？

高校迄に学習した力としては、万有引力以外に原子力（原子 ” 核力 ” という方が正確だが)、静電気力（クーロン力と呼ばれる)、静磁気力、電流と磁場との相互作用等がある。この内核力は、日常的には原子力発電と原・水爆として登場する。その他、進化のある時期の恒星や現在の太陽の熱源、地球内部の熱源という意味もあるが、日常生活としては間接的効果しかない。静電気的な力は電荷がなければ働かないし、距離の２乗に反比例する。一方日常生活では、二つの石ころを取り上げたとして、この石ころ間の引力は無視できるが、これらが接触すると急に極端に大きな反発力が働き、接触したときの距離以上に二つの石の重心を近付けるのは不可能に近い。平均的な固体は電荷を持たないし、固体間に働く力は距離の２乗に反比例しているとは思えない。

例　自転車の空気注し (空気入れといわないと通じないかな？ 日本語として’ 入れ’ と’ 注し’ の区別はつきますか？) を使う時、ハンドルを押し込むのに必要な力は、動かす距離にほぼ反比例する。

次に、二つの磁石を近付けた時の力の掛かり方を実験してみよ。近付けると急に大きな引力や斥力が働く。これで大体 $1/R^3$ の力になっている。

力が距離と共にどう変化するかを調べるには、単純化して単結晶の物質に力をかけたときどのように圧縮されるかを調べればよい。　(力)x（力の方向に動いた距離）＝ (仕事) という関係式を思い出すと、この力が保存力ならば、この固体内部でのポテンシャルを調べる事になる。押して調べるなら、引いても調べよう。固体が固体としての形を保っているという事は、固体内部の構成要素（原子や分子）間に引力が働いている事を示している。良く理解されているイオン結晶の例を先ず引用しよう。ＮａＣｌの場合、内部のイオン間に働くポテンシャルは大体以下の様に書ける。

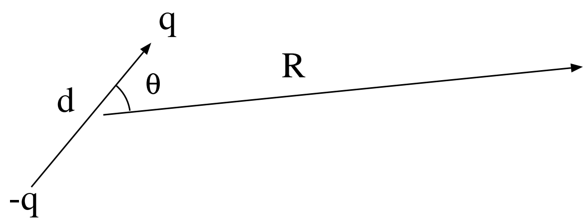
$$V(R) = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\lambda A}{R^n}$$

第１項の α は 1.75 程度の定数であり、主に近くのイオンからの電気的な引力に関係している。α が整数でないのは、お隣の電荷も考慮するためだろうと想像できる。もしも第１項だけならば、イオン間距離は小さい方が安定だから、$R = 0$ になり、この結晶は無限小の大きさになり、経験事実と矛盾する。第２項は有限の大きさに結晶を維持する為に必要な項である。第２項の定数 λA は結晶の平衡イオン間距離 R_0 を用いて $\lambda A = \frac{\alpha e^2 R_0^{n-1}}{4\pi\epsilon_0 n}$ と書ける。ＮａＣｌの場合 $R_0 = 2.81 \times 10^{-10} m$ であり、$n = 9.4$ 程度である。第２項は平衡点から少し圧縮しようとすると、非常に大きな反発力が働くことに対応している。この項の原因は量子力学を習うまでは、お預けである。パウリの排他律というものがあるためだとだけ言っておこう。

化学の教科書に、原子を構成する電子には納まるべき位置 (電子の束縛状態) があり、エネルギー的に、下から順番に電子がはいって、各種の元素を構成していると習っただろう。座席が一杯になるという考えの根拠を与えているのが、パウリの排他律である

第１項が一番大切だから、大雑把に言って、ミクロの世界では電気的な力が働いていると考えてよい。ミクロなイオンの世界では電気的な力が大きい事を認めたとして、日常生活の様なマクロの世界にもクーロン力が働いているのだろうか？　電荷を持たない分子間のポテンシャルは分子間距離をＲとすると、$1/R^6$ の引力と $1/R^{12}$ の斥力の和として書かれる事が多い。上に説明したように、斥力部分は古典物理では説明不可能だとしても、引力部分は説明出来ないものだろうか？

何故、引力部分にクーロン力の $1/R$ よりも次数の高いポテンシャルが登場するのだろう？という風に問題を設定して回答を考えよう。クーロン力から、次数の高い力を説明してみよう。電荷が０だから、＋ｑと－ｑの電荷が小さな距離ｄだけ離れている系が電荷の重心から大きな距離Ｒの点につくるポテンシャルを計算してみよう。但し、$d << R$ である。



$$
\begin{aligned}
V(R) &= C\{\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2/4-Rd\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2/4+Rd\cos\theta}}\} \\
&= \frac{C}{R}\{(1-d\cos\theta/R+d^2/4R^2)^{-1/2}-(1+d\cos\theta/R+d^2/4R^2)^{-1/2}\} \\
&= \frac{Cd\cos\theta}{R^2}+O(\frac{d^3}{R^4})
\end{aligned}
$$

最後の式で、第２項は d^3/R^4 に関係する項が次に来るがこの項以降は第１項に較べると小さいので無視するという意味で使われている。これでポテンシャルの一番大きな項は $1/R^2$、力はポテンシャルを微分するから $1/R^3$ に比例する事が言えた。クーロンポテンシャルと較べると次数が１次上がっている事に注意しよう。この事情は、潮汐力のところでも登場した。

しかし待てよ。ここでの計算では、点Ｒに電荷があるときの力を計算したのであって、電荷を持たない物体間の力にはなっていない。点Ｒにも大きさが等しく符号の異なる電荷を置いてこのときの力を計算せねばならない。全体では４個の電荷の作るポテンシャルを計算せねばならない。計算が面倒だから、上と同じ様に計算するともう１次次数が上がる事を認めておこう。(R で微分するだけの事であるが $\cdots$) 興味のある学生は電磁気学の教科書の双極子ー双極子相互作用の項を読もう。

ここでの計算の特徴をまとめておこう。

１）電荷は正・負２種類あるので、両者からの力はほとんど相殺する

２）原子内では正・負の電荷の位置が一致しないので、相殺は完全でなく少しだけ残る。

３）相殺せずに残った部分は静電気的な力よりも $1/R$ の次数が上がって遠方では早く０になる。逆に近付くと、急に大きな力が働く。

４）登場する電荷の数が増えるともっともっと次数が上がる事は想像に難くない。

次数が高くなると、高ければ高いほど変化が激しいから、近付くと急に大きな力が働く。従って、物体が離れているとほとんど力が働かず、接触したときにのみ斥力が感じられるという事が経験される。電荷の相殺という現象に注目すると、相殺という現象は程度問題であるから、この事が物質の多様性を導くための必要条件となっている。即ち、鉄は堅く豆腐は軟らかいという理由の一端だと了解出来よう。

ここでは、日常生活で登場する力の１側面を定性的に説明した。もっと詳しく説明する努力はほとんど行われていないと思う。電子の波動性を正しく取り入れた量子力学と物質構造に関する理解が必要である。化学結合の詳細については化学者の言葉に耳を傾けて貰いたい。

二体散乱の運動学

多数の粒子の相互作用は複雑だから先ず２個の粒子の散乱の運動学的側面を調べよう。二つの物体が運動中に相互作用し、エネルギーと運動量をやりとりする過程を散乱と呼ぶ。２物体間ではやりとりされるが、その和は変化しないとするのが、エネルギーや運動量の保存則である。この時に働く力が、２物体間の相対距離のみに依存するならば (中心

力ならば)、角運動量も変化しない。一方の影響は他方が非常に近くまで来た時にのみ効果が発生すると仮定すると、散乱角をきめると、散乱後のエネルギーや運動量は計算可能である。簡単の為に、標的粒子は散乱現象が起こる前には静止していたと仮定してこの事情を調べてみよう。

次の記号を用いる。入射 (標的) 粒子の質量をm（M)、入射粒子の運動量をｐとする。入射粒子は角度 θ の方向に散乱され、散乱後の入射 (標的) 粒子の運動量を p'、P' とする。エネルギーの保存則は運動エネルギーを用いて以下のように書ける。

$$\frac{P'^2}{2M} + \frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

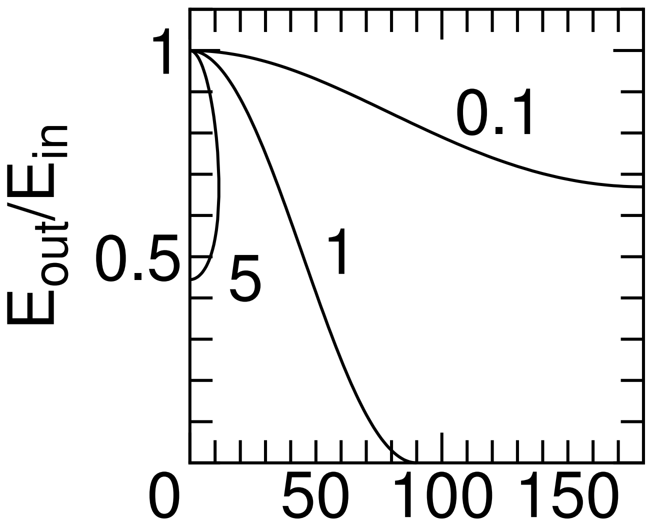
一方運動量の保存則は、余弦定理を用いて次の様に書ける。

$$P'^2 = p^2 + p'^2 - 2p\,p'\,\cos\theta$$

この二つの方程式から P' を消去すると p' についての２次方程式が出て来るが、m ＜ M の時には、p' ＞０という条件をつけると、解は唯ひとつ存在する。この場合には散乱角には制限は付かない。

散乱粒子のエネルギーは、後方に散乱される（散乱角が大きい）程小さくなる。この原因は、入射粒子の運動エネルギーの一部が反跳粒子 (質量M）の運動エネルギー $P'^2/(2M)$ に利用されるからである。図を参照。図中の数字は m/M の値である。この散乱粒子の運動エネルギーの小さくなり方は、質量比（m／M）が小さいほど小さく、極端な場合として、Mに比較してmが無視できるならば、散乱後も運動エネルギーに変化は無い。例えば、壁にピンポン玉が跳ね返される場合や、可視光線が電子により散乱される場合がこの例である。可視光線は、反射によりその振動数はほとんど変化しない。質量の等しい粒子（m＝M）の散乱現象だと最大散乱角は９０度である。０度散乱は実質的に散乱されずに素通りする場合であり、入射粒子が静止し、標的粒子が入射粒子の全運動エネルギーを貰って出て行く場合が９０度散乱に対応する。後者の例は、ビー玉遊びやカチカチボールといった玩具で近似的に実現できる。

標的粒子の質量Mが入射粒子の質量mよりも小さい場合には、一般に二つの解が存在する。この場合には、散乱角度に制限がつき、その結果後方の角度には散乱されない。この例はボーリングや砲丸とソフトボールの衝突を思い起こせば十分だろう。



図中の数字、0.1、１、5 は質量の比 m/M を表す。縦軸は、入射粒子と散乱粒子のエネルギーの比を表す。横軸は、散乱角度を度単位で示した。

これまでの計算の範囲ではエネルギーと運動量の保存則だけからきまり、力の種類には依存しないので運動学と呼ばれている。入射粒子と、標的粒子の間の相互作用の効果は散乱現象の結果にどの様に影響を与えるのだろう？それは、散乱頻度 (確率) である。ある種の力では散乱は前方にしか実質的に起こらないのに、別の力では後方散乱もかなりの頻度で起こる。一般に散乱確率は入射粒子のエネルギーにも依存する。晴天の日の空は青く、朝焼けや夕焼けの空は赤い原因の一部は空気はエネルギーの高い青い光を、エネルギーの低い赤い光よりも多く散乱するからである。一方万有引力やクーロン力による散乱は非常に特殊であり、例えば２０度と３０度に散乱される確率の比は入射粒子のエネルギーには依存しない。

我々が、明るいところで物体を見る事ができるのは、物体に含まれる電子が散乱する光を目で検出しているのである。物質により、光を散乱する確率が異なる、また光のエネルギーにより散乱される割合は複雑に異なる事が、基本である。当然光の屈折も散乱現象として理解できる。

これまでは二つの粒子が入ってきて、二つの粒子が出て行く場合であった。三つの粒子が出て行く場合はかなり複雑になり、あるときには、２０世紀最大の物理学者の一人である、ニールス・ボーアがエネルギーの保存則は成立しないのではないかと疑った場合すらある。この時は、エネルギーと角運動量の保存則は正しいと仮定して、中性微子の存在が予想され、かなり後になりこちらの方が正しい事が分かった。

摩擦

二つの質点が充分遠く離れていると、お互いに影響を与えないと考えられる。地球以外の万有引力が無視できるという様な日常生活では、これはかなりの精度でただしい。この二つの質点が近付くと、お互いに力を及ぼしあうために、運動エネルギーの大きな方から小さな方へのエネルギーの流れが生ずる。"力"という概念を使うならば、運動エネルギーの大きな方の運動は抑制されるように力が働く。

多数の質点がお互いに力を及ぼし合う時にも、同じような現象が観測される。例えば、高所からピンポン玉を落すと、最初の内はピンポン玉と地球とのエネルギーのやりとりだけを考えればよいが、その内にピンポンの周囲の窒素や酸素分子とのエネルギーのやりとりも大きくなり、遂には地球の重力で加えられるエネルギーは全部、空気分子がもらって、ピンポンの運動エネルギーは増加しないようになる。このとき、ピンポンの表面のプラスティック分子と空気分子は無数の衝突を繰り返しているのだろう。この例の様に、多数の原子や分子がエネルギーのやりとりに関与している場合、これを巨視的に見て、摩擦と呼ぶ事がある。摩擦の特徴は、目に見えない無数の原子や分子の運動エネルギー (及び内部エネルギー) として巨視的な物体の運動エネルギーが散逸する事である。

ある種の物理学者はこのような、エネルギーの流れる方向として、時間の向きを定義している。ニュートンの運動方程式は一般に時間の向きを変えても成立するので、時間の向きを決めらず、このことを時間反転不変性と呼ぶ。

ピンポンが空中を自由落下する時の様に、空気の抵抗を如何に取り扱うかを例に取り摩擦の扱い方の一つを紹介しよう。摩擦は、微視的には自由度が多すぎて扱えないので、特徴的な一つ又は二つのパラメータで代表させる必要がある。摩擦力が働いて、ピンポンの加速を妨げると考える。

摩擦力は、静止している時には働かないので、速度が小さければ、速度に比例すると考えられる。速度が大きくなると、速度の２乗の項も顔を出してくる。摩擦力は速度の関数だと考えて、これをテイラー展開したと考えれば良い。速度 v が非常に小さい時、半径 a の球体に働く摩擦力 F_f をストークスは $F_f = 6\pi\eta a v$ と書いた。ここで η は粘性係数と呼ばれる物質の定数である。球体の縁の部分のみが、空気とこすれて、空気分子に運動エネルギーを与えていると考えるのであろう。このストークスの法則は霧雨程度の速度では成立する。電子の素電荷を決定したミリカンの実験は、その当時の粘性係数が正しなかったのでその後の別種の測定と細かいところで一致しなかったという話を聴いた事がある。

更に速度があがると、摩擦力は速度の２乗に関係してくる (ニュートン)。これは、次の様なイメージである。速度 v、半径 a の球が運動していると考える。１秒間に球が通過する体積は $\pi a^2 v$ である。この体積内の各空気分子に速度 v に比例した運動量を与える。結局、速度 v に比例した数の分子に、v に比例した運動量を与えるので全体として v の２乗に比例した運動量の変化が起こる。単位時間当りの運動量の変化が力であるから、摩擦力は速度の２乗に比例する。

鉛直下向きに z 軸をとり、ピンポンの落下の様子を記述する次の運動方程式を解いてみよう。

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v - \beta v^2/2$$

ここで、摩擦力の符号は運動方向とは必ず逆方向に働くように選ばねばならない。式が面倒になるから、$\beta = 0$ の場合を解き、後で、α, β が共に０でない場合は、興味ある学生

用に解法のみを簡単に記す。$\beta = 0$ を仮定し、この微分方程式を積分するために、次の様に変形する。

$$\int \frac{dv}{g - \alpha v/m} = \int dt$$

この積分を実行すると、

$$-\frac{m}{\alpha} \log\{(g - \frac{\alpha v}{m})/C\} = t$$

ここで C は積分定数であり、初期条件を満足する様に決められる。対数関数を指数関数であらわすと、

$$v = \frac{m}{\alpha}\{g - C \exp(-\alpha\, t/m)\}$$

初期条件として $t = 0$ で $v = 0$ を要求すると、$C = g$ と積分定数が決まる。落下位置を時刻 t の関数として表す為には、v を $\dfrac{dz}{dt}$ と置き直して、もう一度積分すれば良い。t＝０で z＝０となるように、積分定数を調節した後で、

$$z(t) = \frac{mg}{\alpha} t - \left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 g\{1 - \exp(-\alpha\, t/m)\}$$

無限の時間が経過すると、速度 v は一定値 (mg/α) に収束する。収束した速度は最終速度とか終端速度と呼ばれる。この一定値に収束する時間の目安として、m/α がしばしば使用され、時定数と呼ばれる。物理量が指数関数的に減少する場合、指数関数の値が 1/e になる時間を目安として時定数を使用している。$\exp(-\alpha T_{1/2}/m) = 1/2$ を満足する $T_{1/2}$ を定義し、半減期と呼ぶ場合もある。要するに、値が半分に減少するのに要する時間である。例えば ^{14}C 原子核の半減期は約５，７００年であり、この半減期は年代測定に利用される場合がある。

問 この v や z の式で、αが０に近い時、摩擦の無視できる式になることを、$\exp x = 1 + x + x^2/2 \cdots$ とテイラー展開して確認せよ。v を１次で近似したならば、z は (v を積分した量だから) ２次まで近似しなかればならない。

最終速度は重力による力 mg に比例している。加速度でなく、速度と力が見掛け上比例している事に注意！ (結果だけを見ると、ニュートンの運動方程式に反している) 電子工学の分野で基本的な関係式として、オームの法則という式が利用される。‘導線に流れる電流 I は、この導線の両端の電位差 V に比例し、比例係数を抵抗 R とする’ というものである。式で書くと、

$$V = I\,R.$$

この関係式も、ミクロにみると力 (ここでは電圧) と速度 (ここでは電流) が比例するという形に書かれている。オームの法則で時間の向きを逆にすると、電流の向きも逆になるが、電圧の向きは逆にならないので、おかしな事になる (時間反転不変性が成り立たない)。先に述べたように、抵抗体のなかで熱として電子の運動エネルギーの散逸が起こっているから、時間が逆向きの法則は成り立たないのである。オームの法則が成立する時定数は導体の場合は非常に短い。１００ MHz の TV の設計にもオームの法則が使えるとすると、10^{-8} 秒で導体中の電子は最終速度に到達していることになる。

雨粒が小さく、速度も小さいときには雨粒の中では水分子が渦をまいて運動し、球形渦と呼ばれる状態が実現している。更に雨粒が大きくなると、雨粒の形はいわゆる雨だれの形ではなく、先頭部分は丸みを帯びていない。どちらかと言うと先頭部分は、空気抵抗の為に平に押し潰されている。この様な時の運動方程式では、β は当然０でない。出発点となる運動方程式を、以下のように書く。簡単の為に、α は置き換えられている。

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{2m}\{(v+\frac{\alpha}{\beta})^2-\gamma^2\} \qquad ここで\gamma^2 = \frac{2mg}{\beta}+(\frac{\alpha}{\beta})^2$$

この式を積分の形に変形すると、

$$\int \frac{dv}{(v+\frac{\alpha}{\beta})^2-\gamma^2} = -\frac{\beta}{2m}\int dt$$

左辺を部分分数に分割し、$\int dx/x = log x$ という関係式を利用する。ただし、右辺の対数関数の底は e である。

$$log\left(\frac{v+\alpha/\beta-\gamma}{v+\alpha/\beta+\gamma}\right) = -\frac{\beta\gamma}{m}(t-t_0)$$

対数関数を指数関数で書くと

$$v = \gamma\frac{1+\exp(-\beta\gamma(t-t_0)/m)}{1-\exp(-\beta\gamma(t-t_0)/m)} - \alpha/\beta$$

もう一度時刻で積分して z と t の関係式をつくる為には、指数関数の部分を独立変数にする置換積分とし、更に部分分数に分割し、先に示した１／ x の積分公式を利用するとよい。結果を少し整頓して書くと次の様になる。

$$z - z_0 = (\gamma-\alpha/\beta)t + (2m/\beta)\log\{1-\exp\{-\beta\gamma(t-t_0)/m\}\}$$

雨粒の大きさと、最終速度に関して以下の様な関係が気象学の教科書に記されている。

直径 (cm)	0.001	0.01	0.1	1	4
速度 (cm ／秒)	0.29	26	390	1390	2810

気体や液体の粘性は、構成する分子間の力に大きく依存する。例えば、水の分子間には水素結合に起因する引力が働き、有る意味で分子がバネで繋がれている様なものである。このバネを切ったり、繋ぎかえたりしながら水は流れている。このバネは温度が高いほど切れ易いから、液体の粘性係数は温度と共に小さくなる。食卓にのぼる蜂蜜や油の流動性を思い出すと、納得がいくだろう。注意深い学生は、通常の水とお湯を湯のみに注ぐときの水の振舞いや音の相違にも気が付いているだろう。湯のみに注がれる音を、とくとくとくとくと表現した時は水かお湯かは誰にでも判断できるだろう。

気体分子の粘性係数の温度依存性は液体とはかなり異なる。

内部エネルギーに付いて

分子を質点と考えると、この分子は運動エネルギーと万有引力によるポテンシャルエネルギーしか持ち得ない。しかし、この分子の内部構造を考慮すると、これ以外の形態のエネルギーも考え得る。例えば、分子は複数の原子から構成された有限の大きさ (無限小では無いという意味) を有すると考えると、回転能率をもっていると考えてよい。ゆえに、回転運動に関するエネルギーを持っているはずである。又、複数の原子を分子と言うかたちにつなぎ合わせている棒に相当する部分 (先に、これは電気的な力だと説明した) も大きな力を加えれば伸びたり縮んだりするだろう。即ち、原子間の距離が振動する事も考えられる。分子に電子やイオンを衝突させると、分子が振動したり回転したりする。振

動や回転運度は、小は原子核の励起エネルギーから、大は太陽や地球の振動 (地震) や回転 (自転) 運動のエネルギーにも観測されている。振動には復元力の存在が必要であるが、回転には復元力は必ずしも必要でない。だから、振動運動に関係するエネルギーの方が、回転に関係する運動エネルギーよりも大きくなる傾向にある。代表的な分子では、振動エネルギーの方が回転エネルギーよりも１００倍ほど大きい。

高い電圧を掛けた状態で、空気の圧力をさげていき放電状態をつくると、主に窒素分子が振動や回転をするために赤みがかった光が観測される。雷放電の時にも、この色の光が観測される。物質に色がつく原因の一つが分子振動であろう。

この様に、外見上は $mv^2/2$ で表せる運動エネルギーとは捉えにくいエネルギーを内部エネルギーと呼ぶ。分子単独では回転と振動のエネルギーしか考えられないが、分子同志の間にも力が働いている場合がある。例えば、気体が気体であるという事は気体分子間に働く力は斥力であるか、又は引力が非常に弱くその引力の下での脱出速度（引力を振り切って自由に運動するための最低の速度）よりも大きな速度で分子が運動しているためであろう。一般的に気体を圧縮すると圧力が上がるのは、気体分子間に斥力が働いている様に見える。逆に、液体や固体では熱運動に伴う運動エネルギーよりも大きな束縛エネルギーに対応する引力が分子間に働いている事を示唆している。この引力に関係する位置エネルギーも内部エネルギーとなる。固体が液体に変化する時の溶解熱や、液体が気体に変化する時に出入りする気化熱も内部エネルギーと考えておけば良い。

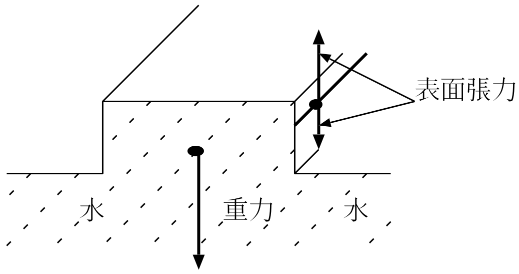
表面張力

物質を構成する原子や分子を異種の原子や分子に近付けると、相互作用をし、お互いに引力や斥力を及ぼし合う。引力になるか斥力になるかは分子の状態や組み合せに強く依存する。水とガラスだと引力が働くが、水銀とガラスだと斥力になるという例は良く知られている。水と油の間に斥力が働くことも、良く知られている。また、親水基と疎水基という概念は、化学を勉強した学生には馴染み深い。同種金属同志を強い力で擦り合わせると境界面が分からなくなる、”かじり”という現象が起こる事は機械工学者の常識である。この場合、物質の表面状態により現象は非常に大きく異なる。大気中に置かれた物質の表面には、水分や空気が吸着されているという事実も知っておかねばならない。村の鍛冶屋という童謡に ”飛び散る火の玉、走る湯玉 ”という表現が有る。この走る湯ダマというのは、赤熱した鉄の上を、水玉が高速で動いて行く現象だと解釈しよう。これは水滴の下部の鉄に面した部分が蒸発し、この蒸気が水玉を浮かす現象だろう。この例の蒸気と同じく様に、ミクロに見ると吸着された物質がボールベアリングの役割をしている。少し一般化すると、潤滑や接着という概念も物質表面での分子間力のなせるところであると了解できよう。

異種の物質を近付ける時、電子の束縛エネルギーは一般に異なるので、一方の分子の束縛エネルギーが他方よりも充分大きいことがありうる。このときに、電子は向こうの分子に乗り移った方が安定だ。電子がより安定なむこうの分子に移ったころあいを見計らって、電子がもとの鞘に戻ってしまうよりも早く物質を引き離すと、摩擦電気が起る。

分子間力は、これまでに説明したように非常に短距離力であることが特徴である。お隣の分子とのみ力を及ぼしあっていると、単純に考えておこう。この力の大きさの表し方として、仮想的に液体の表面に長さ１ｃｍの切れ目を入れた時、この切れ目の両端には

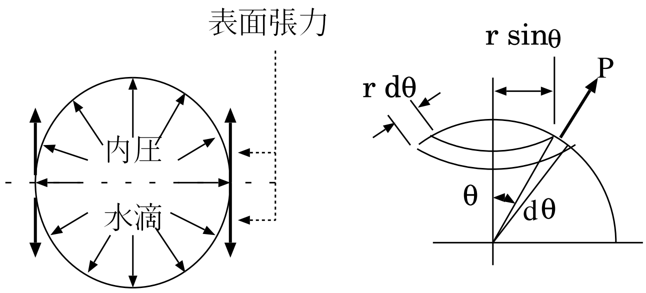
どれくらいの力が働いているかを用いる。



１８度の水だと、約７３ｄｙ／ｃｍ(０．０７３Ｎ／m)である。ｄｙは小さな力の単位でありダインと読む。１ｄｙ＝１０ $^{-5}$ Ｎの事である。水面を水平からずらすと、この表面張力のために元に戻ろうとする復元力が働く。さざ波と呼ばれる波の原因はこの表面張力である。これに対して、長い波長の波には重力が関係している。重力と表面張力の大きさを簡単に比較しておこう。例えば、水平な水の表面に仮想的に断面が１ｃｍの正方形の長い水の棒を置いてみる。この水の棒には働く表面張力の下向き成分は、棒の左右を考えると１ｃｍ当たり約１４５ｄｙである。一方、重力による下向きの力は、９８０ｄｙである。この水の棒の高さを１mmに減らしても表面張力の大きさは変わらないが、重力は１／１０になるから、この程度の大きさのところで主役の交替がおこり、これよりも小さければ、重力よりも表面張力の方が大切な役割をする。直径１ｃｍの水玉は重力で歪んでしまい、地上では作れない。この程度の大きさを境として、水中での運動形態は大きく変わる。いわゆる魚の形をした生物で、成長した時の大きさが１ｃｍ未満のものは、この世にほとんどいない。水の表面張力や粘性が関係している。ミクロな機械を設計するときには、分子間力は非常に大切な役割をする。短距離力である分子間力は、全ての物質の境界面で働いているから、界面力という表現を使う人もある。

上の例の質量の様に、力の大きさが体積に比例して変化すると考えられる力を体積力と呼ぶ。一方、圧力のように面積に比例する力を面積力と呼ぶ。物体の大きさが異なると、どちらが重要になるかという事が変わってしまう。夏目漱石の三四郎という小説に、光の圧力を測定する場面があり、重力は３乗に比例し、圧力は２乗に比例するので、圧力を検出する物体のサイズは小さくなければならないという意味の文が登場する。

次に半径 r の球形の水滴の内圧と表面張力の関係を調べてみよう。球の中心を通る面で二つの半球に切ったと考えよう。



図の上半分の半球を下向きに押している表面張力による力 $F_{下}$ は、半球の円周長 $2\pi r$ と、単位長さ当たりの表面張力 T の積である。一方上半分の球面を内部から外へ押し上

げている力 $F_{上}$ は、内圧 P が外向きに押す力の上向き成分である。

$$F_{上} = \int_0^{\pi/2} 2\pi r \sin\theta \times r d\theta \times P \times \cos\theta = \pi r^2 P$$

この二つの力が釣あって居るところが安定な状態であるから、

$$P = \frac{2T}{r}.$$

この P だけ、内部の圧力は外部よりも高い。シャボン玉の様に、内部にも空気が入っている場合には、面には裏と表があるので表面張力 (従って内部の圧力) をこの式の２倍として計算しなければならない。従ってシャボン玉の場合、内圧が外圧よりも $4T/r$ だけ高いところで平衡になっている。

水滴の内部と外部とでは圧力が直径により異なるので、即ち水滴の表面にある水分子の内側への引っ張られ方は水滴の大きさに依って変化するので、雲の中での水滴の成長 (蒸発) 速度にも大きさによる違いがみられるだろう。半径が０．１mmの水滴は何度Ｃで沸騰するのだろう？玩具のゴム風船を膨らました経験はあるだろう。最初の内、球形には膨らんでいないとき、無理に空気を吹き込むと、曲率半径の大きな膨らみかけた部分が選択的に膨らむので均等に膨らませる為には手で調節してやる必要がある。ゴムの張力が一定ならば、曲率半径の小さい部分は大きな部分よりも、大きな圧力差を支えているからである。

気体の場合には、分子間距離の方が分子間に働く力の到達距離よりも一般に長いので粘性という概念は使われるが、表面張力といった現象はない。

問 深さ２mの水底で直径１mmのメタンガスが発生した。水面まで浮上したときには、このガスの泡の直径はいかほどか？表面張力を無視して水底と水面での泡の半径を計算し、この半径での表面張力による内部圧力の差を比較せよ。

問 雀の眼球と人間の眼球とでは、どちらが乾燥しやすいだろうか？
したがって、雀と人間とではどちらがまばたきの頻度が多いだろうか？ (眼圧を調整しているのかな？)

問 空気の平均密度は２８ｇ／２４ℓ、水の密度は１ｇ／ｃｍ^3 だとすると、水と空気の平均的な分子間距離は何倍ほど異なるだろうか？液体の水には、分子間力が働いているのに、気体の水には分子間力は働いていないと考えられるから、分子間力の働く作用距離が推定出来る。

問 着物の虫避けに樟脳が使われる事がある。子供のころにこの樟脳の破片を水に浮かべて、破片がミズスマシの様に激しく水面上を走り回るのを見て遊んだ。各自樟脳を入手し、実験してみよ。樟脳は水に溶ける。樟脳の破片はとがった所やまるまった所があるだろう。とがった部分の方が溶け易いと仮定すると、樟脳の破片は丸い方に走るのだろうか、又はとがった方向に走るのだろうか？
周囲からほぼ一様に引っ張られるが、一部に引力の強い (弱い) 部分があり、全体としてどちらかに動くと考えても良いし、数学で習った移動平均法の様に、平均値の部分は無視して平均値からの差の部分だけを考えて力の効果を評価しても良い。

８) 固体の力学的パラメータ

気体や液体は流体とも呼ばれ、流体内部に仮想的に小さな平面を考えた時、この面に垂直に働く圧力のみを考えれば良いと近似できる。この時に、いわゆるパスカルの原理が成り立つ。この特性があるために、流体の内部では波の進行方向に直角な方向 (横方向) に振動する波 (横波) は存在できない。すなわち、流体では波の進行方向と振動面とが平行な縦波しか伝播出来ない。ロウソクの炎のそばで手を叩くと炎が揺れるが、この炎の揺れ方から空気が縦波を伝えている事は明らかだろう。地球の中心付近は液体であろうと考えられる根拠の一つは、地表付近で発生した地震の横波成分が途中で反射されて内部には透過していないと解釈されるような振舞をするからである。

一方、固体同士の場合には、内部に考えた仮想的な面に平行な力も考慮しなければいけないという事情がある。即ち、この仮想的な面に平行な力も働くので、縦波だけでなく横波も存在しうる。音叉や太鼓の振動の様子を例にとるだけで、横波の存在は納得できる。この仮想的な面を考えた時、この面の単位面積当たりに働く力を応力と呼ぶ。固体では、面に平行な応力 (剪断応力) と垂直な応力 (圧縮又は引っ張り) とを考えねばならない。以下に述べられる固体のパラメータは、この応力に対応して固体が歪む時、歪み量と応力とが比例関係にある (広義のフックの法則が成立する) 場合に意味がある。テーラー展開を思い起こすと、歪みや応力が小さい時には、この仮定は正しいだろう。

固体が力を伝える機構は、これまでの力の説明でほぼ明らかだろうから、固体の固体としての力学的パラメータとして、現在使用されている代表的なものをここでは紹介しよう。

ヤング率

縦波は一個の原子が動いた時、この原子に仮想的なバネでつながれた原子も、バネを伸ばしたり縮めたりしながら力を波の進行方向に伝えて行く。この状態に対応するパラメータは、単位面積当たりどれだけの力を加えるとどれだけ、全体が伸びるかを考えれば良い。但し、他の条件を同じにしても、長い物は伸びやすく短い物は伸びにくいから、伸びの割合を考えるのが妥当だ。変形が大きくなければ、伸びの割合と圧力は比例するだろう。この比例係数をヤング率と呼び記号Eが使われる。伸び率は無次元だから、ヤング率と [圧力] は同じ単位を有する。ヤング率が大きいという事は、引っ張っても伸び難いという事である。ヤング率の大きな物質は、一般的には叩くと高い音がするし、遠くまで良く音を伝える。逆に、熱膨張を力で押え込もうとすると、非常に大きな力が必要である。

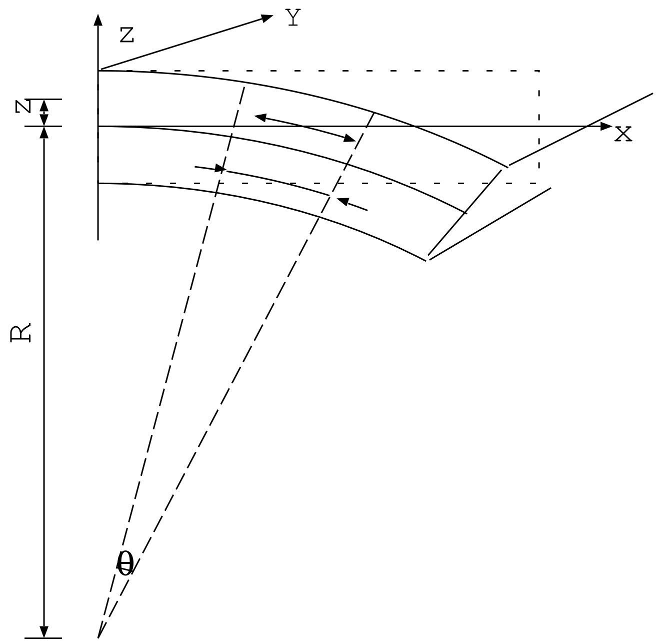
先に、単結晶の圧縮率をきめているポテンシャルの話をした。このポテンシャルからも原理的にはヤング率を計算できる。しかし、こうして計算されたヤング率は実際の物質のヤング率よりもずっと大きい。この現実の値と理想的単結晶のヤング率との相違は、以下の様に解釈される。実際の金属を熔融してから固化させる時、液体原料を冷却していくと、凝固点近くの温度で結晶が析出しはじめる。この析出箇所は材料中に無数にあり、それらが独立に近くの状態のみに影響されて成長する。だから隣の結晶軸とは向きが異なっている。この極端な例として双晶といって、二つの水晶の結晶が特定の二つの結晶軸方向にのみ優勢に成長している場合もある。成長の過程で、近くの不純物を取り込んだり、一部の結晶点には原子がくっつかないままになったりしている。珍しい場合には、結晶の中に、一見結晶の形をした空間が出来ている事もある (負晶)。勿論、材料に不純物が混じっていると、結晶成長は不純物の影響を受けるだろう。このように、現実の結晶

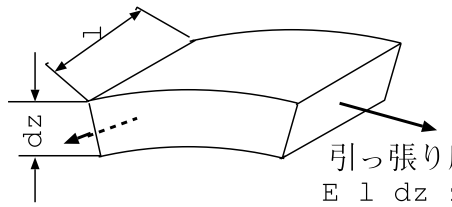
には不整合部分が多数あり、この不整合部分の強度が全体の強度を決めている。もしも、完全結晶の構造材を作る事ができれば、人間生活の道具類はずっと軽量化されるだろう。これは、人類の夢の一つである。材料強度を高めるのに、高純度化とは逆に焼き入れを用いる場合もある。これは、材料内部に小さな不純物領域を沢山作り、ここで他の原子の動きを止めようとしている。

ヤング率を理解するために、一端を水平に固定した棒がたわむ場合を考える。x軸を棒の中心を通る水平面内にとり、z軸を鉛直上向きにとる。(図を参照) 棒の上面は引っ張り応力をうけて伸び、下面は圧縮応力を受ける為に縮んでいる。棒の中央付近に伸びも縮みもしない部分があり、この面を中立面と呼ぼう。実際の中立面は、重力のために、曲率半径Rで曲がっているとする。上半分だけを考えるとして、中立面からの距離に比例して伸びは大きくなる。中立面からzの位置では、中立面での長さが $R\theta$ だった部分は $(R+z)\theta$ になっているので、伸びは $z\theta$、従って伸び率は z/R である。この伸び率に比例して面積 ℓdz の部分には、引っ張り力 (引っ張り応力) $\ell dzEz/R$ が働く。中立面から距離zの点での引っ張り力の曲げモーメントは $\ell dzz \times Ez/R$ である。この曲げモーメントをz軸方向の厚さに渡って加えた (積分した) ものが、上半分に働く曲げモーメントとなる。ここでは幅 (y軸方向) は一定であると仮定して ℓ が掛けてある。一般にはy軸にも積分するならば、全体の曲げモーメントはNは以下の様になる。

$$N = E/R \int z^2 dydz = EI/R$$

この式の積分部分Iは材料力学の本では断面2次モーメントと呼んでいる。慣性能率の定義式と比べると、密度がかかっていないところが異なっている。棒の長手方向にx軸を取ったが、任意のxに付いてこの関係式が成立する。一端を固定した棒 (カンチレバー) のたわみ具合を計算するには、この曲げのモーメントと外力のモーメントを等しいとおけば良い。x方向の微分方程式とするには、曲率 (=曲率半径の逆数) を、zのxについての2階微分で置き換えればよい。





簡単の為に、棒の非固定端に質量mの荷重がぶら下がっていて、棒の質量は無視できるとしよう。固定端からｘの位置での重力による曲げモーメントは先端での曲げモーメントを比例配分すると、$N(x) = mg(L - x)$ である。ここでＬは棒の長さである。点ｘでの曲げモーメントの釣合を式で書くと、

$$EI\frac{d^2z}{dx^2} = mg(L - x)$$

一度積分すると、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{mg}{EI}(Lx - x^2/2) + A$$

ここで、Ａは積分定数であり、ｘ＝０では棒は水平であるから、Ａ＝０である。もう一度積分すると、

$$z(x) = \frac{mg}{EI}(Lx^2/2 - x^3/6) + B.$$

積分定数 Ｂ も、ｘ＝０でのたわみ量ｚ＝０であるから、０である。棒の先端、ｘ＝Ｌ、では棒は $mgL^3/3EI$ だけたわんでいる。

このように簡単な場合には、たわみ量は長さの３乗に比例して大きくなり、物質のヤング率と断面２次モーメントの積に反比例する。一定の物質量で、丈夫な棒を作るには、断面２次モーメントを大きくすると良い。列車のレールの断面はこの事情が考慮されている。人間の骨も、強度は主に周囲の伸びの大きいところで決まるので、骨の随の部分は強度の大きな物質が使われていない。特に鳥の様に空を飛ぶ動物では、骨の随は別の目的に利用されていて、骨の強度とは全く関係が無い場合もある。ゼロ戦と呼ばれる飛行機は軽量化の為に、中心軸に沿って穴の空いた中空のネジを使用していたという。

曲率半径の逆数を２階微分で置き換えるのを疑問に思う学生に。

先ず、梁のたわみｚは x の関数 $z(x)$ だとして、曲率半径の定義式を思いだそう。原点から点 (x,z) 迄の距離を s とすると、

$$ds^2 = dx^2 + dz^2, \qquad \text{又は} \quad \frac{dx}{ds} = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{-1/2}$$

曲線 z(x) の点 (x,z) での単位接線ベクトル $\vec{t}$ は x、z 方向の単位ベクトル $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ を用いて以下の様に書ける。

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\vec{e}_x + \frac{dz}{ds}\vec{e}_z\right)$$

この単位接線ベクトルをもう一度 s で微分して絶対値をとると曲率が計算でき、曲率の逆数が曲率半径である。簡単に途中に登場する手がかりとなる式をメモしておく。指導原理は、z を直接 s の関数とは考えず、x の関数であり、x が s の関数と考える事である。

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \vec{e}_z + \left(\vec{e}_x + \frac{dz}{dx}\vec{e}_z\right)\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{-1/2} = -\left(\frac{dx}{ds}\right)^4 \frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^4 \left\{-\frac{dz}{dx}\vec{e}_x + \vec{e}_z\right\}$$

$$\kappa^2 = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|^2 = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 \left(\frac{dx}{ds}\right)^6$$

これらから、曲率 κ は次式で与えられる。

$$\kappa = \frac{\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

この式で、分母を１で近似すると予定した関係式が導けた事になる。

曲率に対して以下の関係式も時々使用される。

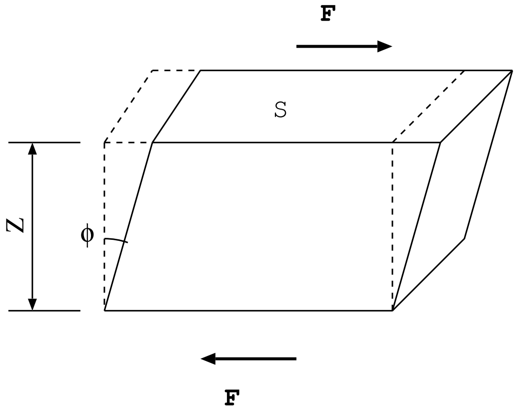
$$\kappa = \frac{x'\,z'' - x''\,z'}{\left\{x'^2 + z'^2\right\}^{3/2}}$$

ここで (’) と (”) は s による１階微分と２階微分を表す。

剛性率 (ずれ弾性率)

固体内部に考えた仮想的な面に平行に力を加えた時の事を次に考えよう。この力をせん断力と呼ぶ。ギロチンや押し切りを思い浮かべれば良い。結晶性の物質で、一枚の原子層に断層をつくる様な変形力である。仮想面を水平に置いた時、この面の上側を右に引き、下面を左に押すような力に対して、どのように変形するかをここでも比の形で表せばよい。

厚さが０の面では想像が困難だから、面を何枚も重ねて、厚さを持たせた状態を思い浮かべよう。この時、１枚目の面の下に働く左向きの力は、２枚目の面の上に働く右向きの力と相殺する $\cdots$。結局厚さｚの長方体の上面に働く右向きの力と下面に働く左向きの力の効果を考えれば良い。このせん断力により、ｚ軸がどのていど傾くかで表現できる。ここでも、厚さが厚いと当然傾く角度は大きくなるので、単位厚さ当たりの傾き角を取っておかねばならない。



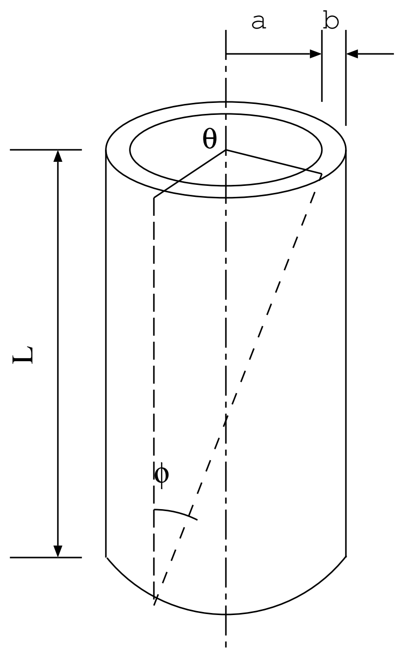
単位面積当たりに働くせん断力 F/S の次元は力／面積で、圧力と同じ次元である。この時の傾き角 ϕ は無次元量である。剛性率 μ は以下の関係で定義される。

$$F/S = \mu\phi$$

剛性率は、捻りに対する抵抗と考える事もできる。理科年表には、ずれ弾性率Ｇとして、記載されている。

剛性率を理解するために長さＬ、半径ａ、肉厚ｂのパイプの捻りに例を取ろう。このパイプを角度 θ だけ捻った時に、発生するトルクを先ず計算したい。ここで θ は、全体の長さでの捻り角だとすると、$\phi = a\theta/L$ で与えられる。

パイプの断面積Ｓは $S = 2\pi ab$ と近似できる。力Ｆは、面積に剛性率と捻り角を掛けると $F = 2\pi ab\phi\mu$ であり、これに半径ａを掛けるとトルクＮになる $N = a(2\pi ab)\mu(a\theta/L) = 2\pi a^3 b\theta\mu/L$。パイプでなく、半径ｒの棒 (針金) ならば、ここで計算したパイプのトルクでｂをｄａで置き換え、ａ＝０からａ＝ｒまで積分すれば良い。



この針金を鉛直にぶらさげ、下端に慣性能率Ｉの重錘を付けて、振動させてみよう。重錘の回転運動の角運動量の時間的な変化の割合は、トルクに等しいという関係式を思い

だそう。$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ であり、角運動量Ｌは慣性能率Ｉと角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ の積で与えられるから、次の運動方程式を得る。

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\tau\theta$$

ここで、定数 τ は以下の様にに与えられる。

$$\tau = 2\pi a^3 b\mu/L, \quad \text{パイプの場合}$$

$$\tau = \pi a^4 \mu/2L, \quad \text{棒の場合}$$

この微分方程式の解がｓｉｎやｃｏｓで表せる事は既に知っているだろう。

$$\theta(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\text{、ここで } \omega = \sqrt{\frac{\tau}{I}}$$

重錘を棒だと思うと捻り秤が出来る。棒の先に電荷を載せて針金の周期を測定する実験をクーロンが行った事は、高校で習っただろう。捻れ秤は感度の良い測定器として、使われたのだろう。この捻れ秤の針がねは、水晶の糸が使われる。τ は a^4 に比例しているので、半径を半分にすると１／１６になる。太さを減らすと、非常に感度の高い捻れ秤ができる。光梃と捻れ秤を組み合わせると、高感度の検流計になる。

金属バネのバネ定数を主に決めているのはこの剛性率である。

ポアッソン比

直方体の消しゴムを想定しよう。稜に平行にｘ，ｙ，ｚ軸をとりｘ軸に直交する２面に圧力をかける。ｘ軸方向には縮むがこの時の縮率 {(縮んだ後の長さ／元の長さ) −１ } を ϵ_1 とする。ｙ，ｚ軸方向には伸びるが、この伸び率を ϵ_2 とする。ｙ軸方向とｚ軸方向の伸びは、内部に結晶構造等の異方性があれば、一般には異なる。消しゴムの場合には異方性はあまりないだろう。この伸びと縮みの比をポアッソン比と呼び、通常 σ という記号がつかわれる。

$$\sigma = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

圧縮前のｘ、ｙ，ｚ軸方向の長さを L_x, L_y, L_z とおくと、圧縮後の長さは、$L_x(1-\epsilon_1), L_y(1+\epsilon_2), L_z(1+\epsilon_2)$ とかけるので、もしも、このように圧縮した時にも体積が変化しないならば、

$$(1-\epsilon_1)(1+\epsilon_2)^2 = 1$$

が成立し、ϵ_1, ϵ_2 が微小量だから、１次近似ではポアッソン比は０．５となる。理科年表を見ると、０．３程度の物質が多い。

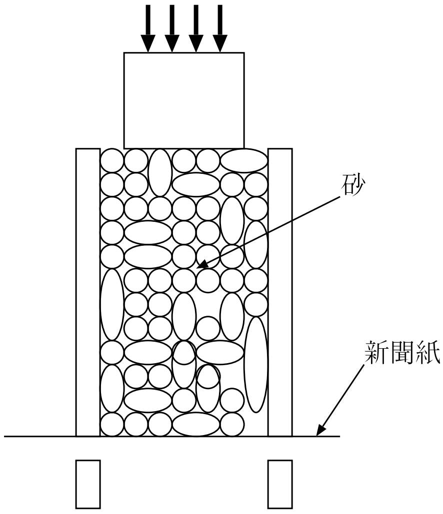
等方性の物質では、縦の動きと横の動きが分かれば、斜めの動きについて予言出来るだろう。ヤング率は縦の動きに関係し、剛性率は斜めの動きに関係し、縦横の動き (正確には応力歪みと呼ばれる) の比はポアッソン比であるから、これら３者には次の関係がある事が知られている。

$$E = 2\mu(1+\sigma)$$

原理的には、上の３つの内、２つを測定すれば、残りは計算できる。

余談：ニュートンの運動方程式をいくら睨んでも、ｘ軸方向にかけた力がｙ軸方向の運動を誘起するかは分からない。何か、斜めに力を変換する機構が物質の中に隠されているに違いない。

簡単な実験を提案しておこう。両端の空いた、少し長めのパイプを用意する。一端を乾いた新聞紙でふさぎ、上から乾いた砂を入れる。この砂の入ったパイプを紙の方を下にして立てる。



新聞紙が直接床で支えられない様にパイプ部分で倒れない様に支える。この状態で、砂の上に太めの棒を置き、棒の上端をハンマーで叩く。ある程度の砂の厚さがあると、ハンマーで叩いた程度では新聞紙は破れない。子供の頃にパイプとして竹の筒を用い、砂の厚さを２０ｃｍ程度にしてやった実験では、最後にかけやという杭を打つ大きな木のハンマーで叩いたところ新聞紙は破れずに、竹が割れてしまった。力が横へ伝わるモデルとして、砂を硬い小球で置き換えてみると納得出来るだろう。

こんな事実も知っているだろうか？海岸や川岸の水に濡れた砂地を歩いた事があるだろう。足を砂地に置いて体重をかけると、靴の横の水を含んでいた砂から水が引いて行く。この時の水の動きは、水を含んだ雑布を足で踏んだ時の水の動きとは完全に逆である。これらの事実を利用して、鉄道線路では割り石をレールの下に敷いていた。物質の形状とつまり具合に依って、力の伝わり方には色々な多様性がある。

体積弾性率

物質に四方八方から均一に圧力をかけると、当然体積は小さくなるだろう。体積減少率とかける圧力の比を体積弾性率と呼び、k という記号を使う。気体ならば、気体の状態方程式 (理想気体の時の PV ＝ NRT という式) を書けばこのような物理量は不要であるが、固体は硬さが物質によっているので、固体のパラメータとして、登録されている。

一つの方向から圧力をかけると、残りの２つの方向には伸びようとする。この伸びようとする方向にも圧力をかけて、最初の方向と同じ縮み率にするわけだが、どちらの方向にも圧力をかけるので、特定の横方向は無い。体積弾性率は、こう考えると、ヤング率とポアッソン比さえ分かれば計算出来る。

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$$

電磁気学、原子と分子構造のお話

X 線による撮像

ここでは、電磁気学の基礎的な話をする。

基本となる実験事実
　　電荷保存の法則、　**静電気と静磁気に関するクーローンの法則**
　　Lorentz 力、　**電磁誘導の法則**
静電気とポテンシャル
電気的双極子能率
電流のつくる磁場
受動素子
　　電流と抵抗、　**静電容量と静電場のエネルギー**
　　インダクタンス

基本となる実験事実

電荷と磁荷という概念を仮定しよう。電荷には素電荷という概念があり、これを e と書くとほぼ $e = +1.60 \times 10^{-19}$ [C] である。クーロンの法則と組合せなければ、これだけでは、定義になっていない。陽子の電荷がこの値であり、(陰) 電子 (要は通常の電子の事である) の電荷はこの素電荷と大きさが同じで符号が負である。この電荷の符号は、歴史を反映しているので、理由を問われても困る。

素磁荷は現在のところ存在しない事になっているので、歴史的及び磁気現象の理解を助ける補助概念という位置つけである。

電荷の絶対値も。歴史を背負った定義による。「素」電荷の 1/3 の電荷を持った粒子を見付けたという報告もあるが、多くの物理屋には認知されていない。素磁荷も見付けたという人もいるがこれも多くの物理屋に認知されていない。素磁荷は存在しないと思われている。

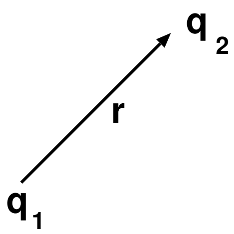
電荷保存の法則

この法則は読んで字の如しである。電荷が消えて無くなる事もなければ、作られる事も無い。もしも正の電荷が作られる (消えて無くなる) ならばその近くで負の電荷も作られる (消えて無くなる)。実際にこの様な現象がある事は知られている。

静電気と静磁気に関するクーロンの法則

同符号の電荷又は磁荷の間には斥力が働き、その大きさは双方の電荷又は磁荷の強さに比例し、力の方向は両電荷 (磁荷) を結ぶ直線と同じ方向である。別の言葉で言えば、中心力である。異る符号の電荷 (磁荷) の場合には斥力ではなく、引力となる。現象的には、論理が逆であり、引力が働くならば、電荷 (磁荷) の符号が逆だと考えるというのが正しい認識だと思う。

この法則を以下の様に書く。



二つの電荷 $q_1^e,\ q_2^e$ が静止しており、その位置ベクトルを $\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2$ とする。両者間に働く力を $\mathbf{F}$ とすると、

$$\mathbf{F} = \frac{q_1^e\, q_2^e}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1}$$

但し、$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と置いた。比例係数の構造が $4\pi\epsilon_0$ と複雑になっているが、現在ではほとんどの物理屋と工学者に受け入れられている。

$\epsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) \sim 8.85$ [pF/m] (pF はピコファラド $=10^{-12}F$ である。) は真空の誘電率と呼ばれ、c は真空中の光速である。4π は３次元空間の全立体角であり、このように定義しておくと丸くない問題の答えに π が登場しないという Heaviside の発見により導入され、この単位系は有理化単位系と呼ばれる。このクーロンの法則により、電荷の基本的な大きさが力を測定すれば確定する。

電荷のかわりに 磁荷 $q_1^m,\ q_2^m$ に対しても同様の式が成り立ち、

$$\mathbf{F} = \frac{q_1^m\, q_2^m}{4\pi\mu_0\, r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2}$$

ここで、$\mu_0 = 4\pi/10^7\ \sim 1.26\times10^{-6}$ [N A^{-2}] は真空の透磁率と呼ばれる。これらの式から自明ではあるが、$\epsilon_0\times\mu_0 = 1/c^2$ という関係がある。

式 (1) を見て、電荷 q_2^e から見て $\mathbf{r}$ に位置では、

$$\mathbf{E} = \frac{q_2^e}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{3}$$

というベクトルで与えられる量だけ、もしそこに電荷 q_1^e が置かれると $q_1^e\,\mathbf{E}$ だけの力が働く準備が出来ていると Michel Faraday は考えた。正確には Faraday のアイデアを現代流の言葉で表現した。この $\mathbf{E}$ の事を電場と物理屋は呼び、工学者は電界と呼ぶ。

既に万有引力のつくるポテンシャルという概念を知っているだろう。即ち、質量 m があると、その回りの空間には r だけ離れた位置に質量 M を置くと $U(r) = -G\,m\,M/r$ だけの位置エネルギーを与える様な空間の歪みが作られたと考えた。ここでは、位置エネルギーの変わりに力 $\mathbf{F}$ を発生させる様な空間の歪みが仮想的に作られたと考える。勿論位置エネルギー $q_1^e\times U^e(r) = -q_1^e\, q_2^e/4\pi\epsilon_0\, r$ を与えるポテンシャル場が作られたと考えても良い。この立場では U^e の事を電位と呼ぶのが一般的である。例えば、単１電池の両端の電位の差は約１．５ボルトという具合である。先の電場か電界かという論争に巻き込まれたくなければ、電位勾配という単語を使えば良い。

電場の変わりに、磁場 $\mathbf{H}$ という概念も使用される。

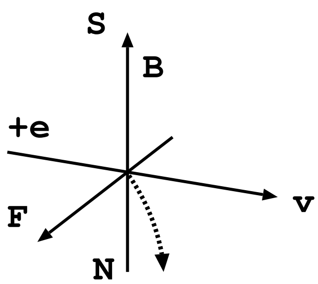
$$\mathbf{H} = \frac{q_2^m}{4\pi\mu_0\, r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{4}$$

但し、$\mu_0\,\mathbf{H} = \mathbf{B}$ と置いてこの $\mathbf{B}$ の事を磁場と呼ぶ人も多く、両者は混用されている。$\mathbf{H}$ と $\mathbf{B}$ を区別する時は、$\mathbf{B}$ の事を磁束密度と呼ぶ。例えば、強力なスピーカーの内部に使用されている磁石では１ [T] (テスラ) の磁束密度を発生しているという風に使う。テスラは電気物理学者である。

Lorentz 力

電場 **E** があると電荷 q には $q\mathbf{E}$ の力が働く。もしも電場 **E** と共に **B** の磁束密度がある真空中を電荷 q が速度 **v** で運動していると、以下の力を受ける。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{5}$$



図で 磁石の N 極から S 極に向けて磁束密度 **B** が発生しているとする。正電荷 $+q$ の粒子が速度 **v** でこの場に入って来たとすると、ベクトル積の定義により、図の **F** の向きに、従って進行方向に垂直に、力を受けて進路を曲げられる。力の向きは加速度の向きに平行である。力の大きさは、ベクトル **v** と **B** のなす角度を θ とすると、$vB\sin\theta$ である事もベクトル積の定義を思いだすと分かるだろう。

速度ベクトルとのベクトル積で定義されている量に角運動量があり、角運動量は回転運動と関係がある。荷電粒子は磁場と力を受ける事により、角運動量をやりとりしていると解釈できる。速度と加速度が直交しているから、磁束密度 (**B**) が至るところで一様ならばこの荷電粒子は円軌道を描く。これがサイクロトロンやシンクロトロンと言う加速器の原理の一端を担う事実である。怒られるのを覚悟するならば、TV のブラウン管の近くに磁石を近つけてみよ。消磁で元に戻る場合もあるが、自己責任でね。

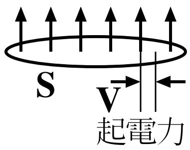
ここで $q\mathbf{v}$ は、この荷電粒子１個がつくる電流になっている事に注意しよう。一つ一つの荷電粒子にこれだけの力がかかるから、アボガドロ数程度の荷電粒子数に対しては非常に大きな力になる場合がある。

子供の時に作ったモータを思いだしてみよ。そこでは、荷電粒子は、U 字型の磁石のつくる磁束の下で、コイル型に作られた電線の中を走っていた。この荷電粒子にかかる Lorentz 力が結局はコイル電線を押し、その力でコイルが力を受けて回っていたのだ。

この Lorentz 力と作用・反作用の法則 及び幾らかのベクトルの微分や積分に関する公式を使うと、電流が流れるとその周囲には磁場が発生するという、いわゆるビオとサバールの法則を導く事が出来る。磁場が電流に力を及ぼすのだから、電流が磁場を作るとしても不思議ではないだろう。この現象は実用上大切だから後でもう少し詳しく説明しよう。

電磁誘導の法則

電流の付近には磁場が発生しているならば、磁場の付近には電場が発生しているにだろうと M. Faraday は考えた。最終的に認識したのは、磁場が磁間的に変化すると起電力が発生するという事であった。



図の様に、一様磁束密度 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ が与えられた空間に **B** に垂直な平面内に、断面積が S の面をとる。この面の周囲に仮想的な電線を置く。図ではこの仮想的電線は両端が無限小の幅で切れている。磁束を磁束密度 B とこの面積 S の積 $\Phi = BS$ で定義する。

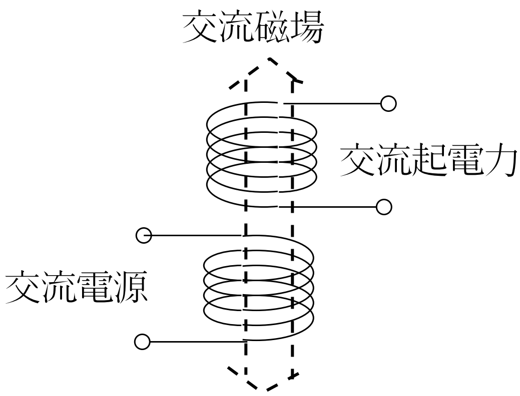
磁束密度が時間と共に変化すると、この電線の両端には以下の式で与えられる起電力

V が発生する。

$$V = -\frac{d\,\Phi}{d\,t} \tag{6}$$

この式に負号が付く理由を説明しよう。面の境界を全体として捉え、この境界を反時計向きになぞる時、右ネジが進む向きを面の向きと定義する。面の向きと磁束密度の向きが平行ならば、磁束の符号は正であり、両者が逆向きならば磁束の符号は負とする。更に、電位差は仮想的な電線を反時計方向にまわる方向の向きを正、時計方向にまわる向きを負と向きと定義する。従って、図で時間的に磁束密度が増えるならば $d\Phi/dt$ は正だから、図の右から左向きに起電力が発生する。

この電磁誘導の具体的な応用として、トランスを挙げておこう。



交流電源から下のコイルに電流を流すと交流磁場が発生し、磁力線の一部は図で上に置かれたコイルの中を貫く。この結果、上に置かれたコイルの両端に交流電圧が発生する。実用上は、下のコイルで発生した磁力線を出来るだけ逃さずに上のコイルへ伝える為に図の破線の部分に鉄棒を置く。更に起磁力の有効利用の為に、棒の上下を鉄で繋ぐ。

こうすると、いわゆるトランスが出来上がる。

この図からは、上の電線があるから起電力が発生しているのが実感出来る。電線が無くとも起電力が発生してる事は、この電線の部分にイオンを置くとイオンが加速される事で確認されている。上のコイルに発生する起電力の向きは、上のコイルに電流が流れた場合、下のコイルで作られた磁場を打ち消す方向である。

これだけの実験事実と論理だけで、電磁気学を構成する事が出来る。特に特殊相対性理論も作られた。マイケルソンとモーレーの実験が無ければ特殊相対性理論は出来なかったという事を言う人は多いが、それは特殊相対論を知らない人の誤解だよ。

静電気とポテンシャル

電荷 Q が存在すると、その近くの空間には、(3) で与えられる電場 $\mathbf{E}$ が作られると考える。この電荷は動かないと考えて、質量が無視出来る電荷 q を R の位置から無限遠方までゆっくりと動かす。この時に必要なエネルギー W は、力 F と動いた距離の積を加えれば良い。力は位置に依存して変化するから、和を積分で置き換える。

$$W = q \times V(R) = \sum_{r=R\text{ から }\infty} q\,F(r)\,dr \to \int_R^\infty q\,F(r)\,dr = \frac{Q\,q}{4\,\pi\epsilon_0\,R} \tag{7}$$

この仕事量の内、単位電荷に対応する部分 ($q \to 1$) を電荷 Q が作る位置エネルギーだと考え、Green という人が $V(R)$ を potential と名前を付けた。

この関係式から理解出来るだろうが、ポテンシャルは無限遠方での位置エネルギーを０と考えた場合の単位電荷当たりの位置エネルギーである。電気工学者は、ポテンシャ

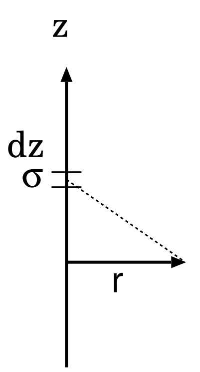
ルという変わりに電位という日本語を使う。従って、実用的には２点間の電位の差、電位差、が重要な意味を持つ。非相対論的な物理の範囲ではエネルギーの原点は無意味だから、どの位置をエネルギーの原点に選んでも良い。そこで、地球 (ある意味では良導体である) の電位を基準にとる。この意味で、電気回路の基準部位と地球を繋ぐ事をアースをとるという人もいる。日常的には、地球の電位を基準にとる事を暗黙の了解として、ある導体部分と地球との電位差を電圧と呼ぶ場合。

電荷の近くには電場が出来ている事を経験的に証明する必要があるかもしれない。子供の頃に、下敷を脇に挟み服で擦って摩擦電気を発生させた。これを小さく切った紙や自分の耳もとに近つけてみると良いだろう。悪戯坊主だったから、女の子の長い髪の毛をこれでひっぱった覚えもある。
日本でも冬には、暗い部屋でセーターを脱ぐ時に頭髪とセーター間での放電が頻繁に経験される。もたれていた椅子から立上り、ドアのノブに手をかけて、電撃をうける事もしばしば経験される。
では何故、摩擦電気は発生するのだろう？物質像に対する授業をしてから、忘れなければ説明しよう。

地表約１０ [km] 上空には雲がある場合が多い。雲を作る過程で摩擦電気が発生し、雲は帯電する。通常は、空気は１ mm の隙間があれば １０００ [V, ボルト] 程度の絶縁性があるとされる。水分を含めばかなり絶縁耐圧は下がる。帯電しすぎて雲と地表間で放電する場合があり、人間から見て強烈な放電は雷と呼ばれる。主に熱帯地方で毎日摩擦電気が１４００ [C] 程度作られている様である。摩擦電気が発生する時の温度により、雲の電荷の符号がきまる。多くの場合、雲の下面に負、対抗する地面に正の電荷が発生する。これに関連して地面を電流が流れるから、地表の電位が一定であるというのは程度問題である。

地球から宇宙空間への放電も観測され、スプライトと呼ばれている。この現象を個人的には以下の様に考えている。主に太陽から正負のイオンや負電子が地球に降り注ぐ。地球には磁場 (地磁気) があるために、負電荷を持つ電子だけが跳ね返されて正電荷を持つ陽子は跳ね返され難い。従って、陽子の方が電子よりも多く地表に到達し、地球は正に帯電する。ある程度の正電荷が地球に溜ると、地球外への放電がおこる。地球の高層大気は、太陽からの紫外線を吸収しているので、それなりの密度のイオンが出来ているはずである。

帯電した無限に長い電線のつくる電場と電位



図の z 軸上に単位長さ当たり σ の電荷があるとする。軸から r だけ離れた位置の電位 $V(r)$ を計算したい。図の σ という電荷は、距離 $\sqrt{z^2+r^2}$ だけ離れているから、式 (7) で $Q=\sigma\,dz$ と置いて、z に関して $-\infty$ から $+\infty$ にわたり積分すれば良い。

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\sigma}{\sqrt{z^2+r^2}}=-\frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\log(r/R) \tag{8}$$

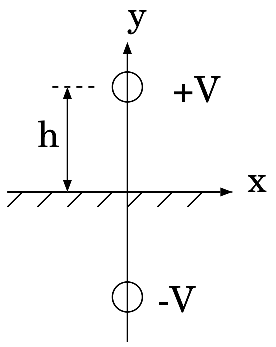
但し、R は最初の仮定からは無限大にすべきだが、(不定の) 定数で置き換えた。先に述べた様にエネルギーの原点は意味がないからである。対数の中を無次元にしておく意味もある。

このポテンシャルは、対数ポテンシャルという名で呼ばれる。電場は、ポテンシャルを r で微分し、符号を変えれば良いから、

$$E=\frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0 r}$$

電場の向きを考えるならば、$\mathbf{r}/r$ を更に掛けておく。

この計算結果を利用して、高圧線にすずめはとまれるが、カラスが止まりにくい理由を定性的に考えよう。地表から高さ h の位置に半径 a の電線があり、そこには V_0 ボルトの電圧がかかっているとする。この時、この電線付近でのポテンシャル分布を計算出来ればよい。



上で与えた式 (8) の不定定数 R を決定し、地表での電位を０ボルトとするために、地面を対称面とし、地下 h の位置に $-V_0$ ボルトの電線を仮想的に置く。すると、対称性から考えて地表では０ボルトが実現し、R は２本の電線のポテンシャルを加えると相殺してしまう。

従って、点 (x, y) での電位 $V(x, y)$ は次式で与えられる。

$$V(x, y) = -\frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\log\sqrt{\frac{x^2+(y-h)^2}{x^2+(y+h)^2}}$$

電線上 $x = 0$ $y = h+a$ では、$V(0,\ h+a) = V_0$ だから、この値をこの式に代入し $a << h$ を仮定すると、

$$\frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\log(a/2h) = V_0$$

従って、地表から高さ y の位置での電位 $V(0,\ y)$ は次ぎの式で与えられる。

$$V(0,\ y) = -\frac{V_0}{\log\left(\frac{a}{2h}\right)}\log\{|y-h|/(y+h)\}$$

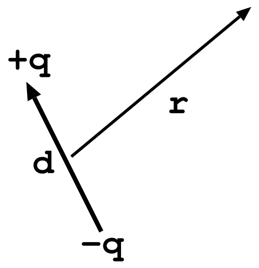
鳥の足元から頭までを b だとすると、$V(0,\ h+a+b)$ の値を計算し、V_0 を差し引けば、鳥の頭と足の間の電位差が計算できる。例えば、$V_0 = 300\ [V],\ h = 5\ [m],\ a = 2\,[mm]$ とし、雀では $b = 5\,[cm]$ カラスでは $b = 25\,[cm]$ とすると、雀では１１０ボルト、カラスでは１６０ボルトとなった。これでは濡れていると雀も命が危ない！計算間違いはしていないだろうか？高圧線の下にいる人間だとどうなるだろうか？ $V_0 = 3300$ [V], $h = 10$ [m], $a = 1$ [cm] と仮定し $V(0, 0\,[m])$ と $V(0, 1.5\,[m])$ の場合を計算してみると、約１３１ボルトとなった。興味のある人は計算を確認して下さい。但し、電車の架線の様に単線で給電している様な条件以外では、この計算は利用できない。通常は、正負の電位用に２本の電線を使用しているので、地上での電場はこの計算よりは非常に小さな電場となっているはずだ。

大気電位という概念もある。何らかの理由で地球は帯電し、地表が負で上空が正になっている。先に述べた宇宙線による帯電とは符号が異る。大体、地表では１００ [V/m] 程度の電位勾配になっている。柿岡 (八郷町) と女満別 (北海道) のデータが公開されていた。１９３０年代には１３０ [V/m] 程度であったが、２１世紀になってからでは６０－７０ [V/m] に下がっている。空気の電気伝導度が上がったせいかな？

電気的双極子能率

電荷間にはクーロンの法則による力が働く。ある種の物体は、電気的には中性であるが正と負の電荷の重心が異っている場合がある。この様な場合には、潮汐力と同じような力が働く。潮汐力の場合には引力が場所により異なる事が原因であった。一方電荷間の

力には引力と斥力の 2 種類の力が働き得るので、潮汐力よりも多様性がある。



$\pm q$ の電荷が非常に小さな距離 $\mathbf{d}$ だけ離れて置かれている場合、その中心から $\mathbf{r}$ だけ離れている位置でのポテンシャルを計算しよう。式 (7) を二つの電荷に対して適用し $r >> d$ という近似を用いる。

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}/2|}\right\} \tag{9}$$

右辺の中括弧の中は、以下の様に変形できる。

$$\{\} = \frac{1}{r}\left[\left\{1-\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}/r^2 + d^2/4r^2\right\}^{-1/2} - \left\{1+\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}/r^2 + d^2/4r^2\right\}^{-1/2}\right] \sim \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + O(r^{-3})$$

最後の $O(r^{-3})$ は $1/r^3$ 以下の項は無視した事を意味する。$\mathbf{p} \equiv q\mathbf{d}$ という記号を導入し、電気的双極子能率 (電気的双極子モーメント) と呼ばれる。

$$V_d(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{10}$$

この式の変形はともかくとして、$\mathbf{p}$ からの距離によるだけでなく、向きにより力の大きさばかりでなく、符号までの変わるポテンシャルが作られる事だけは覚えておくと良いだろう。

この双極子能率は化学結合の場合に非常に重要な役割を担う。

点電荷によるポテンシャルは $1/r$ で r と共に減少するが、電気的双極子能率が作るポテンシャルは $1/r^2$ の依存性を持つ。従って、電気的双極子能率の影響は、電荷よりも到達距離が短くなる。

このポテンシャルを微分すると、電気的双極子能率が作る電場を計算できる。偏微分の計算には慣れたいないだろうから、(3) の差として計算しておこう。

$$\mathbf{E}_{dipol} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\mathbf{r}-\mathbf{d}/2}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}/2|^3} - \frac{\mathbf{r}+\mathbf{d}/2}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}/2|^3}\right\} \tag{11}$$

中括弧の中は $r >> d$ という近似を使用するから次式で表せる。

$$|\mathbf{r}\pm\mathbf{d}/2|^{-3} = \{r^2 + d^2/4 \pm \mathbf{r}\cdot\mathbf{d}\}^{-3/2} \sim r^{-3}\left\{1 \mp \frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^2}\right\}$$

その結果、

$$\mathbf{E}_{dipole} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left\{-\mathbf{p} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^2}\mathbf{r}\right\} \tag{12}$$

二つの双極子 $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ 間の位置エネルギーは電場と双極子の内積で与えられるから、

$$U_{dipole-dipole} = -\mathbf{E}_{dipole}\cdot\mathbf{p}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left\{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 - \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}_1)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}_2)}{r^2}\right\} \tag{13}$$

双極子能率を持つ物質や、外部から電場を掛けると双極子能率が誘起される物質がある。外部電場 **E** の効果がこれらの物質の影響を受けて、実質的に変更される場合がある。この効果は通常、誘電率が変化するという形で取り入れられる。$\epsilon_0 \to \epsilon$ と式を変更すればよい。例えば水では、$\epsilon \sim 80\,\epsilon_0$ 程度である。従って水の中の電荷間のクーロン力は約１/８０と弱くなる。

双極子能率は、電気的なもの以外に磁気的なものも当然存在する。巨視的な磁気双極子能率として棒磁石がある。二つの棒磁石を思い浮かべると、力の符号が向きにより変化する事は経験として自明な事実であろう。

磁石を二つ近つけた時の引力の働き方を体験しておこう。近付くと急に引力が強くなり、バネを引っ張ったり縮めた時の力の掛かり方とは非常に異るだろう。かなり近距離力的である。

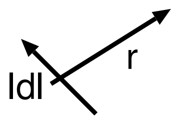
電気的双極子能率の日常的な応用に、ガスの点火器具がある。クリスタルイヤフォンという言葉を聴いた事がある人もいるだろう。電気的双極子能率をもつ結晶に高周波電圧をかけると、超音波を発生させる事が出来る。従ってソナーを作る事が出来る。お母さんのお腹の中の赤ちゃんの映像はこの技術で撮影されている。胆石を超音波で破壊できると、手術は不要である。

電流のつくる磁場

電流が流れるとその近くに磁場が作られる。磁気的な力は電気的な力よりは弱いが、日常生活では発電機やモーター等に使用されているという意味で大切な概念であるから、幾らか言及しておこう。釘にエナメル線を巻き、乾電池でこのコイルに電流を流し、電磁石を作った経験を思いだしながら読んでもらいたい。

この現象はビオとサバールの法則として知られている。微小な電流要素が近くの場所に作る磁場の大きさとして書かれる。以下に、Biot-Savart の法則を書いておこう。

長さが dl の微小線要素に電流 I が流れているとする。この電流要素から **r** の位置に作られる 磁場 $d\mathbf{H}$ は以下の様に与えられる。



$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2}\, d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{14}$$

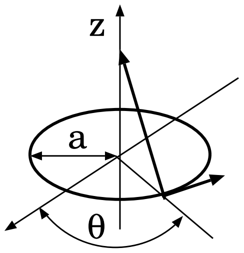
大きさを与える部分は電流に比例し、距離の２乗に反比例している。磁場の向きは図の場合、紙面に沈み込む方向である。別の表現では、右手の親指を電流の向きに立てて拳を握る。残りの４本の指が付け根から指先へ向かう方向が磁場の向きである。こちらの方が覚えやすいかもしれない。

この法則を基本法則として採用しなかった理由は、この法則だけでは作用・反作用の法則を満足しないためである。電流が閉じているか、無限遠から来て無限遠へ続いている場合には作用・反作用の法則は満足される。この法則を用いて電流の大きさが定義されているので、バカにすべき法則ではない。

先に、磁荷は存在しないと述べた。その意味ではこの電流が作る磁場が、磁場を発生させる基本的な現象だと考える事が出来る。

２０世紀の後半2/3くらいでは、この考えは正しいとも正しくないとも言える。物質磁場の原因のかなりの部分を電子固有の磁気双極子能率が担っていると考えられている。この電子の双極子能率は、電子の自転に伴う円電流が原因であるというアイデアもあり得る。但し、電子が本当に自転しているかしていないかは、検出不能である。

電流が作る磁場は弱いのでこれを強化するために、電線をコイル状にして利用する場合が多い。コイルが作る磁場は実用上大切だから、この法則の使用例の意味を込めて、コイルの中心軸上の磁場を導いておこう。



半径 a の円電線に I の電流が流れている。この円に垂直な中心軸上、高さが z の位置での磁場を計算する。図の記号を用いると $d\mathbf{l} = a\,d\theta(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)$ $\mathbf{r} = (a\ \sin\theta,\ -a\cos\theta, z)$ であるから、$d\mathbf{l}\times\mathbf{r} = a\,d\,\theta(z\ \cos\theta,\ z\ \sin\theta,\ a)$ 角度 θ は $0 \to 2\pi$ の範囲で積分するが、$x,\ y$ 成分は0になることは明らかだから、磁場の z 成分だけ計算する。

$$H(z) = \int_0^{2\pi} \frac{I\,a^2\,d\theta}{4\pi\{z^2+a^2\}^{3/2}} = \frac{I\,a^2}{2\{z^2+a^2\}^{3/2}}$$

この半径 a のコイルを2組用意し、コイル面を平行にして a だけ離しておいた場合に、中間部分では非常に一様な磁場を発生させる事が出来る。これをヘルムホルツのコイルと呼ぶ。一様な標準磁場を実現するのに実用される。

受動素子

電磁気学とエレクトロニクスを考える上で、抵抗・コンデンサ・コイルに関する事情を幾らか述べておこう。

1 電流と抵抗

与えられた電路を想定しその断面を考える。この面を1秒間に通過する電荷量を電流 (の強さ) と呼ぶ。従って、電荷 q [C] の粒子が N [個/秒] の割合で通過するならば、$I = Nq$ [A] の電流がこの断面を通して流れたと言う。電荷を移動させるには、この電荷に力を作用させる必要がある。電子が動きやすい物質 (即ち、電気の良導体) で線材を作り、この両端に一定の電位差 V をかけ、一定の電流 I が流れた時、この線材の (電気) 抵抗 R は $R = V/I$ で定義し、この関係式を オームの法則と呼ぶ。

この線材の長さを L とすると、線材中の平均電場は $E = V/L$ と評価できる。電流は、質量 m、電荷 $-e$ の電子の移動に伴うと考えると、電子の平均速度を v として、$I = -nevS = V/R = (-eE)/(-eRL)$ と書ける。ここで n は単位体積当たりの移動可能な電子数 (数密度と呼ばれる) であり、S は線材の断面積である。この式では、電子の速度 v は加速度 $-eE$ に比例している。一方、ニュートンの運動方程式では、加速度 $-eE$ に比例すべきは、速度でなく加速度でなければならない。この矛盾は以下の様に了解しておこう。
線材は真空ではないから、線材中の邪魔物 (不純物原子や結晶の不整合) に衝突しながら、電子は進んでいると想像出来る。衝突するまでは一様な加速度運動をしているが、衝突すると平均的には初速度が0となりもう一度一様加速度運動を始める。平均的な一様加速度運動時間を T とすると、初速度が0であり、T 時間後には、$-eET$ になっているから、平均速度は $\bar{v} = -eET/2$ となり、速度が力 $-eE$ に比例する。この T は非常に短いと考えると、オームの法則が成立する。このシナリオでは、抵抗は線材の長さに比例し、断面積に反比例する。

$$R = \rho\frac{L}{S}$$

この比例定数 ρ は抵抗率と呼ばれ、こん逆数 $\sigma = 1/\rho$ は電気伝導度と呼ばれる。

電路中の衝突頻度が多いと抵抗は大きくなるから、純粋な金属よりも合金の方が一般に抵抗率は大きい。

複雑に抵抗を組み合わせた電気回路では、1) 基準となる点から測った回路内のある点の電位は、どの経路を通るかに依らず同じ値を取る。電荷は保存するから、2) 電流が電路の途中で消えて無くなったり、途中で発生する事はない。この二つの原理さえ理解出来ていれば、１００ [MHz] 以下の問題に対してはオームの法則で対処出来る。

１ [GHz] を越える様だとオームの法則では対処出来なくなる。電子の平均速度が一定値になる前に、電場の向きが変わってしまう。変位電流という電流の効果も考えねばならない。

2 静電容量と静電場のエネルギー

太さが $2a$ の平行導線に対するポテンシャル問題をもう一度思いだそう。$h >> a$ の近似では、単位長さ当たりの電荷を q、電線の電位を $\pm V_0$ とすると、

$$V_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \log\frac{2h}{a}$$

単位長さ当たりの電荷 q と電位差 V_0 が比例する。２本の電線間の電位差は $2V_0$ だから、$C = \pi\epsilon_0 \log\frac{2h}{a}$ をこの系の (単位長さ当たりの) 静電容量と呼ぶ。

一般に２物体間に $\pm Q$ の電荷を帯電させた時、両者の電位差 V は $Q = CV$ という比例関係が成立する。

一つだけの物体でも静電容量は定義できる。例えば、全電荷 Q に帯電した半径 a の球の電位は、無限遠方を０ $[V]$ ときめると、球表面の電位は $V = Q/(4\pi\epsilon_0 a)$ である。従ってこの場合の静電容量は $C_a = 4\pi\epsilon_0 a$ である。地球の半径を代入すると、$C_{地球} = 707\,[\mu F]$ となる。ちょっと電子回路をいじった事のある人には、小さな値にびっくりするだろう。

間隔が d、面積が S の導体板を平行に置いた場合の静電容量を概算しておこう。対抗する面の単位面積当たり σ の電荷が置かれて、電極間の電位差を V とする。電場は $E = V/d$ と評価しよう。電場 E と σ の関係を以下のようにして付けよう。

点電荷 Q が距離 r だけ離れた位置に作る電場は $E(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ で与えられた。ところで、分母の $4\pi r^2$ は半径 r の球の表面積である。従って、$Q/(4\pi r^2) = \sigma$ は仮想的な半径 r の球が持つ面電荷密度であり、その時の球の表面での電場が $E(r)$ で与えられる事を示している。$E = \sigma/\epsilon_0$ という式は半径 r に依存せずに成立する。(実はこの関係式は非常に一般的に成立する。) これらから、$Q = \sigma S = (\epsilon_0 S/d) V = CV$ となり、平行平板コンデンサーの静電容量は $C_{平行平板} = \epsilon_0 S/d$ が概算値である。電極導体の端の方の効果を取り入れると、静電容量はもう少し大きくなると想像される。

実用上は、導体の間に誘電率の大きな物質を挟み、間隔 d を非常に小さくして大きな C を実現している。

大きな誘電率の物質は、化学的に非常に安定とは限らない。従って、電子回路が故障する原因のかなりの原因がコンデンサーの性能劣化である。実験装置を注文する時、長寿命設計としたければ、特にコンデンサーには注意をする必要があるだろう。

二つの導体があり、両者の電荷は $\pm q$、電位差は $V(q)$ としておく。一方の導体から微小電荷 δq をとり、この電荷をもう一方の導体に運ぶ。この時に必要な仕事は $\delta W = V\delta q$ で与えられる。最初の電荷を０とし、微小電荷を無限回運んで、全体として Q の電荷と

するのに要する仕事は、次式の積分を実行すれば良い。

$$W = \int_0^Q V(q)\,d\,q = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2\,C} = \frac{C\,V^2}{2}$$

静電容量をこの式で定義する人もいる。このエネルギーの式と静電容量の式を用いると、次式を得る。

$$W = \frac{C\,V^2}{2} = \frac{(S\ d)\,\epsilon_0}{2}\,E^2$$

$(S\ d)$ はコンデンサの体積であるので、単位体積当たり $\epsilon_0\,E^2/2$ のエネルギー密度で、コンデンサーの空間に蓄えられていると考えられる。

3 インダクタンス

電線に電流を流すと、この電線付近に磁場が出来る。この電流が時間的に変化するならば、電磁誘導で電流が時間的に変化する向きと逆向きに起電力が発生し、磁場の時間的変化を緩和しようとする。

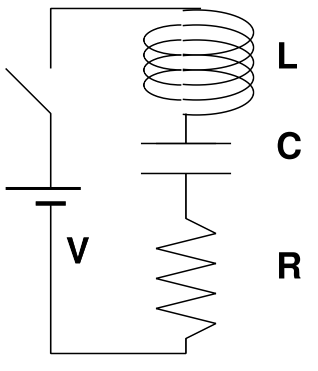
この逆起電力の大きさを、半径 a の一巻コイルを用いて推定しよう。コイルの電流を I とすると、コイル面にはほぼ $H = I/2\,a$ の磁場が発生し、磁束は $\Phi = \mu_0\,(I/2\,a)\,(\pi\,a^2) = \mu_0\,\pi\,a\,I/2$ 程度である。電磁誘導により発生する逆起電力は従って、次式程度となる。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0\,\pi\,a/2\,\frac{d\,I}{d\,t} = -L\frac{d\,I}{d\,t}$$

ここで左辺の電圧と右辺の電流の時間微分を関係付ける定数 L を自己インダクタンスと呼ぶ。今の場合は $L = \mu_0\,\pi\,a/2$ であるが、明らかにコイルの構造に依存する。

実際は、磁束密度を高める為にコイルの内部には磁性体を置く。この時には、μ_0 を $\mu_r\,\mu_0$ で置き換える。ここで、μ_r は相対透磁率と呼ばれる。更に、コイルの巻数を増やすとインダクタンスは大きくなる。

これらの受動素子を用いた簡単な回路例として、LCR の直列共振の例を挙げておこう。



図の様に、起電力 V の電池、スイッチ、インダクタンスが L のコイル、静電容量が C のコンデンサ及び 抵抗の大きさが R の抵抗を直列に繋ぐ。

時刻 t が負の時はスイッチが切れていて、$t = 0$ にスイッチが入ったとする。この場合の電流の様子を計算する。

図の上から下へ流れる電流を I とおく。各部品の両端の電位差は $L\,dI/dt,\ \int I\,dt/C,\ I\,R$ であるから、以下の式が時間に拘らず成り立つ。

$$V = L\,\frac{d\,I}{d\,t} + \int^t I(t)\,dt/C + I(t)\,R \tag{15}$$

t で微分すると、

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{dI}{dt}R+\frac{I}{C}=0 \tag{16}$$

この 2 階微分方程式を解けばよい。この微分方程式は 2 階であるから、二つの独立解をもち、一つの解に定数倍したものも解であるという特徴がある。$I(t)=e^{\lambda t}$ と置き、上の微分方程式に代入すると、

$$L\lambda^2+R\lambda+1/C=0 \tag{17}$$

この 2 次方程式の解は次の様に書ける。

$$\lambda_{\pm}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L} \tag{18}$$

従って、$A,\ B$ を定数として、(15) の一般解は

$$I(t)=Ae^{\lambda_+ t}+Be^{\lambda_- t} \tag{19}$$

$t=0$ では、電流は 0 であり、コイルの両端に全電圧がかかるとすると、$I_{t=0}=0$、$L\,dI/dt_{t=0}=V$ とおけば良いから、$B=-A,\ A=V/\{L(\lambda_+-\lambda_-)\}$ と決定できる。実際の電流の流れる様子は、抵抗が大きい為に $\lambda_{\pm}$ が実数になるか、抵抗が小さいために複素数になるかで大きく異る。但し、$\lambda_{\pm}$ が複素数になる時には、$I(t)$ の実部だけを取り出さねばならない。各部品にかかる電圧の時間依存性はこの電流を微分したり、積分したりした値を部品定数を用いれば良い。

$t=0$ で、コイルの両端に全電圧がかかるとしたが、もしも $L=0$、即ちコイルがなければ全電圧は抵抗にかかり、$I(t=0)=V/R$ とおけばよい。

$R=0$ と近似出来る場合が特に、実用上大切である。

興味を持つ学生の為に、もう少し詳しく説明を与えておこう。

(1) 抵抗が大きく $(R^2-4L/C)>0)$ 指数 (λ) を決める式 (18) の根が実根である場合。$\lambda_{\pm}=-\alpha,\ -\beta\ (\beta>\alpha)$ だとすると、

$$I(t)=\frac{V}{R}\{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}\}$$

(2) 抵抗が小さい為に、複素根となる場合。$\lambda_{\pm}=-\gamma\pm i\omega$ とおくと、

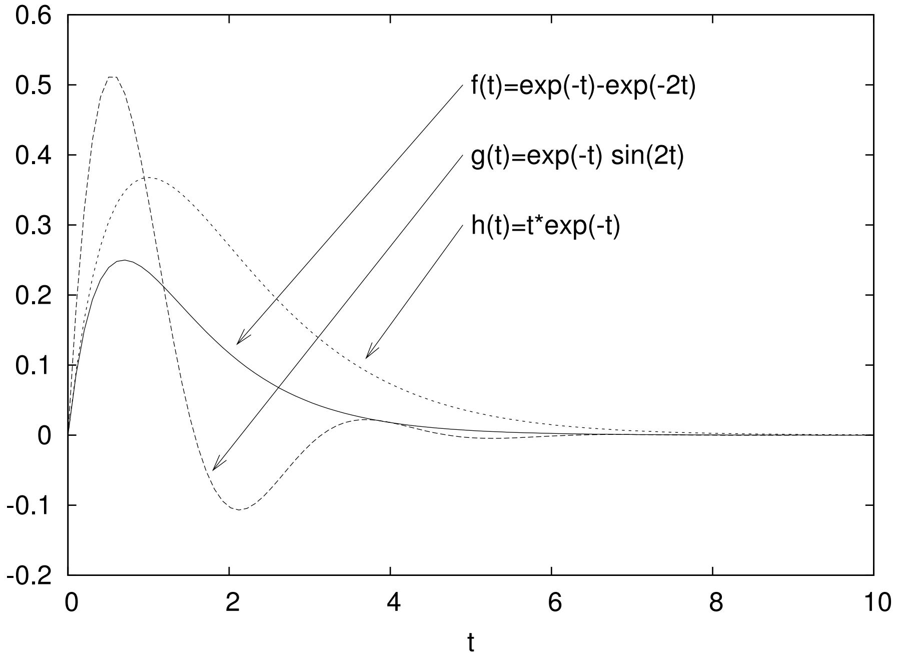
$$I(t)=\frac{V}{L}e^{-\gamma t}\sin\omega t$$

(3) $R^2-4L/C=0$ という特殊な場合。二つの独立解が一つになってしまうので、微分方程式に戻り、考え直す必要がある。$\lambda_{\pm}=-\gamma$ とおくと、$I_1(t)=e^{-\gamma t}$ と $I_2(t)=te^{-\gamma t}$ が二つの独立解になる。実際に微分方程式に代入し、$\gamma=R/2L,\ R^2=4L/C$ を使用すると、独立解である事が確認出来る。従って、次ぎの式がこの特殊な場合の一般解である。

$$I(t)=Ae^{-\gamma t}+Bte^{-\gamma t}$$

$t=0$ の時に条件 $I(0)=0,\ L\,dI/dt=V$ を代入すると、$A=0,\ B=V/L$ ときまる。

これらの解のグラフを描くと、以下の様になる。



ここでは、原子や分子といった現代の物質像に関する基本的な知識を提供する事を目的とする。

０) 原子の構成要素

１) 水素原子

２) 分子

０) 原子の構成要素

元素は原子核と電子が電気的引力に依り結合した系であり、その構成内容を識別するために元素記号を用いる。

電子は負の素電荷 ($-e \simeq -1.60 \times 10^{-19}$ [C])、及び約 9.11×10^{-31} [kg] の質量を持つ。

原子核は単数又は複数の陽子と中性子が核力で結合した状態であるとしておく。陽子は正の素電荷、約 1.67×10^{-27} [kg] の質量を有する。中性子は陽子よりも少しだけ (電子質量の２．６倍ほど) 重く, 電気的には中性である。陽子や中性子の質量は電子の質量よりも約２０００倍ほど大きい。

これらの３種の粒子は、スピンと呼ばれる固有角運動量を持ち、その大きさは 1/2 [$\hbar$] である。但し、h をプランク定数と $h \sim 6.63 \times 10^{-34}$ [J s] とし、$\hbar \equiv h/2\pi$ とおく。この固有角運動量に伴い、磁気的双極子能率を持っている (即ち、小さな棒磁石として振舞う)。陽子が磁気能率を有する為に、核磁気共鳴法を用いて人体の陽子分布を観測する事が可能である。例を知りたければ、僕のホームページ (http://www.tac.tsukuba.ac.jp/~yaoki) に行き、僕の似顔絵の頭の部分をクリックしてみよ。

陽子や中性子をくっつけている力が電気的な力でない事は、陽子１個と中性子１個で

出来ている重陽子という原子核が安定に存在することから了解できる。結合エネルギーを計算すればもっとはっきりするが。。。核力は現象論的にはかなりの事が理解されているが、未だ決定的な知識を得たという段階ではない。

電子と陽子間には主に電気的な引力が働く。非常に弱くはあるが、磁気的な力も働く。この磁気的な力は非常に弱いので、原子スペクトルの超微細構造を観測することでやっと検出出来る程度である。但し、この超微細構造は「時間の定義」や原子時計として利用されている。電子と中性子間には、磁気的な力しか働かないのでほとんど無関係と思っても良いだろう。弱い相互作用は通常は無視して良いだろう。

原子核中の陽子数の事を「原子番号」と呼び、元素の識別に利用される基本的なパラメータ (数) である。原子番号と元素記号とは１対１に対応している。特定の元素を取り上げた時、その原子核を構成する中性子の数は必ずしも一つには確定していない。陽子数が同じで異る中性子数に対応する原子核を同位元素と呼ぶ。例えば、塩素には１７個の陽子に対し１８個と２０個の中性子を持つものがあり、天然に存在する塩素は前者３に対し後者は１程度で混じっている。そのために、塩素の原子量は３５．５となっている。陽子数 Z と中性子数 N の和 $Z + N = A$ を質量数と呼ぶ。

同位元素を識別したいならば、右の様に元素記号の左肩に質量数、左下に原子番号を書く習慣がある。例えば塩素３５と塩素３７は、${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$, ${}^{37}_{17}\mathrm{Cl}$ と書く。

$${}^{\text{質量数}}_{\text{原子番号}}\text{元素記号}$$

原子核の近くには原子番号と同数の電子が存在し、原子核と電気的な引力を及ぼしあい、電気的に中性な原子を形成している。電子と原子核の束縛エネルギーは電子ボルト単位 [eV] で表現される場合が多く、１から１００ keV 程度の大きさである。ある条件下では、この束縛状態の電子を剥ぎとる事が出来る。剥ぎとられた電子を自由電子と呼ぶ。熱的に剥ぎとられた場合を熱電子、エネルギーの高い光を照射して剥ぎとられた電子を光電子と呼ぶ場合もある。

１電子ボルト (1 eV と記される) の大きさのエネルギーとは、陽子や電子が１ボルトの電位差で加速される場合に得るエネルギーと定義され、約 1 eV$\simeq 1.60 \times 10^{-19}$ $[J]$ である。この数にアボガドロ数を掛けて、１モル当たりのエネルギーに換算してみよ。

１) 水素原子

原子核としては陽子単体をとる。(例外的に中性子が１個又は２個陽子にくっついている場合があるが。。) 陽子と電子は電気的な引力で引き合うが、量子力学的に説明される (不確定性) 理由で両者の平均距離は約 5.29×10^{-11} $[m]$ よりも小さくはならない。(両者が合体する事は無い！) この値はボーア半径と呼ばれ、以下の手法で簡単に計算できる。

運動量と波長の関係	$m v = h/\lambda$
円周と波長の関係	$n \lambda = 2\pi r$
遠心力と電気的引力の釣合	$m v^2/r = e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$

円周上に n 個の波があるとして円周長 $2\pi r$ と波長 λ の式を書いた。波長と半径を消去すると、$n v = e^2/(2\epsilon_0 h) = v_B =\simeq c/137$ (ボーア速度＝一定) という式が導ける。ここで $c \simeq 3 \times 10^8$ $[m/s]$ は光速である。電子の早さは $n = 1, 2 \cdots$ のとびとびの値しか許されな

い！？この式から、半径 r を計算し $n=1$ とおき ボーア半径の値を確認せよ。

電子のエネルギー E_n は運動エネルギー (正) とポテンシャルエネルギー (負) の和として与えられる。

$$E_n = m\,(v_B/n)^2/2 - e^2/(4\,\pi\,\epsilon_0\,r) = -m\,v_B^2/(2\,n^2) = -13.6/n^2\ [eV]$$

自然数 n の値に応じ、無限個の励起状態がある。異る n に対応するエネルギーの差 $E_N - E_M \sim 13.6\left(1/M^2 - 1/N^2\right) = h\,\nu_{NM} = h\,c/\lambda_{NM}$ と書いた時、この振動数 ν_{NM} 又は波長 λ_{NM} で表せる光 (電磁波) が放出される。この式は、ライマン系列やバルマー系列として知られ、現代物理への突破孔を開いた輝かしい歴史を持つ式である。

ここでの説明は、現代物理の範囲では正確ではないが、ここで与えた半径やエネルギー等の式はかなりの精度で実験値を再現するという意味では正しい。
水素原子では、半径が 1 [fm] よりも幾らか小さい陽子の近くのどこかに、大きさを無視できる電子が存在する。周期的にその存在位置が変化する周期運動をしていると考えるのは間違いである。各瞬間瞬間にはどこかにいるのだろうが、何処にいるかは確率的にしか判断出来ない。ニュートン力学の範囲では、ある瞬間での位置と速度を確定させると、それ以後のいかなる時刻でも、その位置や速度は確定出来た。水素原子ではそのような因果律は成り立たないとされている。

原子番号が２以上の原子を正しく説明する事はかなり難しい。困難の原因は原子核と複数の電子との間には電気的な引力が働き、電子間には斥力が働くが、これらを数学的に正しく取り扱う手法が未だ開発されていない為である。え？と思うかも知れないが、程度問題ではあるが、本当である。電子がとり得る座席 (水素原子では n と記した) の内、エネルギー的に安定な下の方から順番に電子が座っていって、中性原子の基底状態をかたちつくる。但し、角運動量 (軌道角運動量とスピン角運動量) に関する事情説明を省いたので、あまり正確ではない。

n を与えた時の座席の数に関する情報を提供しておこう。軌道角運動量という０又は正の整数 l を考える。n を与えた時 l は $0 \le l < n$ という値をとり得る。この l の値が 0, 1, 2, 3 に対応して s, p, d, f という文字が充てられる。これらは光学の歴史を背景とし、sharp, principal, diffuse, fundamental という単語の頭文字からとられたと聴いている。更に磁気量子数という整数 m を考える。m のとり得る範囲は $|m| \le l$ とする。これらの整数 (量子数と呼ばれる) を重複無しにとる場合の数を考える。例えば $n=3$ ならば、$l = 0,\ 1,\ 2$ が可能であり、$l=0$ ならば $m=0$ のみが許され、$l=1$ に対しては $m=-1,\ 0,\ 1$ の３個が可能であり、$l=2$ に対しては５通りが可能である。ここまでの和は、$1+3+5=9$ 通りである。更に、スピンという電子固有の角運動量があるために、ここで数え上げた座席には２個ずつの電子が入り得るとする。この２個の自由度を数える為に、上向きと下向きという名前を付けて呼ぶ場合があるが、その基準となる方向を指定せずに上や下というのはホントはおかしいね。従って、n を与えた時、$2\,n^2$ の座席がある。つまり、$n=1$ ならば２個の座席があり、水素とヘリウムでこの座席は満員となる。

次ぎは $n=2$ の座席に電子を詰める。$2\,n^2 = 8$ だから８個の座席がある。原子番号が３から１０迄の原子がこの座席に着く。原子番号が１０の元素は不活性ガスのネオンである。

その次ぎは $n=3$ であり、１８個の座席がある。この１８個の座席の内 $l=0,\ 1$ に対応する１１から１８迄の座席を電子が占めると、ナトリウムからアルゴンになる。アルゴンも不活性ガスである。その次ぎのカリウムは $n=3,\ l=2$ の座席ではなく $n=4,\ l=0$ の座席に電子が入る。多数の電子が一つの原子を構成すると電子間の斥力が働くから、これを正しく考慮していない水素原子型のイメージが崩れて来る。

先の半径 r と量子数 n の関係が崩れてくると、例えば磁性という面白い性質を示す元素が登場する。原子番号が増えると、1s ($n = 1,\ l = m = 0$ 状態の電子束縛エネルギーは、原子番号の２乗に比例して増える。従ってウラン原子の最内殻電子の束縛エネルギーは １００ keV を越える。この値と化学結合のエネルギーを比較してみよ！ついでに言うと、電気的な引力は原子番号に比例しているのに、束縛エネルギーは何故原子番号の２乗に比例するの？と問うと首をかしげる物理屋も見られる。引力が強くなると、電子・原子核間距離 (の平均値) が原子番号に反比例して小さくなる効果を考慮する事を忘れた為である。

l を指定した座席が全部満たされた原子の一部に貴 (稀) ガスと呼ばれ、最後に詰められた電子の束縛エネルギーが原子番号の意味で、近くの原子よりも大きくなっている場合がある。この場合、稀ガスを構成する電子は原子核の廻りに密にくっついているので、近くから原子を見ても電気的に中性に見える。従って、複数の原子で分子を構成する確率が非常に小さい。例えば、He_2 という分子は、不可能ではないが作りにくい。稀ガスよりも一つだけ原子番号が小さな原子では、もう一つだけ非常に束縛エネルギーが大きな電子の座席が空いているので、負イオンになりやすく、これがハロゲンガスの特徴になっている。

ある意味でハロゲン原子の逆が、アルカリ原子である。アルカリ原子では、電子の束縛エネルギーが近隣原子中では最小である。従って、アルカリ原子から電子を取るのは簡単である。

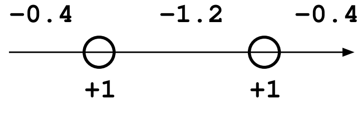
教室での授業風景をみると、学生は前から順番に座席に座っている訳ではなく、てんでばらばらな座席の占め方をしている。原子内電子は何故エネルギー的には下から順番に座席を占めるのだろう？その原因となる理由 (駆動力) は何だろうか？

エネルギー的に上の座席に電子がいて下の座席が空いているならば、電子は下の座席へ移るから (この時に光子を放出する事は高校で学んだだろう)、整然と下から順番に座席が詰まっていくのだと了解しているだろう。この記述に疑問を投げているのだよ。

答えは、次ぎの節の電磁波を読んでから考えよ。

２) 分子

原子では、電子は原子核のまわりを球対称に取り囲んでいると考えてよいだろう。これは、原子核が一つ真空中に浮かんでいるというイメージをつくると、特別な方向を考える事が出来ない為である。二つの原子が近くに来ると、その二つの原子核を繋ぐ線を考える事が出来る。従って、この線は空間に一つの方向を作るから、電子分布がこの方向を基準として球対称ではない分布をするはずである。この事を念頭に置いて、H_2 分子が束縛状態として安定に存在する様な分子構造を考えたい。水素原子は遠くから見ると電気的に中性だから、原子同志に電気的な引力は働かない。逆に、陽子の廻りの電荷分布を変化させ、上に述べた分子軸の中央付近で負電荷密度が増える様にすれば分子を作り得る。

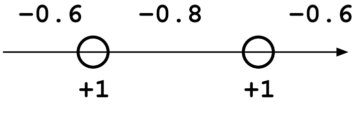


軸上だけに電荷があるという図の様な単純化模型で考えよう。陽子は丸印の位置に＋１単位の電荷を持つ。

電子はばらばらに動いているが、平均的には、図の様に中央部分で －１よりも幾らが絶対値が増えているとする (説明の為に、−1.2 という電荷をでっちあげた)。図の －１．２という電荷の実体があると仮定すると、この実体は 0.2 単位分だけ陽子から水素原子よりも余計に左右から引力を受ける。結果的に、二つの陽子はお互いに引力を及ぼし合う事になる。このようにして、共有結合と呼ばれる原子間力が発生する。水素原子に於ける電子と陽子間の結合エネルギーは 13.55 eV だが、この場合の原子間結合エネルギーは 4.48 eV 程度である。原子の財産である 13.55 eV の内、一つあたり 2.24 eV を分子形成

の為に支出していると思えば、ほとんどの財産は原子が未だ保有している。共有結合と謂えども、１６％程度しか分子形成には努力を払っていないと言える。この結合力の為に、陽子間距離は $0.74 \times 10^{-8}\ [cm]$ と、$0.53 \times 2 \times 10^{-8}\ [cm]$ よりもかなり小さくなっている。原子番号の大きな原子が作る分子でも、分子間結合力が特に増える訳ではなく、ほとんどの電子は原子に所属し、ほんの一握りの電子だけが分子形成に寄与している。

共有結合は、多くの有機物分子の結合形態である。多くの有機物では炭素と水素の結合が主役を演ずる。特に炭素では、$n = 2,\ l = 1(2p)$ という電子状態が重要であると思える。しかし、原子番号が小さい為に $n = 2,\ l = 0(2s)$ 状態とのエネルギー差は小さいので、分子結合に寄与する方が安定になり得る。即ち、2s 状態と 2p 状態が協力して分子形成に関与する。2s+2p 状態には未だ電子の座席が４個余分にある。従ってこの電子達の軌道角運動量という個性が残っている。(覚えているかな？ 高速走行中の自転車は、角運動量の保存則によりその方向を保持したいとするから、倒れにくい事を。) この電子達も方向性という個性を主張するから、結合状態にある場合の電子密度には方向性が出て来て、化学者は原子価に方向性があると説明する。例えば、ダイアモンドの結晶は、４個の電子が対等に分子結合に寄与している。逆に言うと、稀ガス・１価のハロゲンやアルカリイオンは球形だと考えておけば良い。



頭の良い学生は、二つの水素原子をゆっくりと近づけると、電子同志は反発し合い、図の様な電荷分布になるはずだと主張するだろう。ここで電子のスピンが登場する。この図の様な電荷分布は二つの電子スピンが平行で、先に述べた分子を形成する場合には電子スピンは反平行になっている。

二つの原子を近づけると、束縛状態が出来ると誤解してはいけない。衝突前の二つの原子は基底状態にあると仮定しよう。もしも、この二つの原子が衝突後束縛状態を作ったとすると、全体としてはエネルギーが減っている。余ったエネルギーは何処へ行ったのだろう？電磁波となって放出されれば、エネルギーの保存則を満足する。又は、もう一つ別の原子や分子が非常に近くにあり、余ったエネルギーはこの原子や分子が貰うという状況になければならない。この様な過程が分子形成と同時に起こらなければ、二つの原子は弾性的に跳ね返されるだけである。多分、弾性散乱が最も頻度が高い現象だろう。こう考えると、化学反応の速度を上げるのに、触媒があった方が良いだろうと想像がつく。

ここでは、エネルギー保存則が満足されなければ、化学反応は起こらないという事を説明した。反応の前後で保存されるべき物理量としては、エネルギー以外に運動量・角運動量をいつも考えておかねばならない。ミクロな系では、これまでに説明していない、パリティーという量も保存される。

中性原子から電子を一つ取り出すのに要する最低のエネルギーを第１イオン化エネルギーと呼ぶ。第１イオン化ポテンシャルと呼ぶ人もいるが、ポテンシャルではない。こ

の第１イオン化エネルギーは Li, Na, K で夫々、5.4, 5.2, 4.34 [eV] であり、F, Cl, Br では 17.4, 13.0, 11.8 [eV] である。ハロゲンとアルカリ原子は、負又は正のイオンになりやすい。これらの異符号のイオンが電気的な引力を及ぼしあって、‘分子’ が作られる場合をイオン結合と呼ぶ場合がある。先に説明したように、ほぼ球形のイオン同志が引力を及ぼし合うので、単純な立方体の結晶構造をすると考えよう。この球の半径はイオン半径と呼ばれる。この正負のイオン間に誘電率が８０程度の水分子が入り込むと、イオン間の引力が１/８０倍に弱くなるので、イオン結合の物質は簡単に水に融ける。実際に水に融けた時には、夫々のイオンは周囲を水分子に取り囲まれているので電場をかけても、もたもたとして動きが悪い。

更に、金属結合と呼ばれる原子間引力もある。金属結合では、電子は固体金属全体をあたかも一つの巨大分子であるかの様に振舞う。従ってマクロに見てどこが巨大分子の切れ目か分からなくなる。少し結合理由が分かりにくい説明だ。

先に説明した電子座席が満席になっていない原子をくっつけるとする。最外周の電子と原子核との結合がそれほど強く無い場合には、こちらの原子の電子はあちらの原子の電子に影響を与え、これらの電子エネルギーが幾らか影響を受ける。無数の原子集合では、この為に電子座席のエネルギーはある中心値の回りにある幅を持つ。熱的な運動エネルギー (常温では約 1/40 [eV]) よりもこの無数に出来た座席のエネルギーの差の方が小さければ、電子はこの座席間を自由に移っていける。最外周付近にいた電子は金属内ではほとんど自由に走りまわれるという事は、この電子が電気や熱を自由に運べるという事であるから、金属の熱や電気の伝導度は非常に大きい。

電子は自由に動けると言ったが、先に炭素原子の原子価のところで述べた方向性迄も失うわけではないので、純金属の結晶は方向性を内蔵している。鉄と銅ではイオン半径だけでなく結晶構造も異る。但し、かなりの程度に個性を失っているので、温度や圧力で結晶構造が変化する場合が多い。無数の電子が金属結合に寄与しているので、金属は一般的に言えば硬い (融点が高い)。但し、共有結合よりも強い訳ではない。純金属の融点は一定しているが、例えばヤング率の様な物性定数は一定していない。融点はミクロな結晶構造が関係し、ヤング率はもっとマクロな物質構造が関係しているからである。

分子と分子の間にも、原子核と電子間の結合や原子と原子の結合よりも更に弱い結合力での結合がある。金属の融点とプラスチックや氷の融点を比較すれば良いだろう。
この説明の前に、水分子を取り上げよう。先ず、水素原子には電子が一つしかないから、原子価は１である。酸素原子には８個の電子があり、そのうちの２個は $n = 1$ 状態を満たし、残りの６個が $n = 2$ 状態の８個の座席に６個を占めている。この内の２個は $l = 0$ 状態にあり球形だとすると、残りの４個が $l = 1$ 状態を占める。$l = 1$ 状態は $m = 1,\ 0,\ -1$ の３個の異る状態に分けられ、これらの状態は方向を持っている。３個の独立な方向はデカルト座標の $x,\ y,\ z$ 軸を取れるから、可能な原子価は直交している。この直交する方向に原子価を出し、２本の原子価に一つずつの水素原子が共有結合でくっつく。水素原子同志は電気的な反発力が働くから、水分子内の原子価の角度は９０度よりも微妙に広がる。液体の水の結合角は固体の水 (氷) の結合角よりも小さい。こうして、一つ一つの水分子が出来ているとする。水分子では、O-H 結合の中間点付近の電子密度が高いから、この付近は他の場所よりも負に帯電している。逆に言えば、水素原子の原子核付近は正に帯電している。即ち、分子としてみると、正の電荷の重心と負の電荷の重心が一致して

いない。電気的双極子能率を持っている。この様に、正負の電荷の重心が一致しない分子を有極性分子と呼ぶ。

棒磁石を沢山おいておくと、くっついてしまう。構造を持った棒磁石をくっつけると、きっちりと隙間無くくっつけるのが難しくなる事もあるだろう。この結果、水はちょっと見ると液体だのに幾らかは結晶の様な振舞いもする。水の結晶が摂氏４度の水よりも密度が小さくなるのはこの現れだろうか？

水分子が磁石 (本当は ”電 ”石と言わねばならないが) 的な力で引力を及ぼすのを、水素結合と呼ぶ場合がある。電石の強さ (電気的双極子能率と物理屋は言う) にも依るが、水の蒸発熱の大きさがこの水素結合で決っている。

有機分子の結合力として、共有結合が基本的で非常に強いことを説明した。その次ぎに覚えておかねばならないのが、水素結合の様な双極子-双極子相互作用 (要は電石間の力) である。その次ぎに分子間力として登場するのが van der Waals 力である。電子はエネルギー的に下にある空席の座席から順番に占めていくという意味の事を言った。しかし、この座席で電子はじっと大人しく座っている訳ではなく、ゴソゴソと動いている。近くに別の分子が来た時に、あっちの分子の電子とこっちの分子の電子が仲良くすると、エネルギー的に安定な状態が実現し得る。物理屋はこの状態を以下の様に表現する。最も外側の、従って最も束縛力の弱い電子がその平均位置から幾らかどちらかにずれたとすると、瞬間的に電石状態が実現する。この同じ瞬間にお隣の分子の対応する電子が逆向きに動くと、符号の異るもう一つの電石が現れ、両者は引き合うので、分子間引力が実現出来た事になる。どの様な時代にも、独立に動く輩もいれば群れたがる輩もいるものだ！こうして実現される引力を van der Waals 力と呼ぶ。ある種の参考資料にはドライアイスの結合力がこの力だと書いてあった。van der Waals 力でくっついた結晶は簡単に (常温でも) 融ける。

例えば本州のタンポポを北海道へ持っていくと、厳寒期には細胞中の水が凍ってしまうので、枯れてしまう。しかし北海道の地場タンポポは細胞の水の近くに有機物を呼び集めて、凍結温度を下げて冬を乗り切る。この違いは？ここで働いている結合力は更に弱かったと思う。ここらの原因 (機能性結合) がやっと解明され始めたのが、現代の科学の到達点だと思う。

水道水をコップに受けて、ある程度の高さから静かにこぼし、その時の音に耳を傾けてみよ。次ぎに、沸騰した直後の水を用いて同じ実験をしてみよ。両者で、どちらの方が硬い音がするかを聴きわけよ。どちらも水であるはずだのに音が違う事を認識し、その原因を考えよ。
次ぎに上で沸かせた水を室温にまで戻し、上と同じ実験をして白湯の音は水道水と沸騰水のどちらの音がするかを判断せよ。その原因を考えよ。

ある篤農家の書かれた本に、ある種の処理をした水では浸透性が増えるから、種籾の消毒は通常の濃度では濃すぎるので半分から 1/4 の濃度で行えと書いてあった。うーん、何となくノーベル賞の匂いがする！

ここでは、医学群初年度学生を対象とした、**X 線撮像に関する基本的な物理**を議論する。

0) 電磁波
1) X 線の発生
2) X 線の吸収
3) X 線の検出

0) 電磁波

真空とは (陰) 電子と陽電子が一人でに作られたり消えたりしている様な空間だと考える。何故、電子が作られるかを問うてはいけない。現在物理の範囲では、「不確定性原理」というのがあり、エネルギーの保存則は非常に短時間ならば破れていても良いと考える。即ち、エネルギーと時間の不確定幅を $\Delta E,\ \Delta t$、プランク定数 h を 2π で割った量を $\hbar(=h/2\pi)$ と書くと、以下の関係があるとする。

$$\Delta E\ \times\ \Delta t\ \geq \hbar$$

陰・陽の電子対が作られるためには、約 1 MeV のエネルギーが必要である。この大きさのエネルギーが不確定性の原理と矛盾しない時間は $\Delta E\ =\ 1\ [MeV]$、$\hbar = 1.05\ [J\cdot s]$ とすると、$6.57\times 10^{-22}\,[s]$ となる。非常に短い時間である。エネルギー的には約 1 MeV の借金 (借エネルギー) をしているが、上記時間内に対消滅 (陰・陽電子が合体して電磁波としてエネルギーを放出する過程) してこの借金を返す。従って長い時間でみれば、何も起こっていないのと同じである。この現象を「真空偏極」と呼ぼう。

陰・陽電子対が作られる確率は一定であるとする。この電子対が真空中から飛び出す方向は、方向を決める外的な条件が無ければてんでばらばらである。しかし、外的要因として正電荷があれば、この電荷の影響を受けるから新しく作られる陰電子は正電荷の方向に飛び出し陽電子は、運動量の保存則を満足する必要があるから、逆方向に飛び出す確率が、陰電子が外部におかれた正電荷の反対方向に飛び出す確率よりも大きいだろう。従って、正電荷の廻りには真空偏極に起因する電荷による力を媒介する環境が作られる。真空偏極により作られた陰陽電子対も電場を作るはずである。すると、次ぎに作られる電子対もこの電場の影響を受けて、その周囲に新しく電場を作るはずであり、この電場は結局最初の正電荷の存在を間接的に電荷の存在しない空間に正電荷の存在を伝える事になる。これが Michel Faraday が考えた間接力の概念であり、この電気的な力を伝える環境を「電場」と呼ぶ。

電場が時間的に変化すると、電流が流れているのと等価でありその電流の廻りには、磁気的な力を伝える環境が醸成され、この磁気的な力を伝達する場を「磁場」と呼ぶ。真空偏極により電子対が作られたり、対消滅したりするという事は、電子が運動している、即ち電流が流れていると考えれば磁場が作られても不思議ではないだろう。両者を併せて、「電磁場」と呼ぶ。

真空偏極で作られた電子対に確率的にある方向性を持たせる為には、これらの電子対に対してある種のエネルギーを与えねばならない。このエネルギーは、電磁場が持っていると考える。即ち、ある場所に正電荷を持ち込むと、その周囲には電場が出来、その電場を作るために、電場のエネルギーが必要である。沢山の電荷を一箇所に集めようと

すると、それだけ沢山のエネルギーが必要である。即ち、電気的な斥力 (クーロン力) に逆らって電荷を運んで来るエネルギーがこの電場に蓄えられるエネルギーであるとする。この説明だと、力はエネルギーを蓄える事が原因だと言っている。先には、力がする仕事としてエネルギー概念を導入したが。。。電場の存在による単位体積当たりのエネルギー、エネルギー密度、は １１ページで $\epsilon_0 E^2/2$ と与えた。

ここで与えた正電荷を時間的に振動させると、その周囲に作られる電場や磁場も時間的に変動する。この電磁場の持つエネルギーは、正電荷を振動させるのに必要なエネルギーである。力学の範囲では、電荷に質量が無ければ振動させるのにエネルギーは必要では無かったが、電荷があるとその周囲に電場を作るから、たとえ電荷に質量が無くとも振動させるにはエネルギーが必要である。先に述べたように電場が時間的に変化するならば、その周囲に磁場が作られる。

さて、ファラデーの電磁誘導の法則を学習した。磁場が時間的に変化すると、その近くには起電力が発生する。起電力とは、電荷に作用してこれを動かす力の事である。即ち、上で説明した言葉でファラデーの電磁誘導の法則を言い替えると、「時間的に磁場が変化するとその周囲に電場が発生する」。磁場が時間的に変動すると、発生する電場も時間的に変動する。こうして作られた時間的に変動する電場は、電流と等価だから、時間的に変動する磁場を発生する。この様にして、ある種の堂々巡りの事態が発生する。この堂々巡りの状態を電磁波と呼ぶ。堂々巡りが発生するためには、電場や磁場のエネルギーを供給しなければいけないから、エネルギー供給条件を満足していなければならない。例えば、電子が等速運動しているだけでは、電磁場に定常的にエネルギーを供給していないから、この堂々巡りは発生しない。等速運動している電子を電子と同じ速度で動く座標系からみると、電子は止まっているだけだから当然エネルギーを放出しているとは思えない。力が働くと運動量の変化が必ず発生するというのが、ニュートン力学の基本であった事を思いだそう。

電磁波は真空中を伝播する事が出来る事は、上の説明で了解されたと思う。この説明から判るように、真空偏極以外は相対論的な効果では無い。電磁波が真空中を伝わる速度は、真空中で陰陽電子対が作られる確率に直接関係している。従って、外部から作られる電荷の振動数には依存しない。この一定値を光速と呼び、現在の知識の範囲では最も基本的な定数の一つである。記号 c を使う場合が多い。c は約 3×10^8 $[m/s]$ である。例えば１メートルの定義を思いおこしてみよ。

電磁波の波長を λ とすると、その振動数 (１秒間に状態が変化する回数) ν は $\nu = c/\lambda$ で与えられる。波長を固定した時、電磁波のエネルギーには最低値があり、電磁波のエネルギーはこの最低値の整数倍になっている。この意味で、電磁波は基本的なエネルギーと運動量を持つ仮想的な粒子を考えて、この粒子を「光子」と呼ぶ。この場合のエネルギーの最低値を E と書くと、$E = h\nu$ で与えられる。h はプランク定数であり、約 $h = 6.626^{-34}$ $[J \cdot s]$ である。更に、光子の運動量 p は $E = pc$ $(= h\nu)$ で与えられる。従って、光子の運動量と波長にも $\lambda = h/p$ という関係がある。このドブロイ波という運動量と波長を関係付ける概念は、１６ページで水素原子のエネルギー計算に使用した。

電場が時間的に変化する時には、仮想的な電流が流れているとしないと電荷の保存則が成り立たない。電荷の保存則を厳密に成立する法則であると仮定し、このような電流 (変位電流と呼ばれる) を Maxwell は導入した。電荷の保存則は電磁気学の基本法則の一つである。

真空偏極という概念は、物理学者の御都合主義と映るかもしれない。真空偏極の証拠として、対生成という現象を挙げておこう。ある瞬間に陰陽電子対が作られたとする。常識的には、次ぎの瞬間に両者の電気的な引力の為に、上で説明した言葉で言えば借エネルギーを返すために、両者は合体して元の真空に帰らねばならない。そこで、両者が消滅する前に、借エネルギーの大きさである 1 MeV よりも大きなエネルギーに対応する電場をかけて、無理矢理にこの電子対を引き離す事が出来るならば、この陰陽電子対は我々が考える事が出来るような長時間にわたり、実在する事が出来る。この様な現象として、「対創生」という現象がある。この説明から判るように、対創生を起こす為には約1 MeV 以上のエネルギーの γ 線が必要である。

又、 γ 線のエネルギーを幾ら上げても、陰陽電子対が自然に作られる確率以上に電子対を発生させる事は出来ない。従って、対創生の発生確率は γ 線のエネルギーを上げると一定値に近ずく。

真空中を 1 MeV 以上のエネルギーの γ 線が伝播していても、自動的に対創生が起こる訳ではない。エネルギーと運動量の保存則を同時に満足させるためには、もう一つの物体が関与する必要があるためである。この件は後で、X 線の減衰に関して説明しよう。

１) X 線の発生

X 線は波長が可視光線よりもかなり短い電磁波である。従って、関係するエネルギーを増すだけで、電磁波の発生の基本的な機構がそのまま適用できる。一つは制動輻射であり、もう一つは特性 X 線の放射である。この二つを説明する。

不安定な粒子の崩壊に関連して、対発生 (創生) の逆過程で γ 線が発生する場合もあるが、これは考えない。

１－１) 制動輻射。

上で説明したが、一定速度で動く電荷からは電磁波は放出されない。上で述べたように、加速度を大きくする事が電磁波発生の要件であるから、質量が小さい電子を対象とするのが一般的である。常識的に考えて、電子を加速するにはエネルギーが必要であるから、時間的に逆な現象を考えると、即ち運動中の電子にブレーキをかけると、エネルギーが放出されるはずだ。

ある種の現象が起こる時には、その因果関係を逆転したらどのような事が起こるかも常に考える様にしよう。更に、時間の向きを逆向きにして考える事もやってもよう。これらは、 M. Faraday 以来の研究上の常套手段である。

電磁場を作るにはエネルギーが必要だと先に説明した。エネルギーと運動量の保存則は、電磁気的な現象でも成立すると仮定する。電子が運動しているならば、その周囲の電磁場も動いている。従って電磁場はエネルギーや運動量をもっている。電子がこの状態で加速されると、電磁場の持つエネルギーと運動量は増加する。逆に減速されると、電磁場のエネルギーや運動量の一部はその慣性の為にその運動を続ける。これが電磁波の発生である。親亀の背中に子亀が乗っていて、親亀だけが急に止まると背中の子亀が振り落される様なものである。

電子が一定の周期で単振動していると、放出される電磁波の周期も電子の運動周期と同じである。電子が棒アンテナの中を直線周期運動する場合には、放射される電磁波は直線偏光している。

電磁波の放出方向や強度は、電子の速度と加速度に関するかなり複雑な関数である。相

対論が無視出来る様な低速時には、加速度に直角方向に最も強く放出され、加速度に平行な方向には放出されない。これは、電磁波の進行方向と電場や磁場の向きが直交しているためである。従って、TV の八木アンテナの棒は電波の進行方向に直角に置かれる。

次ぎに常識的なクーリッジ管 (X 線発生装置) に付いて述べよう。真空中で電子を １０-１００ kV 程度の電位差で加速し、原子番号の大きな物質 (例えばタングステン) に照射する。この物質は、電気的には対陰極と呼ばれる場合もある。対陰極に突入した高速電子は、この物質中の電子に衝突し急激に速度を落す。即ち負の加速度を受け、この進行方向にほぼ垂直な方向に電磁波を放出する。対陰極の電子密度が大きいほど減速度も大きくなるから、出来るだけ電子密度が高い物質を選ぶのが得策である。但し、電子の運動エネルギーの多くは熱エネルギーに転化し、対陰極の温度上昇を伴う。極端な場合、対陰極が融けてしまう。電子の速度が大きいほど減速度もおおきくなるから、大きなエネルギーの電磁波が放出される。

高速電子にブレーキをかける事で放出されるこの様な電磁波を放出する機構を「制動輻射」と呼ぶ。ドイツ語では Bremsstrahlung であり、日本人でもブレムスと略して呼ぶ場合がある。古典的な電磁気学に依ると、放射される電磁波のエネルギーは加速度の２乗に比例する。２乗に比例するから、加速度の符号には依存しない。即ち、加速度でも減速度でも絶対値が同じならばどちらも等価である。減速度の大きさは、対陰極の電子との衝突が統計的な性格をもつので、一定ではない。この一定ではない減速度に依存して、放出される電磁波のエネルギーは電子の最高運動エネルギーで決まるエネルギーを上限とする連続エネルギーの電磁波が放出される。

制動輻射は非常に基本的な輻射機構である。電子が加速度運動すれば必ずある確率で、輻射を伴う。実用的には、放送局や携帯電話からの電波も、多数の電子をアンテナ上で単振動させ、これに伴う制動輻射である。

加速器や電子顕微鏡からも制動輻射は放出されている。カラー TV のブラウン管では約５０ kV の高電圧で電子を加速し、蛍光板でこの電子を止めている。従って制動輻射が放出されている。ある確率でブラウン管の外部に幾らかはこの電磁波が洩れているだろう。高電圧をかけると、コロナ放電をしている。輻射強度に依るが、危険レベルを越えない様な対処が必要である。

１ー２) 特性 X 線

高速電子が原子に衝突すると、原子を構成している電子をその安定位置から跳ね飛ばし、電子座席に空白が生じる。もしも、この空白座席の位置エネルギーよりも高い位置エネルギーを持つ電子があれば、ある確率で高い位置エネルギーの電子はこの空白座席を占める。この電子状態の変化を「遷移」と呼ぶ。そしてこの位置エネルギーの差に相当するエネルギーの電磁波 (光子と呼ばれる場合が多い) を放出する。放出される光子のエネルギーは、最初と最後の電子の位置エネルギーの差であるから、一定の値を持つ。実は、光子は角運動量も持っている。その大きさは、今登場する様なエネルギー領域では全て $1\hbar$ である。$\hbar$ は先に登場したプランク定数を 2π で割った値である。高校では h そのものが登場するのに、大学では h でなく $\hbar$ が登場する理由はここにあると思えば納得できるだろう。角運動量の保存則を考慮すると、エネルギー的に上にさえあれば、どの電子でもエネルギー的に下に出来た空白座席へ移る事が出来る訳ではない。ある特定の状態にある電子だけが下の座席へ遷移する事が出来る。従って、この遷移エネルギーは一定値にな

る確率が非常に大きい。この遷移に関与する電子エネルギーは、原子に依存して確定している。もしもエネルギー的に下にある座席へ、上の状態からの遷移が禁止 (抑制) されていると、燐光の様に発光原因を取り去ったあとも暫く残光として残る場合がある。

この様に特定のエネルギーの光子が放出されるので、この光子エネルギーが X 線領域にある場合には、特性 X 線と呼ばれる。特に、一番内側の電子状態 ($1s$ 状態と呼ばれる) に空席が出来、そのすぐ上にある $2p$ 状態からの遷移に対応する電磁波を K-X 線と呼ぶ。

細かく言うと、$2p$ 状態は $2p_{1/2}$, $2p_{3/2}$ 状態に分かれている。これに伴い、K-X 線も K_α, K_β と呼ばれる少しだけエネルギーの異った電磁波から構成される。

原子の特定の電子状態間の遷移に伴い放出される電磁波は特定の波長を持つ。この場合の電磁波の波長が可視光線の波長領域になる場合もある。例えば高速道路の照明に多用されるナトリウムランプの色を思いだせ。発光ダイオードの色もこの特徴を持つ。光の色が単色である場合には、波長が一定である場合が多い。例えば蛍光灯では、封入された水銀原子からの発光であり、緑色が非常に強い。紫外線も多いが、こちらは目に見えない。これでは日常生活に困るから、蛍光管の内面に各種の蛍光塗料を塗って、波長変換をしている。しかし、それでも太陽光に完全に似せる事には未だ成功していないようである。蛍光灯と太陽光とでは、物質の色が異る場合があるのは、蛍光灯からの電磁波の波長分布と太陽光の波長分布が異るためである。直接見た目には太陽光と蛍光灯光で同じ色の場合でも、反射光で見る場合には、物質の吸収特性が異る為に、異る色に見える場合がある。

ついでに、固体からの発光機構に付いても一言付け加えておこう。固体の中には沢山の原子があり、この原子には複数の電子が束縛されている。この無数の電子は、特定の原子に束縛されていたとしても、お互いに強い影響を及ぼしあっている。だから固体としてくっついている事ができる。従って、電子の位置エネルギーは非常に良い精度で連続的に許される。このほぼ連続的な電子状態間の遷移の結果でて来る電磁波の波長分布は連続となる。

え？ 太陽の表面は気体だから、太陽光は連続では無いのと想像されるって？太陽光は連続スペクトルだと考えられるのは何故だろう？太陽の光球部分からの光が強ければ、ここは連続スペクトルだろうし、光彩やコロナ部分からの光には輝線スペクトルも見られるだろう。この輝線スペクトルから、太陽に存在する物質の同定が出来るのだ。

2) X 線の吸収

X 線は真空中を直進する。もしもこの X 線が物質中の電子に衝突すると、ある確率で光電効果が起こる。この事情をこの節では説明する。ここでは、電磁波の散乱と吸収を問題とする。タイトルには吸収と書いたが。。。

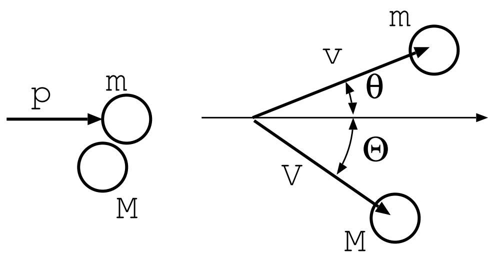
QED という物理の理論では、電磁波の散乱は電子による光子の吸収と再放出という二つの過程により記述される。古典電磁気学では、電磁波の散乱は電磁波中の電場により、電子が加速度運動をし、その結果として電磁波を放出する過程として説明する。ここでは、簡単の為に後者の立場をとろう。電磁波は、その進行方向に垂直な電場と磁場で構成される。X 線程度のエネルギーが低い波長の電磁波では、この内の電場の影響を考えれば充分である。X 線をエネルギーの低い電磁波だと表現すると、びっくりする人も沢山いるだろうが、原子核物理屋としての僕から見ればまだまだ低エネルギーである。

先に述べた様に光子のエネルギーが低い場合を考える。先ず、真空中に質量 m の電子が一つ静止していて、この電子に運動量が p の光子が衝突して電子に吸収される過程は実現出来ない事を、エネルギーと運動量の保存則から説明する。衝突前の全系のエネル

ギー $E = pc$、運動量は p である。この光子が電子に吸収されて、電子が速度 v で動き出したとすると、電子の運動量 $p_e = mv$ である。一方、運動量が保存するから、$p_e = p$ でなければならない。この運動量を持つ電子の運動エネルギー $E_e = p^2/(2m)$ である。ここに $p = E/c$ を代入すると、$E_e = E^2/(2mc^2)$ である。エネルギー保存則を考慮すると、$E_e = E$ でなければならない。$E_e = E$ が成立するならば、$E = E_e = \sqrt{2mc^2} =$ 一定 となる。初期状態での光子のエネルギーは任意のはずだのに、一定になってしまった！？これは明らかに矛盾である。従って、この様な現象は絶対に起こらない。

このような矛盾がおこる原因は、以下の様に考えると良い。光子はエネルギーと運動量を持つが、質量を持たない。一方の電子は、質量を持つ。電子が動けば運動量と運動エネルギーを持つ。電子には質量がある分、運動に伴う運動量は大きい。光子は質量を持たないので、エネルギーの割に運動量が小さい。$p = E/c$ だから、運動量の計算にはエネルギーを非常に大きな速度 (光速 c) で割っている！質量の有無に起因するアンバランスが吸収反応の前後で矛盾を生じた。

電子が光子を吸収するためには、もう一つの物体が必要である。例えば、電子は質量 M の原子核に束縛されていなければならない。光子を吸収した後の電子と原子核の速度を夫々 v, V と書き、吸収前には電子も原子核も止まっていたとすると、エネルギーと運動量の保存則は以下の様になる。電子と原子核の進行方向を、光子の進行方向から測って θ, Θ の角度だとすると次ぎの 3 個の式が成立する。



$$pc = mv^2/2 + MV^2/2$$

$$p = mv\cos\theta + MV\cos\Theta$$

$$0 = mv\sin\theta + MV\sin\Theta$$

これらの式から V と Θ を消去すると、v に関する 2 次方程式を得る。

この 2 次方程式は正の実根を持つ事が簡単に導ける。 2 次方程式の根の内一方は正、他方は負である。当然負の方は捨てる。従って、この現象は起り得る。光子が物質に吸収され、自由になった電子が一つ放出される過程は「光電効果」と呼ばれる。

光電効果が起こるためには、電子が光子を吸収する事による運動量とエネルギー保存則の矛盾を電子と強く結合している原子核が解消してくれる。従って、電子と原子核が強く結合しているほど、光電効果が起こる確率は大きくなる。このために、光電効果はほとんど 1s 状態の電子を叩きだし、その確率は原子番号を Z とすると、$Z^{4.5-5}$ 程度の原子番号依存性を示す。この事を、電子が原子核にしがみついているとして、この電子を光子がゆすって振り落すと考えるならば、強くしがみ付いている電子ほど振り落し易いと表現した時に、直観と矛盾する。光電効果が起こるには、光子のエネルギーが電子の束縛エネルギーよりも大きくなければならない事は当然である。光電効果が起こる確率は $E_\gamma^{-3.5}$ のエネルギー依存性を持つので、X 線のエネルギー E_γ が増えると急速に小さくなる。即ち、ある程度の物質量を X 線が透過するためには、X 線のエネルギーを上げなければならに。

少しほのめかしたが、光子を吸収した後の電子が別の光子を放出してもエネルギーと運動量の保存則と矛盾する事はない。この現象の場合には、原子核が存在しなくても構わない。電子が可視光線程度の波長

の光子を散乱する場合を「トムソン散乱」と呼ぶ。この場合には、電場の時間的変化がゆっくりしているので、電子は入射電磁波と同じ振動数で振動出来るので、放出される光子の振動数 (エネルギー) は入射波の振動数と同じである。

物質中の電子は、ある固有振動数で振動していると考えられる。この固有振動数に近い振動数の電磁波で物質を照射すると、吸収や散乱確率が非常に大きくなるだろう。白色光をあて、反射光を見ると反射光の色が強調され、透過光を見ると吸収されなかった色に見える。従って、物質には固有の色がある。

可視光線を非常に良く反射する物質は金属的な光沢を持つ。これは、物質表面付近に非常に動きやすい電子が沢山あれば良い。この様な電子を持つ物質の両端に電圧を掛けると、電子が自由に動くから、大きな電流が流れる。即ち、金属光沢を持つ物質は電気伝導度が大きい場合が多い。

電子が光子を吸収し、同じ波長の光子を再放出するならば、結局は何も起こらなかったと勘違いしてはいけない。簡単に想像出来る事だが、吸収と再放出には幾らかの時間がかかる。従って、たとえ光が透明物質中を直進している時でも、光の伝播速度が真空中よりも遅くなる。透明な物質の光の屈折率は、真空中と物質中の光の速度の比である事は高校で学習したと思う。物質中では、光の速度が遅くなるから、屈折率は１よりも大きくなる。屈折率が１以下の物質があるとすると、そこでは非常に変な事が起こっているのだろう。

光子のエネルギーが高くなると、電場の振動が激しすぎて電子はこの振動に追随出来ない。従って放出される光子 (電磁波) の振動数は入射波の振動数よりも低くなる。この様に入射波よりも低い振動数の電磁波 (光子) が放出される場合を「コンプトン散乱」と呼び、光電効果とは区別する。

X 線が物質中を通過すると、ある場合には散乱により進行方向が変えられて直進しない。またある場合には光電効果により物質に吸収される。このような現象が起こる確率は物質に依存する。先に述べたように、光電効果ならば原子番号が大きい物質ほど吸収確率が大きい。コンプトン散乱ならば電子数が多いほど散乱確率は大きくなる。共鳴吸収は、 X 線のエネルギーに依るので一般論は難しい。

一般的傾向として、原子番号が大きい物質が多量にあるほど、X 線の吸収確率 (正確には直進してこない確率) は増える。人体に X 線を照射すると、原子番号の小さな水素、窒素、酸素等はかなりの確率で透過するがカルシウム等では吸収されるので、骨の部分は透過しにくい。原子一個で比較すると、酸素とカルシュウムでは約９５倍ほどカルシウムで光電効果が起こる確率が大きい。

３) X 線の検出

X 線を検出するには、X 線照射により、状態が変化する事及びその変化が検出出来る事が必要条件である。状態変化としては、主に光電効果やコンプトン散乱を利用する。これにより、(中性) 原子から電子が一つ飛び出し、正イオンが作られる。このイオンが元の状態へ戻る前にこの状態変化を固定するか、検出する必要がある。

イオンが作られたという状態を固定する方法としては、写真がある。主に臭化銀の微細結晶が使用される。叩き出された電子は結晶中を動きまわるうちに、不純物が作る電子状態 (原子の話では、電子座席と呼んだ) の一つに落ち込む。ある意味で結晶中に負イオンが作られる。この負イオンに、廻りの銀原子がまとわり付いた状態を潜像と呼ぶ。この潜像の状態は、ある程度の長さの期間この状態を保ち得る。現像という操作に依り、こ

の負イオンを含む微細結晶の銀のみを残し、感光していない微結晶部分の臭化銀は溶かして除いてしまう。これにより、微細結晶単位で銀が残る部分と無くなった部分を作り出す。即ち、フィルム上に X 線強度に関係した像が残る。

増感材や取り扱いの簡便さ等の細かい点に迄研究がなされているだろうから、化学者や現場の関係者に詳しい事は聴いてもらいたい。

物理屋として付け加える。X 線撮影では、２次元位置情報を得るのが目的である。位置分解能を上げるには、臭化銀結晶の大きさを小さくすれば良い。一方、検出感度は物質量に比例するから、結晶を小さくすると検出感度は下がる。どこかで妥協する必要がある。検出感度は、光電効果を利用しているとすると、検出物質の原子番号が大きいほど大きい。従って可能ならば臭化銀よりもヨウ化銀を使用する方が良い。あまり奥行きが深いと検出出来ない可能性があるから検出器の厚さも問題だ。

他の検出手段としては、CCD 等の半導体を用いるものがある。これも半導体としての物質の細かい特性を理解せずには説明が難しい。入射 X 線により自由電子が作られると電気伝導度が変化する。もしもこの検出部に事前に電圧を掛けておくと、電気伝導度が変化して抵抗が瞬間的に小さくなると電流が流れる。この電流を何とかして電気信号に変換できればよい。非常に小さな検出部を検出面にぎっしりと並べておく事が出来るならば、写真をとるのと同じ効果が期待できる。実際には、半導体の内部に p-n 接合と呼ばれる、電場を発生させやすい部位を作り込んでいる。この場合でも光電効果を利用するから、原子番号の大きな物質で CCD を作らないと人体への被曝量が多くなる。CCD でも、１個のピクセル (１個の検出器) の大きさは、臭化銀の微小結晶の大きさを下回る事は困難だろう。通常の CCD は１面だけで構成されている。これを複数重ねる事が出来ると、検出効率を上げる事が可能になろう。

ガスを利用した位置検出型比例係数管の利用も考えられる。位置分解能は０.１ mm が実現可能な努力目標程度である。X 線フィルムに位置分解能で負けるだろう。ガスは固体検出器よりも物質量が少ないから、それだけ X 線の検出効率が低下する。原子核実験に利用しているものでは、量子効率が悪いだろう。例えば電極を鉛メッキして検出効率を上げるといった工夫が必要だろう。