

移動から見た都市空間の分析

(課題番号 12480103)

平成12年度～平成14年度科学研究費補助金

基盤研究(B)(2)

研究成果報告書

平成15年3月

研究代表者 腰塚 武志

(筑波大学社会工学系 教授)

移動から見た都市空間の分析

(課題番号 12480103)

平成12年度～平成14年度科学研究費補助金
基盤研究(B)(2)
研究成果報告書

平成15年3月

研究代表者 腰塚 武志
(筑波大学社会工学系 教授)

は し が き

本研究報告書は、平成12年度～14年度に行われた文部省科学研究費補助金基盤研究(B)(2)「移動から見た都市空間の分析」の研究成果をまとめたものである。研究組織および研究経費は以下のとおりである。

研究組織

研究代表者：腰塚 武志（筑波大学社会工学系 教授）

研究分担者：大澤 義明（筑波大学社会工学系 教授）

研究分担者：鈴木 勉（筑波大学社会工学系 助教授）（平成12年度・14年度）

研究経費

平成12年度	2,500千円
平成13年度	2,200千円
平成14年度	2,400千円
計	7,100千円

研究発表

(1) 学会誌等

1. 腰塚武志：平面領域における距離分布，日本都市計画学会平成14年度論文集，pp.37-42, 2002.
2. 腰塚武志，大津晶：都市領域における距離分布の導出とその応用，日本都市計画学会平成13年度論文集，pp.871-876, 2001.
3. 田村一軌，腰塚武志，大澤義明：道路ネットワーク上の道路距離と直線距離，日本都市計画学会平成13年度論文集，pp.877-882, 2001.
4. 田口東，腰塚武志：交通路面積を考慮に入れた高層建物の移動時間の評価，*Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.44, No.4, pp.326-342, 2001.
5. 栗田治，腰塚武志：省エネルギー直方体都市のプロポーション解析—沙漠の摩天楼シバームの数理—，日本建築学会計画系論文集，第544号，pp.125-131, 2001.
6. Osamu Hirayama, Ryuji Takaki, Takeshi Koshizuka and Hiroshi Yanai, "Model Analysis for Formation of Population Distribution", *Forma*, Vol.16, No.1, pp.47-63, 2001.
7. 腰塚武志，石井儀光：新宿高層ビル群における移動時間分布，日本都市計画学会平成12年度論文集，pp.1003-1008, 2000.
8. 田村一軌，腰塚武志：道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究，日本都市計画学会平成12年度論文集，pp.1021-1026, 2000.
9. Y.Ohsawa, H.Kagaya and T.Koshizuka: Map projection errors in the Weber problem. *Journal of Geographical Systems*, Vol.4, pp.325-342, 2002.
10. Y.Ohsawa and T.Koshizuka: Two-dimensional fiscal competition. *Journal of Economic Geography*. (掲載決定，印刷中)
11. 宮川雅至，大澤義明：移動途中の寄り道行動から見た施設への距離分布．日本都市計画学会第36回学術研究発表論文集，pp.847-852, 2001.
12. 尾崎尚也，大澤義明：利用者行動属性の多様性を考慮した時空間施設配置モデル．日本都市計画学会第36回学術研究発表論文集，pp.853-858, 2001.
13. Y.Ohsawa: Bicriteria Euclidean location associated with maximin and minimax criteria. *Naval Research Logistics*, 47(7), pp.581-592, 2000.
14. Y. Ohsawa and T. Koshizuka, Evaluation of zone orderings based on the correlations of order-differences and distances, *Geographical Analysis*, 32(1), pp.173-185, 2000.
15. 鈴木 勉：フロー需要に基づく施設配置モデルと需要構成が施設配置に与える影響，都市計画論文集，Vol.37, pp.115-120, 2002.
16. 鈴木 勉，M. John Hodgson，大山崇：最近隣施設選択仮定を緩和した離散型施設配置モデル，GIS—理論と応用，Vol.10, No.1, pp.29-37, 2002.

17. 鈴木 勉：サービスの組合せに着目した複合サービス施設の最適配置，日本建築学会計画系論文集，No.540，pp.189-195，2001.
18. 大山 崇，鈴木 勉：周遊距離Voronoi図とそれを用いた商業立地分析，日本応用数理学会論文誌，Vol.11，No.1，pp.1-14，2001.
19. 鈴木 勉：土地費用の上昇に伴う地域施設複合化のモデル分析，日本建築学会計画系論文集，No.546，pp.193-197，2001.
20. 鈴木 勉： p -メディアン問題における規模密度法則の成立性，日本建築学会計画系論文集，No.532，pp.171-176，2000.
21. 渡部大輔，鈴木 勉：規模の経済性を考慮した階層的収集・配送輸送システムに関する研究，日本都市計画論文集，Vol.35，pp.1027-1032，2000.

(2) 口頭発表

1. 田村一軌，腰塚武志，大澤義明：格子状道路網における一方通行路導入の影響．オペレーションズ・リサーチ学会春季アブストラクト集，pp.170-171，2002.
2. 田村一軌，腰塚武志，大澤義明：平面の距離分布とネットワークの距離分布，日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集，pp.156-157，2002.
3. 田村一軌，腰塚武志，大澤義明：連続的利用者分布とネットワーク単一施設配置モデル，日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集，pp.200-203，2001.
4. 田村一軌，腰塚武志，大澤義明：ネットワーク上の道路距離と直線距離．オペレーションズ・リサーチ学会秋季アブストラクト集，pp.234-235，2000.
5. 上川原学，腰塚武志，大澤義明：マラソンコース形状の評価．オペレーションズ・リサーチ学会秋季アブストラクト集，pp.62-63，2000.
6. 小林隆史，大澤義明：太陽光発電導入が地域空間構造に与える影響．日本都市計画学会第37回学術研究発表論文集，pp.1-6，2002.
7. 西村正志，大澤義明：ゴミ焼却によって発生するダイオキシン類と収集車が出す排ガスに着目したごみ処理広域圏．日本都市計画学会第37回学術研究発表論文集，pp.1069-1074，2002.
8. 五木田玲子，大澤義明：人通りと街灯に着目した安全範囲モデル．日本都市計画学会第37回学術研究発表論文集，pp.673-678，2002.
9. 坂上友紀，大澤義明：携帯電話基地局配置に着目した利用可能範囲と電磁波被曝範囲．オペレーションズ・リサーチ学会秋季アブストラクト集，pp.146-147，2002.
10. 宮川雅至，大澤義明：利用者からの距離に着目した規則的施設配置の頑健性．オペレーションズ・リサーチ学会秋季アブストラクト集，pp.154-155，2002.
11. 宮川雅至，大澤義明：移動から見た線的施設までの距離分布．オペレーションズ・リサーチ学会春季アブストラクト集，pp.90-91，2001.

12. 尾崎尚也, 大澤義明, 歳森敦: 公共図書館の空間的不平等性と利用可能圏の把握. 建築学会第19回地域施設計画シンポジウム, pp.107-112, 2001.
13. 大江直輔, 梅川智也, 大澤義明: 北海道における観光流動の実証的研究. 日本観光研究学会第16回全国大会研究発表論文集, pp.170-171, 2001.
14. 大澤義明: 道路網から見た研究学園都市の比較—ルーバン・ラ・ヌーブと筑波とを対象として—, 2000年度建築学会大会学術講演梗概集—都市計画・建築経済・住宅問題, pp.613-614, 2000.
15. 宮川雅至, 大澤義明: 迂回距離と旅行自由度との関係について. オペレーションズ・リサーチ学会秋季アブストラクト集, pp.76-77, 2000.
16. 尾崎尚也, 大澤義明: 利用者の多様性を考慮した時空間移動図書館配置. オペレーションズ・リサーチ学会秋季アブストラクト集, pp.232-233, 2000.
17. T.Suzuki: "Optimal Facility Location with Multipurpose Trip Making," the first author with M. John Hodgson, presented at the Institute for Operations Research and Management Science (INFORMS) Annual Meeting San Jose, November 17-20, 2002.
18. 鈴木 勉, M. John Hodgson, 大山崇: p-median問題における最近隣施設選択仮定の緩和, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp.158-159, 2002.
19. T.Suzuki: "Optimal Facility Location with Multi-purpose Tripmaking," the first author with M. John Hodgson, presented at the 9th International Symposium on Locational Decisions (ISOLDE IX), Fredericton & St. Andrews, Canada, June 12-18, 2002.
20. 江村竜哉, 鈴木 勉: 旅行者の観光周遊行動に着目した観光地連携策の検証, 日本建築学会大会学術講演梗概集F-1, pp.113-114, 2002.
21. 鈴木 勉: 線分都市におけるフロー捕捉型施設の最適配置, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.152-153, 2002.
22. T.Suzuki: "Optimal Facility Location with Multipurpose Trip Making," the first author with M. John Hodgson, presented at the Third International Conference on Decision Making in Urban and Civil Engineering (DMinUCE-3), London, UK, November 6-8, 2002.
23. T.Suzuki: "Optimal Facility Location with Multipurpose Trip Making," the first author with M. John Hodgson, presented at the Institute for Operations Research and Management Science (INFORMS) Annual Meeting San Jose, November 17-20, 2002.
24. 鈴木 勉, 江村竜哉: 回遊行動に着目した商業地における休憩需要分布, 2000年度日本建築学会関東支部研究報告集, pp.101-104, 2001.
25. T.Suzuki: "Tour-Distance Voronoi Diagram and Agglomeration in Spatial Competition," the first author with Takashi Ohyama, presented at the INFORMS International Hawaii, Maui, Hawaii, USA, June 17-20, 2001.
26. T.Suzuki: "Multi-Service Facility Location Models," the first author with M. John Hodgson, presented at the 48th North American Meetings of the Regional Science Association International, Charleston, SC, USA, November 15-17, 2001.

27. 鈴木 勉：空間複合型施設の最適配置問題，日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp.28-29, 2000.
28. 渡部大輔，鈴木 勉：一次元都市における最適な集約・分配輸送システムに関する研究，日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp.136-137, 2000.
29. 大山崇，鈴木 勉：病院までの搬送を考慮した救急車の最適配置，日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp.212-213, 2000.
30. T.Suzuki "Urban Structure and Commuting Distance: A Theoretical Approach to Excess Commuting," presented at the 6th World Congress of Regional Science Association International, Lugano, Switzerland, May 16-20, 2000.
31. 大山崇，鈴木 勉：回遊距離を用いたVoronoi図とその商圈への応用，平成11年度日本経営工学会東関東研究発表会予稿集, pp.11-12,, 2000.
32. 鈴木 勉：土地費用に着目した施設複合化と配置のモデル分析，日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.66-67, 2000.
33. 大山崇，鈴木 勉：周遊距離を用いたVoronoi図，日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.74-75, 2000.

目 次

腰塚武志：平面領域における距離分布	7
田口 東，腰塚武志：交通路面積を考慮に入れた高層建物の移動時間の評価	13
腰塚武志，大津晶：都市領域における距離分布の導出とその応用	31
田村一軌，腰塚武志，大澤 義明：道路ネットワーク上の道路距離と直線距離	37
田村一軌，腰塚武志，大澤 義明：連続的利用者分布とネットワーク単一施設配置モデル	43
栗田 治，腰塚武志：	
省エネルギー直方体都市のプロポーション解析—沙漠の摩天楼シバームの数理—	45
大津 晶，腰塚武志：道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究	52
腰塚武志，石井儀光：新宿高層ビル群における移動時間分布	58
宮川雅至，大澤 義明：移動途中の寄り道行動から見た施設への距離分布	64
尾崎尚也，大澤 義明：利用者行動属性の多様性を考慮した時空間施設配置モデル	70
宮川雅至，大澤 義明：移動から見た線的施設までの距離分布	76
Y. Ohsawa：A bicriteria euclidean location associated with maximin and minimax criteria.	78
Y. Ohsawa, T.Koshizuka：	
Evaluation of zone orderings based on the correlation of order differences and distances	90
Y. Ohsawa：A geometrical solution for quadratic bicriteria location models.	104
鈴木 勉，M. John Hodgson：Optimal Facility Location with Multipurpose Trip Making	113
鈴木 勉：フロー需要に基づく施設配置モデルと需要構成が施設配置に与える影響	136
鈴木 勉，M. John Hodgson，大山崇：	
最近隣施設選択仮定を緩和した離散型施設配置モデル	142
大山 崇，鈴木 勉，周遊距離Voronoi図とそれを用いた商業立地分析	151
鈴木 勉：サービスの組合せに着目した複合サービス施設の最適配置	165
渡部大輔，鈴木 勉：	
規模の経済性を考慮した階層的収集・配送輸送システムに関する研究	172
鈴木 勉：p-メディアン問題における規模密度法則の成立性	178

7. 平面領域における距離分布

Distance distribution in an arbitrary region

腰塚武志
Takeshi Koshizuka

In the present paper, we discuss the measure of the point pairs whose distance are less than a distance r in a given area. By differentiating this measure with respect to r , we get the function $f(r)$ which is called by distance distribution. Using formulae in Integral Geometry, we get an approximate polynomial for the distance distribution in an arbitrary convex region. The approximate expression consists of the area S and the perimeter L of the region and have good fitness to the numerical distributions of governmental districts in Tokyo.

Keywords: distance distribution, distance distribution in an arbitrary region, area and perimeter of a region, uniformly distributed line
距離分布, 一般的な領域における距離分布, 領域の面積と周長, 一様な直線

1. はじめに

都市を計画したり設計したりする場合, ある限られた土地が与えられ, それに様々な活動を想定して様々なものの配置を決め, 試行錯誤を何回も繰り返しながら案を練り上げていく. ある都市で新たに住宅地や業務地区がどのくらい必要かわかっていて, これをどう配置してもよいのなら, 必要な土地面積さえ得られればそれでよい. しかし都市においては, いろいろな地点間を人やものが実際に行き来する. そして行き来の組合せをすべて近くに配置できるわけではないので, 個々の用途にあてる土地の配置は, 相互の結びつきや距離を考えて決定される.

このようなことを考えると, 対象地域の中にどのような距離がどのくらい存在しているか, 少し言葉を変えて表現すれば, 設計や計画の基本的単位として二点のペアを考えたととき, この単位 (ペア) の距離がどの様に分布しているかを知ることが, 設計や計画をする上で基本的なことといわなければならない.

以上の考えをもとにし, 距離の分布 (2章で詳述) を求めようとすると, 計算は困難を極める. 対象地域が円や長方形の場合はかろうじて技巧的な方法で求めることができる. しかし都市のような不定形では難しい.

そこでこの距離分布を関数で表すのではなく数値的に厳密に算出する方法を示したのが文献 [1] であり, これが可能になったので, 理論的近似式についての議論ができるようになった. もともと定義式から素直に展開できる部分は文献 [4] で述べられているが, 本論文はその後の進展をも示すものである. なお, 理論的近似式導出の意味は大きく2つあり, 1つはいうまでもなく数値計算をしなくても距離分布

に見当をつけることができること, もう一つは与えられた領域の移動を前提とした幾何学的性質をはっきりさせることである.

2. 距離の分布

さて前述の分布を距離分布とよび文献 [1] 等で議論してきたが, 以下にこれをまず述べることにしたい. 図1のように平面の領域 D 内に二点 p_1, p_2 のペアを考え, この二点間の距離 $D(p_1, p_2)$ が r 以下であるペアの量を $F(r)$ とすれば, これは

$$F(r) = \iint_{D(p_1, p_2) < r} dp_1 dp_2 \quad (1)$$

と表わされる. そして $F(r)$ の各 r における分布をみたいので, $F(r)$ を r で微分した $f(r)(=F'(r))$ を距離分布とよぶことにしている.

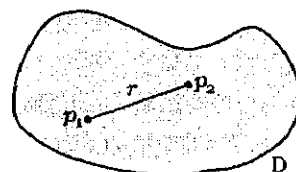


図 1: 領域 D における二点

ところで一般的な図形ではこの $f(r)$ を厳密に導くのは難しく, 領域 D が円の場合には Crofton の微分方程式等を用いて, また D が長方形の場合には Ghosh によって, 以下のように導出されている (例えば文献 [2,3]). すなわち領域 D が半径 α の円の場合には

$$f(r) = 4\pi\alpha^2 r \arccos \frac{r}{2\alpha} - 2\pi\alpha r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2} \quad (2)$$

と導かれる。また領域 D が長方形で長辺の長さを a 、短辺の長さを b とすれば

$$f(r) = \begin{cases} 0 < r \leq b \text{ のとき} \\ 2\pi a b r - 4(a+b)r^2 + 2r^3, \\ b < r \leq a \text{ のとき} \\ 4ab r \arcsin \frac{b}{r} + 4ar \sqrt{r^2 - b^2} - 4ar^2 - 2b^2 r, \\ a < r < \sqrt{a^2 + b^2} \text{ のとき} \\ 4ab r \left(\arcsin \frac{b}{r} - \arccos \frac{a}{r} \right) + 4ar \sqrt{r^2 - b^2} \\ + 4br \sqrt{r^2 - a^2} - 2r(r^2 + a^2 + b^2) \end{cases} \quad (3)$$

と表わされる。一見すると式 (2) と (3) は大変違っているようにみえるかもしれないが、領域 D として円と $a = b$ の正方形をとり、両者の面積を等しくして ($a^2 = \pi\alpha^2$) これらの $f(r)$ を比較すると図 2 のようになる。これを見ると両者は大変よく似ていることがわかるだろう。

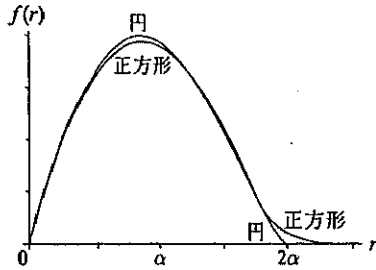


図 2: 距離の分布 (2):円と (3):正方形

3. 距離分布の近似その 1

ところで式 (2) や式 (3) は複雑で、あまり使いやすいとは思われない。しかも領域 D が特殊な形に限定されている。また文献 [1] では任意の領域における距離分布を数値的に正確に求める方法が呈示されている。そこでここではもう少し簡単な式で、しかも一般的な領域の距離分布を近似することを考えよう。式 (1) でまず図 3 のように p_2 を固定して、点 p_2 から半径 r の円を描く、この円が完全に領域 D に含まれれば

$$\int_{D(p_1, p_2) < r} dp_1 = \pi r^2 \quad (4)$$

となる。しかし点 p_2 が領域 D の境界に近いときには上式 (4) は成立しない。そこで r が十分小さくて D 内の大部分で式 (4) が成立する場合には、領域 D の面積を S とすれば

$$\iint_{D(p_1, p_2) < r} dp_1 dp_2 \sim (\pi r^2) S \quad (5)$$

が得られる。したがって最も簡単な近似式は以下のようになる。

$$F(r) \sim F_1(r) = \pi S r^2, \quad f(r) \sim f_1(r) = 2\pi S r. \quad (6)$$

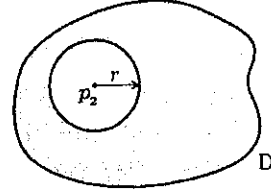


図 3: 点 p_2 より半径 r の円

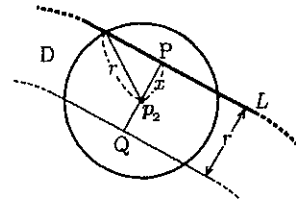


図 4: 領域 D の外側に張り出す場合

ところが、 r が少し大きくなると式 (4) が大部分で成立するとは考えられない。そこで境界付近における補正を考えよう。式 (4) が成立しないのは境界から r だけ内側に入ったところまでなので、まず図 5 のように境界の一部を直線とみなして近似する。境界から円の中心 p_2 までの距離を x とすれば、半径 r の円のうち領域 D の外側にはみ出す部分の面積は $r^2 \arccos(x/r) - x\sqrt{r^2 - x^2}$ となり、点 p_2 を線分 PQ で一様に分布させて平均値を求めると

$$\int_0^r \left(r^2 \arccos \frac{x}{r} - x\sqrt{r^2 - x^2} \right) \frac{1}{r} dx = \frac{2}{3} r^2$$

となる。そして境界から r まで入った領域の面積を、境界の長さ (周長) L を用いてつぎに Lr と近似すれば、式 (5) の計算において余分に加えたものの近似として $(2/3)r^2 \cdot Lr$ が得られる。そこでよりよい近似式として以下のものが導出される。

$$\begin{aligned} F(r) &\sim F_2(r) = \pi S r^2 - \frac{2}{3} L r^3, \\ f(r) &\sim f_2(r) = 2\pi S r - 2L r^2. \end{aligned} \quad (7)$$

この結果は $F(r)$ の定義式 (1) から素直に導かれるものである。しかし式 (1) を厳密に計算するのは簡単ではない。円の場合 (2) と長方形の場合 (3) はそれぞれ巧妙な方法で厳密に求められている。長方形の場合、式 (3) の $0 < r \leq b$ のときの $f(r)$ をみると、 $S = ab$, $L = 2(a+b)$ に注意すれば、

r^2 の項までは上式 (7) と (3) は等しい。また円の場合にも式 (2) における関数を r で展開し

$$\arccos \frac{r}{2\alpha} \sim \frac{\pi}{2} - \frac{r}{2\alpha}, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2} \sim 1,$$

さらに $S = \pi\alpha^2, L = 2\pi\alpha$ に注意すると、やはり r^2 の項までは (7) は (2) に一致する。ここで式 (7) がどれほど (2) を近似しているかをみると図 5 のようになり、(7) は簡単な式ではあるが r が半径 α より少し小さい範囲まで式 (2) をよく近似していることがわかる。

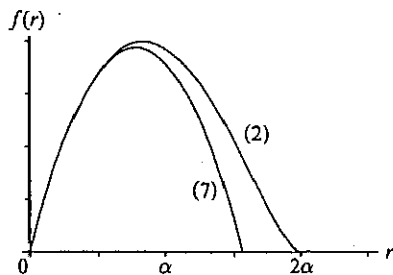


図 5: 近似式 (7) と円の場合 (2)

以上の結果より、二点のペアを単位として距離の分布をみた場合、領域 D の基本的な“量”としては第一に面積 S ついで周長 L が重要であることがわかった。ところで、現代は交通機関が発達し、昔よりも克服できる距離はずいぶん大きくなっている。しかしそれでも一般的には遠いところに行く回数は近くのところよりもすくないであろう。そこである地点と別な地点との関係が距離に応じて減衰することを考えよう。ここではよく使用される指数関数を取り、減衰を考えた距離の関数として

$$g(r) = f(r)e^{-\beta r} \quad (8)$$

を定める。先の図 5 の場合には r が大きくなるにつれ、(2)

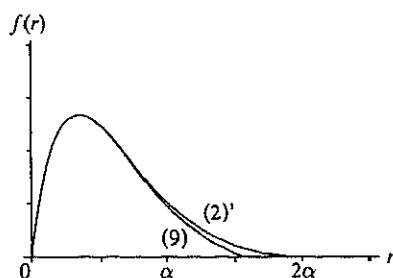


図 6: 距離の減衰を考えた場合 ($\beta = 2/\alpha$)

と (7) の乖離がでてくるが、このように減衰を考えると両者の差が少なくなることが予想される。じっさい上式 (8) の $f(r)$ に (2) と (7) を入れてグラフをかくと $\beta = 2/\alpha$ のときは図 6 のようになる。さらに $\beta = 4/\alpha$ とすると両者の差異を描き分けるのは難しい。そこで β がある程度大きいとき

には、計算がやっかいな (2) のかわりに

$$g(r) \sim (2\pi S r - 2L r^2) e^{-\beta r} \quad (9)$$

を用いることにより、減衰を考慮した距離の平均値を簡単に計算することができる (文献 [4])。

4. 距離分布に関する一般論

前章の式 (4) のところをもう少し一般的に展開するために、図 7 のように点 p_2 を止めたとき半径 r の円とこの対象領域 D との共通部分 (図の点部分) の面積を $S_p(r)$ とすると、

$$\begin{aligned} F(r) &= \iint_{D(p_1, p_2) < r} dp_1 dp_2 \\ &= \int \left(\int_{D(p_1, p_2) < r} dp_1 \right) dp_2 \\ &= \int S_p(r) dp_2 \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。次の p_2 に関する積分は直接 r に関係しないことと、図 7 の点部分の円周の長さを $L_p(r)$ とすると、

$$\frac{dS_p(r)}{dr} = L_p(r) \quad (11)$$

であることに注意して式 (10) の両辺を r で微分すると

$$f(r) = \int L_p(r) dp_2 \quad (12)$$

が得られる。また図 7 のように周長 $L_p(r)$ に対する角度をラジアンで表したものを ω_p とすれば $L_p(r)/r = \omega_p$ であることより

$$\frac{1}{r} f(r) = \int \omega_p dp_2 \quad (13)$$

が得られる。

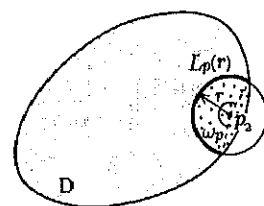


図 7: 周長 $L_p(r)$ と角度 ω_p

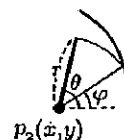


図 8: 長さ r の線分の運動学的測度

上記の右辺の積分について、図 8 のように分かりやすくするためにまず p_2 の座標を x 軸 y 軸で表示し、長さ r の線

分の角度を x 軸方向からの角度を θ 、この線分が領域 D の境界と交わる時の角度を φ とする。すると上式右辺は

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_p} \left(\iint dx dy \right) d\theta = m(r) \quad (14)$$

となり、これは積分幾何学における長さ r の線分がこの領域に含まれる運動学的測度 $m(r)$ に等しい (文献 [3])。

そこで式 (13), (14) より距離分布 $f(r)$ とこの運動学的測度の間には領域 D が凸のとき

$$f(r) = r m(r) \quad (15)$$

という関係のあることが分かった。すなわち文献 [3] 等で述べられている長さ r の直線分が凸領域 D に含まれる運動学的測度 $m(r)$ に r をかければ、種々の距離分布を求めることができるわけである。

以上の結果より、距離分布の導出には上記線分の測度を用いることができるので、この測度で見当をつけた方がやさしい場合には、これを用いた方がよいことがわかった。

そこでまず上式の積分で表した変数 (x, y, θ) を議論しやすいように一様な直線を介した積分に変換する。図 9 のように長さ r の線分 (太線) を通る直線を考え、この直線に下ろした垂線の足の長さを p 、角度を φ とする。長さ r の線分の一方の端点の座標を (x, y) 、線分の角度を θ 、領域 D の境界から線分の端点までの距離を t とする。この時、線分の運動学的密度 $dx dy d\theta$ は変数変換によって $dt dp d\varphi$ と表される (文献 [3])。ただ、一様な直線に向きが与えられているため、積分幾何学ではこのとき $dp d\varphi$ を dG^* (dG ではなく) で表し、 $dt dG^*$ として反対の向きの積分も考慮して 2 倍することになっている。一様な直線を介した計算は文献 [1] でも述べられているが、文献 [1] では一様に分布する 2 点の計算であるため、2 点間の距離 $|t_2 - t_1|$ の重みがついて、しかも一様な直線に方向がつけられていずに $|t_2 - t_1| dt_1 dt_2 dG$ となっていることに注意されたい。

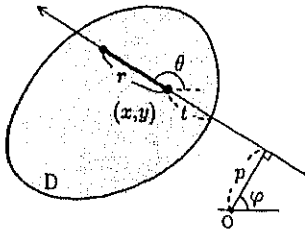


図 9: 一様な直線を介した変数変換

さて、この変数変換を用いると長さ r の線分が対象領域に含まれる位置の集合を X_0 とし、その集合の運動学的測

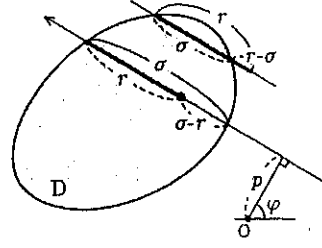


図 10: 積分範囲

度を $m(X_0)$ とすれば

$$\begin{aligned} m(X_0) &= \int dx dy d\theta \\ &= \int dt dG^* \\ &= 2 \int_{\sigma > r} (\sigma - r) dG \end{aligned} \quad (16)$$

と表される。最後の積分は t による積分 $0 < t < \sigma - r$ をしたところを表わしており、この時の直線の領域 D 内での長さ σ によって積分の範囲が制限される。すなわち σ が線分の長さ r よりも大きい時、この線分が領域 D に含まれるので、 r よりも大きい σ のときのみ積分に意味がある。そこでこれを積分範囲 $\sigma > r$ で表現している。

つぎに直線の角度 φ を固定して p を大きくしていくと (あるいは小さくしていくと) 図 10 のようにやがて σ が r よりも小さくなっていく。この場合長さ r の線分は丁度領域との交点を 2 個持つ位置があるので、このように線分が領域 D と交点を 2 個持つ位置の集合を X_2 としその集合の測度を $m(X_2)$ とすると、上式の導出と同じように、今度は範囲を $\sigma < r$ として

$$m(X_2) = 2 \int_{\sigma < r} (r - \sigma) dG \quad (17)$$

が得られる。そこで上式 (16), (17) をそれぞれ σ と r を別々にして考えれば、 $\sigma < r, \sigma > r$ の範囲がすべてを表しているので

$$\begin{aligned} m(X_0) - m(X_2) &= 2 \left(\int_{\sigma > r} \sigma dG + \int_{\sigma < r} \sigma dG \right) \\ &\quad - 2 \left(\int_{\sigma > r} r dG + \int_{\sigma < r} r dG \right) \\ &= 2 \int \sigma dG - 2r \int dG \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる。積分幾何学の一様な直線に関する公式より (文献 [3])、対象領域 D の面積を S 、周長を L とすれば

$$\int \sigma dG = \pi S, \quad \int dG = L \quad (19)$$

となるので

$$m(X_0) - m(X_2) = 2\pi S - 2rL \quad (20)$$

が得られ、これと前述の式 (15) より、この領域における距離分布 $f(r)$ は

$$\begin{aligned} f(r) &= rm(X_0) \\ &= 2\pi Sr - 2Lr^2 + rm(X_2) \end{aligned} \quad (21)$$

となる。前章で議論した領域分布の近似式 (7) は、実は上式の $rm(X_2)$ を無視したものであることがわかった。 r が小さい時、 $m(X_2)$ すなわち領域と長さ r の線分が 2 点で交わる測度は小さいのは明らかなので、これより近似となることはこの式からはっきり分かる。また前章の議論で 2 項目の $2Lr^2$ が出てくるところは直観的説明であったが、理論的にもきちんとした理由のあることも分かるであろう。

5. 距離分布の近似その 2

では r が大きい時どうなるであろうか。式 (17) より、 $m(X_2)$ の積分に関して dG 中の dp についても積分すると、図 11 で明らかなように

$$\int_{\sigma < r} (r - \sigma) dp \quad (22)$$

は図中の斜線部分の面積を表わしている。そこでこれを r の関数として近似すれば $m(X_2)$ の近似が求められる。

ここで厳密に求められる円の場合を取り上げよう。対象領域が半径 α の円の場合、図 12 を考えると、求めたい面積 s は長さが r 、短辺が $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (r/2)^2}$ の長方形より面積 s_1 の領域を引けばよい。面積 s_1 の領域は角度 $2\arcsin(r/(2\alpha))$ のセクターから底辺 r 高さ $\sqrt{\alpha^2 - (r/2)^2}$ の三角形を引けばよいので

$$\begin{aligned} s &= r \left\{ \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} \right\} - \left\{ \alpha^2 \arcsin \frac{r}{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{2} \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} \right\} \\ &= r\alpha - \frac{r}{2} \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \alpha^2 \arcsin \frac{r}{2\alpha} \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。

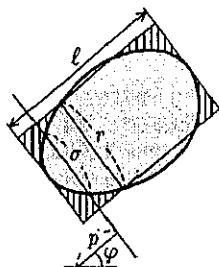


図 11: $m(X_2)$ の図解

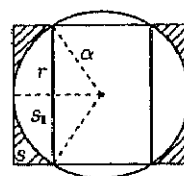


図 12: 円の場合の $m(X_2)$

これをもとに円の場合には

$$\begin{aligned} m(X_2) &= 2 \int_{\alpha < r} (r - \sigma) dG \\ &= 4\pi \left\{ r\alpha - \frac{r}{2} \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \alpha^2 \arcsin \frac{r}{2\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

が得られるので、式 (21) より、円の場合の厳密な式 (2) が得られる。

一般的な凸図形の場合、以上の面積 s が r のどのような関数になっているかを考えたい。上の式 (24) のところで、関数を r のべきに展開すると

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{r}{2\alpha} &\sim \frac{r}{2\alpha} + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^3 + \dots \\ \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2} &\sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

となるので、これを用いると上記の s は

$$s \sim \frac{r^3}{24\alpha} \quad (25)$$

となることがわかる。そこでこれを用いると

$$m(X_2) \sim 4\pi \cdot \frac{r^3}{24\alpha}$$

となるので、直径 2α を一般的な図形の直径 C と置き換え

$$m(X_2) \propto \frac{1}{C} r^3$$

となることがわかる。そこで上式に係数をかけて式 (20) に代入し $m(X_0)$ が $r = C$ のところで 0 となることで、この係数を求めると、

$$m(X_0) \sim 2\pi S - 2Lr + \frac{2LC - 2\pi S}{C^3} r^3 \quad (26)$$

が得られる。

以上の展開は、上記面積 s が角度に依存しないので積分範囲 $0 < \varphi < \pi$ での積分が、単に π をかけることで得られた。しかし一般的な凸図形ではこのようにはならない。そこで図 11 の長さ ℓ すなわち角度を決めたときの最大の長さの角度による平均値を算出すると

$$\frac{\int \ell d\varphi}{\int d\varphi} = \frac{L}{\pi} \quad (27)$$

となるので、上記式(26)のCにかわり、この「平均的直径」でおき換えれば、距離分布の近似式

$$f(r) \sim 2\pi Sr - 2Lr^2 + \frac{2\pi^2(L^2 - \pi^2 S)}{L^3} r^4 \quad (28)$$

が得られる。

6. 数値解と近似式の比較

前章での近似式(28)を実際の行政界にあてはめ、文献[1]で開発された厳密な数値解と比較しよう。対象領域としては東京都区部全体と、文京区、港区をとり上げ、議論は凸領域について行われているので、これら行政界の凸包(図13から15に図示)をとった。現実の行政界における距離分布についても当然文献[1]の方法で数値的には厳密に求めることができる。そしてこれと凸包との関係についても、議論しなければならないところである。しかし今回は紙面の都合もあり、文献[5]で距離分布の平均値が凸包の周長にほぼ比例するという事実もあるので、対象を凸なものに限定した。

図13から15まで、対象領域とその距離分布が示されている。図中の太線は数値的厳密解を表わしており、これと面積が等しい円における距離式(2)と前章の近似式(28)が描かれている。まず、図13の東京区部をみると、近似式(28)や円の式(2)が共に現実によく適合していることがわかる。特にこの程度の図形では厳密な円の式でもほぼ問題なく近似できることがわかった。次に東京区部よりも少し細長くなった場合の港区についてみてみよう。図14よりこの場合は円よりも近似式(28)の方が良く、距離 r が大きくて直径に近いとき以外は図中でかき分けることができない程一致している。またこの港区より少し形が違い、三角形の角を丸くしたような文京区についてみると、図15より、前述の港区と似たような傾向があることがみてとれる。ところで、前章の議論で明らかのように、細長い図形については別の議論が必要であり、異なる近似式が得られるが、これについては別な機会に譲ることにしたい。

7. おわりに

まず解析的に解くのが難しい不定形につき距離分布の近似式(28)を導出した。与えられた領域の面積と周長を測定さえすれば近似式が得られ、領域がそれ程細長くなければかなりよく適合することが分かった。さらに関数型は距離 r の多項式であり、平均値や距離の減衰を考慮した計算も容易である。また理論式(7)(21)の議論で、最も重要なのは面積と周長であることが明らかになった。式(28)をみると、 r が小さい時は距離 r の係数である面積が重要であり、少し r が大きくなると r^2 の係数である周長 L が浮かびあがってくる。ところが r^3 の係数は0で、次は r^4 に飛び、しかも係数は一言で言い表すことはできない。この係数は r が大

きくなった時重要になるわけだが、これが直径に関係することは素直に予想されることである。しかし式(26)のCに実際の直径を用いると、本文の「平均的直径」の場合より適合度が劣る結果となった。この「平均的直径」は結局周長 L に関係するだけなので、本論文では前述の面積と周長以外は出て来なかったことになる。

最後に本論文は文部科学省科学研究費補助金(基盤研究(B)(2)12480103)の助成を受けた。

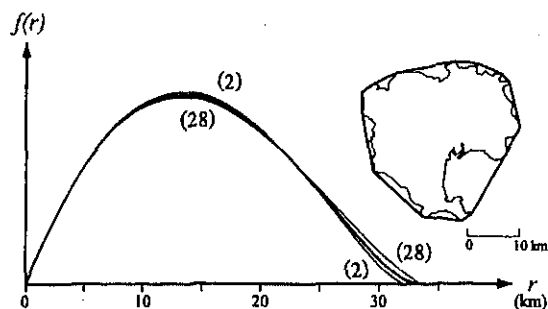


図 13: 東京都区部の距離分布

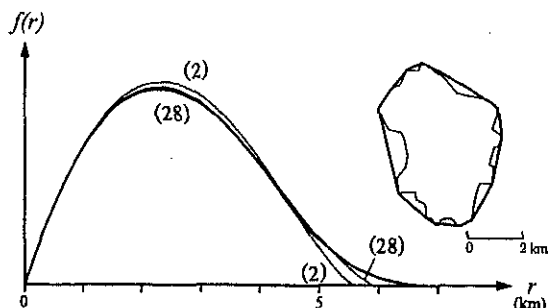


図 14: 東京都港区の距離分布

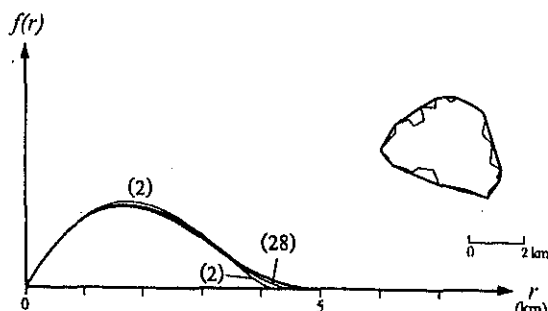


図 15: 東京都文京区の距離分布

参考文献

- [1] 腰塚武志, 大津 晶 (2001): 都市領域における距離分布の導出と応用, 日本都市計画学会学術研究論文集, 第36号, pp.871-876.
- [2] 谷村秀彦, 腰塚武志, 他 (1986): 都市計画数値. 朝倉書店.
- [3] L.A. Santaló (1976): *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- [4] 腰塚武志 (1990): 平面領域の距離分布, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, pp.186-187.
- [5] 腰塚武志 (1978): 地域内距離, Journal of the Operations Research Society of Japan, vol.21, pp.302-319.

交通路面積を考慮に入れた高層建物の移動時間の評価

田口東
中央大学

腰塚武志
筑波大学

(受理 2000 年 9 月 6 日 ; 再受理 2001 年 6 月 5 日)

和文概要 建物に居住する人口と移動頻度を与え、居住面積と居住者による交通量に応じた交通面積を確保して、総移動時間を最小とする建物を求める問題を定式化する。考慮した交通機関はエレベータ、エスカレータ、徒歩による水平移動である。この問題を解くことによって、移動時間と交通路面積の面から、建物の形状によって移動の容易さがどのように変わるのかを評価することが出来る。提案するモデルの妥当性を確かめるために、現実の建物を例題とした計算を行った。

第 1 の例題は、新宿副都心の 10 棟の高層建物を含む地区を対象とする 2 地点間の移動時間を測定した実験結果との対照を行うことである。計測された移動時間分布とモデルによる計算結果とがよく一致していることが確かめられた。そして、対象地区の現況と、それよりさらに高層化する方向と低層化する方向について、移動時間分布を評価した。第 2 の例題は、代表的な超高層建築であるニューヨークのワールド・トレード・センターのスカイロビー方式と呼ばれるエレベータシステムを、提案モデルによって記述することである。そして、普通エレベータだけを用いる建物との比較によって、この方式が地上階の入口から建物内への移動時間分布を、高さ 80 階程度の建物と同程度になるよう短縮していることも示した。一方、建物内の任意の 2 点間の移動に関しては、急行エレベータがそれほど有効でないことも示した。さらに、急行エレベータの停止階の位置を変えて平均移動時間を計算し、その最適な位置と現実の停止階の位置がよく一致していることを確かめた。

1. はじめに

大きな建物や都市をひとつの領域としてとらえ、領域内における人の交通モデルを中心に置いた土地利用に関する議論がなされてきた。奥平 [9] は建物の入口から各階へのエレベータによる移動、および、都市を想定した円形領域において領域全体から中心への移動を取り上げ、人が住む面積だけではなく交通量に応じた交通路面積が必要であるとして、居住面積と交通路面積とを同等に扱った明快なモデルを提案した。そして、領域の規模が大きくなると、領域を拡大してもそれが交通路に使われてしまい居住面積は少ししか増加しないことを示した。また、Vaughan [16] はいくつかの都市の実際の交通路のパターンを、現実のデータと様々な交通モデルを使って説明した。腰塚 [3, 4] は、建物および平面領域を対象として、その中の任意の人の対の間に均等に行き来があるという交通を仮定し、水平方向の移動速度と垂直方向の移動速度の差を考慮に入れて、総移動時間および移動時間分布を計算し、領域の規模やプロポーションと移動の容易さとの関係を考察した。また、鈴木 [11] は都市内の業務交通と通勤交通を想定して、居住地域と業務地域の配分問題、業務地域をどのように分散させるべきかといった問題を考えた。秋澤 [1] はこれに交通路の面積も考慮に入れている。

田口 [13, 14, 15] は、領域内の人々の対がある確率（移動頻度）で互いに行き来するという交通を仮定し、円滑に移動できるよう移動経路に沿って交通量に応じた交通路が必要であるとして、居住領域と交通領域の配分問題を論じた。これは腰塚の交通モデルを使って奥平の

問題を考えたことに相当する。そして [13] では、建物を高層にしてより多くの人口を収容しようとしても、エレベータの占める床面積が急激に大きくなるために、居住用として利用できる面積は少ししか増やせないことを示した。このことより、建物の規模に対して、そこに居住する人口には効率のよい規模と移動頻度があり得ることを示した。また、Li[7] は建設費用を取り入れた最適化問題を定式化した。

さて、田口の上の議論は与えられた人口を収容するのにどれだけの面積が必要かという議論であった。本論文では、面積だけではなく領域内の移動時間を短くするという観点も考慮に入れたモデルを考察する。そこでは、水平移動には廊下、垂直移動にはエレベータとエスカレータを利用するものとし、それぞれ必要となる面積と移動時間とを定義する。それを基にして、建物の形状を制約条件として、与えられた人口を収容するための居住領域と、それらの対間の移動交通量に応じた交通路を、総移動時間が最小となるように定める問題を導く。これによって、建物の形状（高さと床面積）によって移動の容易さがどう変わるのかを、移動時間ならびに交通路面積の観点から評価することができる。

本文の構成を述べる前に、提案するモデルの特徴を整理しておこう。ここでは、居住領域と交通路を含む複数の水平な層（階）とそれらをつなぐ垂直な交通路からなる交通モデルを提案し、最適化問題の解として、各階における床面積の居住領域と交通路への配分を定めるという一種の配分計画問題を考える。したがって、交通需要と輸送能力とを整合させていることが問題の構造に含まれている。そして、最適化問題として定式化し求解を可能とするために、交通機関の動作と交通需要に関して大幅な単純化を行う。すなわち、エレベータはカゴによるバッチ処理であること、階数に比例して乗車時間がかかること、乗車までの時間間隔が確定的であること、台数が少ないとその時間間隔が長くなること、を取り入れている。また、交通需要は、対象とする人の任意の対が等しい確率で行き来するような交通が発生すると仮定する。したがって、現実の建物と交通需要に対して最適な運転制御を考える際に重要である確率的な要因による変動は、まったく考慮できていないという欠点を持っている。この点は、必要十分な交通路が確保された建物内の面積配分が数理計画問題の解として計算できることとのトレードオフであり、それらの仮定がどの程度まで合理的かについては計算例によって検討することとする。

2 章と 3 章でモデルの定式化を述べた後、提案するモデルが現実の建物にどの程度適用可能なのかを調べるために、実際の建物を対象とした計算を 2 例行う。4 章では新宿副都心の 10 棟の高層建物を含む地区において行われた、2 地点間の移動時間の分布を測定した実験結果との対照を行う。これらの建物を取り上げたのは、建物内および建物間の移動に関して様々な検討が十分行われて建設されたと考えられるからである。そして、交通需要と交通機関の動作の双方について提案モデルのように仮定して計算した結果と、実際の建物の形状および移動時間分布が似かよっていれば、提案モデルを用いて現実の建物に適用できるような解析が可能であることが示唆される。5 章では、代表的な超高層建築であるニューヨークのワールド・トレード・センターのエレベータシステムを対象とする。ここでは、一種類のエレベータだけではなく、超高層建物のために工夫された、特定の階にしか停止しない急行エレベータと各階で停止する普通エレベータからなるシステムを、提案モデルを用いて記述できることを示す。この建物を取り上げたのも前述と同様の理由である。そして、モデルを用いて計算した結果と、実際の建物との比較を行うことによって、この定式化が妥当であるかどうかを検討する。

2. 建物内の交通手段

交通の対象となる人口が建物の内と外に存在し、それらの人の任意の対が互いに行き来する交通を考える。これは、建物に関する交通である、建物内の点と出入口との間の移動（内外交通）、および建物内の2点間の移動（内々交通）の最も簡単な近似として考えたものである。したがって、以下で考える移動時間分布は、地区内の居住領域で任意に選ばれた2点間の時間距離に対応しており、建物がたてられた後の現実の交通需要に直接に対応するものではない。

建物は図1に示すように各階の床が同一の正方形である直方体であるとし、建物の出入口は地上階の中心にあるとする。各階の床は、居住領域、廊下、エレベータとエスカレータ、および残りの部分に分けられる。居住領域の人口密度を ρ とする。階 i の居住領域の面積を x_i 、廊下の面積を cor_i 、エレベータの面積を elv_i 、エスカレータの面積を esc_i とし、利用されている面積を

$$f_i = x_i + cor_i + elv_i + esc_i$$

とする。 x_i は最適化問題の変数であり、各交通施設の面積は、建物外の人口と建物内の居住者人口分布 $\{\rho x_i\}$ の式として各階の通過交通量を求め、それを通過させる必要十分な量として表される。これを以下のように導く。

建物内の移動方法を次のように定める。 i 階において使用されている床面積 f_i に対して、それと同じ面積の正方形を考え、 ρx_i 人がこの正方形の中に一様に分布し、それぞれを移動の起終点とする。異なる階へ移動するためにはいったん中心まで移動してエレベータまたはエスカレータを利用する。水平方向の移動距離は、床の辺に平行な直交座標系を考え、各座標軸に沿った移動量の和（マンハッタン距離）で測り、その測度に関する最短経路に沿って移動することとする。起終点が同一階にある場合には、起終点間の移動距離の平均値は

$$\bar{l}_{i1} = \frac{2}{3}\sqrt{f_i} \quad (2.1)$$

となる。また、異なる階へ行く場合の中心部への移動距離の平均値は

$$\bar{l}_{i2} = \frac{1}{2}\sqrt{f_i} \quad (2.2)$$

となる。

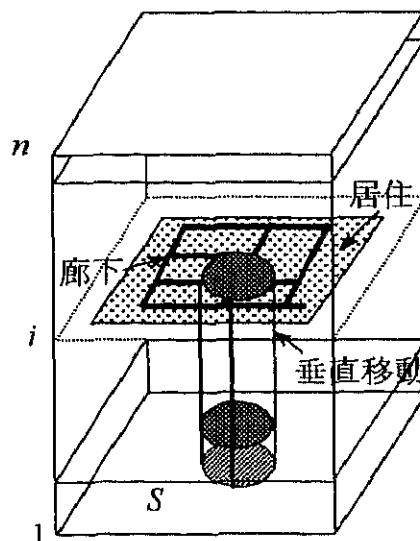


図1 建物のモデル

各交通施設を利用したときの移動時間と交通面積を次のように定める．最初に水平移動を考えよう．廊下を通る歩行速度を v_{cor} とおく．また，幅 $1m$ の廊下を1分間に通過できる人数（断面交通容量）を c_{cor} とおく．このとき，距離 l 離れた2点間を1分間あたり1人が通過すると，

$$cor = l/c_{cor} \quad (2.3)$$

の廊下面積が必要となる．

つぎにエレベータによる移動を考える．交通需要に比べてエレベータの台数が少ないために待ち時間や移動時間が長くなるのがしばしばある．これを，エレベータの台数と待ち時間の間に簡単な関係を導入することによって表現しよう．図2に示すように，ある階を受け持つエレベータが複数台あり，それぞれ巡回するような運行をしていて，一定時間内に到着する1台が客を乗せていくものとする．もしエレベータの台数が q ($q_{min} \leq q \leq 1$) 倍に減少したとすると，到着間隔は $1/q$ 倍に増加する．一方，客の積み残しがないと仮定すれば，エレベータ単位面積あたりの輸送人数は $1/q$ 倍に増加する．変数 q を用いたこの関係は，床面積が狭い場合に交通サービスのレベルを落として建物を実現することを表すのに都合がよい．

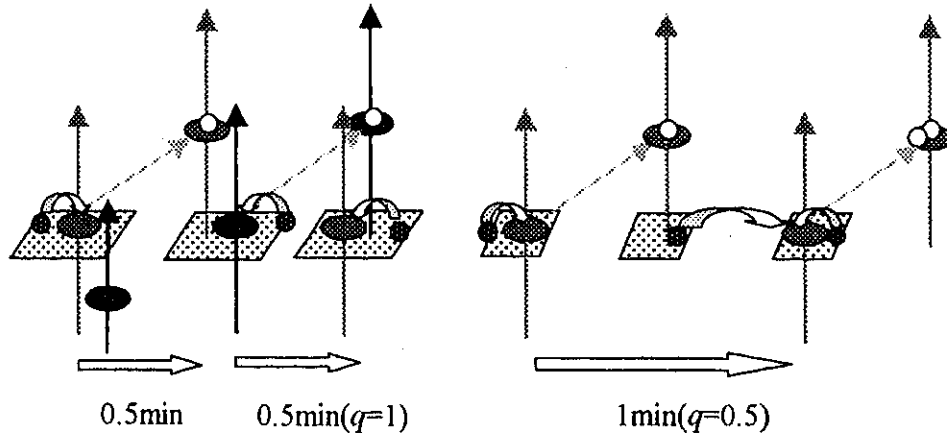


図2 エレベータの台数と到着頻度

基準となるエレベータの性能を次のように与える．エレベータの到着間隔を w ，乗車してから交通時間は通過階数に比例するとして，1階通過する時間を $1/v_{elv}$ とする．また，エレベータの床面積を $1m^2$ 取ると1分間に c_{elv} 人の割合で運ぶことができるとする．これに混雑度を表す量 $1/q$ を付け加えると， f 階移動するのにかかる時間は

$$t_{elv} = \frac{w}{q} + \frac{f}{v_{elv}} \quad (2.4)$$

となり，エレベータを使って1分間あたり1人運ぶためには，起点階と終点階の間の通過する階ごとに

$$elv = q/c_{elv} \quad (2.5)$$

のエレベータ床面積が必要となる．

エスカレータは連続的に人を運ぶので待ち時間はない．エスカレータに乗って1階移動するのにかかる時間を $1/v_{esc}$ とする．1台のエスカレータの1分間あたりの断面交通容量を，1階分のエスカレータの建物床への投影面積で除すことにより，床面積 $1m^2$ あたり1分間に運ぶことができる人数 c_{esc} を得る．エスカレータを使って1分間あたり1人運ぶためには，通過階ごとに

$$esc = 1/c_{esc} \quad (2.6)$$

のエレベータ床面積が必要である。

モデルではエレベータとエスカレータとの間の選択は移動する階差によるものとし、 d 階移動するときにエレベータを利用する割合を $r(d)$ 、エスカレータを利用する割合を $1-r(d)$ とする。そして、その選択は利用者が行うのではなく最適化問題の解として定まるものとする。

エレベータとエスカレータを比較すると、エスカレータの交通容量が大きいので、エスカレータを主として利用する方が交通面積が小さくなり、小さな建物とすることができる。しかし、エスカレータは遅いので、後に述べるエスカレータを含む計算例では、近接した階の移動にしか用いられていない。また、階段は移動速度、交通容量の観点からはエスカレータとほぼ同じ施設であるので [2, 10]、このモデルでは省略した。

3. 総移動時間最小化

移動の対象となる人口を P 、そのうち建物に収容すべき人数を P_{in} 、建物の外にいる人口を P_{out} とする。建物の階を $1, \dots, n$ 、各階の床面積を S とする。 n は人口 P_{in} と必要な交通路を収容するのに十分な値であるとする。また、建物にいる人を一方、建物内および建物外の人を他方とした順序を考えない任意の対の間に、単位時間あたり b の確率で行き来があるとする。建物の内々交通が主である場合には P_{out} が小さい値をとり、内外交通が主である場合は大きな値となる。

最初に起終点とも建物内にある場合を考えよう。 i 階から j 階 ($i < j$) へ移動するとする。 i 階と j 階の利用床面積をそれぞれ f_i と f_j とすると、式 (2.2) からそれぞれの階での平均移動時間が得られる。 i 階 j 階間の総移動時間は、移動数に平均移動時間をかけたものに等しいので、これと、階差 $d = j - i$ 、エスカレータ所要時間、エレベータ所要時間 (2.4)、およびそれぞれを利用する割合 $r(d)$ より得られる垂直移動時間の平均値と合わせて、移動時間の合計が

$$t = \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{v_{cor}} (\sqrt{f_i} + \sqrt{f_j}) + r(d) \times \left(\frac{w}{q} + \frac{d}{v_{elev}} \right) + (1 - r(d)) \times \frac{d}{v_{esc}} \right\} \times b \rho^2 x_i x_j$$

と計算できる。そして、交通路の面積は式 (2.3), (2.5), (2.6) よりそれぞれ

$$i \text{ 階において廊下が } \frac{1}{2} \frac{1}{c_{cor}} \sqrt{f_i} \times b \rho^2 x_i x_j,$$

$$j \text{ 階において廊下が } \frac{1}{2} \frac{1}{c_{cor}} \sqrt{f_j} \times b \rho^2 x_i x_j,$$

$k (i \leq k \leq j)$ において垂直移動のために $\left\{ r(d) \times \frac{q}{c_{elev}} + (1 - r(d)) \frac{1}{c_{esc}} \right\} \times b \rho^2 x_i x_j$ が i 階 j 階間の移動に対して必要となる。

次に同一階 i における移動を考えよう。 i 階に起終点を持つ対の総移動時間は式 (2.1) より

$$\frac{2}{3} \frac{1}{v_{cor}} \sqrt{f_i} \times \frac{1}{2} b (\rho x_i)^2$$

であり、交通路の面積は式 (2.5) より

$$i \text{ 階において廊下が } \frac{2}{3} \frac{1}{c_{cor}} \sqrt{f_i} \times \frac{1}{2} b (\rho x_i)^2$$

必要となる。

建物の外にいる人と中にいる人との交通に関しては、1 階の縦方向通路の入口に P_{out} 人が現れて各階の人と行き来すると考えれば、上と同様に移動時間および交通路面積の式を導くことができる。

上記の移動時間と必要な交通路面積を、発生する交通についてそれぞれ加えることによって問題を記述することができる。\$k\$ 階の床面積の利用を考えよう。まず、居住領域 \$x_k\$ が必要である。廊下を通る移動は、\$k\$ 階にいる人同士の対によるものと、\$k\$ 階にいる人と \$k\$ 階の外にいる人との対によるものである。また、\$k\$ 階を垂直に通過する交通は、\$k\$ 階の上にいる人と下にいる人との対によるものであり、建物内の人の対と、建物の内と外にいる人の対とからなる。これより交通路面積を計算し、利用できる床面積の上限は \$S\$ であることを使うと、制約条件

$$S \geq f_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

ただし

$$\begin{aligned} f_k = x_k + \frac{\sqrt{f_k}}{c_{cor}} & \left\{ \frac{2}{3} b \frac{1}{2} (\rho x_k)^2 + \frac{1}{2} b (\rho x_k) (P_{in} + P_{out} - \rho x_k) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k, j \neq i}^n \left\{ \frac{r(j-i)q}{c_{elv}} + \frac{1-r(j-i)}{c_{esc}} \right\} b \rho^2 x_i x_j \\ & + \sum_{j=k, j \neq 1}^n \left\{ \frac{r(j-1)q}{c_{elv}} + \frac{1-r(j-1)}{c_{esc}} \right\} b P_{out} \rho x_j \end{aligned}$$

を得る。また、収容すべき人口に関して、

$$P_{in} = \sum_{k=1}^n \rho x_k \quad (3.2)$$

であり、変数の取りうる値の範囲は

$$\begin{aligned} x_k & \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \\ 1 & \geq r(d) \geq 0, \quad d = 1, \dots, n-1 \\ 1 & \geq q \geq q_{\min} \end{aligned} \quad (3.3)$$

である。\$q_{\min}\$ はエレベータの待ち時間および乗客密度を、標準の値から増すことができる上限を与える。目的関数である総移動時間の最小化は

$$\begin{aligned} \min_{x_k, r, q} & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{f_i}}{v_{cor}} \left\{ \frac{2}{3} b \frac{1}{2} (\rho x_i)^2 + \frac{1}{2} b (\rho x_i) (P_{in} + P_{out} - \rho x_i) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left\{ r(j-i) \times \left(\frac{w}{q} + \frac{j-i}{v_{elv}} \right) + (1-r(j-i)) \times \frac{j-i}{v_{esc}} \right\} b \rho^2 x_i x_j \\ & + \sum_{j=2}^n \left\{ r(j-1) \times \left(\frac{w}{q} + \frac{j-1}{v_{elv}} \right) + (1-r(j-1)) \times \frac{j-1}{v_{esc}} \right\} b P_{out} \rho x_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。

まとめると、(3.1)、(3.2) 式を制約条件とし、(3.3) 式に示す変数について、(3.4) 式を最小化する数理計画問題を得る。この問題の解を求めるために商用の数理計画法求解プログラム NUOPT3.0 ((株) 数理計画) を利用し、解法として内点法および主変数に対する信頼領域法を指定した。ただし、解法で必要となる、制約条件ならびに目的関数の 1 階と 2 階偏導関数は、ユーザが C プログラムとして直接与えるような環境の作成を依頼した。

4. 高層建物間の移動時間計測実験に対応する計算例

ひとまとまりの地区に複数の建物を建てる場合を考える。その際に建物を高層化して土地全体に対する建築面積 (グロスの建蔽率、以下単に建蔽率という) を小さく取る方向と、低層化して建蔽率を大きく取る方向とを、ビル間の移動の容易さという観点から比較しよう。

都市景観の面、すなわち、人を収容する空間を広くとりながら、地上に開放された領域を広く確保するという観点からは、前者が主流であることは言うまでもない。

問題を次のように表す。対象とする地区に居住する人口 P を与え、地区に居住する人同士の移動を考える。任意の人の対が単位時間あたり一定の確率で行き来すると仮定する。土地の利用方法は、同一形状の建物を複数個建てることにして、建蔽率 α と建物数 m によって与える。建蔽率が小さすぎると床面積の小さい高層建物が建ち、エレベータによる移動に時間がかかってしまう。また、建蔽率が同一でも、建物の数が多い場合にはひとつの建物に小分けした人口を収容することになり、居住者同士の移動に関して、異なる建物間の移動の割合が大きく、同一建物内の移動の割合が小さくなる。このことは、エレベータの利用回数を増やす一方で、エレベータを降りてから廊下を歩く距離を短くすることにつながる。建築設計の分野では、建物内の水平方向の移動の限度は 100m が目安とされており [8]、この点からも床面積の増加にも限度がある。

複数の建物を含む地区を対象としたので、前章のモデルに加えて、建物間の地上を歩く時間を考えておかなければならない。建物間の距離は、ふたつの建物を互いに重ならないように、地区の境界に平行にランダムに置いたときの中心間距離（確率変数）によって近似する。移動距離は、地区を表す長方形の辺に平行な直交座標系を考え、各座標軸に沿った移動量の和（マンハッタン距離）で測り、その測度に関する最短経路に沿って移動することとする。そして、建物間の移動に対して、それぞれの建物内に取られた起終点から地上階の出入口（地上階の中心）までの移動時間と、上のように近似した建物間を歩く時間との合計を移動に要する時間とする。

まず、新宿副都心の $341\text{m} \times 538\text{m}$ の地区にある高層建物に対して、地区内の移動時間を測定した実験 [5] を目標として、パラメータを適切な値に調整した計算を行い、モデルが現実をどの程度よく説明するかを検証する。対象とした建物は 10 棟、それらの床面積の合計は約 $1,100,000\text{m}^2$ 、平均高さは 38 階である。その中に含まれる新宿三井ビルの高層基準階の床面積の配分を標準と考える。これはこの建物に関するデータが広く文献に紹介されているからである [6, 8]。

建物の利用可能なすべての階を対象として、起終点となる 2 点が床面積に比例するようにランダムに選ばれ、それらの間の移動時間が測定された。総移動数は 523 である。図 3 に測定された移動時間分布を示す。エレベータの平均待ち時間は 25.9 秒、20 階移動するときのエレベータ移動時間（待ち時間を除く）は 1 階あたり 1.8 秒であった。これより、モデルのエレベータの待ち時間 w を 30 秒、1 階あたりの移動時間 $1/v_{elv}$ を 0.03 分とする。

モデルの移動に関するパラメータを次のように定める。ひとりあたりの居住面積はオフィスビルの標準的な値 8m^2 とし、 $\rho = 0.125$ とする。そして、建物の総床面積のうちオフィスに使われる割合を 60% として、収容すべき人口を地区全体で 82000 人とする。エレベータの容量 c_{elv} は次のように定める。奥平 [9] にモデル式と実際の建物における床面積の配分データから、エレベータ床面積を 1m^2 とすると、時間 T あたり到着する客 30 人を円滑に運ぶことができるという見積もりが得られている。ここで T は建物内のすべての人が地上階の出入口から自分のオフィスに入る時間幅であり、出勤時間帯などを想定している。 T をオフィスビルに対してよく用いられる値である 30 分とすると、容量として 1人/分/m^2 を得る。そしてエレベータを待つための面積をエレベータのカゴと同じだけ用意するとして、 c_{elv} を $= 0.5\text{人/分/m}^2$ とする。また、対象地区の人が移動する頻度は、それぞれの人に対して 30 分に 1 回行き来があるように定める。なお、実験結果との対比を第一に考えたので、

エスカレータを含む計算結果は平均移動時間のグラフにのみ示す。

上記の容量の値は、エレベータのカゴの定員、たとえば快適に乗車できる人数が $1m^2$ あたり 3～4 人 [10]、と比べるとかなり小さい値である。しかし、ひとつの階の客の輸送を複数台のエレベータが担当していることを考えると、エレベータの通路面積あたりの容量がカゴの定員よりも小さいことの妥当性が理解できる。

上記のようにパラメータを設定したモデルの妥当性を確かめる。建物数 m を 10、ひとつの建物の床面積を、新宿三井ビルの高層基準階のオフィス面積 $1500m^2$ とエレベータ面積 $500m^2$ の合計にほぼ等しい値の $2000m^2$ とする。このとき建蔽率は約 11 % となる。地区の人口 P に対して、任意の人の対が単位時間に等しい確率 b で行き来するとし、建物内の人数を $P_{in} = P/m$ 、建物外の人数を $P_{out} = (m-1)P/m$ とし、問題 (3.1) ～ (3.4) を解いて移動時間最小となる建物を計算する。そして前述のように近似した建物間の地上を歩く時間を加えることにより、地区内の移動を導くことができる。図 4 に移動時間分布を示す。ふたつの山のうち、時間が短い方が同一の建物内の移動、長い方が異なる建物間の移動に対応している。図 3 と比較してよく似ていることがわかる。建物の各階の床面積の配分を図 8(b) に示す。計算された建物の高さが 39 階、最も交通路面積が大きくなる地上階のエレベータ面積が約 $480m^2$ であり、実際の建物の平均階数および例とした三井ビルの高層基準階の床面積の配分とよく一致していることがわかる。

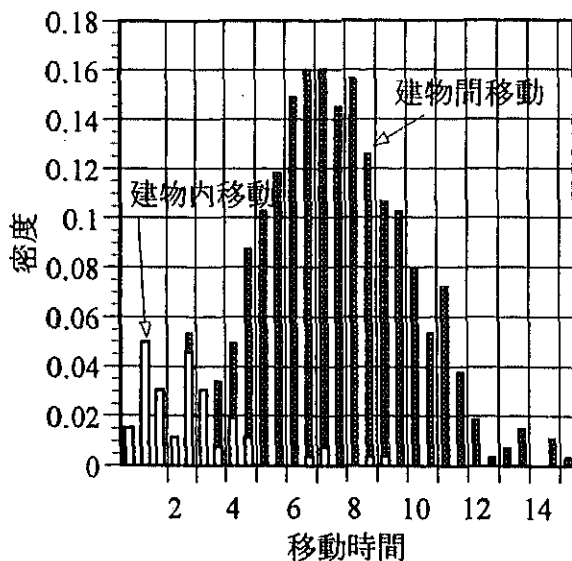


図3 新宿副都心高層建物10棟を対象とした地区内2点間の移動時間の計測値 (移動時間分布)

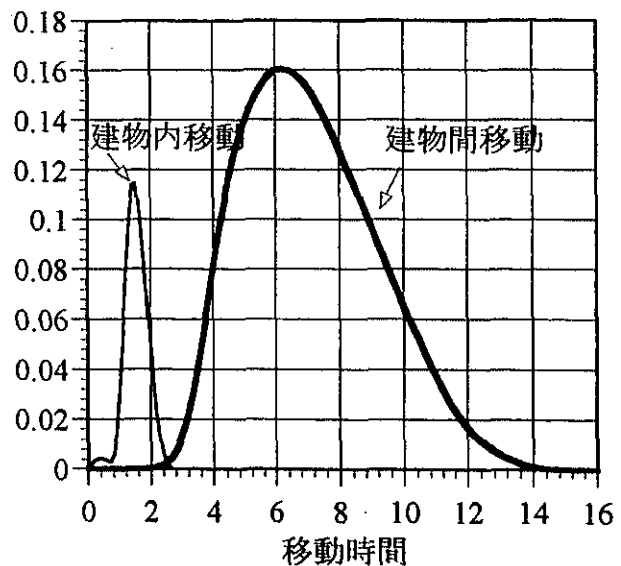


図4 提案モデルによる地区内2点間の移動時間分布.
建蔽率11%, 建物数10 ($S=2000$)

ここで、現実の近似から離れて、パラメータを変化させて解の様子をみてみよう。建物数 m を変えたときの移動時間分布の変化を図 5 に示す。また、平均移動時間を同一の建物内の移動と異なる建物間の移動、および交通機関に分けて表したものを図 6 に示す。同一の建物内の移動と異なる建物間の移動を比較すると、後者は 2 回エレベータに乗るので待ち時間が 2 倍かかり、移動時間の平均値も長い。すなわち、後者はエレベータ交通への負荷が大きい。また、建物数 m を大きくすると、異なる建物間の移動の割合が増加する。しかし、 $\alpha = 11\%$ では床面積に余裕があり、計算した m の範囲ではエレベータ移動時間はほと

んど変化しない。一方、 m を大きくすると建物の床面積が小さくなるので廊下の移動時間が短くなり、両者の移動とも移動時間が短くなる。しかし、建物間移動の割合が大きくなるので、図 6(b) に示すように、両者の移動を合わせた全移動時間の平均値は長くなる。

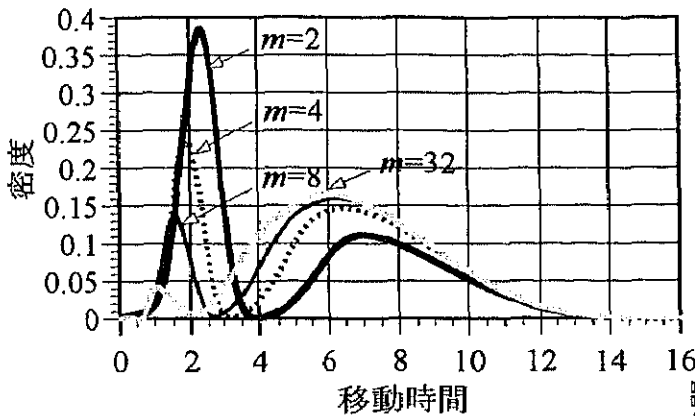
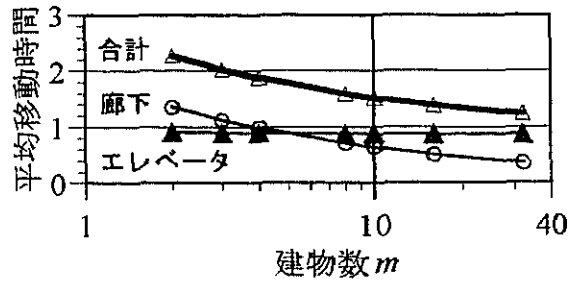
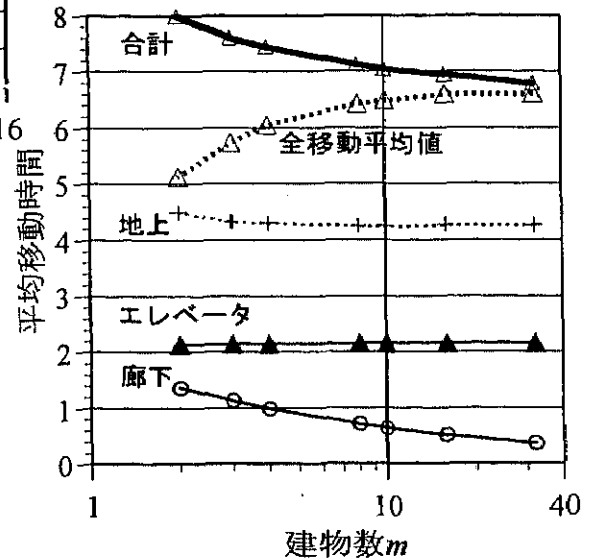


図5 建物数 m を変えたときの移動時間分布の比較。建蔽率11%



(a) 同一建物内の移動時間



(b) 異なる建物間の移動時間

図6 建物数を変えたときの交通機関別移動時間の変化。建蔽率11%

次に建蔽率を変えたときの移動時間を見てみよう。 $\alpha = 5.5\%, 11\%, 22\%, 44\%$ としたとき、建物数が 10 の場合の移動時間分布を図 7 に、建物各階の床面積配分を図 8 に示す。図 8 の座標軸のスケールは、建物の側面の形状とほぼ相似になるように選ばれている。また、それぞれの α について、建物数 m を変えたときの平均移動時間の変化を図 9 に示す。図 7, 9 を見ると $\alpha = 5.5\%$ において、特に m が大きい場合に、移動時間が長くなっている。これは、床面積に余裕がなくてエレベータの待ち時間が増加しているためである。すなわち、 $\alpha = 5.5\%$ では高層化しすぎているといえる。一方、 $\alpha = 11\%$ は、それより大きな α の場合と比較してそれほど移動時間が増えておらず、この移動頻度ではバランスの取れた選択であるといえる。

図 8 を見ると、床面積が大きい場合、上層階に使われていない部分が目立つ。これは移動時間最小となる建物を考えているためであり、床面積が十分利用可能ときには、水平に遠く移動する場所に居住者を置くよりは、床に空きを生じさせても階を縦に積んでエレベータによって移動する方が移動時間が短くなることによる。ここのモデルよりも仮定を単純にした場合の解析が、建物の内々移動に関しては鈴木 [12] に述べられている。

さて、仮定を変えた場合に、上述の結果はどのように変わるのかを調べてみよう。まず、移動頻度のより高い集団を対象としたとき、高層建物の床面積に余裕があるかどうかをみてみよう。すなわち、それぞれの人に対して 15 分間に 1 度行き来があるとして移動時間を最小にする建物を計算し、地区の移動時間を求める。図 10 に平均移動時間を示す。図 9 と

比較すると $\alpha = 22\%$, 44% の場合はほとんど変化していないのに対して, $\alpha = 11\%$ の場合, 特に m が大きい場合の移動時間が長くなっており, 床面積が不足する傾向が現れている。

最後に地区外からの移動について考えてみよう。対象とする地区が大きな都市の一部である場合には, 地区の外から交通機関を使ってその建物を訪問する (およびその逆方向) の移動を考えることも重要である。この場合の計算は, 建物に関しては, 出入口と建物内の点との間を考え, 地上に関しては, 建物の中心と地区内にランダムに取られた点との間を考える。ここで, ランダムに取られた点は地区外とつながる交通機関の駅を想定している。図 11 に平均移動時間を示す。 $\alpha = 5.5\%$ はこの状況でも床面積が不足している。前の例と異なり, 同一の建物に起終点がある移動が含まれないので, 建蔽率が同じであれば床面積の小さい建物をより多く建てる方が移動時間が短いという分かり易い結果が得られる。

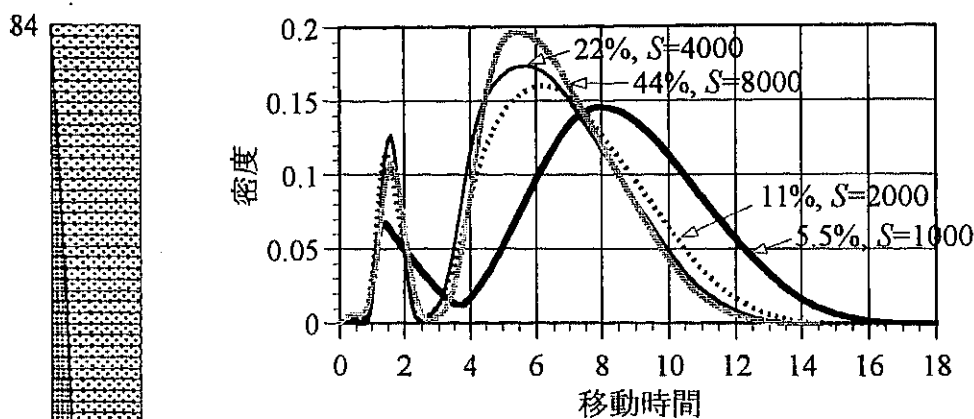
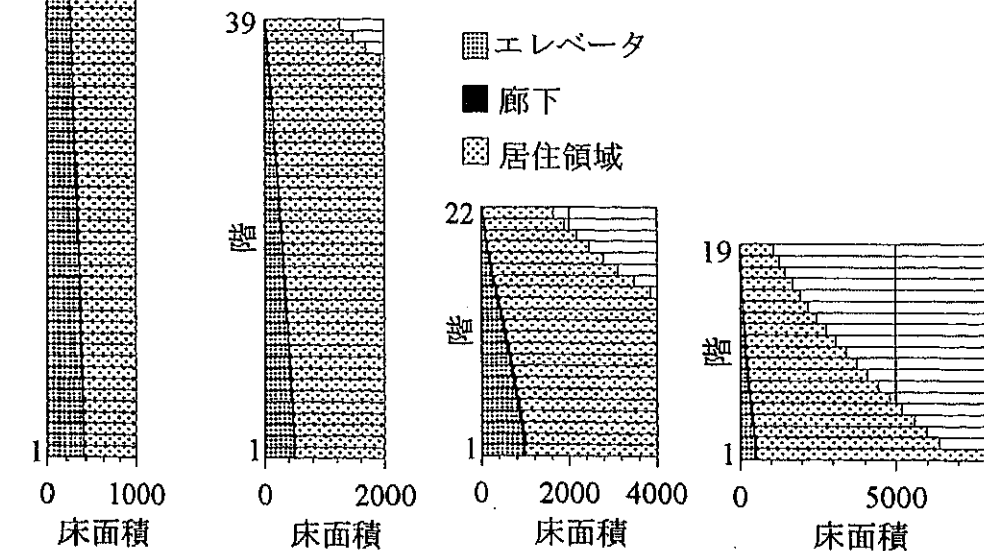


図7 建蔽率を変えた場合の移動時間分布の比較。建物数10



(a) 5.5%, $S=1000$ (b) 11%, $S=2000$ (c) 22%, $S=4000$ (d) 44%, $S=8000$

図8 建蔽率を変えた場合の最小移動時間建物の各階床面積配分の比較。建物数10。
廊下は配分された面積が少ないため図では識別し難い。

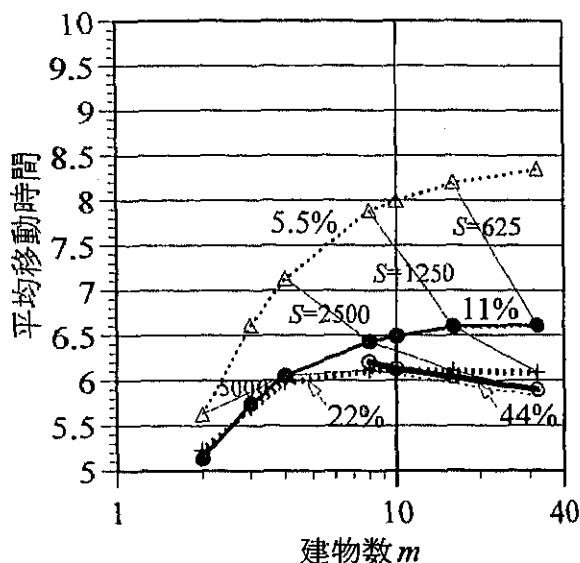


図9 建物数を変えたときの全平均移動時間の変化. 居住者1人に対して30分に1度行き来がある. 各カーブに沿う破線はエスカレータを含む結果である.

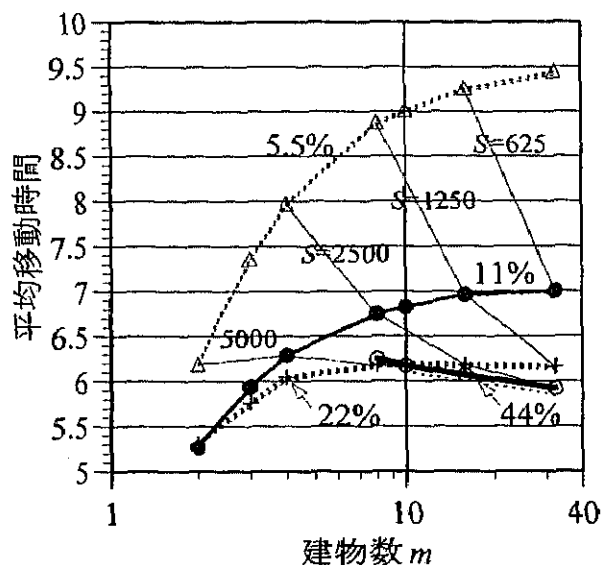


図10 居住者の移動頻度が2倍になった場合の全平均移動時間. 各カーブに沿う破線はエスカレータを含む結果である.

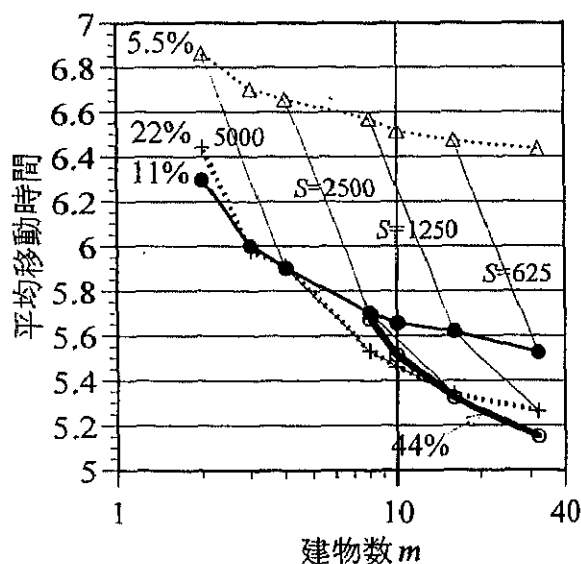


図11 地区外と地区内との移動だけを考えた場合の全平均移動時間

5. スカイロビー方式に対する計算例

非常に高層な建物に対して、スカイロビーと呼ばれる特定の階を直通でつなぐ急行エレベータと、それらの階の間の各階に停まる普通エレベータとを組み合わせ、床面積を効率よく利用する方法がある。よく知られた例はニューヨークのワールド・トレード・センターである¹。この建物は110階建ての高層部分がふたつ並んだツインタワーの形をしており、入口階、最上階の展望ロビー、および44階と71階に急行エレベータが停止する。急行エレベータは23台、普通エレベータは3区画合わせて72台あり、入口階から最上階まで約1分で到着する [6, 17]。ここでは3章のモデルを用いてこのエレベータの運転方式を記述し、実際の建物との比較を行う。ただし、最上階への急行エレベータの利用は特別な目的なので除いて考える。また、エスカレータを含む計算結果は平均移動時間と交通路面積の関係を表

¹この建物は2001年9月に倒壊した。

すグラフにのみ示す。

普通エレベータに乗ってスカイロビー階を通り越すときは、そこでかならず乗り換えなければならないとすると、出発階と到着階によって図 12 のようにエレベータを利用することになる。スカイロビー階を特定し、図 12 の利用パターンを用いれば、普通エレベータ、急行エレベータが各階に占める床面積を、移動に関わる人口の分布の式として表すことが容易にできる。これより式 (3.1) ~ (3.4) と同様の数理計画問題を導くことができる。

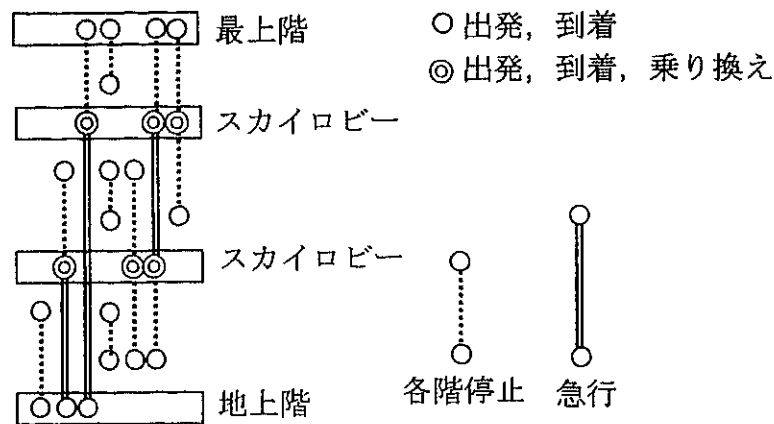


図 12 急行エレベータと普通エレベータの利用パターン

ワールド・トレード・センターを例として、急行エレベータがある場合とない場合について、床面積を変化させて移動時間最小の建物を計算し、急行エレベータの役割を移動時間と交通路面積の面から調べてみよう。この建物の高層部基準階は、床は $61m \times 61m$ であり、急行エレベータとして約 $550m^2$ 、普通エレベータとして約 $430m^2$ 、オフィス部分として約 $2500m^2$ が利用されている。オフィス人口は全体で 50000 人なので建物ひとつあたり 25000 人とし、総床面積 75% が居住用に利用されていることから、一人あたりのオフィス床面積を $12m^2$ とする。

廊下と普通エレベータに関するパラメータは前章の計算例と同一である。急行エレベータの速度は 1 階通過するのに 0.01 分と高速化して、待ち時間を 30 秒、容量はほとんどの階で待ち合わせの場所が不要なことを考慮して $1 \text{ 人}/m^2/\text{分}$ とする。

まず、地上階の出入口と建物内の点との間の交通（内外交通）を考えよう。移動の割合はビル内のそれぞれの人が 30 分に 1 回建物を出るか入るかとする。床面積 S を $3600m^2$ 高さ n を 110 階としたときの総移動時間最小となる建物について、

(a) スカイロビー階を 41 階と 74 階として急行エレベータを用いた場合

(b) 普通エレベータのみの場合

さらに、比較のために

(c) 普通エレベータのみで待ち時間を 30 秒固定として、交通容量とのトレードオフを行わない場合

の計算結果を、図 13 に建物各階の床面積の配分、図 14 に入口からの到着時間分布を示す。図 13 の (a) を見ると、最も通過交通量の大きい地上階において急行エレベータの面積は約 $510m^2$ 、普通エレベータの面積は約 $580m^2$ であり、前述の高層部基準階と比較すると、モデルでは急行エレベータの能力をやや高く、普通エレベータの能力を低く評価していること、エレベータ総面積が約 10% 多いことがわかる。また、図 14 の (a), (b) を比較するとスカイロビー方式によって入口からの到着時間が短縮されていることがこのモデルの計算に

よってもわかる [18]. 図 13 と 14 において, (b) と (c) を比較すると, 待ち時間の固定された普通エレベータ (c) は, (b) よりも大きなエレベータ床面積が必要であり, しかも移動時間の長い対の割合が多いことがわかる.

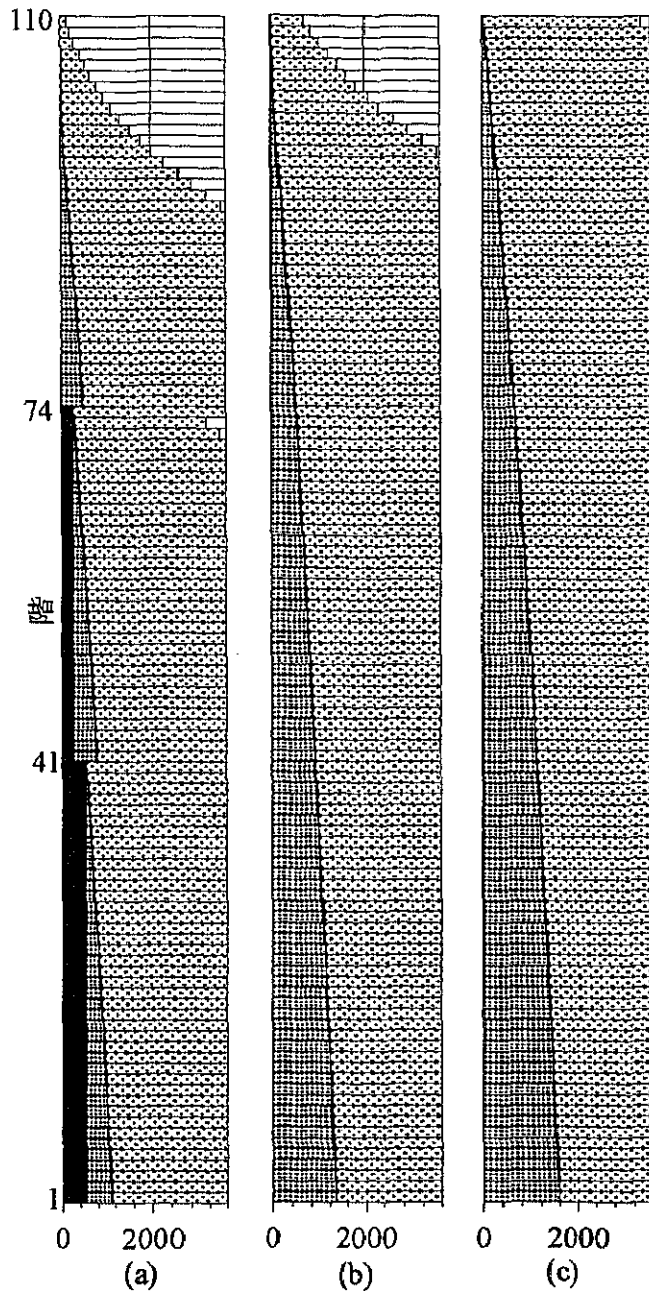


図13 エレベータ運転方式による建物各階床面積配分の比較. $S=3600$, 内外交通

■ 急行エレベータ
 ▨ 普通エレベータ
 ▩ 廊下
 ▤ 居住領域

(a) スカイロビー方式
 (b) 普通エレベータ
 (待ち時間・容量トレードオフ)
 到着間隔は35.9秒に増加
 (c) 普通エレベータ
 (待ち時間固定30秒)

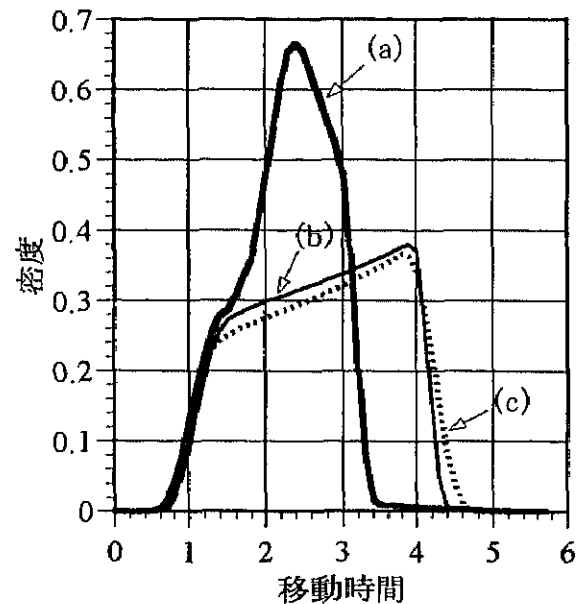


図14 エレベータ運転方式による地上階出入口から建物内への到着時間分布の比較. 内外交通

つぎに, 急行エレベータによる時間の短縮が, 建物高さをどの程度低くしたことに相当するのかをみてみよう. 普通エレベータのみの場合に, 建物高さ n を 40, 60, 80, 110 とし, 底面積 S を変化させて総移動時間が最小となる建物を計算した. 図 15 に, ($n=110, S=3600$) とほぼ総面積が等しくなる n と S の組み合わせを選び, 入口から建物内の各点までの移動時間分布を示す. 図 16 に, 平均移動時間を縦軸, 1 移動あたりの交通路面積を横軸に取って描いたグラフを示す. 各 n について, 左上の点は建物を実現する最小の S に対応しており,

左上から右下へ S が大きくなる。その際に、エレベータとして利用可能な面積が増し、待ち時間が下限値の 30 秒に向かって短縮されて平均移動時間は短くなる。そして、エレベータ待ち時間が下限値になると、それ以降増えた床面積は、入口からの最遠点を低層な階に收容するために用いられる。このとき、エレベータ交通が廊下交通に置き換わるので交通路面積は減少する。図 15, 16 を見ると、スカイロビー方式を利用した場合には、80 階程度の建物に相当するアクセスの容易さが実現されていることがわかる。

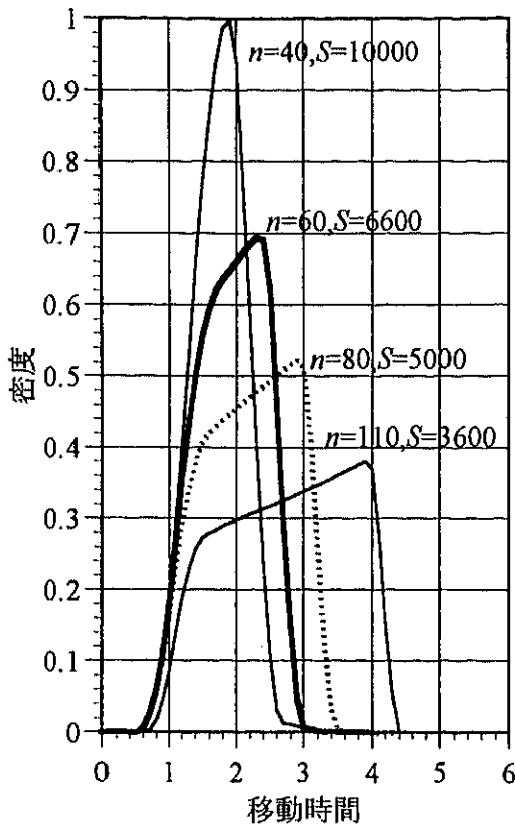


図15 総床面積が等しい建物の入口から建物内への到着時間分布の比較.

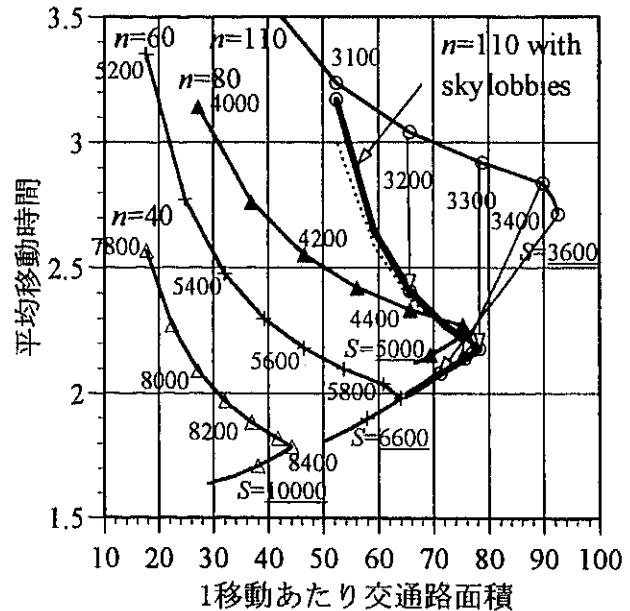


図16 内外交通に関する平均移動時間と1移動あたりの交通路面積の関係。各カーブは n を一定とし、床面積 S を変化させた場合に対応する。スカイロビー方式のカーブに沿う破線はエスカレータを含めた結果である。

さて、建物内の任意の2点間の移動（内々交通）を考えると、スカイロビー方式では、急行エレベータを利用できる場合が限られることと、スカイロビー階を通り越す移動に対しては乗り換えの待ち時間がかかってしまうことから、時間短縮効果が少ないことが予想される。内々移動を $1/3$ ，内外移動を $2/3$ の割合とし、床面積を 3600m^2 ，高さを110階として、先の(a)と(b)の場合の総移動時間最小となる建物を計算する。図17に建物各階の床面積の配分、図18に内々交通と内外交通に分けて表した移動時間分布を示す。図18をみると、内々交通に関しては、スカイロビー方式の方が長い時間がかかる点対の割合が増えていることが分かる。

最後にスカイロビーの位置を考えてみよう。上の計算ではスカイロビーを実際の建物と同じ場所においた。そこで、建物の内外交通に対して、上下のスカイロビー階の位置を変化させて移動時間最小の建物を計算し、得られた平均移動時間を上下のスカイロビー階の位置を座標軸とする等高線として図19に表す。極小値を与える組み合わせは、下のスカイロビー階が実際よりも少し高い位置となっているが、極小値の近くでは目的関数値が平坦であるこ

とを考えると、実際の位置とかなりよく一致しており、モデルによる計算が妥当であることがわかる。

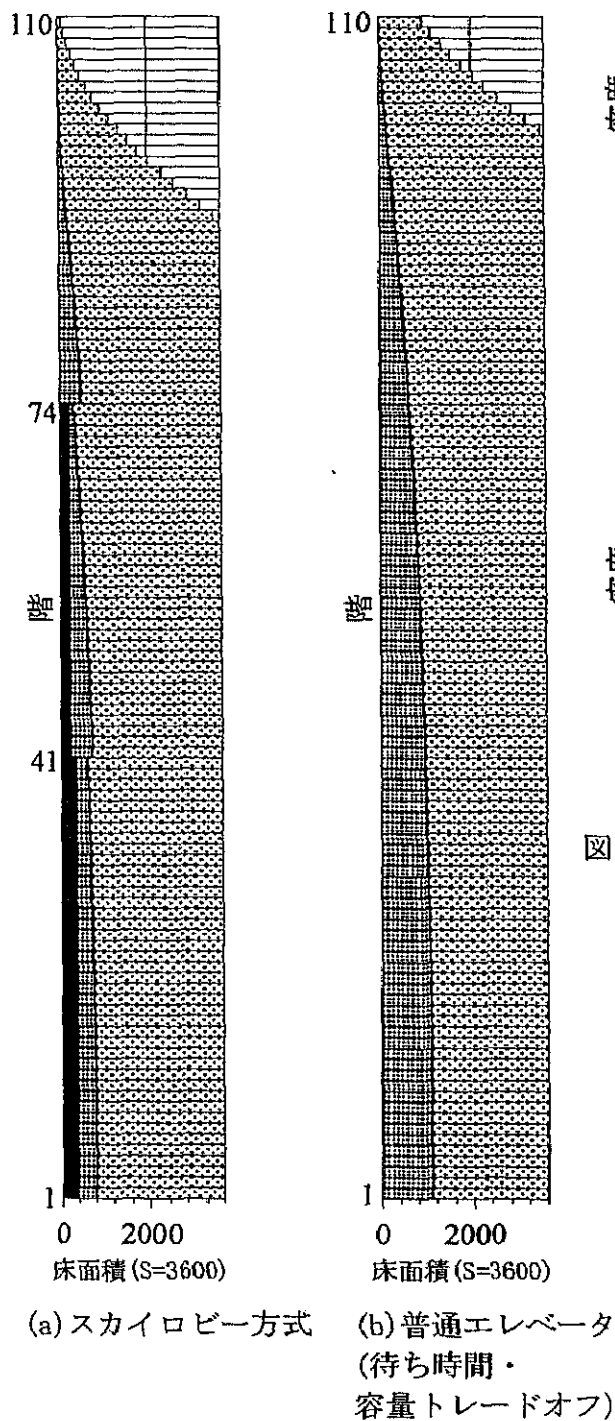


図17 エレベータ運転方式による
建物各階の床面積配分の比較。
内外交通2/3, 内々交通1/3

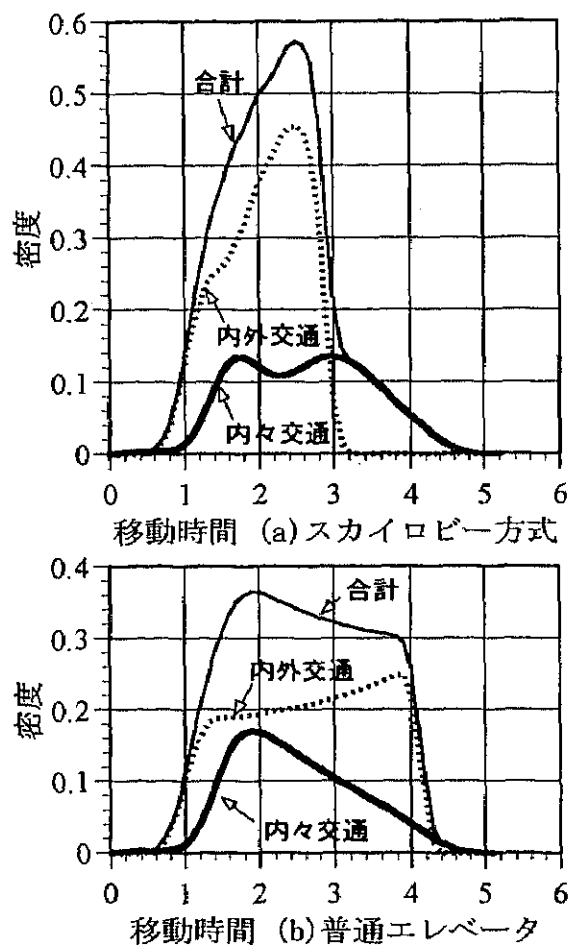


図18 移動時間分布. 内外交通2/3, 内々交通1/3

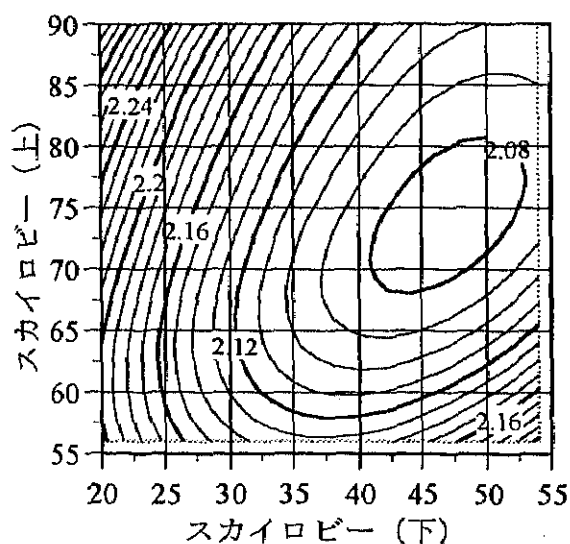


図19 スカイロビー位置に対する地上階入口から
建物内への平均到着時間の変化. 内外交通

6. まとめ

本論文では、建物に居住する人口と移動頻度を与え、総移動時間を最小とするような建物内の居住面積の分布と交通路面積の分布を求める問題を定式化した。考慮した交通機関はエレベータ、エスカレータ、徒歩による水平移動であり、単位となる移動に対して必要となる交通路面積と移動時間が定義される。この問題を解くことによって、移動時間と交通路面積の面から、建物の形状によって移動の容易さがどのように変わるのかを評価することが出来る。

ここで提案したモデルは、人口、人が行き来する頻度、建物の大きさ、を与えられた条件として、最適化問題を解いて建物内の床面積配分を求めるものである。精緻なシミュレーションモデルと異なり、交通手段を単純化しており、パラメータにも推定すべきものがある。そこで、パラメータの適切な推定を試みながら、現実の建物を例題とした計算を行い、モデルの妥当性を確かめた。

まず、新宿副都心の10棟の高層建物を含む地区において行われた、2地点間の移動時間を測定した実験結果との対照を行った。モデルのように地区内の人の対が等しい頻度で行き来するような交通需要があると仮定して計算した結果と、計測された移動時間分布とがよく似ていることが確かめられた。そして、対象地区の現況と、それよりさらに高層化する方向と低層化する方向について、移動時間分布の変化を調べた。つぎに、代表的な超高層建築であるニューヨークのワールド・トレード・センターのスカイロビー方式と呼ばれるエレベータシステムを、提案モデルによって記述し、十分な検討を経て作られた建物との比較を行って、モデルの妥当性を確かめた。

取り扱ったふたつの例題に関して、現実の建物を比較的良く表現することが出来た。その前提の下では、大規模な超高層建物において考えなければならない、交通路の配分問題に関する一般的な傾向を把握することができると考えている。しかし、ここで得られる知見を個別の建物の計画に結びつけるには現実を簡単にしすぎている点がある。具体的には、交通需要の発生と、交通機関（特にエレベータ）の動作を非常に簡単にしていることである。この点に関して、緩和できる所できない所を述べておこう。

交通需要は対象とする任意の人の対の間に同じ頻度で行き来があると仮定した。これに対して、階間ごとに異なる交通発生率を与えることは容易である。[15]ではやや簡便なモデルについて、交通発生に距離の抵抗があり、移動距離が長くなるほど行き来が少なくなるという場合を扱っている。また、階ごとに、異なる人口密度 ρ を与えること、また、利用できる面積に制約を課すことも可能である。

エレベータの動きに関しては、現実の運用を考える際に重要である確率的な変動がまったく考慮できていない。しかし、提案モデルに、より複雑な動作を取り入れることは非常に難しい。なぜならば、建物の床面積を要求する交通路と居住領域に対して、それら二つの配分を最適化するという問題を考えているので、縦方向交通路形状と交通需要を定める居住領域分布そのものが変数となっている。そして、それらが変数のままで、実際の建物内のようなエレベータの動きを模擬することは非常に難しいと考えるからである。一方、なされた単純化とのトレードオフとして最適化が行えるので、様々な要因を考慮した現実的なプランを、より幅広く検討できるという意義があると考ええる。上記の諸点のほか、各階ごとにエレベータ面積が可変であるという点などを検討してモデルの改良を進めること、ならびに、より現実的な交通需要分布や建物の階ごとに異なる利用形態を得て、提案モデルの適用範囲を調べることを今後の課題としたい。

参考文献

- [1] 秋澤淳, 茅陽一: 運輸部門の省エネルギー型都市構造に対する 2 つのモデルによるアプローチ. エネルギー・資源, 第 16 巻 6 号 (1995) 68-73.
- [2] J. J. Fruin(著), 長島正充 (訳): 歩行者の空間 - 理論とデザイン - (鹿島出版会, 1977).
- [3] 腰塚武志: 建物内の移動距離からみた低層建物と高層建物の比較. 都市計画論文集, 31(1996) 31-36.
- [4] 腰塚武志: 移動時間からみた超高層建築物の分析. 都市計画論文集, 33(1998) 325-330.
- [5] 腰塚武志, 石井儀光: 新宿高層ビル群における移動時間分布. 都市計画論文集, 35(2000) 1003-1008.
- [6] 小林克弘, 村尾成文: 高層. Space Design Series 10(新日本法規出版株式会社, 1994).
- [7] M. Z. Li, and M. Fushimi: The Efficient Analysis of Skyscrapers Based on the Inner Traffic. *International Transactions in Operational Research*, 4-5/6(1977) 307-313.
- [8] 村尾成文他: 事務所・複合建築の設計. 建築学大系, 34(彰国社, 1982).
- [9] 奥平耕造: 都市工学読本 (彰国社, 1976).
- [10] G. R. Strakosch ed.: *The Vertical Transportation Handbook third edition* (John Wiley & Sons, 1998).
- [11] 鈴木勉: 都市の立体的形態と移動負荷. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 2-A-2(1993) 140-141.
- [12] 鈴木勉, 田頭直人: 都市交通の視点から見た省エネルギー型都市構造とは? オペレーションズ・リサーチ, 第 42 巻 1 号 (1997) 14-19.
- [13] 田口東: 大規模超高層ビルにおける内々交通とエレベータ通路. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 37-3(1994) 232-242.
- [14] 田口東: 都市空間の道路と住居への配分. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 38-4(1995) 398-408.
- [15] 田口東: 超高層ビルにおける都市型交通とエレベータ通路. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 40-4(1997) 536-545.
- [16] R. Vaughan: *Urban Spatial Traffic Patterns* (Pion, 1987).
- [17] http://www.greatbuildings.com/buildings/World_Trade_Center.html

Azuma Taguchi
 Department of Information Science and Engineering
 Chuo University
 1-13-27 Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan
 E-mail: taguchi@ise.chuo-u.ac.jp

ABSTRACT

TRAFFIC MODEL INCLUDING TRAFFIC AREA AND CALCULATION
OF TRAVEL TIME DISTRIBUTION FOR SKYSCRAPERS

Azuma Taguchi
Chuo University

Takeshi Koshizuka
University of Tsukuba

In this paper, we propose a traffic model for a large-scale building giving careful consideration to traffic area. Our model consists of residential area, transportation area, and the rest. We focussed our attention on the trips generated between each pair of residents. There are three available transportation means in a building. The first one is a corridor to walk horizontally, the other two means, an escalator and an elevator, are used for vertical transportation. Each of the transportation means has its own capacity and speed, therefore the travel time and the necessary traffic area can be defined for each trip using it.

We determine the distribution of residents as well as the transportation area which minimize the total travel time of trips under such constraints that, the used area on each floor must be less than floor area S , and the population must be equal to a specified population P . Solving the problem, we can evaluate how the ease of mobility in a building changes as its size and proportion changes, from the viewpoints of travel time and required traffic area.

We show two numerical examples in order to examine whether our model can properly describe the transportation capacity of an actual skyscraper. The first example is to approximate a district consisting of 10 skyscrapers in Shinjuku area. We calculate the travel time distribution of trips in the district using our model through carefully choosing model parameters. We compared it with the observed travel time distribution of 523 example trips, and find that our model approximates the actual district very well.

The second example is to represent the elevator system in World Trade Center building in New York which uses express elevators and local elevators. An express elevator stops at the first floor, two predetermined floors halfway (skylobbies), and the top of the building. We derive a model for WTC building and try to find how this elevator system increases transportation capacity of a skyscraper. It is derived that it makes travel time from the entrance on the first floor to the whole building shorter and almost equivalent to those of the buildings lower by 30~40 stories. But it is not the case for a trip between points within a building. We also calculate the optimal location of skylobbies, which proved to be almost equal to the skylobbies in actual WTC building.

146. 都市領域における距離分布の導出とその応用

Distance distribution in an arbitrary region and its application to the daily trip in Tokyo

腰塚武志^{*}・大津 晶^{**}
Takeshi Koshizuka and Shou Ohtsu

In the present paper, we discuss the measure of the point pairs whose distance are less than a distance r in a given area. By differentiating this measure with respect to r , we get the function $f(r)$ which is called by distance distribution. Using a formula in Integral Geometry, we calculate the distance distribution numerically in an arbitrary region such as governmental districts. Therefore we estimate the distance distribution for the daily trip in Tokyo to compare this with the ordinary method which is measured by center points of districts.

Keywords: distance distribution, uniformly distributed line, distance distribution in an arbitrary region, distance distribution of daily trip in urbanized area

距離分布, 一様な直線, 一般的な領域における距離分布, 都市内移動距離分布

1. はじめに

筆者は、都市空間を人間が利用するという点から根本的に考察し、得られた基礎的概念を用いて改めて空間を調べることが必要であると考えている。詳しい議論は文献 [1] 等にあるので詳述しないが、中でも基本的なものの一つは距離分布と呼んでいるもので、これは与えられた空間のあらゆる2地点の移動を前提とした距離の全体分布ということになる。数式で表現すれば、与えられた空間のすべての平面の任意の2地点を p_1, p_2 (ともにベクトル) とし、その距離を $D(p_1, p_2)$ で表示すれば、距離 r 以下の2地点のペアの量 $F(r)$ は

$$F(r) = \iint_{D(p_1, p_2) < r} dp_1 dp_2 \quad (1)$$

と表現できる。ここでいう「距離分布」とは、上記 $F(r)$ を r で微分した

$$f(r) = \frac{dF(r)}{dr} \quad (2)$$

をさすものとする。すなわちこれは距離が丁度 r の2地点ペアの量を、密度(4次元量を距離で割ったもの)で表現したものということができる。

上記の式(1)における表現は、概念的にははっきりとして分かり易いが、実際にこれを計算することは容易ではない。式(1)や(2)を陽に関数として表すことができる場合は限られており、2点 p_1, p_2 が動く領域の形が円や長方形といった単純な場合がこれにあたる。実際の都市領域は角数の多い多角形で表される不定形なので、この距離分布を不定形でも算出できないいくつかの工夫が必要になる。

そこで本論文では、まずどのような状況でも、式(2)を計算できるように、2章で一般的な議論の枠組みを呈示し、つぎにそれに基づき3章で非凸領域における距離分布の計算法を示す。これには2点 p_1, p_2 がそれぞれ相異なる不定形の領域に存在する場合の計算法も含まれているので、これについても言及する。

以上により、与えられた領域を分割して、それぞれの領域の内々移動や領域にまたがる移動の距離分布の計算が可能となる。第4章では、この理論的結果を現実の東京23区に応用し、ODデータを基に東京23区内の現実の移動距離分布を推定し、従来から行われている方法と比較してみる。

2. 平面の2点と直線上の2点

もしも対象とする空間が平面ではなく次元を落とした線分であれば、(1次元の)空間における2点は2次元空間における1点と考えられ、これによって結果の理論的な距離分布の導出は比較的簡単である(文献[2])。これと同じような考え方で、平面上の2点は4次元空間の1点に対応させて考えることができるものの、我々は4次元空間を認識できないため平面における距離分布の計算は1次元における計算よりも見通しをたてづらい。

そこで様々な特殊な方法、例えばCroftonの微分方程式を用いて前章の式(2)等を計算できる(文献[4])ののだが、この方法では円というやさしい図形でしか距離分布を議論できず、都市や地域の分析に利用するには適当ではない。したがって、一般的図形すなわち頂点数の多い多角形でも、距離分布のような4次元量を取り扱うこと

^{*} 正会員 筑波大学 副学長

^{**} 正会員 筑波大学 社会工学系

ができるような道具を探さなければならない。素直に考えつくのは領域 D 内に一様にランダムに配置した点を基に式 (1) を計算する方法で、点の生成に一様乱数ではなく準乱数を用いれば、比較的良い分布が計算できることが文献 [3] に示されている。しかしながらこの方法も、4次元空間の容量を乱数より求めるものであるから、本章で述べる4次元計算を2次元の計算に帰着させる方法と比較すればかなり劣った方法と言わざるを得ないのである。

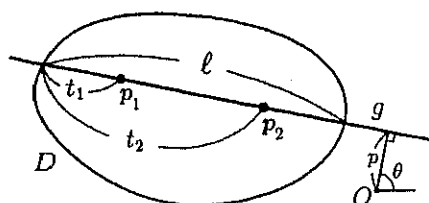


図 1: 一様な直線とその上の2点

ところで積分幾何学の分野で Crofton が導いた公式の拡張を議論するとき、次のような変数変換が用いられる。すなわちそれは平面領域 D の2点 p_1, p_2 に関する積分は、図1のようにこの領域 D を通る一様な直線 g を固定したとき、この直線上の2点の座標 t_1, t_2 で

$$[dp_1, dp_2] = |t_1 - t_2| [dG, dt_1, dt_2] \quad (3)$$

と変換することができる、というものである。ただし dG はこの分野固有の表記法で、この直線 g に原点 O から下ろした垂線の長さを p 、垂線の角度を θ としたときの $dG = [dp, d\theta]$ を表わしている。このように直線ごととその上の2点について距離の重み $|t_1 - t_2|$ を考え、これを領域に交わる直線についてもれなく求めれば、2次元上の2点を計算したことになる(文献 [5], [6])。

そこで、まず領域 D を通るある直線を固定し、この直線上の領域内での距離の累積分布を $F_g(r)$ とすれば、固定された直線のこの領域 D の内部の長さを ℓ として

$$\begin{aligned} F_g(r) &= \iint_{|t_1 - t_2| < r} |t_1 - t_2| dt_1 dt_2 \\ &= r^2 \ell - \frac{2}{3} r^3 \end{aligned} \quad (4)$$

が導かれる。これを r で微分すれば、この固定された直線上の距離の分布が

$$f_g(r) = 2r(\ell - r) \quad (5)$$

と得られる。これを領域 D を通る一様な直線すべてに関して積分してやれば、この領域 D 内の2点間の距離の分布を導出することができる。

さて式 (5) について、これが成立するのは $0 < r < \ell$ の範囲であり、これ以外では $f_g(r) = 0$ となっている。

逆に、ある r を固定したとき、この r より小さい ℓ (弦) において求めた距離分布は $f_g(r) = 0$ としておかねばならない。そこで図1において、一様な直線のこの領域内での長さ ℓ が r よりも大きい直線の集合を G_r で表し式 (5) をこの範囲で積分してやれば、距離分布 $f(r)$ を

$$f(r) = \int_{G_r} 2r(\ell - r) dG, \quad G_r = \{G | r < \ell\}$$

と求めることができる。ここまでの議論は凸領域について成り立つものだが、長さ ℓ も G の関数なので上式を実際に求めるのはそれほど簡単ではない。ただし領域 D が円のときは以下のように比較的容易に議論できる。

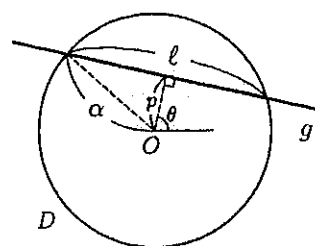


図 2: 領域が円の場合

領域の半径を α とすると図2から明らかなように、一様な直線を考える点 O を円の中心に取れば、弦の長さ ℓ は直線に下ろした垂線の足の長さ p で

$$\ell = 2\sqrt{\alpha^2 - p^2}$$

と表すことができる。また $\ell = r$ のとき

$$p = \sqrt{\alpha^2 - r^2/4}$$

であることから $r < \ell$ において p の範囲は

$$0 < p < \sqrt{\alpha^2 - r^2/4}$$

となる。ゆえに G_r に関する積分は、 p のこの範囲と $0 < \theta < 2\pi$ で

$$\begin{aligned} &\int_{G_r} 2r(\ell - r) dG \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - r^2/4}} 2r(2\sqrt{\alpha^2 - p^2} - r) dp d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

と書くことができる。そしてこれを計算すると円内の距離分布である

$$f(r) = 4\pi\alpha^2 r \arccos \frac{r}{2\alpha} - 2\pi\alpha r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2} \quad (7)$$

が得られ、Crofton の微分方程式で得られた結果(文献 [4])と一致する。

つぎにこの方法を利用して、不定形領域における距離分布の近似計算を考えよう。近似の程度を見るために半

半径 α の円を考え、一様な直線の代表として図 3 のように半径 (p の範囲) を 3 分割し、3 本の直線 g_i ($i = 1, 2, 3$) をとる。これらの直線の円内の長さを ℓ_i とすると、式 (5) よりそれぞれの直線上の距離分布が得られる。そしてこの円を通過する直線の全重量 $2\pi\alpha$ (領域の周長) の $1/3$ の重みをつけてこれを図示すると図 4 の f_1, f_2, f_3 のようになり、これを足しあわせれば図 4 の $f^*(r)$ が得られる。これを理論式 (7) の $f(r)$ と比較すると、この近似はかなり良いことが分かるだろう (もっともこれは円が角度 θ について一様であることにも依るのではあるが)。

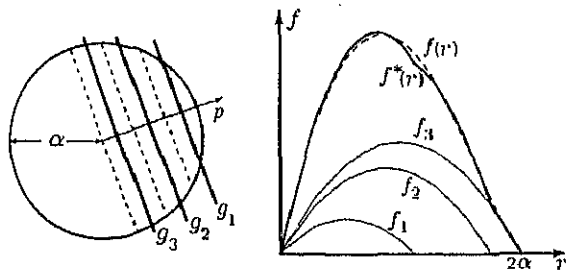


図 3: 一様な 3 直線

図 4: 距離分布の近似

3. 非凸領域における距離分布

前述の式 (5) は、計算に用いる直線の領域をよぎる部分がすべて領域に含まれる場合のものであった。しかし図 5 のように対象領域が非凸のとき、直線 g の部分が領域の外に出てしまう場合がある。このような場合についても式 (3) を用いて距離分布を導出できることを示そう。

図 5 のように直線が領域によって 2 つの線分に分断される場合を考える。起点 O を定め、直線と領域の交点を順番に E_1, E_2, E とし、線分 OE_1 を s_1 、 E_1E_2 を s_2 、 E_2E を s_3 と名付ける。

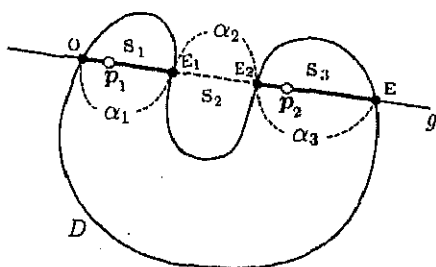


図 5: 非凸領域と直線 g

このとき式 (3) における p_1, p_2 がそれぞれどこにあるかで場合分けをする。まず p_1, p_2 共に s_1 にあるときは、式 (5) より s_1 の長さを α_1 として、 $0 < r < \alpha_1$ で

$$f_{11}(r) = 2r(\alpha_1 - r) \quad (8)$$

となる。同様に p_1 と p_2 が共に線分 s_3 にあれば、 s_3 の

長さを α_3 とし、 $0 < r < \alpha_3$ で以下が得られる。

$$f_{33}(r) = 2r(\alpha_3 - r). \quad (9)$$

さて、問題は p_1 が s_1 に p_2 が s_3 にあるような場合である。ここで s_2 の長さを α_2 とすれば、起点 O より E_1, E_2, E の座標はそれぞれ $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ となり、このとき積分範囲は図 6 のように $0 < t_1 < \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 < t_2 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ となっている。ところで、この図 6 は $\alpha_1 < \alpha_3$ の場合である。 $\alpha_1 > \alpha_3$ の場合は、起点 O を E のところに定めて座標の取り方を逆にし、 t_1 と t_2 を入れ換えれば、 $\alpha_1 < \alpha_3$ の場合と同じ議論ができるので $\alpha_1 < \alpha_3$ として一般性を失わない。

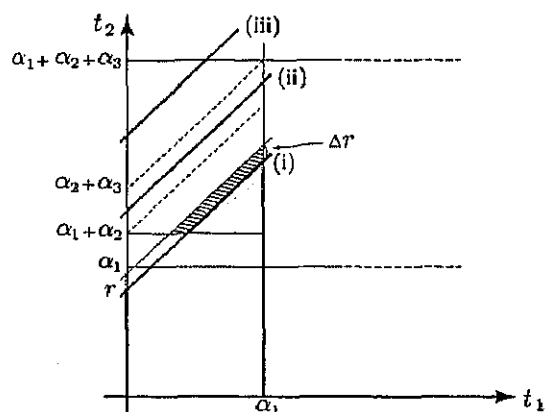


図 6: 積分領域

まず (i) $\alpha_2 < r < \alpha_1 + \alpha_2$ のとき、式 (4) に相当する積分は、図 6 の塗りつぶされた領域において

$$F_g(r) = \iint_{p_1 \in s_1, p_2 \in s_3, t_2 - t_1 < r} (t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (10)$$

と表すことができる。これは 3 次元図形の体積として表現できるが、あとで r で微分することを考慮して、 $r + \Delta r$ の領域から引けば図 6 の斜線部分となり、 Δr の幅に注意すると、

$$F_g(r + \Delta r) - F_g(r) \simeq \Delta r \int_{\alpha_1 + \alpha_2 - r}^{\alpha_1} r dt_1$$

となり、以下ようになる。

$$f_{13}(r) = \frac{dF_g(r)}{dr} = r(r - \alpha_2). \quad (11)$$

つぎに (ii) $\alpha_1 + \alpha_2 < r < \alpha_2 + \alpha_3$ のときには、図 6 で明らかなように以下が得られる。

$$f_{13}(r) = \int_0^{\alpha_1} r dt_1 = r\alpha_1. \quad (12)$$

さらに (iii) $\alpha_2 + \alpha_3 < r < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ のときは、やはり図 6 から

$$f_{13}(r) = \int_0^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - r} r dt_1 = r(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - r) \quad (13)$$

となる。 p_1 が s_3 に、 p_2 が s_1 にある場合は図 6 で t_1, t_2 について対称なところに同じ領域が存在するので、 $f_{13} = f_{31}$ が成り立つから、式 (8)、式 (9)、式 (11)、式 (12)、式 (13) を加えて、

$$f_9(r) = f_{11}(r) + f_{33}(r) + 2f_{13}(r) \quad (14)$$

(ただし $f_{11}(r), f_{33}(r), f_{13}(r)$ は、それぞれ r が定められた範囲以外では 0 とする)

として非凸領域についても一様な直線を介して距離分布を求めることができる。

冒頭にもふれたが、 f_{13} と式 (5) を導く考え方をいれば、2 点がそれぞれ異なる領域に属したりあるいはそれぞれの点に異なる密度（人口など）を考慮するような場合でも、それぞれ重みを付ければ距離分布が求められることが分かるだろう。そこで、式 (11)、(12)、(13) で表される $f_{13}(r)$ も、一様な直線上の距離分布（式 (5)、(15)）の仲間であることを示す意味でつぎのようにしておく。

$$f_9(r) = f_{13}(r). \quad (15)$$

4. 都市内移動距離分布の推定

本章では東京 23 区の通勤 OD の移動距離分布を推定する。用いたデータは平成 7 年度国勢調査（文献 [9]）から東京 23 区内の通勤 OD（総数 3,463,502 人）を抽出したもので、276OD ペアに集計してある。

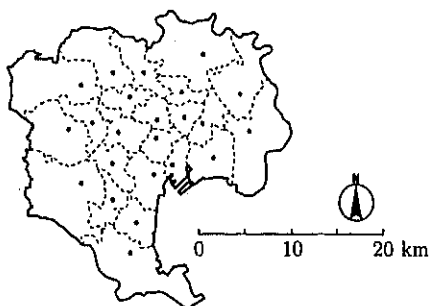


図 7: 東京 23 区の代表点（区役所）

4.1. 代表点間距離を用いた推定法

与えられた OD データの通勤移動距離分布を得るには、図 7 に示したすべての区の組み合わせについて代表点間の距離を測り、対応する OD ペア数を乗じて度数分布を推定する方法が最も単純であるが、この方法では区の内々移動の距離が 0 として計算されるという問題点がある。文献 [7] によれば区内の移動の発生・集中が領域内で偏りがないと仮定したときの平均移動距離 $E_{内々}(r)$ は、図 8 に示す対象領域の凸包 C の周長 L_C に比例し、以下の関係が成り立つ。

$$E_{内々}(r) \simeq 0.13 L_C. \quad (16)$$

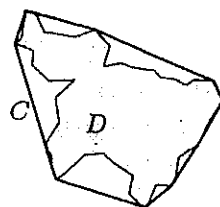


図 8: 領域 D と凸包 C

さらに文献 [8] では、相対的に近接する領域間の平均移動距離 $E_{近接}(r)$ は、図 9 のように代表点間距離を h 、それぞれの領域と面積を同じくした円の半径を α_i, α_j として、

$$E_{近接}(r) \simeq h + \frac{\alpha_i^2 + \alpha_j^2}{8} \cdot \frac{1}{h} \quad (17)$$

でかなり程度の良い近似ができることが示されている。

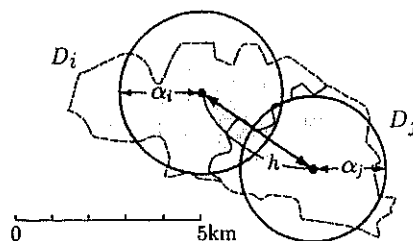


図 9: 等面積円を用いた近接領域間の平均移動距離

代表点間距離をそのまま用いた移動距離分布と、内々移動については式 (16)、隣接する領域間の移動については式 (17) を用いて補正した移動距離分布を比較すると、図 10 のようになり、短い移動距離の不自然さが解消されることが分かる。

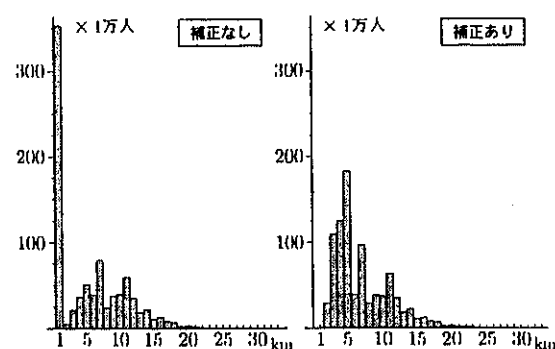


図 10: 補正の有無による移動距離分布の比較

4.2. 一様な直線を用いた推定法

つぎに第 2,3 章で述べた、一様な直線を用いた計算方法による移動距離分布の推定を示そう。

第 1 章で述べたように、一般の多角形領域などを分析対象とした場合、式 (6) が表す距離の全体分布を陽に計算する事ができない。したがって、この領域を“適切な本数”の一様な直線について総量で調整した重みをつけ

て距離分布を計算し、これらを足しあわせることで全体の移動距離分布を近似的に得ることにしよう。しかしながら“適切な本数”は、領域の形状に依存し先験的には与えられないので、図11のような（理論分布式が得られる）長辺 a 短辺 b の矩形領域を例に、相対誤差に注意しながらもっともらしい分布が得られる直線の本数に“あたり”をつけておこう。

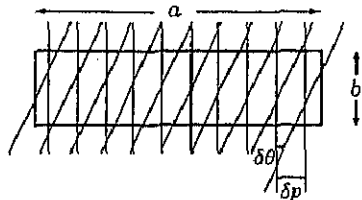


図11: 直線の間隔と角度

直線の配置には様々な方法があるが、ここでは最も素朴に 2π を等分する一定の角度で回転させた等間隔の平行線を用いることにする。直線の間隔を δp 、角度の刻みを $\delta\theta$ とする。計算機を用いて $\delta p = a/10, a/20, a/50$ 、 $\delta\theta = \pi/4, \pi/8, \pi/16, \pi/32$ のように変化させて求めた近似分布 $\hat{f}(r)$ と真の分布 $f(r)$ の相対誤差 ε を

$$\varepsilon = \int \frac{|\hat{f}(r) - f(r)|}{f(r)} dr \quad (18)$$

と定義し、すべての $\delta p, \delta\theta$ で近似距離分布を求め誤差を計算すると図12のようになる。図の横軸は（結果的に）領域に交わった直線の本数である。

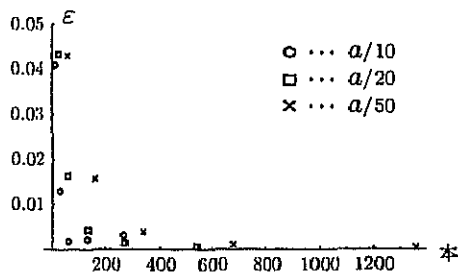


図12: 相対誤差の分布

図12を見ると、直線の間隔および角度の刻みを小さくするほど大局的に誤差が小さくなる傾向があることが分かる。直線の本数に対して誤差が単調に減少していないところがあるが、これは領域形状と直線配置の相対的な位置関係によるものであり、実はこの例のような対称性を持つ領域に対してはこの直線配置は好ましくない。つまり、同程度の本数の直線配置でも直線の間隔・角度いずれかを極端に“粗く”してしまうと領域形状と直線配置の関係で誤差が大きくなる可能性があることが予想される。実際に計算する領域形状は長方形より複雑であることを考慮して、今回は $\delta p = a/20$ 、 $\delta\theta = \pi/16$ の

規則的に配置した直線群を用いる。このときの近似分布と理論分布を描くと図13のようになり、図4と見比べても十分な精度と考えて良いだろう。

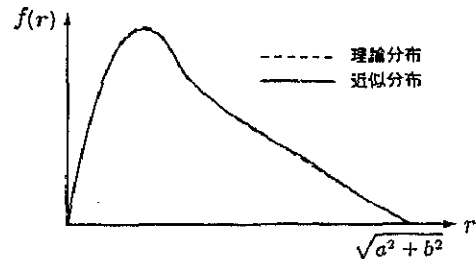


図13: $\delta p = a/20$ 、 $\delta\theta = \pi/16$ のときの近似分布

a については図14のように、計算対象地域を覆うことができる長方形のうち、長辺が最も短くなるものの長辺の長さを用いる。

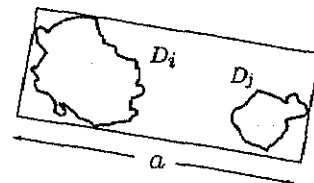


図14: 領域間の距離分布を数値計算する方法

以上で一様な直線を介して移動距離分布を計算するための準備はすべて揃ったことになる。前述の東京23区の通勤ODの重みをつけた276ペア（内々移動も含む）の領域間の移動距離の分布を重ねて図示すると図15のようになる。図中の太線で表した分布は、A) 足立区内々の通勤ODとB) 杉並区千代田区間の通勤ODである。

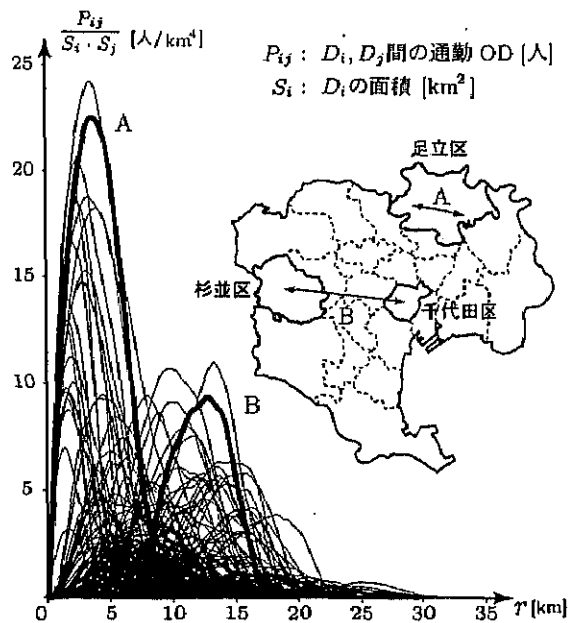


図15: ODペアごとの距離分布

図15のすべての分布を足し合わせ、これを全ODペアの量で基準化すれば東京23区全体の通勤移動距離分布が得られることになる。図16は、このようにして導

出した移動距離分布のグラフと、図 10 で示した補正済み代表点間距離分布のヒストグラムを、総量が 1 になるように基準化して重ねたものである。これを見ると、平均値の違いはあまり無いものの、連続分布の方が滑らかで且つ裾野が広い分布をしていることが分かる。従来の方法で得られる分布は、図 16 のヒストグラムのように実際より短い方に頻度が高く出る傾向がある。東京都における区を単位とした地域分割は、図 15 を見ても明らかのように、大きさにかなりばらつきが存在する。そして大きい区同士のペアーの（全体の）距離分布を考える場合、代表点間の距離に縮約することによって省略されてしまう部分を見逃すことが分かるだろう。

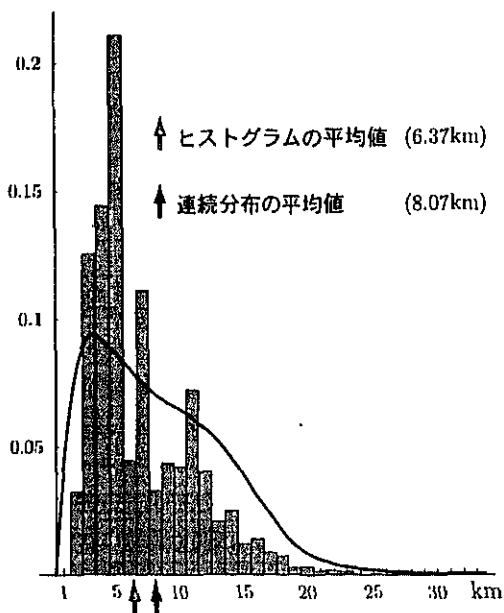


図 16: 移動距離分布の比較

一方、連続分布にも問題がないわけではない。区内や区をまたぐ移動の起終点は現実には一様ではないことである。この方法では、起終点が一様に分布するとしても差しつかえない程度に細かく対象地域を分割すれば、正しい分布が得られることは議論の過程から明らかだから、逆に言えば図 16 に示した分布はこの一様性が保証されない点において真の分布と異なっていることになる。とはいえ、より真の分布に近いものとして連続分布を導き、これをもとに従来の方法を評価できたことは収穫だと思っている。

5. おわりに

本論文では、これまで単純な図形でしか求められなかった距離分布について、数値的ではあるが厳密に導出する方法を呈示した。式 (1) と変数変換の式 (3) を用いれば、距離分布は一様な直線を紹介関数型として式 (5)、あるいは式 (11), (12), (13) のように簡潔な 2 次式と 1 次

式の足し算（厳密には積分）で表現できるのである。このことは、つまるところ 4 次元の計算を次元を落として 2 次元の計算にできるということを示しており、我々の分野の多くの人達が活用すべきものと考えられる。

第 4 章では本来、式 (1) に対応するものとして地点 p_1 から p_2 に移動する量を密度 $\mu(p_1, p_2)$ で表し、

$$F(r) = \iint_{D(p_1, p_2) < r} \mu(p_1, p_2) dp_1 dp_2 \quad (19)$$

として議論すべきものであった。前半で $\mu(p_1, p_2) = 1$ としたのは、現実をシミュレートするものではなく、文献 [1] や [2] など論じられているように、あくまで移動から見た空間そのものの性質を論じるという意図によるものである。東京 23 区の例は、点 p_i が i 区、点 p_j が j 区にあるとして $\mu(p_1, p_2) = C_{ij}$ と置いた式 (19) を計算したことになり、別な言い方では 4 次元の領域をいくつかの部分領域に分け、実際の調査データを用いてそれぞれに C_{ij} という重みをつけたことに他ならない。結果として得られた予想外に滑らかな分布の 2 つの“こぶ”は、全体で一様に近い移動と、都心 3 区（あるいは新宿も含む）への通勤移動の合成により生じるものと推察でき、従来の方法ではとてもこのような予想はできないと考えられる。紙面の都合もあるので、この厳密な分布を基にした展開は今後の課題としておきたい。

なお本研究は、文部科学省科学研究費補助金 基盤 (B)(2)12480103 の助成を受けた。また第 4 章で示した東京 23 区の OD データを用いた近似移動距離分布の計算と結果の図は、傍島久弥氏（株式会社 三井情報開発）の手によるものである。

参考文献

- [1] 腰塚武志 (1998): 移動からみた都市空間の分析。日本学術会議第 1 回生活環境設計シンポジウム講演論文集, pp5-10.
- [2] 腰塚武志 (1999): 移動からみた放射状と格子状ネットワークの比較。日本都市計画学会学術研究論文集, 第 34 号, pp.763-768.
- [3] 腰塚武志, 出水田智子 (1997): 不定形と内々距離分布。形の科学会報, 第 12 巻第 3 号, pp.26-27.
- [4] 谷村秀彦, 腰塚武志他 (1986): 都市計画数理, 朝倉書店.
- [5] 腰塚武志 (1976): 積分幾何学について (3)。オペレーションズ・リサーチ, 11 月号, pp.654-659.
- [6] L.A. Santaró (1976): *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- [7] 腰塚武志 (1978): 地域内距離。Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.21, No.2, pp.302-319.
- [8] 栗田 治, 腰塚武志 (1988): 領域間平均距離の近似理論とその応用。日本都市計画学会学術研究論文集, 第 23 号.
- [9] 総務庁統計局 (1996): 平成 7 年度国勢調査.
- [10] 腰塚武志 (1998): 一様な直線を介して 4 次元を 2 次元から見る。日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.30-31.
- [11] 傍島久弥 (2000): 距離分布を用いた都市内移動距離の推定。筑波大学社会工学研究科修士論文.

147. 道路ネットワーク上の道路距離と直線距離

Relationship between Road Distance and Euclidean Distance on Road Networks

田村一軌^{*}・腰塚武志^{**}・大澤義明^{***}

Kazuki Tamura, Takeshi Koshizuka and Yoshiaki Ohsawa

The purpose of this paper is to examine the relationship between road distances and Euclidean distances on a road network. First, we define the detour ratio using these distances and show the method to compute the ratio and the correlation coefficient between these distances. Then we reveal the fundamental characteristics of the detour ratio and the correlation coefficient. Finally, we compare the road network of Tsukuba city, Japan and that of Louvain-La-Neuve, Belgium based on these ratio and coefficient.

Keywords : road network, road distance, Euclidean distance, detour ratio

道路網、道路距離、直線距離、迂回率

1. はじめに

都市内道路網の主たる役割は地域内の住民に対し円滑な移動手段を提供することである。すなわち目的地に対してできるだけ直線的な移動でアプローチできることが望ましい。ところが近年の市街地開発における道路網の設計思想には、通過交通を排除するために通過者に迂回を強いるというものが数多く見受けられるようになった。このことは先に述べた目的とは相反するものであり、地域内の住民も必然的に迂回を強いられることになってしまう。

しかしながら、住民がどの程度効率的に移動しているか、また迂回を強いられているのかという課題は現在のところ詳しく議論されていないようである。本研究の目的は、道路網構造に依存する効率性の度合い、迂回の程度を出発地と目的地間の道路距離と直線距離の関係から定量的に考察することにある。

腰塚・小林¹⁾は道路ネットワークデータから、市町村ノード間の直線距離と道路距離を求め、両者がほぼ比例するという関係を理論的に示した。また、堀井²⁾は計量地理学における「迂回度」指標を応用し、災害発生時における代替機能という観点から道路網の評価を試みている。いずれも都市間移動を扱う大規模なネットワークに着目し分析を行っているものであり、都市内道路網のような粗いネットワークに対し直接適用することはできない。

また、都市内では移動が発生集中する地点はリンクに沿って並んでいると考えることができる。このような状況でノード間の移動のみを扱うことは、移動の発生集中する地点をノードに集約することになり、ノードの位置

が結果に影響を与えてしまうおそれがある。そこで本研究では都市内道路網において、ノードだけではなくリンクも含めてネットワーク上のあらゆる地点で移動が発生集中する状況を想定する。このようなネットワークのリンク上に移動の起終点が存在する状況を扱う数少ない既存研究としては、Okabe, A. 他³⁾、奥貫・岡部⁴⁾などがあるが、これらの例においては移動の起終点のうち片方が施設立地(候補)点として固定されており、本研究での枠組みとは本質的に異なっている。

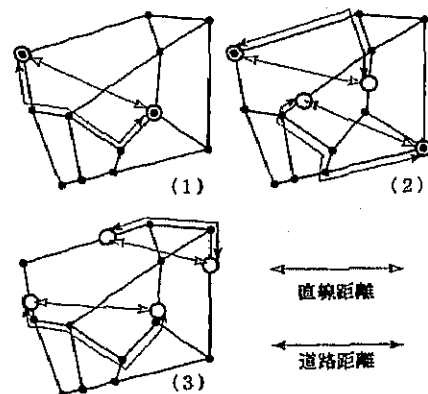


図1: ネットワーク上の移動の捉え方

図1は今述べたネットワーク上の移動を考える上での3つの枠組みを図化したものである。ノードを小さな黒丸で、移動の発生集中点を白丸で示す。(1)はノード間の移動のみを取り扱うもので、(2)はノードとネットワーク上の点を取り扱うものである。(2)は(1)の場合も含んでいることに注意していただきたい。本研究で扱うのは(3)

^{*} 正会員 筑波大学社会工学研究科 (Univ. of Tsukuba)
^{**} 正会員 筑波大学副学長 (Univ. of Tsukuba)
^{***} 正会員 筑波大学社会工学系 (Univ. of Tsukuba)

の場合で、これはネットワーク上のあらゆる2点のペアを対象とするものである。これは(1)も(2)も含んでおり、最も一般化された状況である。本稿では議論しないが、(3)と(1)を比較することで先に述べた移動の発生集中地点をノードに集約することによって生じる集計誤差の評価も可能となる。

以上のような状況を鑑み、本稿では都市内道路網の道路距離と直線距離で「迂回率」を定義し、その算出方法を提示する。そして実際の都市内道路網を比較する。

2. 迂回率の定義

都市内道路網における迂回の程度を表す指標を提案する。腰塚・小林¹⁾は直線距離と道路距離がほぼ比例するという関係を理論的に示した。すなわち、道路距離を X 、直線距離を Y 、比例定数を a とすると、

$$X = aY \quad (1)$$

と定式化した。本稿ではこの比例定数 a に着目し、「道路距離が直線距離に比べおよそ何倍になっているか」という a を「迂回率」の指標として用いることにする。また、回帰の当てはまり具合を示す指標である相関係数 R も重要な指標であるのでこれも同時に利用する。この a 及び R は以下のように求められる。

ネットワーク上のあらゆる2点に関する道路距離、直線距離それぞれの確率変数を X, Y とする。このとき相関係数 R は

$$R = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{E[X^2] - (E[X])^2} \sqrt{E[Y^2] - (E[Y])^2}} \quad (2)$$

と表される。ここで $E[X]$ は変数 X の期待値を表す記号である。また、最小二乗法により求められる回帰直線 $X = aY$ の傾き(回帰係数) a は、

$$a = \frac{E[XY]}{E[Y^2]} \quad (3)$$

で得られる。 $E[X], E[Y], E[X^2], E[Y^2], E[XY]$ の5つを求めることができれば、相関係数と迂回率(回帰係数)を得ることができる。また、(2),(3)式からも分かるように、迂回率および相関係数は対象道路網の拡大縮小に対して不変である。すなわちスケールにはよらず決定される値であることに留意されたい。

3. 迂回率の算出方法

本稿では以下の仮定を設ける。まず、移動の起終点は道路網上で一様に分布するものとする。実際の交通では移動が一様に発生集中することはないのだが、空間としての道路網の性質をとらえるために発生・集中が一様であると仮定したうえで正確な結果を得ることを目的とする。さらに、道路網はすべて直線のリンクからなるもの

とする。現実の道路網を考えた場合には直線の道路は少ないと思われるが、これを折れ線近似することにより精度の高いネットワークデータを構築できる。また本研究における移動はすべて最短距離によって行われることにする(以後「経路」とは最短経路を意味する)。

さて、ネットワーク上のあらゆる2点に関する $E[X], E[Y], E[X^2], E[Y^2], E[XY]$ の5つを計算するために、ネットワークで発生集中するすべての移動をもれなく捉えたいわけだが、それには田村・腰塚⁵⁾による場合分けアルゴリズムを利用する。この方法によると、第一段階ではネットワーク上の移動を次の2つの場合に分ける。

(1) 移動の発生集中点在同一リンクにある場合

(2) 移動の発生点と集中点異なるリンクにある場合

第二段階では(2)の場合について、すべてのリンクの組み合わせに対して以下の操作を行う。ある一つのリンクを e_1 、その両端のノードを v_1, v_2 とし、もう一つのリンクを e_2 、その両端のノードを v_3, v_4 とする。 v_1 から e_2 上の地点 x までの移動を考えると、 v_1 から v_3 を経由したときと v_4 を経由したときとで、 x までの到達距離が等しくなる地点 x' (以降このような点を v_1 の「対心点」と呼ぶ)が e_2 上に存在する場合がある。対心点が存在すれば、その位置に新たにノードを挿入しリンクを分割する。 v_1 および v_2 それぞれに対心点が存在する可能性があるため、一つのリンクには高々2つの対心点が存在し、リンクは高々3つのリンクに分割される。以上の操作によって得られる細分化されたすべてのリンクの組み合わせは、対心点の性質から、

(2-i) リンク間の経路が1つだけしかない場合

(2-ii) 長さの等しいリンクの両端ノード間に長さの等しい2つの経路が存在する場合

のいずれかになる。

以上の場合分けにより、ネットワーク上のあらゆる2点間の道路距離の総和、二乗和、直線距離の総和、二乗和、道路距離と直線距離の積和をそれぞれを計算する。

以下でそれぞれの場合における計算方法を定式化する。

3.1. 場合(1)

長さ ℓ の数直線上に2点 u, v を考える。このとき、2点間の道路距離と直線距離は一致し、 $X = Y = |u - v|$ である。したがってすべての2点間の距離について、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y] \\ &= \int_0^\ell \int_0^\ell |u - v| du dv / \ell^2 = \frac{1}{3} \ell \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[Y^2] = E[XY] \\ &= \int_0^\ell \int_0^\ell (u - v)^2 du dv / \ell^2 = \frac{1}{6} \ell^2 \end{aligned} \quad (5)$$

3.2. 場合 (2-i)

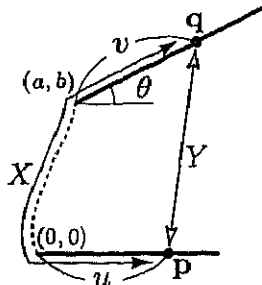


図 2: 場合 (2-i) 経路が 1 つの場合

2つのリンクの長さをそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 、リンク間にある経路の長さを d とする。図2のように、一方のリンクの端点のうち経路と接続している側を原点にとる。そのリンクに沿って x 軸を正の向きに設定する。また、もう一方のリンクは端点(座標 (a, b))で経路に接続し、そこから角度 θ の方向に伸びているとする。このとき最初のリンク上の点 p の座標を原点からの距離を u として $(u, 0)$ と置く。また第二のリンク上の点 q の座標は、点 (a, b) からの距離を v とすると $(a + v \cos \theta, b + v \sin \theta)$ となる。従って2点 p, q の道路距離と直線距離はそれぞれ

$$X = u + v + d \quad (6)$$

$$Y = \sqrt{(a + v \cos \theta - u)^2 + (b + v \sin \theta)^2} \quad (7)$$

と記述できる。このとき、これらのリンクペアに限定したときの期待値 $E[X], E[Y], E[X^2], E[Y^2], E[XY]$ はそれぞれ

$$E[X] = \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} X du dv / \ell_1 \ell_2 \quad (8)$$

$$E[X^2] = \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} X^2 du dv / \ell_1 \ell_2 \quad (9)$$

$$E[Y] = \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} Y du dv / \ell_1 \ell_2 \quad (10)$$

$$E[Y^2] = \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} Y^2 du dv / \ell_1 \ell_2 \quad (11)$$

$$E[XY] = \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} XY du dv / \ell_1 \ell_2 \quad (12)$$

と表現される。これらのうち解析的に計算できるのは

$$E[X] = \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2 + 2d) \quad (13)$$

$$E[X^2] = \frac{1}{6}\{2(\ell_1 + \ell_2 + 2d)^2 - 2(\ell_1 + d)(\ell_2 + d) + \ell_1 \ell_2\} \quad (14)$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{3}\ell_1^2 - a\ell_1 - \frac{1}{2}\ell_1 \ell_2 \cos \theta + \frac{1}{3}\ell_2^2 + 2a\ell_2 \cos \theta + 2b\ell_2 \sin \theta + a^2 + b^2 \quad (15)$$

の3つである。残りの $E[Y], E[XY]$ については解析的に積分できないため、数値計算により求めることにする。

3.3. 場合 (2-ii)

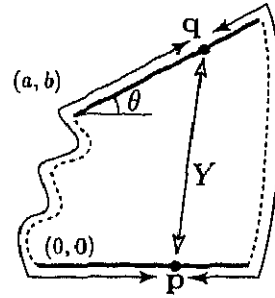


図 3: 場合 (2-ii) 経路が 2 つある場合

この場合を図示すれば図3のようなになる。リンクの長さを ℓ 、経路の長さを d とする。この場合には先ほどと異なり、道路距離に関して移動経路が2通り考えられるので、そのうち距離の短い方をとるものとする。つまり

$$X = \min\{u + v + d, 2\ell - u - v + d\} \quad (16)$$

となる。この場合も求めたい期待値のうち解析的に計算できるのは以下の3つだけである。残りの期待値については、やはり数値積分により求める。

$$E[X] = \frac{2}{3}\ell + d \quad (17)$$

$$E[X^2] = \frac{1}{2}\ell^2 + \frac{4}{3}\ell d + d^2 \quad (18)$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{3}\ell^2 - a\ell - \frac{1}{2}\ell^2 \cos \theta + \frac{1}{3}\ell^2 + 2a\ell \cos \theta + 2b\ell \sin \theta + a^2 + b^2 \quad (19)$$

4. 計算例

今まで述べてきた方法に基づいて実際に計算を行う。なお解析的に積分できない部分の数値計算だが、本稿における計算ではリチャードソン補外⁶⁾など参照を用いた数値積分プログラムをC言語により作成し使用した。

4.1. セクター間の移動

ここでは、迂回率及び相関係数の基本的性質を考察するために単純化したモデルにおいて分析する。

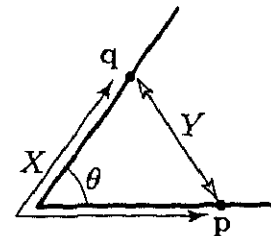


図 4: 長さが等しく接する道路

図4のように長さの等しい2本の道路が片方の端点を接し、角度 θ で向き合っているものとする。これは図2の特殊な場合といえる。このとき2つの道路間の移動を分析する。

道路距離と直線距離の迂回率を求めた結果を図5に、相関係数を求めた結果を図6に示す。迂回率のグラフを見ると $\theta = 0$ のときは迂回率は2となる。角度が小さいところで少し迂回率が大きくなるが角度が開くにつれ減少し、 $\theta = \pi$ では2つの道路が直線になるので道路距離と直線距離が一致し迂回率は1となる。また相関係数は $\theta = 0$ のときには無相関であり、角度が開くにつれて相関係数が大きくなり、 $\theta = \pi$ ではやはり2つの道路が直線になるので完全に相関する。またこれらの結果は道路の長さには依存しない。

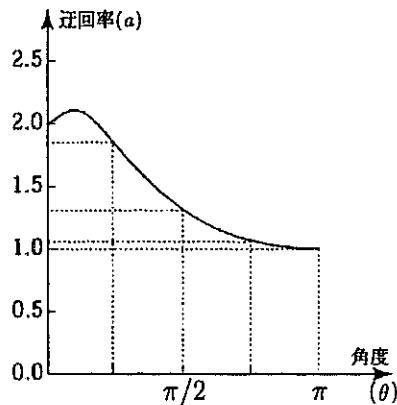


図 5: 2本の道路がなす角度と迂回率

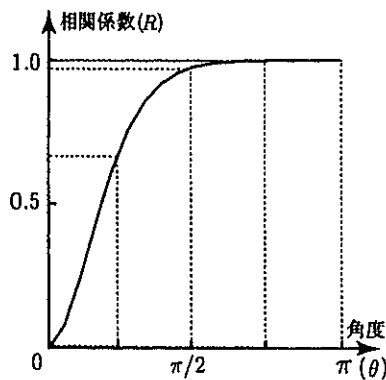


図 6: 2本の道路がなす角度と相関係数

これを、少々強引だが、東京圏において東京から放射状にのびる高速道路だと見なそう。高速道路のみを利用して移動する状況を考える。したがって、例えば常磐道の土浦から関越道の熊谷へ移動するときも、常磐道から一度都心へ入り関越道へ乗り換えて行くことを考える。先に述べたように迂回率・相関係数は道路の長さとは無関係であるので、対象とする範囲は特に定めない。常磐道と東北道との間の角度 θ はおよそ 45° である。同様に、常磐道と関越、中央、東名の各高速道路とがなす角度はそれぞれおよそ、 95° 、 135° 、 180° になっている(図7)。これらの角度における計算結果は図5と図6から求められ、これを表1に示す。これを見ると、常磐道から



図 7: 東京周辺高速道路網

見たとき、東名道や中央道では迂回率が小さいが、直線距離と比較して道路距離が関越道では1.32倍、東北道では1.85倍にもなる。このように、角度が小さい高速道路間の移動ではかなり遠回りをすることになるので、高速道路の速度性、安全性、誘導性等において十分な効果が得られないならば高速道路が利用しにくいことが分かる。

表 1: 常磐道との迂回率と相関係数

	東北道	関越道	中央道	東名道
迂回率	1.851	1.318	1.069	1.000
相関係数	0.692	0.975	0.999	1.000

ところで、今まで迂回率と相関係数のみを考察してきたが、実際には道路距離と直線距離はどのように関係しているのだろうか。この関係を見るために散布図を示すが、すべての移動に関する散布図を描くと図が塗りつぶされてしまい分布の様子が分からないため、道路上にいくつかの代表点を取りそれらの間の移動についてのみ点をプロットする。今回は片方の道路上に0から1まで等間隔に0.1刻みで11個の点を、もう片方の道路には0.01刻みで101点をとった。

$\theta = 45^\circ$ の場合において、横軸に直線距離をとり縦軸に道路距離をとった平面に $11 \times 101 = 1111$ 点をプロットしたものが図8である。また3節で示した方法により求められた回帰直線も同時に示してある。図8を見ると、全体としては三角形状に分布していることが分かる。ま

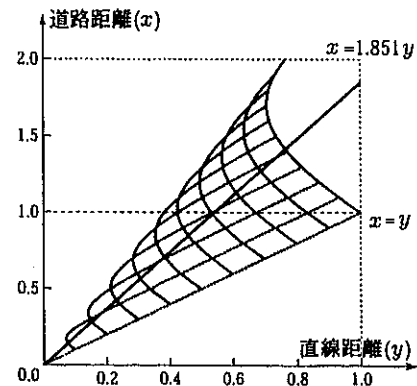


図 8: 道路距離と直線距離のプロット図

た、点集合が11本の曲線の軌跡を描いているように見える。これらは片方の道路にある点を固定し、もう片方の点を0から1まで連続的に動かしたときの軌跡である。これらの軌跡は、 p を固定したときには

$$y = \sqrt{x^2 - 2u(1 + \cos \theta)(x - u)} \quad (20)$$

という関数になっている。さらに x/y (直線距離に対する道路距離の比)が最も大きい点を線で結ぶと直線になりそうである。以下では x/y が最大となる点はどのような点なのか調べる。

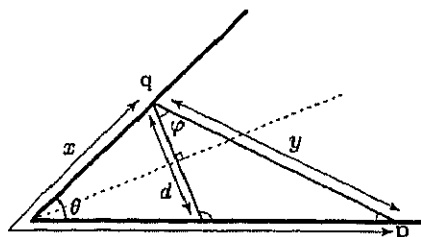


図9: モデル図

図9のように記号をそれぞれ定義する。そうすると、正弦定理など初等的幾何計算から

$$y = \frac{\cos(\theta/2)}{\cos\{(\theta/2) + \varphi\}} d \quad (21)$$

$$x = \frac{1}{\sin(\theta/2)} d + \frac{\sin \varphi}{\cos\{(\theta/2) + \varphi\}} d \quad (22)$$

となる。これより道路距離と直線距離の比は

$$\frac{x}{y} = \frac{\cos \varphi}{\sin(\theta/2)} \quad (23)$$

となる。よって、道路距離と直線距離の比が最大になるのは $\cos \varphi = 1$ 、つまり $\varphi = 0$ のときであることが分かる。これは、道路のなす角の二等分線と道路上の2点 p, q を結んだ線が、直角に交わるような場合である。また、 x/y のとりうる範囲は1から $1/\sin(\theta/2)$ までであることも分かる。 θ が大きくなるにつれ、 x/y のとりうる範囲は狭くなり、図8のような空間においてよりまとまって分布するようになる。このことは、 θ が大きくなると迂回率が下がり相関係数が上がるという先の結果と一致する。

4.2. 都市道路網における分析例

ここでは実際の都市道路網において迂回率を算出、比較する。対象とするのは大澤⁷⁾によって考察された筑波研究学園都市(以後「筑波」と呼ぶ)と、ベルギーのルーバン・ラ・ヌーブ(以後「新ルーバン」と呼ぶ)である。新ルーバンは1970年代初めに建設された研究学園都市であり、規模、建設時期など筑波との共通点も多い⁷⁾など。しかし道路網には決定的な違いがある。図10と図11に2つの対象道路網の形状を、表2に地域面積、道路延長、道路密度(=道路延長/地域面積)の値を示す。

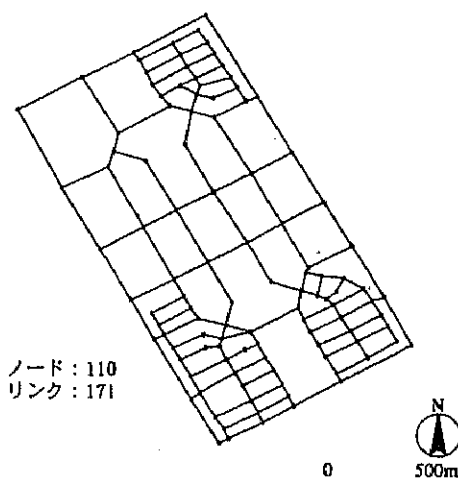


図10: 筑波中心部道路網

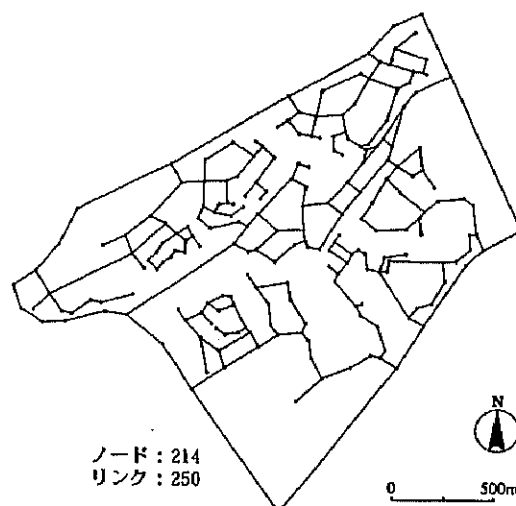


図11: 新ルーバン中心部道路網

図10と図11を比較すると分かるように、両者の道路網の設計思想が異なることが見て取れる。筑波の道路網はグリッドパターンに近く、できるだけ交通をスムーズに流そうとしているのに対し、新ルーバンでは通過交通排除や自動車交通の徒歩へのシフトを目指し、目的地まで移動するのに大きく迂回しなければならない。つまり、都市内では自動車による移動のメリットが少なく、結果として自動車利用を抑制するような道路網構造になっている。表3に、この2つの道路網における、あらゆる2点間の直線距離と道路距離に関する相関係数と迂回率を示す。この結果から、新ルーバンの方が道路距離と直線距離の関係にばらつきがあり、迂回率もかなり高いことが分かる。

表2: 対象道路網の基本指標

	地域面積	道路延長	道路密度
筑波	1.75km ²	23.93km	13.67/km
新ルーバン	2.92km ²	29.90km	10.24/km

表 3: 相関係数・迂回率の比較

	迂回率	相関係数
筑波	1.25	0.97
新ルーバン	1.74	0.71

ところで表 2 を見ると、新ルーバンに比べて筑波の方が道路密度が高いことが分かる。腰塚・小林¹⁾によるノード間移動の分析では、ある一つの対象地域において道路延長が増えるほど迂回率が下がる様子が見られる。今回の分析結果にこの道路密度の差が影響している可能性も考えられる。

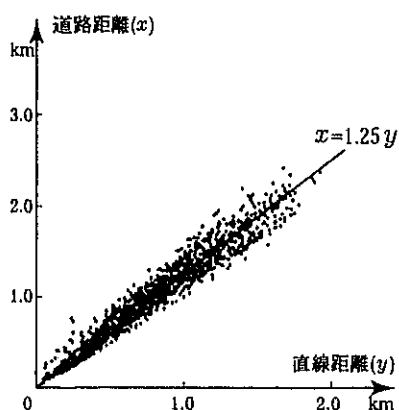


図 12: 道路距離と直線距離 (筑波)

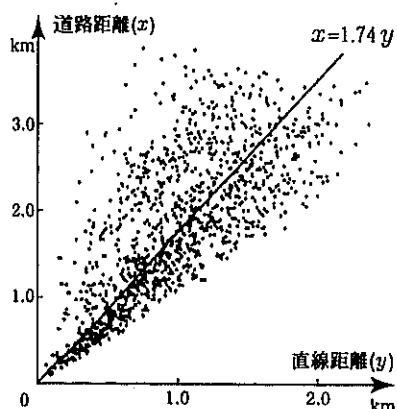


図 13: 道路距離と直線距離 (新ルーバン)

ここでもまた 4.1 節のようにネットワーク上に離散に点を配置することで、それらの点間の道路距離と直線距離の関係を見ることにする。図 12 及び図 13 は、対象とするネットワーク上に 50 点を配し、すべての 2 点のペア (${}_{50}C_2 = 1225$ 通り) についてプロットしたものである。ネットワークをリンクごとに分割し一列につながるよう適当な順番で並べ、その長さがネットワーク総延長となる数直線上で、代表点を等間隔になるように 50 点とった。この点の数 50 はリンク数に比べて小さく、代表点のないリンクが数多く存在していることになる。しかし 500 点

をとった場合も分布の傾向が同じであったので、図中の点が判別できる 50 点の場合を例示する。さらに散布図と同時に、3 節に示した方法により求められた回帰直線を示してある。

筑波では相関係数が 0.97 という結果からも分かるように、直線の周りに点が集まっている。このことを迂回することのコストという面から考えると、すべての人がその目的地までの直線距離に応じて一定割合のコストを負担しているという意味において公平性・平等性が高いと言えるかもしれない。それに対して新ルーバンではかなりばらついている。つまり同じ直線距離でも、その人あるいは目的地によって迂回距離が様々である。

5. おわりに

都市図を眺めていると都市道路網の設計思想がある程度読みとることができる。本稿では、その中でも特に「どの程度迂回させられるか」ということに着目し分析を試み、道路網によって一意に定まる客観的かつ定量的な指標として「迂回率」を提案した。また筑波と新ルーバンの比較においては、この指標が直感にも合致することを示した。実際のニュータウン計画や市街地再開発等において道路網を計画する際の補助として、このような客観的に評価する指標が有用なのではないだろうか。

また冒頭でも述べたが、迂回を少なくすることと通過交通を排除することは本来的に相反するものである。このトレードオフの關係に着目し、本研究で提案した迂回率と田村・腰塚⁵⁾による流動量分布の 2 つの指標を用いて道路網を評価することが可能であり、現在研究中である。

謝辞

匿名の査読者には貴重なコメントを頂き感謝いたします。また本研究の一部は文部科学省科学研究費 [基盤研究 (B)(2)(課題番号:12480103)] の補助を受けた。

参考文献

- 1) 腰塚武志, 小林純一 (1983): 道路距離と直線距離. 日本都市計画学会学術研究発表会論文集, pp.43-48.
- 2) 堀井雅史 (1996): 迂回度を用いた自然災害時における道路網の代替機能に関する評価方法. 日本都市計画学会学術研究論文集第 31 号, pp.769-774.
- 3) Okabe, A., Yomono, H., and Kitamura, M. (1995): Statistical Analysis of the Distribution of Points on a Network. *Geographical Analysis* 27, pp.152-175.
- 4) 奥貫圭一, 岡部篤行 (1996): 空間相互作用モデルを用いた道路ネットワークにおける店舗売り上げ推定法. 日本都市計画学会学術研究論文集第 31 号, pp.49-54.
- 5) 田村一軌, 腰塚武志 (2000): 道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究. 日本都市計画学会学術研究論文集第 35 号, pp.1021-1026.
- 6) 伊理正夫, 藤野和建 (1985): 数値計算の常識. 共立出版.
- 7) 大澤義明 (2000): 道路網から見た研究学園都市の比較. 日本建築学会大会学術講演梗概集 F-1, pp.613-614.
- 8) 田村一軌, 腰塚武志, 大澤義明 (2000): ネットワーク上の道路距離と直線距離. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.234-235.

連続的利用者分布とネットワーク単一施設配置モデル

02302320 筑波大学 社会工学研究科 * 田村一軌 TAMURA Kazuki
 01102840 筑波大学 社会工学系 腰塚武志 KOSHIZUKA Takeshi
 01009480 筑波大学 社会工学系 大澤義明 OHSAWA Yoshiaki

1. はじめに

これまで道路網を利用した施設配置モデルでは、利用者がネットワークのノード(交差点)のみに存在すると考え分析することがほとんどであった。しかし現実の利用者はリンク(道路)に沿って存在しているとしたほうがよい場合も多い。そこで本稿では利用者がネットワーク上に連続的に分布する場合のネットワーク施設配置モデルを考察する。特にすべての利用者と施設との距離距離の総和を最小にする施設立地点(メディアン)と、施設から最も遠い利用者までの距離を最小にする施設立地点(センター)を求める方法を示す。

本稿では、利用者はネットワーク上で一様に分布するものとし、また距離はすべて最短距離であると仮定する。

2. ミニ・サム(メディアン)問題

ノード v_1, \dots, v_n リンク e_1, \dots, e_m からなるネットワーク N を考える。ネットワーク上の2点 x, y の間の距離を $d(x, y)$ と表す。このときミニ・サム問題は以下のように定式化できる。

$$\min_{z \in N} \phi(z) = \int_{x \in N} d(z, x) dx \quad (1)$$

Hakimi はネットワークのノードのみに施設利用者が存在するとき、メディアンは1つがノードにあることを示した(Hakimi の定理, 文献[1])。利用者がネットワーク上に一様に存在する場合には、この Hakimi の定理から以下の性質が成り立つ。

性質 メディアンはブリッジもしくはノードに存在する。
 証明 ブリッジでないリンク e に対し、その両端のノードを s, t とする。ネットワークから e を取り除いたとき、 s と t との間に必ず(最短)経路 P が存在する。 e と P によってサーキット C が形成される。 C にいる利用者だけに注目すると施設の位置は C 上で無差別である。 C 以外の利用者は施設まで到達するのに C 上にあるいずれかのノードを経由するので、Hakimi の定理より最適点はノードに存在する。結局、 C 上にあるノードが e 上の任意の点より優れる。□

この性質をもとに以下の多項式算法が提案できる。ブリッジであるリンク e の両端のノードを s, t 、 $d(s, t) = \ell$ とする。 e を除去したとき s と連結する利用者数を w_s 、 t と連結する利用者数を w_t とすると、

$$w_s + x = \ell - x + w_t \quad (2)$$

を満たす $x(0 \leq x \leq \ell)$ が存在すれば x が最適点となる。他の場合には、すべてのノードで目的関数 $\phi(z)$ を評価し、値が最小となるノードがメディアンとなる。

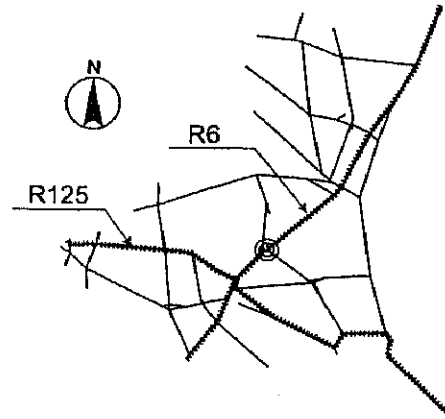


図 1: 茨城県国道網

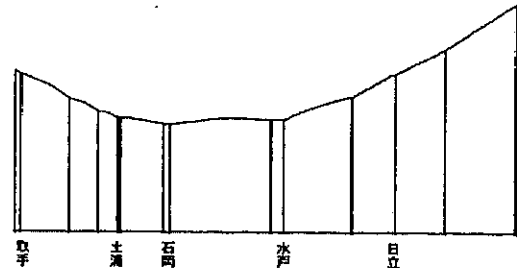


図 2: 国道 6 号における目的関数値

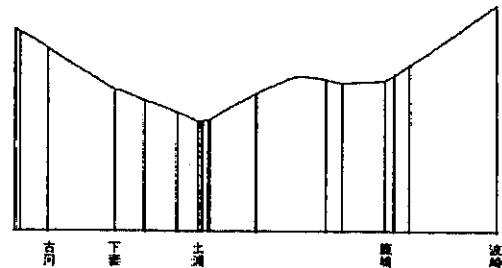


図 3: 国道 125 号における目的関数値

次に実際の道路網を用いた計算例を示す。図 1 は茨城県内の国道からなるノード数 82 およびリンク数 108 のネットワークである。上記の算法により求められたメディアンは図中◎で示す地点(石岡市付近)になった。また茨城県内を縦断する 6 号線と横断する 125 号線をそれぞれ取り出し、目的関数 $\phi(z)$ の変化を表したものが図 2, 図 3 である。これを見ると、 $\phi(z)$ は全体としては下に凸の関数のような傾向を示しているが、細かく見るといくつかのリンク上では上に凸となるのが見て取れる。

3. ミニ・マックス (センター) 問題

ミニ・マックス問題は以下のように定式化できる.

$$\min_{z \in N} \phi(z) = \max_{x \in N} d(z, x) \quad (3)$$

この問題の最適点は絶対センターと呼ばれ, ノードのみに利用者が分布するときの解法としては Kariv and Hakimi の解法が知られている (文献 [2]). この方法は, 各リンクに対し最遠ノードまでの距離を最小にする地点 (局所的最適点) を求め, 最終的に (大域的) 最適点を得るものである.

利用者がネットワーク上に連続的に分布する場合にもこの解法を応用した以下の多項式算法が提案できる.

リンク e_i 上の点 z からみて, e_j 上の点の中でもっとも遠い地点までの距離 $\psi_j(z)$ を求める.

$$\psi_j(z) = \max_{x \in e_j} d(z, x) \quad (4)$$

これをすべての j について求め, 1 つの図中に重ね描いた上で, それらの上側包絡線をとればそれが e_i における $\phi(z)$ である. つまり

$$\phi(z) = \max_j \psi_j(z) \quad (5)$$

である. これをすべてのリンクについて求め, ネットワーク全体の中で $\phi(z)$ が最小となる地点 z を見つければそれが絶対センターである.

さて, $\psi_j(z)$ の求め方だが, e_i と e_j の組み合わせによっていくつかの場合分けが必要となる. e_i 上の点を x , e_j 上の点を y とするとき, x と y の位置によって移動経路が異なってくるためである. その場合分けは文献 [4] による方法を応用することができる. これによると, リンクの組み合わせはその間に存在する経路の数などによって5つの場合にに分けられるが, 組み合わせごとにうまくリンクを細分化することで次の2つのパターンに帰着できることが分かっている. 1つはリンク間の経路が1つしかないもの, もう1つは互いに長さの等しいリンクの両端間が互いに長さの等しい経路で結ばれているものである.

図4, 図5はそれぞれ2つのパターンにおける2リンクの関係とその時の $\psi_j(z)$ の形状を図示したものである. 図4の場合には $s-t$ 間のすべての地点において最遠点は u であるので, このときの $\psi_j(z)$ は $\psi_j(s) = d + l_2$ から線形で増加し $\psi_j(t) = d + l_1 + l_2$ となるような関数になる. 一方図5の場合には, $s-t$ 間の任意の地点 x において s, t どちらを経由しても等距離になる点 x' が存在し, かつこれが x からみて最遠点である. この場合の $\psi_j(z)$ は $\psi_j(x) = d + l$ で一定である.

細分化したリンクをもとに戻すと, 1つのリンクに対する $\psi_j(z)$ は図4, 図5の $\psi_j(z)$ を組み合わせた形にな

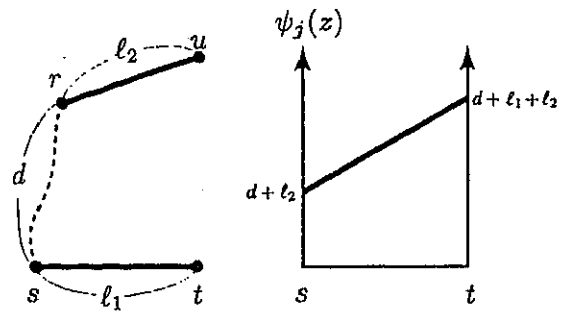


図4: パターン1の $\psi_j(z)$

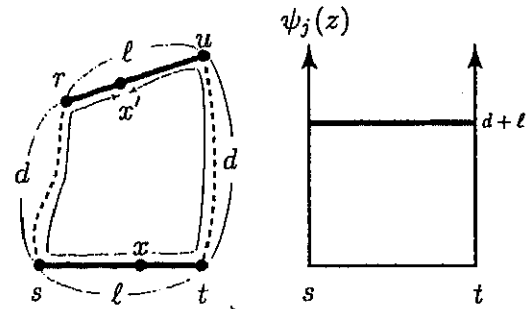


図5: パターン2の $\psi_j(z)$

る. その結果得られる $\psi_j(z)$ の形状を図6に示す. これらの例から $\psi_j(z)$ は区間的線形となる, したがって $\psi_j(z)$ の上側包絡線も区間的線形となり, 最小値が多項式時間で導出できる.

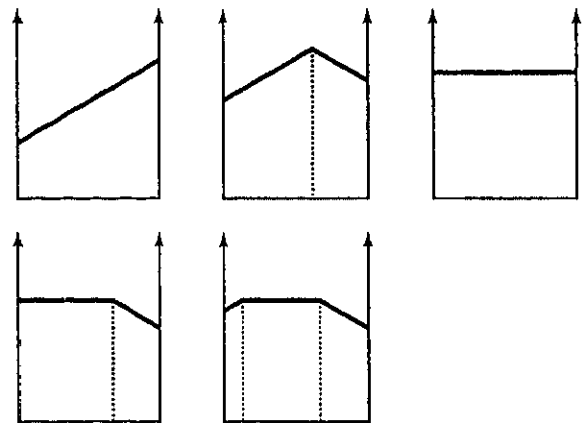


図6: $\psi_j(z)$ の形状

参考文献

- [1] Hakimi, S.L. (1965): Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems. *Operations Research*, 13, pp.462-475.
- [2] Kariv, O. and S.L. Hakimi (1979): An Algorithmic Approach to Network Location Problems, I: The p -Centers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37, pp.513-538.
- [3] 日本建築学会編 (1992): 建築・都市計画のためのモデル分析の手法. 井上書院.
- [4] 田村一軌, 腰塚武志 (2000): 道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究. 日本都市計画学会学術研究論文集第35号, pp.1021-1026.

省エネルギー直方体都市のプロポーシオン解析

— 沙漠の摩天楼シバムの数理解 —

PROPORTION ANALYSIS FOR ENERGY-SAVING RECTANGULAR CITY

— Mathematical evaluation of the proportion of Shibam, the skyscraper in desert —

栗田 治*, 腰塚 武志**

Osamu KURITA and Takeshi KOSHIZUKA

In this study, we consider the proportion of a rectangular city consisting of buildings which locate on dense lattice points. Each travelling route is supposed to consist of vertical route in building(s) and recti-linear route on the surface of the earth. The study is to find the shapes of the city which minimizes three values: (i) the average; (ii) the variance; (iii) the maximum value, of travelling time of residents. For many-to-many uniform trip pattern and many-to-one uniform trip pattern, the optimal proportions are derived. After deriving the mathematical results, we apply it to evaluate an existing rectangular city, Shibam, famous skyscraper in a desert in Yemen. To our surprise, the proportion of Shibam is almost equal to the optimal solution derived from our mathematical programming model.

Keywords : proportion analysis, rectangular city, average travelling time, optimization, Shibam

プロポーシオン解析, 直方体都市, 平均移動時間, 最適化, シバム

1. はじめに

昨今, 都心部における容積率の緩和が頻繁に議論されている。限られた都市平面を有効に利用するために3次元的な都市を構築しようという訳である。確かに高い地代に見合った容積を確保することは経済学的・経営学的に必要とされる方策ではあろう。しかし, 都市の3次元化を議論するためには, 移動に関わるエネルギー消費を冷静に記述するモデルが必要である。

都市の人口を一定とし(すなわち都市の体積を一定とし), 高層化の功罪を考えてみよう。まず縦方向の移動に費やす時間を見れば, 低層建築物よりも高層建築物のほうが不利である。しかし, 地表での移動に費やす時間を見れば, 高層建築物をコンパクトにまとめておくほうが有利である。つまり“都市の高層化”⇒“垂直移動時間の増加”かつ“地表の移動時間の減少”なる因果関係が存在することが分かる。省エネルギーの都市構造を解明するには, これに正面から光を当てねばならないのである。

このことを解析的なモデルで取り扱った研究に文献1)がある。文献1)は都市の底面積とビル高さを乗じた“都市の体積”を一定として, 都市内で一様な2点間の平均所要時間を最小化する形状を求めた。本論文の場合, 現実の都市プロポーシオンを解析する場合を想定して建坪が都市面積に占める率を明示的に取り上げてモデルの再

定式化を行う。そして特に, 都市プロポーシオンを最適に設定したとき, 都市人口が移動エネルギー消費に如何に効くかを議論した(3.1節)。さらに, トリップ毎の所要時間の公平性を追求するモデルをも定式化し(3.2, 3.3節), 都市設計における最適化規準の役割を議論する。

本モデルは後述する通り, ビル群全体を1つの直方体と見做し, 移動の端点をこの直方体内の一様な点で与えた。そして全ての端点の間で一様にトリップが発生すると想定している。この大胆な仮定は, 2つの点でモデルを現実から乖離させることになる。その第一は, 1つのビル内で閉じた移動が分析の枠組みに入っていない点である。しかし後述する通り, 全体のトリップ数に対するビル内々トリップ数のオーダーはビル数の逆数で押さえられるため, この乖離はあまり気にせずともよい。第二の現実からの乖離は, 距離の増加によるトリップ数の減衰を考慮していない点にある。すなわち本モデルは, この距離による減衰を考慮せずともよい“コンパクトな”都市を対象として適用されるべきものである。ビル数が多いコンパクトな都市を想定する限りにおいては, 本モデルは現実から過度に懸隔したものではないものと思われるのである。なお距離による減衰を考慮した研究としては, 無制約型の指数型重力モデルを導入して都市プロポーシオンを追求した文献2)がある。

* 慶應義塾大学大学院理工学研究科 助教授・学博
** 筑波大学社会学系 教授・工博

Assoc. Prof., Graduate School of Science and Technology, Keio University, Ph.D.
Prof., Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Dr. Eng.

なお、本モデルは、冒頭に述べた内容の通り、元々は先進諸国におけるオフィス都市のプロポーショナルを論ずるために定式化されたものであり、これに関する分析の可能性は文献1)に詳述されている。本論文ではこれとは異なる立場で、むしろ歴史的な都市に焦点を当て、都市や建築の成り立ちを理解するための補助線として数理モデルを適用する可能性を探ってみたい。具体的には、イエメンの古都として有名な高層都市シバム(Shibam)に注目する。この沙漠の摩天楼として知られるコンパクトな古都が、本研究の提唱する最適プロポーショナルにかなり近い形態を有していることは誠に興味深い事実である(4節)。私達はそこに、イスラーム圏における沙漠の民が暗黙の裡に行い得た合理的設計を垣間見ることができるのである。

2. モデルの設定と数学的準備

2.1 設定

図1の如くに、底面が一边 L [m] の正方形で、ビル高さが一律に H の直方体オフィス都市を考える。都市内には規則正しく正方格子状の道路が敷設され、ビルも格子の中心に規則正しく配置されているものと想定しよう。ここで都市面積に建坪が占める率を η とすると、ビル体積の総和は $\eta L^2 H$ [m³] である。さらにビル内の人口密度を ξ [人/m³] とすると、都市人口 P は次式で与えられる：

$$P = \xi \eta L^2 H. \quad (1)$$

都市内の移動は、ビル内のある高さから別のビル内のある高さへ、というパターンで発生する。人口はビルの高さに依らず一様であるとしよう(なお、この条件を緩和するために奥平のエレベータ容量モデル³⁾を導入した研究もある⁴⁾)。さらに都市内にビルが稠密に存在するものと想定することにより

トリップの始・終点が直方体内で一様に分布すると仮定する。このトリップにおいて、地表ではRecti-Linear距離の移

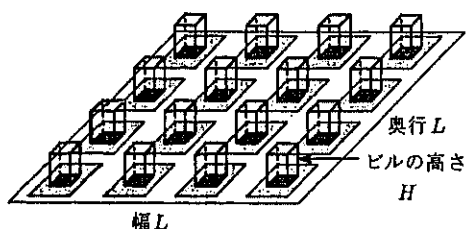


図1 格子状に配置されたビル群

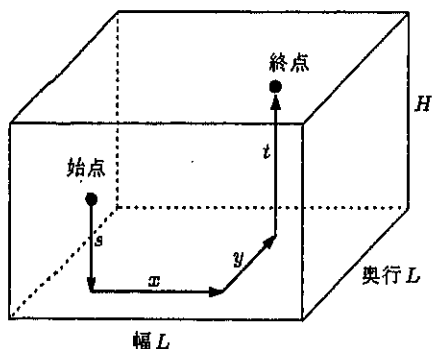


図2 $L \times L \times H$ の直方体都市における移動の様子

動がなされるものとしよう。図2にある通り、高さ s の地点から地表まで降り、地表を $x+y$ だけ移動し、最後に高さ t の点まで上る訳である。以下では、まず地表の距離の分布(2.2節)ならびに垂直移動の分布(2.3節)を導出する。続いて、3節で都市内移動に関する規準を設けてプロポーショナルを決定するための最適化問題を定式化し、吟味を加える。

2.2 地表でのトリップ距離の分布

2.2.1 1次元における2点間の距離分布

Recti-Linear距離の分布を導く前段として、長さ L の線分領域上で一様な2点の間の距離 x に着目し、その確率密度関数を導出しておこう。そのために長さ L の線分上で、トリップの始点 x_1 と終点 x_2 とが分布している場合を考える。2点間のトリップ密度を $\rho(x_1, x_2)$ とすると

$$\rho(x_1, x_2) = 1/L^2, \quad (x_1, x_2) \in [0, L]^2 \quad (2)$$

である。区間 $[x_1, x_1 + \Delta x_1]$ から区間 $[x_2, x_2 + \Delta x_2]$ への移動者数は $\rho(x_1, x_2) \Delta x_1 \Delta x_2 = \Delta x_1 \Delta x_2 / L^2$ で与えられることに注意せられたい。このとき2点間の距離、すなわち

$$x = |x_1 - x_2| \quad (3)$$

の密度を準備しておこう。そのために関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \begin{aligned} & \text{[距離が } x \text{ 以下のトリップ数(移動者数)} \\ & \text{が全トリップ数に対して占める率]} \end{aligned} \quad (4)$$

と定義し(すなわち x の累積分布関数)、これを導きたい。距離が x 以下であるためには

$$|x_1 - x_2| \leq x \Leftrightarrow x_2 \leq x_1 + x \text{ かつ } x_2 \geq x_1 - x \quad (5)$$

であればよい。これに対応する領域を (x_1, x_2) の直交座標の領域 $[0, L]^2$ 内部にとると、図3の六角形部分になる。

したがって $F(x)$ は次式の通り：

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{|x_1 - x_2| \leq x} \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{L^2} \int_{\text{図2の六角形領域}} dx dy \\ &= \frac{2Lx - x^2}{L^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

これを微分したものが x の確率密度 $f(x)$ である：

$$f(x) = \frac{2}{L^2}(L - x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (7)$$

この様に単調減少の線形関数となる。その形状から、 $f(x)$ は三角分布と呼ばれる(図4)。 y の分布 $g(y)$ も全く同様に得られることは言うまでもない。ちなみに x の期待値 $\langle x \rangle$ ならびに分散 σ_x^2 を算出すると次の通りである：

$$\langle x \rangle = \frac{L}{3} \quad (8)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{L^2}{18}. \quad (9)$$

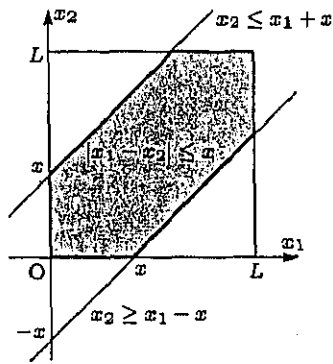


図3 $|x_1 - x_2| \leq x$ を満たす六角形領域

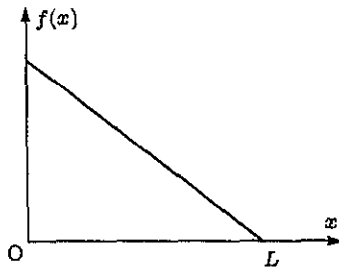


図4 区間 $[0, L]$ 上の2点間距離 x の確率密度関数

2.2.2 地表での移動距離 $r = x + y$ の分布

x と y が独立であるとき、その同時密度は前節の結果に基づき

$$f(x)g(y) = \frac{4}{L^4}(L-x)(L-y) \quad (10)$$

となる。したがって、 $r = x + y$ の累積分布関数を $\Phi(r)$ とすれば、次の通りに定式化できる：

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \text{Prob.}\{x+y \leq r\} \\ &= \frac{4}{L^4} \int_{x+y \leq r} (L-x)(L-y) dx dy \end{aligned} \quad (11)$$

この結果は、次式の如くに r の値によって場合分けして記述される：

$$\Phi(r) = \frac{r^2}{6L^4}(r^2 - 8Lr + 12L^2) \quad (0 \leq r < L \text{ のとき}) \quad (12)$$

$$= 1 - \frac{1}{6L^4}(r-2L)^4 \quad (L \leq r \leq 2L \text{ のとき}). \quad (13)$$

これを微分すれば r の確率密度関数が得られる：

$$\phi(r) = \frac{2r}{3L^4}(r^2 - 6Lr + 6L^2) \quad (0 \leq r < L \text{ のとき}) \quad (14)$$

$$= \frac{2}{3L^4}(2L-r)^3 \quad (L \leq r \leq 2L \text{ のとき}). \quad (15)$$

確率密度関数 $\phi(r)$ の概形を図5に示す ($L = 10$ とおいた)。また、 r の期待値 $\langle r \rangle$ ならびに分散 σ_r^2 を算出すると次の通りである：

$$\langle r \rangle = \frac{2L}{3}, \quad (16)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{L^2}{9}. \quad (17)$$

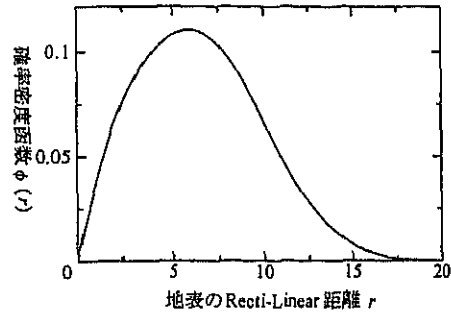


図5 地表の Recti-Linear 距離 r の確率密度関数 ($L = 10$ の例)

2.3 垂直方向のトリップ距離の分布

トリップ端点は地表から距離 s ならびに t の位置にある。 s の確率密度関数を $p(s)$ とし、 t の確率密度関数を $q(t)$ とすれば、端点の一樣性の仮定から

$$p(s) = \frac{1}{H} \quad (0 \leq s \leq H), \quad (18)$$

$$q(t) = \frac{1}{H} \quad (0 \leq t \leq H) \quad (19)$$

である。これより同時密度は

$$p(s)q(t) = \frac{1}{H^2} \quad (0 \leq s \leq H, 0 \leq t \leq H) \quad (20)$$

である。

以上に基づいて、垂直方向の移動 $u = s + t$ の累積分布関数を $\Psi(u)$ として定式化する：

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \text{Prob.}\{s+t \leq u\} \\ &= \frac{1}{H^2} \int_{s+t \leq u} ds dt. \end{aligned} \quad (21)$$

この積分は次のように場合分けして記述できる：

$$\Psi(u) = \frac{u^2}{2H^2} \quad (0 \leq u < H \text{ のとき}) \quad (22)$$

$$= 1 - \frac{(2H-u)^2}{2H^2} \quad (H \leq u \leq 2H \text{ のとき}). \quad (23)$$

これを微分して u の確率密度関数を得る：

$$\psi(u) = \frac{u}{H^2} \quad (0 \leq u < H \text{ のとき}) \quad (24)$$

$$= \frac{2H-u}{H^2} \quad (H \leq u \leq 2H \text{ のとき}). \quad (25)$$

このように2等辺3三角形の形の分布が得られた(図6)。その期待値と分散は次の通りである:

$$\langle u \rangle = H, \quad (26)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{H^2}{6}. \quad (27)$$

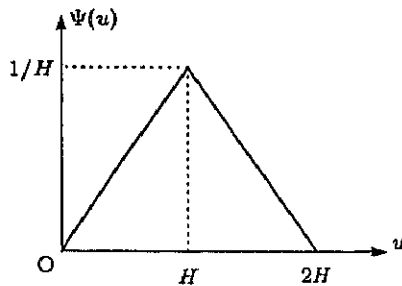


図6 垂直方向の距離 u の確率密度函数

3. 最適化問題

ここでは、都市の総人口を一定として、都市プロポーション(高さ-底辺比)を追求するための最適化問題を定式化し議論する。まず、文献1)と同様に平均トリップ時間最小化問題を記述する(3.1節)。この問題は、社会全体での総所要時間を最小化するのが等価だから、所謂社会的最適化問題と位置付けられる。ここで、個々のトリップに着目すると、その時間はある範囲に分布しており、1トリップ当たりの所要時間の公平性、という尺度からは、3.1節の解を無条件に受け入れることが出来ない場合もあるものと思われる。元よりこの公平性を完璧に実現することは不可能であるが、可能な限り高い水準でこれを達成するための努力は必要である。そこで本節では、そのための試みとして2つの問題を定式化する。すなわちトリップ時間の分散を最小化する問題(3.2節)とトリップ時間の最大値を最小化する問題(3.3節)である。これらにより、一面的な最適化標準ではなく多面的な標準で都市プロポーションの構造を解明することが可能となる。

3.1 平均所要時間最小化問題(minisum問題)

都市人口 P を所与として、都市内移動の総時間を最小化する形状(あるいはプロポーション)を決定する問題を定式化しよう。総時間を最小化するためには平均時間を最小化すればよい。いま地表での移動の速さを w とし、垂直方向の移動の速さを v とおく。このとき1トリップの所用時間を t とすると

$$t = \frac{r}{w} + \frac{u}{v} \quad (28)$$

である。地表での平均移動距離 $\langle r \rangle$ と垂直方向の平均移動距離 $\langle u \rangle$ は、各々 $2L/3$ ならびに H であった(2節より)。したがって1トリップ当たりの所要時間 t の平均値 $\langle t \rangle$ は

$$\langle t \rangle = \frac{\langle r \rangle}{w} + \frac{\langle u \rangle}{v} = \frac{2L}{3w} + \frac{H}{v} \quad (29)$$

で与えられる。こうしてminisum型の最小化問題が

$$\begin{aligned} \text{【問題1】} \quad & \text{Minimize } \langle t \rangle \\ & \text{subject to } P = \xi \eta L^2 H \end{aligned}$$

と定式化される。

解は次式の様に与えられる:

$$L^* = \left(\frac{3w}{v} \right)^{1/3} \left(\frac{P}{\xi \eta} \right)^{1/3}, \quad (30)$$

$$H^* = \left(\frac{v}{3w} \right)^{2/3} \left(\frac{P}{\xi \eta} \right)^{1/3}. \quad (31)$$

ここで H^* と L^* の比(すなわちプロポーション)を求めると

$$\frac{H^*}{L^*} = \frac{1}{3} \cdot \frac{v}{w} \simeq 0.333 \times (\text{垂直-地表速度比}) \quad (32)$$

を得る。すなわち、垂直方向速度と地表速度の比の3分の1というプロポーションが最適であるという明示的な結果が得られるのである。

この最適プロポーションの下での平均トリップ所要時間を t^* として記すと

$$\begin{aligned} t^* &= \langle t \rangle |_{L=L^*, H=H^*} \\ &= \frac{3^{1/3}}{w^{2/3} v^{1/3}} \cdot \left(\frac{P}{\xi \eta} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。全ての人の間に1回ずつのトリップが発生すると想定すると、トリップ数は人口 P の2乗である。これを平均値に乗じて総所用時間を算出すると

$$P^2 \cdot t^* = \frac{3^{1/3}}{w^{2/3} v^{1/3} (\xi \eta)^{1/3}} \cdot P^{7/3} \quad (34)$$

となる(なお、 P^2 には自分自身の間のトリップも含まれている)。

直方体都市を最適プロポーションで実現するとき

- 都市内の総所要時間は(地表速度) $^{2/3} \times$ (垂直方向速度) $^{1/3}$ に反比例する
- 都市内の総所要時間は収容すべき人口 P の $7/3$ 乗に正比例する

が成立するのである。前者は都市内交通の整備が省エネルギーや経済的効率に貢献する様子を示す。一方、後者は都市の人口規模の増加がエネルギー消費や経済損失に3分の7乗で影響することを示している。都市の人口規模拡大という現象には、こうした負の影響も内在しているのである。もっとも人口規模の拡大には良い効果もある(いわゆる規模の経済)。正・負両方の効果を併せ考えることが必要である。

3.2 所要時間の分散最小化問題(mini-variance問題)

1トリップの所用時間は

$$t = \frac{r}{w} + \frac{u}{v} \quad (28 \text{ 再})$$

と定義した。また地表距離 r の分散は(17)式の通り $\sigma_r^2 = L^2/9$ であり、垂直距離 u の分散は(27)式の通り $\sigma_u^2 = H^2/6$ である。したがって、 t の分散を σ_t^2 として算出すると次式を得る:

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma_r^2}{w^2} + \frac{\sigma_u^2}{v^2} = \frac{L^2}{9w^2} + \frac{H^2}{6v^2}. \quad (35)$$

表1 3つの問題の解に対応した平均所要時間・所要時間の標準偏差・所要時間の最大値における $\left(\frac{P}{\xi\eta}\right)^{1/3}$ の係数 $v^{1/3}w^{2/3}$

プロポーシオン	平均所要時間 $\langle t \rangle$	所要時間の標準偏差 σ_t	所要時間の最大値 t_{\max}
【問題1】の解 (L^*, H^*)	$3^{1/3} \approx 1.442$	$\frac{7^{1/2}}{2^{1/2}3^{7/6}} \approx 0.519$	$\frac{8}{3^{2/3}} \approx 5.040$
【問題2】の解 (L^{**}, H^{**})	$\frac{2+3^{1/2}}{3^{5/6}} \approx 1.494$	$\frac{1}{2^{1/2}3^{1/3}} \approx 0.490$	$\frac{2(1+3^{1/2})}{3^{1/3}} \approx 3.789$
【問題3】の解 (L^{***}, H^{***})	$\frac{7}{3 \cdot 2^{2/3}} \approx 1.470$	$\frac{11}{3 \cdot 2^{1/6}} \approx 0.492$	$2^{1/3} \cdot 3 \approx 3.780$

こうして所要時間の分散の最小化問題が

$$\begin{aligned} \text{【問題2】 Minimize } \sigma_t^2 \\ \text{subject to } P = \xi\eta L^2 H \end{aligned}$$

と定式化される。

この解は次式の様に与えられる：

$$L^{**} = 3^{1/6} \left(\frac{w}{v}\right)^{1/3} \left(\frac{P}{\xi\eta}\right)^{1/3}, \quad (36)$$

$$H^{**} = \frac{1}{3^{1/3}} \left(\frac{v}{w}\right)^{2/3} \left(\frac{P}{\xi\eta}\right)^{1/3}. \quad (37)$$

ここで H^{**} と L^{**} の比 (すなわちプロポーシオン) を求めると

$$\frac{H^{**}}{L^{**}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v}{w} \approx 0.577 \times (\text{垂直 - 地表速度比}) \quad (38)$$

を得る。すなわち、今回は垂直方向速度と地表速度の比の $\sqrt{3}$ 分の1というプロポーシオンが最適であるという明示的な結果が得られるのである。

3.3 所要時間の最大値最小化問題 (minimax 問題)

トリップ時間の最大値は、正方形都市域の対角線の頂点に相対して位置する2つのビルの、最上階から最上階への移動で与えられる。したがって、これを t_{\max} と表現するとき

$$t_{\max} = \frac{2L}{w} + \frac{2H}{v} \quad (39)$$

で与えられる。こうして所要時間の最大値の最小化問題 (minimax 問題) が

$$\begin{aligned} \text{【問題3】 Minimize } t_{\max} \\ \text{subject to } P = \xi\eta L^2 H \end{aligned}$$

と定式化される。

この解は次式の様に与えられる：

$$L^{***} = 2^{1/3} \left(\frac{w}{v}\right)^{1/3} \left(\frac{P}{\xi\eta}\right)^{1/3}, \quad (40)$$

$$H^{***} = \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{v}{w}\right)^{2/3} \left(\frac{P}{\xi\eta}\right)^{1/3}. \quad (41)$$

ここで H^{***} と L^{***} の比 (すなわちプロポーシオン) を求めると

$$\frac{H^{***}}{L^{***}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{w} = 0.5 \times (\text{垂直 - 地表速度比}) \quad (42)$$

を得る。すなわち、今回は垂直方向速度と地表速度の比の2分の1というプロポーシオンが最適であるという明示的な結果が得られるのである。

3.4 プロポーシオンの構造

前出の3つの問題の解 (L^*, H^*) , (L^{**}, H^{**}) , (L^{***}, H^{***}) を、平均所要時間 $\langle t \rangle$, 所要時間の標準偏差 σ_t , 所要時間の最大値 t_{\max} に代入し、その結果を比較するのが表1である。ただし、代入したいずれの結果も共通に

$$(\text{係数}) \times \left(\frac{P}{\xi\eta}\right)^{1/3} v^{1/3} w^{2/3} \quad (43)$$

という形なので、表1にはこの (係数) のみを記している。当然のことながら、 $\langle t \rangle$, σ_t , t_{\max} に最小値を与えるのは、順に (L^*, H^*) , (L^{**}, H^{**}) , (L^{***}, H^{***}) となっている。

いま表1の各目的函数に着目し、最大値の最小値からの相対偏差を算出すると次の通りである：

$$\frac{\langle t \rangle|_{L=L^{**}, H=H^{**}} - \langle t \rangle|_{L=L^*, H=H^*}}{\langle t \rangle|_{L=L^*, H=H^*}} \times 100 = 3.587\%, \quad (44)$$

$$\frac{\sigma_t|_{L=L^{**}, H=H^{**}} - \sigma_t|_{L=L^*, H=H^*}}{\sigma_t|_{L=L^*, H=H^*}} \times 100 = 5.913\%, \quad (45)$$

$$\frac{t_{\max}|_{L=L^*, H=H^*} - t_{\max}|_{L=L^{***}, H=H^{***}}}{t_{\max}|_{L=L^{***}, H=H^{***}}} \times 100 = 33.333\%. \quad (46)$$

式(46)に見られるように、【問題1】の解が、所要時間の最大値の面で不利であることが目立っている。平均所要時間を小さくする (すなわち社会的最適化を行う) ためには、最大値が悪化することを犠牲にせねばならない、という構造が存在するのである。

4. 沙漠の摩天楼シバームのプロポーシオン解析

4.1 シバームの概要

シバームはイエメン南部 (旧南イエメン) ハドラマウト地方の城壁都市である。ワディと呼ばれる峡谷にあり、オアシスに隣接して立地している。1982年にユネスコ (国連教育科学文化機関) により世界遺産に認定された。現存する最古の建物は10世紀に建てられたもの (以上はホームページ5) による)。日干し煉瓦で出来た約500戸の塔状住居があり、人口は約7000人 (1997年の調査結果⁶⁾ による)。その特異な形態と独特の美しさ故に “沙漠の摩天楼” あるいは “沙漠のマンハッタン” と称される (例えば写真集⁷⁾ に見ることができる)。

4.2 プロポーシオン解析の準備

トリップ所要時間を最小化する都市プロポーシオンを求め、実際のシバームと比較してみたい。幸運なことにシバームの実態調査に基

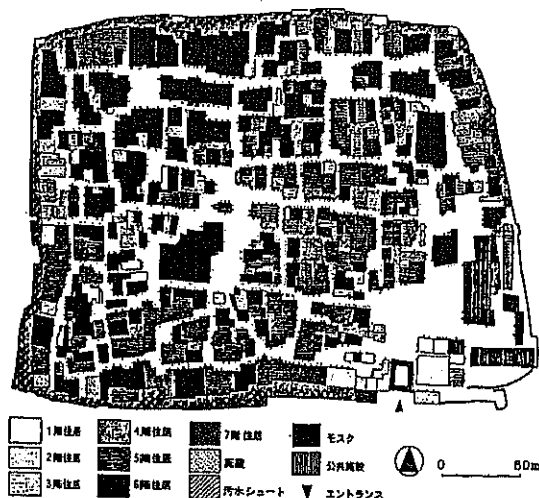


図7 シバームにおける建築物の分布図
(藤井 明教授のご厚意とご許可による転載⁶⁾)



図8 シバームの立面の例
(藤井 明教授のご厚意とご許可による転載⁶⁾)

表2 シバームの住居建築の特性

建物高さ	建坪計 [m ²]	棟数 (棟)	平均建坪 [m ²]	容積推定値 [m ³]
平屋	1642	29	56.6	5418.6
2階建	1116	18	62.0	7365.6
3階建	1023	15	68.2	10127.7
4階建	3041	48	63.4	40141.2
5階建	14058	178	79.0	231957.0
6階建	15914	180	88.4	315097.2
7階建	198	3	66.0	4573.8
合計	36992	471		614681.1

づく貴重なデータを文献⁶⁾に見ることができる。この文献⁶⁾のデータに基づきモデルのパラメータを設定しよう。まず人口は前出の通り $P = 7000$ 人である。またシバームの面積は $S = 76928\text{m}^2$ であり、土地利用の内訳は (a) 38677m^2 が住居建築の敷地 (そのうち 1685m^2 は庶屋)、(b) 5731m^2 が公共施設、(c) 32521m^2 が空地系 (道路も含む) となっている。これにより

$$\eta = (\text{建坪の率}) = \frac{38677}{76928} \approx 0.5 \quad (47)$$

である。シバームにおける建築物の分布図を図7に示す。これを見ると、建築物がほぼ一様に稠密に分布しており、都市内の道路パターンは格子状に近いものである。すなわち、本研究の定式化に良く適合した都市形態であることが理解されよう。さらにシバームの立面の例を図8に示す。同じく高層住宅が建ち並ぶイエメンの首都サヌアとは異なり、シバームでは「(建築物が)細く高く、しかも多くは同じ高さの建物」なのである⁸⁾。文献⁶⁾で報告されている建物高さ別の建坪計と棟数を表2の2・3列に記す。前者を後者で割れば平均建

坪が4列の通りに得られる。さらに、階当たりの高さを 3.3m と想定して建物高さ別の容積を推定すると5列の通りになる。これにより、建物内の人口密度が算出される：

$$\xi = \frac{7000}{614681.1} \approx 0.011 \text{ 人/m}^3. \quad (48)$$

移動の速さに関しては文献⁹⁾を参考に

$$w = 80\text{m/分}, \quad v = 15\text{m/分} \quad (49)$$

とおく。

4.3 計算結果

上記のパラメータであらゆる人の間の移動時間の平均値 (総和といってもよい) を最小化する解を求めると

$$\begin{aligned} L^* &= \left(\frac{3w}{v}\right)^{1/3} \left(\frac{P}{\xi\eta}\right)^{1/3} \\ &= \left(3 \times \frac{80}{15}\right)^{1/3} \left(\frac{7000}{0.011 \times 0.5}\right)^{1/3} \\ &= 273.1\text{m}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$H^* = \frac{1}{3} \frac{v}{w} = \frac{1}{3} \times \frac{15}{80} = 17.1\text{m} \quad (51)$$

なる結果を得る。このときの都市面積は

$$(L^*)^2 = 74571\text{m}^2 \quad (52)$$

であるが、これはシバームの現実の面積 76928m^2 によく似た数値である。また L^* を階当たり高さの想定値 3.3m/階 で除すと

$$L^*/3.3 = 5.17\text{階} \quad (53)$$

となり、シバームの平均階高に近い結果となった。

念のために【問題2】と【問題3】の解も求めておこう：

$$(L^{**}, H^{**}) = (227.4\text{m}, 24.6\text{m}), \quad (54)$$

$$(L^{***}, H^{***}) = (238.6\text{m}, 22.4\text{m}). \quad (55)$$

すなわち、 $(L^{**})^2 = 51704\text{m}^2$ 、 $(L^{***})^2 = 56908\text{m}^2$ といった具合であり、現実のシバームの面積とは懸け離れたものとなった。

以上の如くに、【問題1】の解がシバームのプロポーシオンをかなり上手くなぞっているように見受けられる。勿論シバームという歴史的な都市の形態が、私たちが今日云うところの数理計画によって決定されたものとは考えられない。しかし、数理的に明示されなくても、沙漠の過酷な環境の中で都市を作る過程を通じて、人間の勘や知恵が暗黙の裡に最適プロポーシオンに近いものを実現してしまったとは考えられないだろうか。なお、「一般的なシバームの住宅には15から20の部屋があり、階毎に男性、女性、子供が分けられている」らしい⁸⁾。シバームの成立と再建の歴史を通じて、住居内の部屋割りや住民のトリップパターンを知ることが出来れば、更に詳細な分析を行うことが出来るが、これは今後の課題である。

5. トリップ・パターンの一般化

最後にトリップ・パターンを一般化して minisum 型の問題を定式化する方法を述べる。前節までは、直方体内でトリップの起・終点 (互いに独立に) 一様分布にしたがうものとした。しかし、現実の都市には集客性の高い施設が離散的に存在する場合も多い。その例とし

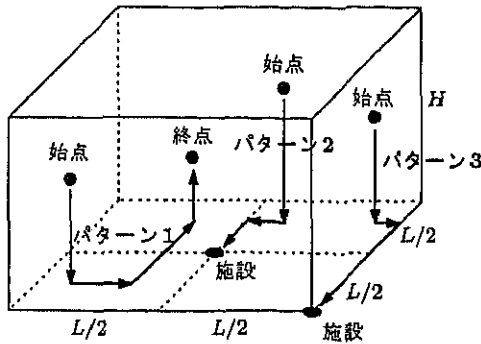


図9 $L \times L \times H$ の直方体都市における3種類の移動パターン

て図9のように都市の中心と、市域の角の1つに全ての人がある頻度で訪れる施設が存在するものとしよう。例えば前者は広場など(シバームの例で言えばモスクでもよい)であり、後者は都市への出入り口に対応する。そして、都市の内部で発生する移動パターンが

1. 直方体内で一様な2点間
 2. 直方体内で一様な点から地表の都市中心にある施設へ
 3. 直方体内で一様な点から地表の市域の角にある施設へ
- という3者から成るものと想定する(図9)。その所要時間を順に t_1, t_2, t_3 と呼び、その発生頻度は α, β, γ としておく。ただし、 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ と規格化しておこう。

このとき平均移動時間の最小化問題を定式化すると次の通り：

【問題1'】 Minimize $\langle t \rangle = \alpha \langle t_1 \rangle + \beta \langle t_2 \rangle + \gamma \langle t_3 \rangle$
 subject to $P = \xi \eta L^2 H$.

ここで平均値 $\langle t_1 \rangle$ は当然3.1節(29)式の $\langle t \rangle$ に等しいので

$$\langle t_1 \rangle = \frac{2L}{3w} + \frac{H}{v} \quad (56)$$

である。また $\langle t_2 \rangle$ と $\langle t_3 \rangle$ の方は、図9の想定から簡単に

$$\langle t_2 \rangle = \frac{L}{2w} + \frac{H}{2v}, \quad (57)$$

$$\langle t_3 \rangle = \frac{L}{w} + \frac{H}{2v} \quad (58)$$

と算出できる。こうして【問題1'】を解くと次の通りである：

$$L^{*'} = \left\{ \frac{6(2\alpha + \beta + \gamma)}{4\alpha + 3\beta + 6\gamma} \right\}^{1/3} \left(\frac{w}{v} \right)^{1/3} \left(\frac{P}{\xi \eta} \right)^{1/3}, \quad (59)$$

$$H^{*'} = \left\{ \frac{4\alpha + 3\beta + 6\gamma}{6(2\alpha + \beta + \gamma)} \right\}^{2/3} \left(\frac{v}{w} \right)^{2/3} \left(\frac{P}{\xi \eta} \right)^{1/3}. \quad (60)$$

これにより最適プロポーシオンは

$$\frac{H^{*'}}{L^{*'}} = c(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \frac{v}{w}, \quad (61)$$

$$\text{ただし } c(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{4\alpha + 3\beta + 6\gamma}{6(2\alpha + \beta + \gamma)} \quad (62)$$

と得られる。係数の範囲は

$$\frac{1}{3} \leq c(\alpha, \beta, \gamma) \leq 1 \quad (63)$$

の通りである。詳述すると、(1)直方体内の2点間トリップの場合 $c(1, 0, 0) = 1/3$ 、(2)直方体内の一様な点から都市中心点へのトリップの場合 $c(0, 1, 0) = 1/2$ 、(3)直方体内の一様な点から都市域の角の点へのトリップの場合 $c(0, 0, 1) = 1$ 、という内容となっている。都市住民のトリップパターンによって省エネルギー都市のプロポーシオンが大きく変化することは、今後オフィス都市等の設計を行う上で注目すべき事実である。

6. おわりに

本研究では w ならびに v を地表移動と垂直移動の速さとして説明した。これを単位距離当たりのエネルギー消費量と読み替えれば、都市内移動の総エネルギーを最小化するプロポーシオンが求められる。

なお、この論文では説明を簡便にするために1つのビルの内々移動は無視した。しかし、議論の本筋は正しいものと思われる。都市内のビル数が n のとき、異なるビル間のトリップ頻度は $n(n-1)/(1/n^2) = 1 - 1/n$ であり、ビル内々トリップ頻度は $n(1/n^2) = 1/n$ だからである。 n が大なるとき、エネルギー消費の面で前者が本質的に重要であることは言うまでもないだろう。

本論文はエネルギー消費の最小化を図ったが、都市の利便性に焦点を当てた定式化にも意味がある²⁾。文献2)では直方体内で一様な2点間の所要時間の分布が導出されている。

謝辞

シバームの建築物分布図と立面図(本論文の図7と図8)の引用をご快諾下さり、その原図をもご提供下さいました藤井 明教授(東京大学)に深甚なる謝意を表します。また貴重なアドバイスを下さいました柳井 浩教授(慶應義塾大学)に深く御礼申し上げます。本研究は文部省科学研究費基盤研究(B)(1)「都市の施設配置および交通に関する数理的並びに定量的研究」(課題番号：11480091)の補助を受けました。研究代表者の伏見正則教授(南山大学)をはじめとするメンバーの先生方に感謝致します。最後になりましたが、匿名の査読者お二人の懇切なるご指摘に心より感謝致します。

参考資料

- 1) 腰塚武志：コンパクトな都市のプロポーシオン，都市計画論文集，No.30，pp.499-504，1995.11
- 2) 佐々木源：移動距離の上限を考慮した都市の最適プロポーシオン，慶應義塾大学大学院理工学研究科・管理工学専攻修士論文，1998
- 3) 奥平耕造：都市工学読本，彰国社，1976
- 4) 栗田 治：省エネルギー都市のプロポーシオン解析，慶應義塾大学理工学部管理工学科 Technical Report, No.00-003, 2000
- 5) <http://www.anritsu.co.jp/plaza/embassy/yemen/> ... 港区の大使館情報より(2001年1月現在アクセス可能)
- 6) 梶橋 修・藤井 明・曲淵英邦ほか：伝統的集落の形態に関する研究(その2)イエメンの二都市にみる高密度な居住形態について，日本建築学会大会学術講演梗概集，E-2，pp.27-28，1998.9
- 7) 小松義夫：地球生活記世界ぐるりと家めぐり，福音館書店，1999
- 8) 地球紀行・世界遺産の旅，小学館，1999
- 9) 建築単位の事典研究会編：建築単位の事典，彰国社，1992

(2000年10月13日原稿受理，2001年1月15日採用決定)

171. 道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究

An analytical method to derive the distributions of distances and flow volumes on networks

田村一軌*・腰塚武志**

Kazuki Tamura and Takeshi Koshizuka

In this paper, we propose an analytical method to derive the distributions of distances between any two points and flow volumes at any point on networks.

With dividing all movements on network into those on a link and those between different links, we can calculate distributions algorithmically. According to the method, we developed a program to compute distributions and apply it to some road networks. And then compared distributions of all movements on network and of movements between nodes.

Keywords : distribution of distances, distribution of flow volumes, road network
距離分布, 流動量分布, 道路網

1 はじめに

都市交通分析などで用いるネットワークモデルでは、ノードに移動の起終点を集約することがほとんどである。このことはすべての移動をノード間移動に代表させることを意味するが、現実の移動はネットワーク上のあらゆる地点で発生・集中するものである。つまり起終点をノードに集約することにより本来の移動との間に差異が生じていると言えるが、現在までこの差異についてはあまり厳密に議論されていないようである。

ところで連続平面上での移動については、これまで幾何確率・都市解析の分野において「二次元平面上のあらゆる2点間の移動」に関する分析がいくつかなされている^{1), 2), 3), 4), 5)}。その中でも特に移動から見た空間の特性を表す指標として「距離分布」と「流動量分布」が提案されている。

本研究ではネットワーク空間に対してこの2つの指標を応用する。すなわち「道路網上のあらゆる2点間の移動」を対象とした距離分布と流動量分布を解析的に導出する方法を示す。さらに、それによる分布と「すべてのノード間移動」による分布を比較することにより、先に述べた差異を考えたい。

さて本題に入る前に「距離分布」「流動量分布」を説明しておく。いま、長さ ℓ の線分上に移動の起終点が一様に分布しているとすると、このとき距離分布とは、線分上で発生・集中するすべての移動を考えたとき、その移動距離に関して同一距離を持つ起終点のペアがどの程度あるのかを示す分布であり、(1)式のようになる^{2), 3)}。

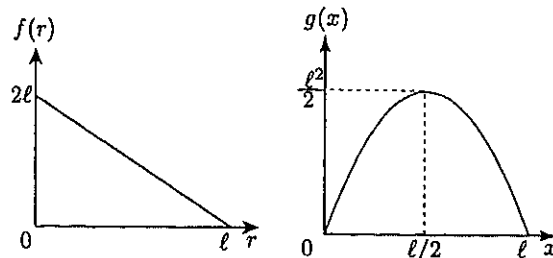


図 1: 線分上の距離分布 図 2: 線分上の流動量分布

$$f(r) = 2(\ell - r) \quad (1)$$

一方流動量分布とは、どの地点をどの程度の移動が通過するかという量の空間的分布であり、(2)式で表される⁴⁾。

$$g(x) = 2x(\ell - x). \quad (2)$$

一次元のモデルでは移動経路が明らかであるため分布の導出も容易である。しかしネットワーク空間の場合においてすべての移動の経路を特定しようとすると、とたんに難しくなる。

2 距離分布・流動量分布の導出

本研究で扱う移動に関して以下の仮定を設ける。まず、移動の起終点はネットワーク上で一様に分布するものとする。実際の交通では移動が一様に発生・集中することはないのだが、空間としてのネットワークの性質をとらえるために発生・集中が一様であると仮定したうえで正確な結果を得ることを目的とする。また移動はすべて最短距離によって行われることにする。

*正会員 筑波大学社会工学研究科 (Univ. of Tsukuba)

**正会員 筑波大学社会工学系 (Univ. of Tsukuba)

距離分布・流動量分布を導出するためにはネットワーク上のすべての移動の経路を特定しなければならない。そのためにネットワーク上の2点のペア(移動の起終点)を(I)2点とも同一リンク上にある場合(→2.1節)(II)2点が異なるリンク上にある場合(→2.2節)の2つの場合に分けると考えやすい。このようにしたうえでネットワーク上のすべての移動をもれなくとらえるには、(I)についてはすべてのリンクについて、(II)についてはすべての2つのリンクの組み合わせについて考えればよい。

ここで(I)(II)それぞれの場合の分布導出方法を説明する前に、ネットワーク上の距離分布・流動量分布を求めるための基本となる次の2つのケースについての分布を示しておく。詳しくは後述するが、ネットワーク上で発生・集中する移動は、時々に応じて1つのリンクをいくつかの部分に分けて考えることにより、すべてこの2つのケースに帰着できる。つまりこの2つのケースにおける分布さえ定式化しておけば、それらを組み合わせ足しあげることでネットワーク全体の分布を導出することができる。

ケース 1

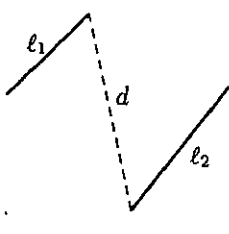


図 3: ケース 1

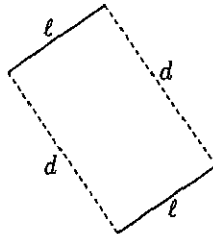


図 4: ケース 2

図 3 のように、リンク L_1, L_2 の長さがそれぞれ $\ell_1, \ell_2 (> \ell_1)$ 、その間に長さ d の経路 D がある場合である。この場合において L_1 上の点と L_2 上の点の間の移動に関する距離分布 $f(r)$ は

$$f(r) = \begin{cases} r-d & (d \leq r \leq d+\ell_1) \\ \ell_1 & (d+\ell_1 < r \leq d+\ell_2) \\ \ell_1+\ell_2+d-r & (d+\ell_2 < r \leq d+\ell_1+\ell_2) \end{cases} \quad (3)$$

となる(図 5)。また、流動量分布は L_1 上の分布を $g_1(x)$ 、 L_2 上の分布を $g_2(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 2\ell_2 x \\ g_2(x) &= 2\ell_1(\ell_2 - x) \end{aligned} \quad (4)$$

となる(図 6)。

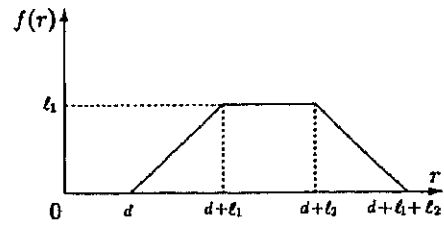


図 5: 距離分布 (ケース 1)

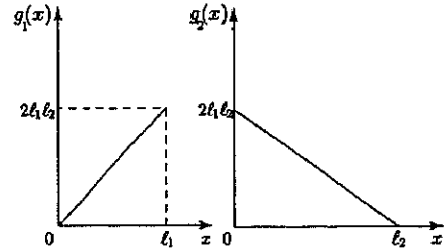


図 6: 流動量分布 (ケース 1)

ケース 2

図 4 のように、リンク L_1, L_2 の長さがそれぞれ ℓ と等しく、その間の2つの経路 D_1, D_2 の長さが d と等しい場合である。この場合の L_1 上の点と L_2 上の点の間の移動に関する距離分布 $f(r)$ は

$$f(r) = 2(r-d) \quad (d \leq r \leq d+\ell) \quad (5)$$

となる(図 7)。流動量分布は L_1, L_2 上ともに

$$g(x) = 2x^2 + 2\ell x + \ell^2 \quad (6)$$

となる(図 8)。

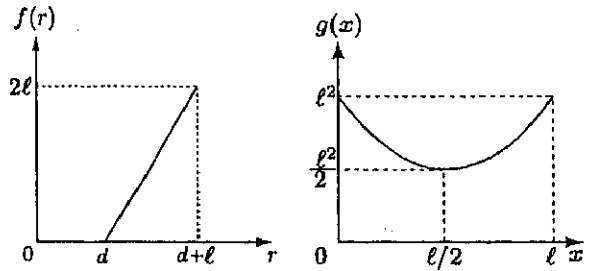


図 7: 距離分布 (ケース 2) 図 8: 流動量分布 (ケース 2)

2.1 リンク内の移動

ネットワークのある1つのリンク L に注目する。そのリンクの長さを ℓ 、リンクの両端のノード間の最短経路 D の距離を d とする。このとき、 D と L は一致する場合もあるし、一致しない場合もある。つまり、 $\ell = d$ のときには一致し、 $\ell > d$ のときには一致しない。

D と L とが一致する場合には、このリンク L 上の2点間の移動はすべてこのリンク L 上で完結することになる。

すなわち距離分布・流動量分布は線分上のそれに他ならない。

一致しない場合には次のように考える。この場合図 9

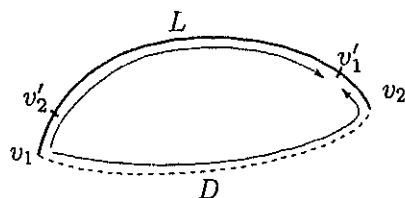


図 9: D と L が一致しない場合

のように、 v_1 からリンク L を通っても経路 D を通っても等距離になる点 (以後このような点を「対心点」と呼ぶ) v_1' が L 上に必ず存在する。同様に v_2 の対心点 v_2' も L 上にある。このとき、2つの対心点によって L を 3 つに分けて考える。すなわちリンク上すべての 2 点間の移動を、 v_1 と v_2 に挟まれた部分 (以後 $\overline{v_1 v_2}$ と表す)、 $\overline{v_2' v_1'}$ 、 $\overline{v_1' v_2'}$ それぞれの間の移動に分ける。すると、それぞれの内部で完結する移動に関しては線分上の移動であり、 $\overline{v_1 v_2}$ と $\overline{v_2' v_1'}$ の間、 $\overline{v_2' v_1'}$ と $\overline{v_1' v_2'}$ の間の移動はケース 1 (経路 D の長さ d が 0 の場合である)、残った $\overline{v_1 v_2}$ と $\overline{v_1' v_2'}$ の間の移動は、その両端が互に対心点になっていることからケース 2 が当てはまることが分かる。その後それぞれで求めた分布を足し上げればリンク内の移動に関する距離分布を求めることができる。

以上よりリンク内の移動については、線分上の移動とケース 1、ケース 2 に帰着できることが分かる。

2.2 リンク間の移動

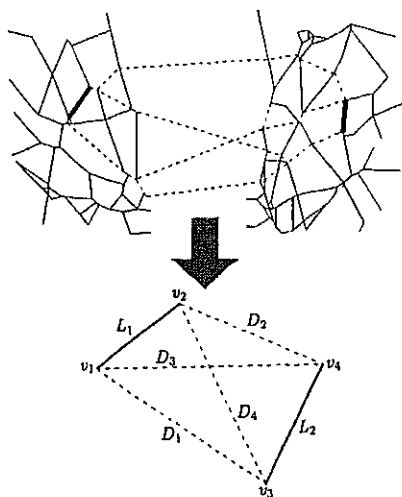


図 10: 2 つのリンクのモデル化

ネットワークの中のある 2 本のリンク L_1, L_2 に着目する。それぞれのリンク上にある 2 点間の経路は、図 10 の

ように (概念として) 4 つあると考えることができる。

しかし L_1 と L_2 の間の移動を考えたときに、リンクの組み合わせによっては、以下で述べるように 1 つの経路しか使われないものもあるし 4 つすべて使われるものもある。そのような経路の使われ方によってリンクの組み合わせの場合分けをする。それぞれの場合について移動経路を決定すればよく、その場合分けは以下の 5 つのパターンになる。

パターン 1

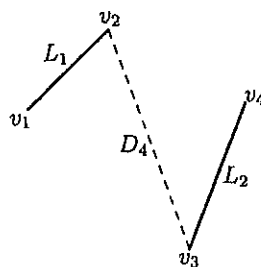


図 11: パターン 1

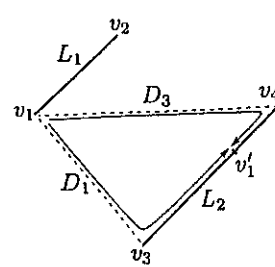


図 12: パターン 2

図 11 のように、リンク間の移動に使われる経路が 1 種類しかない場合である。この場合はケース 1 がそのまま当てはまる。

パターン 2

リンク L_1, L_2 の長さを ℓ_1, ℓ_2 、リンク間の経路 D_1, D_3 の長さを $d_1, d_3 (> d_1)$ とする (図 12)。このとき、 v_1 の対心点 v_1' が存在する。この点 v_1' によって、リンク L_2 を $\overline{v_3 v_1'}$ 、 $\overline{v_1' v_4}$ の 2 つに切って考えることができる。つまり最短経路を考えたとき、 $L_1, \overline{v_3 v_1'}$ 間の移動は全て経路 D_1 を通り、また、 $L_1, \overline{v_1' v_4}$ 間の移動は全て経路 D_3 を経由する。すなわちパターン 2 は、ケース 1 が 2 つあるパターンだと考えることができる。

パターン 3

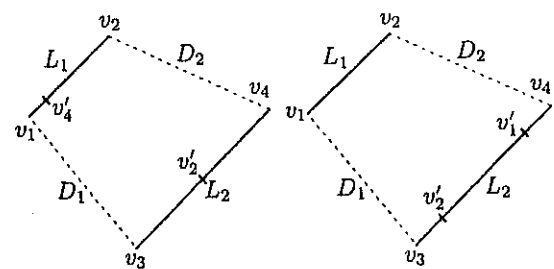


図 13: パターン 3

リンク L_1, L_2 の長さを $\ell_1, \ell_2 (> \ell_1)$ 、リンク間経路 D_1, D_2 の長さを $d_1, d_2 (> d_1)$ とする。 L_1 上の点 x_1 と L_2 上の点 x_2 の間の移動を考えると、 x_1, x_2 の位置によって D_1 と

D_2 のどちらを通るかが変わってくる。このとき、 L_1 の両端ノード v_1, v_2 それぞれの対心点 v'_1, v'_2 が存在するが、このとき対心点の位置は図 13 のような

(i) v'_2 だけが L_2 上に存在する

(ii) v'_1, v'_2 がともに L_2 上に存在する

の 2 つの場合しかない。なぜならば、 $\ell_1 \leq \ell_2$ なので v'_1, v'_2 が L_2 を挟むように現れることはなく、 v'_1, v'_2 がともに D_1 あるいは D_2 上にあるときには、このリンクのペアの関係としてはパターン 1 になってしまうので考える必要がない。さらには、 $d_1 \leq d_2$ であるので v'_1 だけが L_2 上に存在することもないからである。

(i) のとき、 v'_4 が L_1 上に存在することになる。ここで、 $\overline{v_1 v'_4}$ 上の点と L_2 上の点との間の移動は、全て経路 D_1 を通るので先ほど定式化したケース 1 である。同様に、 L_1 と $\overline{v_3 v'_2}$ との間の移動は全て経路 D_1 を通るケース 1 に帰着できる。さて、残る $\overline{v'_4 v_2}$ と $\overline{v'_2 v_4}$ の間の移動経路を求めなければならない。ところが、これらの両端点が互いの対心点になっていることから、これはケース 2 であり、よってこの場合の距離分布・流動量分布を求めることができる。

(ii) のときには、 L_1 と $\overline{v_3 v'_2}$ との間の移動は D_1 を通るケース 1、 L_1 と $\overline{v'_1 v_4}$ との間の移動は D_2 を通るケース 1 である。残る L_1 と $\overline{v'_2 v_1}$ に関しては、やはりこれらの両端点が互いの対心点になっていることからケース 2 である。

パターン 4

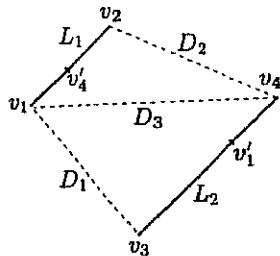


図 14: パターン 4

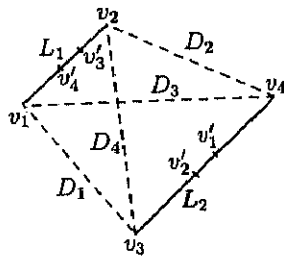


図 15: パターン 5

リンク L_1, L_2 の長さを ℓ_1, ℓ_2 、リンク間経路 D_1, D_2, D_3 の長さを d_1, d_2, d_3 とする (図 14)。このとき、パターン 2 と同じように、 v_1 の、 D_1, D_3, L_2 に関する対心点 v'_1 が L_2 上に存在する。また同様に v_4 の、 D_2, D_3, L_1 に関する対心点が存在する。この 2 つの対心点によってそれぞれのリンクを分けて考える。

ここで、 $\overline{v_1 v'_4}$ と $\overline{v_3 v'_1}$ 間の移動は全て D_1 を通ることが分かり、すなわちこれはケース 1 であることが分かる。同様に、 $\overline{v_1 v'_4}$ と $\overline{v'_1 v_4}$ 間の移動はすべて D_3 を通り、 $\overline{v'_4 v_2}$ と $\overline{v'_2 v_4}$ 間の移動はすべて D_2 を通る。また、 $\overline{v'_4 v_2}$ と $\overline{v_3 v'_1}$ 間の移動は、 D_3 を通らないことから、パターン 3 になるこ

とがわかり、もう一度この部分にだけパターン 3 を適用すれば結局分布を求めることができる。

以上から、パターン 4 の場合の分布を求めることができることが分かる。

パターン 5

図 15 のように、リンク間の 4 つの経路すべてを使う場合である。リンク L_1, L_2 の長さを ℓ_1, ℓ_2 、リンク間経路 $D_i (i = 1, \dots, 4)$ の距離をそれぞれ d_i とする。この場合も、パターン 4 と同じように対心点によってリンクを分けて考える。このパターンの場合には、1 つのリンクを 3 つに分けることになるが結局は同じようにケース 1 とケース 2 の 2 つに帰着できる。その場合分けは表の通りである。

表 1: 場合分け (パターン 5)

	$\overline{v_1 v'_4}$	$\overline{v'_4 v'_3}$	$\overline{v'_3 v_2}$
$\overline{v_3 v'_2}$	ケース 1	ケース 1	ケース 1
$\overline{v'_2 v'_1}$	ケース 1	ケース 2	ケース 1
$\overline{v'_1 v_4}$	ケース 1	ケース 1	ケース 1

以上よりリンク間の移動については、すべてケース 1、ケース 2 に帰着できることが分かる。

3 計算例

以上で説明した方法に基づき、ネットワークの距離分布・流動量分布を求めるプログラムを C 言語を用いて作成した。以下に計算例として、単純な格子状ネットワークの場合と現実の道路網の場合における分布を示す。

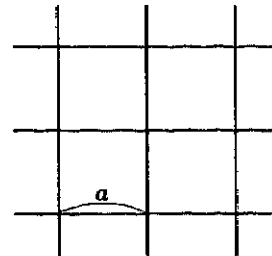


図 16: 格子状ネットワーク

図 16 は 3×3 の格子状ネットワークである。ノード数は 21、リンク数は 24 である。距離分布は不連続になることが分かる (図 17 参照)。図 18 は格子状ネットワークの流動量分布を図示したものである。

また、リンクの組み合わせ ${}_{24}C_2 = 276$ のうち、2 節で述べたパターン 1 から 5 までの出現する頻度は表 2 の通りである。パターン 2, 4, 5 がまったくないのも、格子状ネットワークの特徴として挙げられるだろう。

ところで、この 3×3 の格子状ネットワークにおける

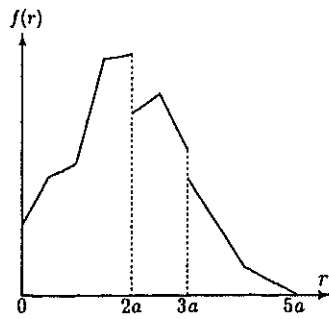


図 17: 距離分布 (格子状ネットワーク)

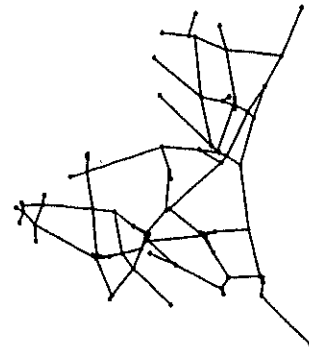


図 19: 茨城県道路網

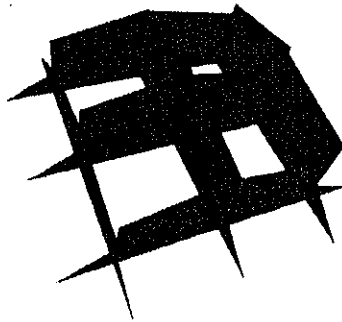


図 18: 流動量分布 (格子状ネットワーク)

距離分布は腰塚によって解析的に求られている⁶⁾。確認のため、今回開発した手法による分布と理論的な分布とを比較したところ完全に一致した。

表 2: パターンの出現頻度

	格子状	道路網
パターン 1	264	1753
パターン 2	0	232
パターン 3	12	2286
パターン 4	0	535
パターン 5	0	972
合計	276	5778

図 19 は道路地図より作製した、茨城県内を通る国道からなる道路ネットワークである。ノード数は 82、リンク数は 108、総延長 $L = 1,027.3\text{km}$ となっている。

図 20 に示す距離分布は直線分から構成されており、図 21 に示す流動量分布は 2 次曲線の一部で構成されている。

4 考察

距離分布・流動量分布の視点から、次のような方法で今回提案した方法と従来のノード間移動による道路網分析との比較をする。

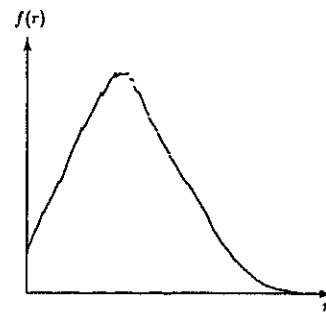


図 20: 距離分布 (茨城県道路網)

同一ネットワークでそれら 2 種類の移動による分布を比較するために、ノードに接続しているリンクのリンク長合計の $1/2$ をそのノードの重みとして与える。こうすることで、すべてのノード間の移動を考えたときにその移動の総量はネットワーク総延長 L の二乗で表されることになり、2 つの方法で対象とする移動の総量が一致する。

4.1 距離分布の比較

図 22 は、距離分布の比較を行ったものである。従来のノード間移動の距離分布は離散的な値となるため今回はヒストグラムで表示した。これを見ると、ノード間移動はより分布に凹凸がある。また、移動距離の平均値はノード間移動で 65.66km 、ネットワーク上の移動で 70.22km となり、ノード間移動の方が若干平均距離が短くなっている。

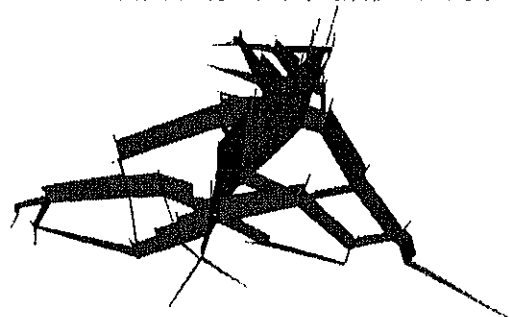


図 21: 流動量分布 (茨城県道路網)

る。これは、今回提案した方法ではノード間移動では表現できない移動をも表しているともいえるし、あるいはこの差が移動をノードに集約することによる「誤差」を表しているといえるかもしれない。

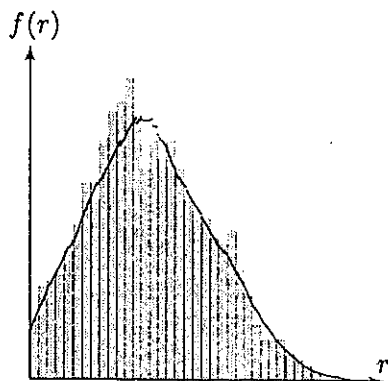


図 22: 距離分布の比較

4.2 流動量の比較

流動量に関する比較を行うわけだが今回はノードを通過する移動の量を比較の対象とすることにした。ノードを通過する移動には、そのノードに接続しているリンクの中でどのリンクから入ってきてどのリンクに出ていくかという経路がいくつかあることになるが、ここではそれらの合計の値をノード流動量と呼ぶことにする(図 21 においてノードから上に伸びている線分の長さで示されている)。ところで、ノード間の移動を考えたときには、あるノードを起終点とするような移動を、そのノードを「通過」とは見なすのか、つまりそのノードの流動量として扱うのかどうか、という問題があるのだが、今回の分析ではそれも含めた値をノード流動量として用いることにした。逆に言えば、ネットワーク上で発生・集中する移動の場合にはこのような問題は考えなくてよい、ということもできる。

ノード流動量を考えたとき、移動の起終点をノードに集約するということは、本来の移動経路を変更し、起終点が集約されたノードを必ず通るようにすることだと考えることができる。つまり移動によってはその移動経路が大きく変わってしまうことになる。

図 23 は、ノード流動量を比較したものである。縦軸に今回提案した方法による流動量、横軸に従来法であるノード間移動による流動量を取り、すべてのノードに関してプロットしたものである。

これを見ると、多少の差が生じているもののほぼ 45 度線に沿っていることが分かる。この茨城県の例に限らず、現実の道路網における計算では今のところノード流動量

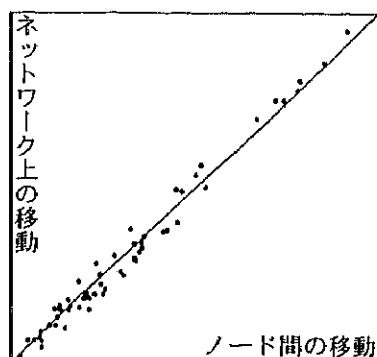


図 23: ノード流動量の比較

に関して飛び抜けて大きいような誤差は見られていない。また、ネットワーク上の移動による流動量が 0 になっている点がいくつかあるが、これはネットワークの端点に当たるノードである。

5 おわりに

本研究はネットワーク上のあらゆる 2 点の移動に関する距離分布・流動量分布の導出方法を明示した。さらにその方法に基づいてネットワークの距離分布・流動量分布を計算するプログラムを開発し、計算例を示した。

今回の着目点であった分布の差異をどのように評価するかは、実際のモデルの設計や分析の目的に依存する。しかしいずれにしても、リンクを 1 つ加えただけで最短経路が大きく変わってしまうといったようなネットワークの空間としての性質を考えたときに、ネットワーク上に発生・集中する移動について厳密に計算することは重要だと思っている。

今回の分析では、移動の発生・集中の密度を一定として計算を行ったが、その密度を自由に与えることができ、より現実に近い近づけることができる。例えば、沿道の土地利用や施設分布の状況にあわせたり、現実の移動の発生分布・集中分布を組み込むことも可能である。

参考文献

- [1] Santaló L. A. (1976): *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [2] Mathai A. M. (1999): *An introduction to Geometrical Probability*. Gordon and Breach Science Publishers.
- [3] 谷村秀彦, 腰塚武志他 (1986): 都市計画数理. 朝倉書店.
- [4] 腰塚武志 (1992): 都市域の流動に関する理論的考察. 日本都市計画学会学術研究論文集第 27 号, pp.343-348.
- [5] 大津晶, 腰塚武志 (1998): 都市内流動量分布に関する基礎的研究. 日本都市計画学会学術研究論文集第 33 号, pp.319-324.
- [6] 腰塚武志 (1997): 移動から見たネットワークの分析. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.252-253.
- [7] 田村一軌, 腰塚武志 (1999): ネットワークの流動量から見た集計誤差に関する考察. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.78-79.

168. 新宿高層ビル群における移動時間分布

A survey of travel time in Shinjuku skyscraper district

腰塚武志*・石井儀光**

Takeshi Koshizuka and Norimitsu Ishii

In the present paper, we discuss the measure of the point pairs whose travel time are less than a time t at all floor points of buildings in a district. By differentiating this measure with respect to time t , we get the function $f(t)$ which is called by travel time distribution. On the other hand we made a survey about the travel time of 523 point pairs which are distributed uniformly at random in all real floors in Shinjuku skyscraper district. Using this distribution and the real world data, we make an analysis of Shinjuku skyscraper district with respect to travel time.

Keywords : travel time distribution, survey of travel time, Shinjuku skyscraper district
移動時間分布, 移動時間調査, 新宿高層建築街

1. はじめに

近年, 都市の建築物は高層化の道をたどってきた。それは限られたそして高価な土地を“有効”に利用するという, 何の疑いも差しはさむ余地のない考えより, 自然に導かれてきたといつてよいだろう。そして長い間, 空間の移動がもつぱら土地の上で行われて来たことに依存するのか, 我々の生活実感の中に, 建物内部の移動に要する時間は, あまり入っていないのではないだろうか。

しかし, 大規模な建物群を考えると, 建物内部, とりわけ垂直移動に要する時間が重要になることは文献 [1], [2] 等でも議論されており, 建物内の移動時間から考えると外見の物理的コンパクト性が, 移動からみて必ずしもコンパクトではないことが明らかにされている。

そこで本論文では実際の高層建築街である新宿を取り上げ, 後述する「移動時間分布」を調査し, 単純なモデルから導かれる理論と比較することで, この街区の移動時間からみた特性を明らかにする。そして, これによって高層建築群より構成される空間の移動時間から見た評価を行う。

2. 移動時間分布

文献 [2] によって詳述されているが, 本論文では与えられた空間 (高層建築群) の任意の2点間の移動を前提とした時間 (距離) の全体分布を問題にする。数式で表現すれば与えられた建物群のすべての床平面の任意の2地点を P_1, P_2 (ともにベクトル) とし, その移動時間 (移動距離) を $T(P_1, P_2)$ で表示すれば, 移動時間 t 以下の2地点のペアの量 $F(t)$ は,

$$F(t) = \iint_{T(P_1, P_2) < t} dP_1 dP_2 \quad (1)$$

と表現できる。ここでいう移動時間分布とは上記 $F(t)$ を t で微分した $f(t)$ をさすものとする。すなわちこれは移動時間が丁度 t の地点ペアを密度 (4次元量を時間で割ったもの) で表現したものであることができる。

この時間分布を一つの大規模な建物について求めたものが文献 [2] であるが, これを複数の建物群について求めた例はない。特にエレベータの待ち時間等で難しい問題があり, これを一つ一つ解決して行かないと厳密な結果を得ることは出来ない。

そこで, ここではその前段階の作業として, 簡単にモデル化された空間において前述の移動時間分布を求めることにする。文献 [1] において, 建築群のモデルとして図1のような単純化されたものが用いられている。

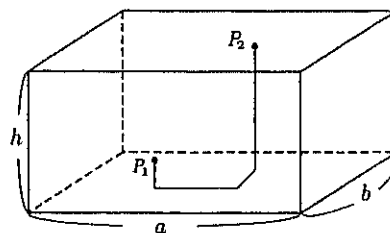


図1: 高層建築群における移動のモデル

すなわち街区が長辺 a , 短辺 b の長方形で, 高さが均一に h の空間を考え, 人は地点 P_1 から別な地点 P_2 まで移動する際に, 図1に実線で示したように一旦地上に

* 正会員 筑波大学社会工学系 (Univ. of Tsukuba)

** 正会員 筑波大学経営・政策科学研究科 (Univ. of Tsukuba)

降り、ついでこの地上を *rectilinear* 距離で移動し、また垂直に昇っていくとする。

まず、地上の移動時間分布については、文献 [3] における長方形の距離分布を用いれば、地上の速度を v_h 、長辺を端から端まで動く時間を $a' (= a/v_h)$ 、同様に短辺について $b' (= b/v_h)$ とすると、

$0 < t \leq b'$ のとき

$$f(t) = \left\{ \frac{2}{3}t^3 - 2(a' + b')t^2 + 4a'b't \right\} v_h^4,$$

$b' < t \leq a'$ のとき

$$f(t) = \left(-2b'^2t + 2a'b'^2 + \frac{2}{3}b'^3 \right) v_h^4,$$

$a' < t < a' + b'$ のとき

$$f(t) = \frac{2}{3} \{ (a' + b') - t \}^3 v_h^4 \quad (2)$$

と求められ、この分布を図示すると図 2 のようになる。ただし街区のプロポーシオン (b'/a') は後述する調査対象地区に準じ、 $b'/a' = 0.63$ とした。

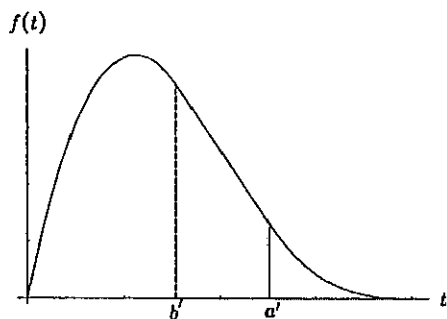


図 2: 水平方向の移動時間分布

また垂直の移動時間分布は、地上からある地点までは一様分布であるから、2つある垂直移動時間分布は良く知られているように三角分布となる。したがって、垂直方向の移動速度を v_v とし、地上から最も高い h までの移動時間を $h' (= h/v_v)$ とすると、

$0 < t < h'$ のとき

$$f(t) = t v_v^2,$$

$h' < t < 2h'$ のとき

$$f(t) = (2h' - t) v_v^2 \quad (3)$$

となっている。水平方向のときと同様にこの分布を図示すると、図 3 のようになる。

垂直移動に待ち時間が無いとすれば、以上の式 (2), (3) を用いた畳み込みから、この単純なモデル化された空間の距離分布が算出できる。実際には畳み込みの計算は複

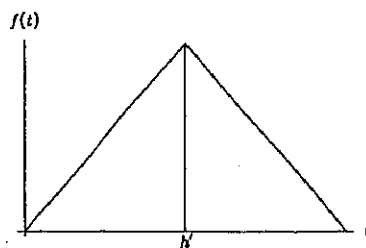


図 3: 垂直方向の移動時間分布

雑となるので、文献 [2] で用いたような正規分布での近似を用いることにする。式 (2), (3) よりそれぞれの平均値を計算できるので、正規分布の平均値 μ と分散 σ^2 については

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b' + h', \\ \sigma^2 &= \frac{1}{18}a'^2 + \frac{1}{18}b'^2 + \frac{1}{6}h'^2 \end{aligned} \quad (4)$$

とおき、近似式として時間分布 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a^2 b^2 h^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

という式で得られる。正規分布に $a^2 b^2 h^2$ が乗じてあるのは、この分布の積分量が 1 と基準化されているわけではなく、対象空間の容量の 2 乗となっているからで、図 1 のモデルの容量が abh であることから、うなづけよう。

3. 高層ビル群を持つ街区内の移動時間調査

3-1. 調査対象地区概要

調査の対象地区は東京都新宿区にある高層ビル群とした。調査地域は図 4 において破線で囲んだ東西方向 341m、南北方向 538m の矩形領域であり、面積は 18.4ha である。新宿区には高層ビルが集中しており、地上高 100m 以上のビルが 25 棟あるが、今回はその中の 10 棟について調査した。調査対象ビルは図 4 の網掛けで示したビルである。また、対象としたビルの階数は、最も低いビルでも 26 階建、最も高いビルでは 55 階建であり、平均階数は 38.5 階である。

3-2. 調査の概要

対象とする高層ビル群において、延べ 25 名の計測者が 523 トリップの移動時間を計測した。各々の計測者は与えられた OD 表に従って実際に移動を行い、ストップウォッチを用いてエレベータの待ち時間や移動にかかる時間、地上部分の歩行時間などを計測した。

調査日については特異日避けるため、曜日を週を変えて 2 日に分けて行い、調査時間帯は通勤ラッシュを避けることとした。調査日および時間帯と天候は以下のとおりである。

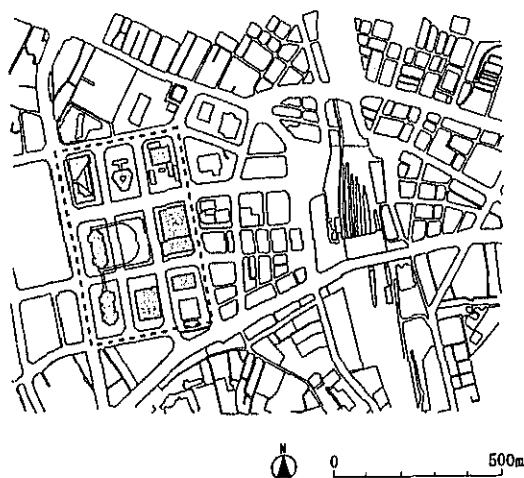


図 4: 新宿駅西口周辺

1. 平成 12 年 2 月 15 日 (火)
午前 10 時から午後 5 時まで。天気：晴れ。
2. 平成 12 年 2 月 23 日 (水)
午前 10 時から午後 5 時まで。天気：晴れ。

次節以降で OD 表の生成方法や計測方法について詳しく述べる。

3-3. OD の生成

厳密に移動時間分布を得るためには、式 (1) に示すように対象とする地域内のあらゆる 2 地点間の移動時間を計測する必要がある。しかし、今回調査対象としている地域の規模でそれを実現することは、様々な制約から極めて困難である。そのため、限られたサンプルから得られる移動時間分布が究極的に得られる移動時間分布にできるだけ近くなるように、計測する移動の起終点は慎重に設定する必要がある。そこで、移動の起終点の設定にあたっては起点と終点がそれぞれ独立に単位床面積あたり一様に分布するように、計算機上で疑似乱数を発生させて OD ペアを作成した。なお、疑似乱数としては、M 系列乱数の一つである、MersenneTwister を用いた。MersenneTwister は類似する乱数生成法に比べて超長周期性、高次元均等分布性を持った乱数を生成することが可能であるという特徴を持つ疑似乱数である (文献 [5])。

なお、床面積については対象ビル全データの揃わなかったため、床面積の代わりに建築面積を用いた。ただし、建物の途中階から大きく床面積が異なるビルや大規模な吹き抜けがあるビルなどについては、GIS データや各ビルの資料を元に補正を加えた。また、ビル内で一般には移動することができない階が存在するため、利用不可能な階で OD が発生しないように、個別に利用可能な階数を調べ利用可能階数と呼んで区別することとした。したがって利用可能階数と建築面積を乗じたものが総面

積となる。具体的なビル名は出せないが、利用可能階数と総面積を表 1 に示す。

表 1: ビルの利用可能階数と総面積

番号	利用可能階数	総面積 (m ²)
1	55	149,600
2	52	144,040
3	43	168,414
4	44	101,083
5	32	60,185
6	33	120,466
7	30	138,420
8	29	70,760
9	27	73,980
10	26	70,980

3-4. 計測内容

作成した OD ペアに従って計測者が実際に移動し、ストップウォッチで移動時間および待ち時間を計測した。地上部分の移動経路は複数考えられ、信号などの影響によって特定の経路が必ずしも最短経路になるとは限らない。そこで、計測者は事前に配布した地図と情報から各自が最短と判断した経路を通ることとした。なお、計測にあたっては、

1. エレベータの待ち時間
2. エレベータの移動時間
3. 地上部分の歩行時間
4. 地上部分の信号等による待ち時間
5. 階段による移動時間
6. エスカレータによる移動時間

以上 6 つを区別して計測した。なお、原則として垂直方向の移動は全てエレベータを用いることにしているが、ビルの構造上、階段やエスカレータでの移動に限定される部分があるためこれらの移動を区別して計測している。

また、ストップウォッチで計測する移動時間の起点、終点となる時間の定義については、以下のように決めた。

- エレベータの待ち時間：エレベータのコールボタンを押した時点、既にコールされていた場合にはコールボタンを押そうとした時点から計測し、エレベータの籠に全身が入って目的階のボタンを押した時点、既に目的階のボタンが押されている場合にはボタンを押そうと思った時点までとする。
- エレベータの移動時間：エレベータの籠に全身が入って目的階のボタンを押した時点、既に目的階のボタンが押されている場合にはボタンを押そうと思った時点から、エレベータの籠を降りて、目的階の床に両足が着いた時点までとする。

4. 調査結果

4-1. 総移動時間

まず、計測した総移動数 523 トリップについて 3-3 節で示した 6 種類の移動時間全てを含んだ総移動時間の平均は 6.77 分であり、分散は 7.36 分^2 であった。総移動時間を 30 秒刻みでヒストグラムにしたものを図 5 に示す。なお、総移動時間が 2 分 30 秒未満である移動は全て同一ビル内の移動である。また、前節で述べたようにビルの構造上、垂直方向の移動に階段やエスカレータを使用せざるを得ない部分があるため、523 トリップの内移動の途中で階段を使用したものが 10 トリップ、エスカレータを使用したものが 24 トリップ含まれている。

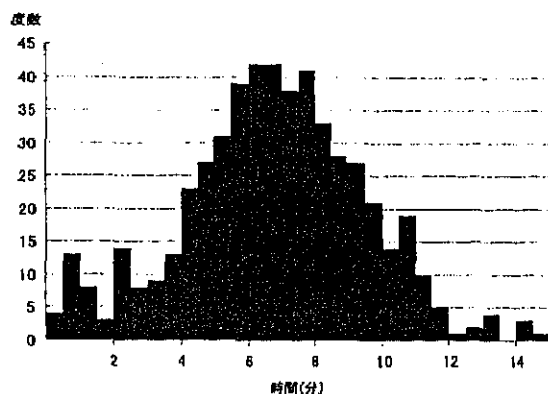


図 5: 総移動時間分布

4-2. 地上の移動時間

総移動時間から地上部分の移動時間のみを取り出して調べると、平均が 4.71 分、分散が 3.56 分^2 であった。移動時間を 30 秒刻みでヒストグラムにしたものを図 6 に示す。

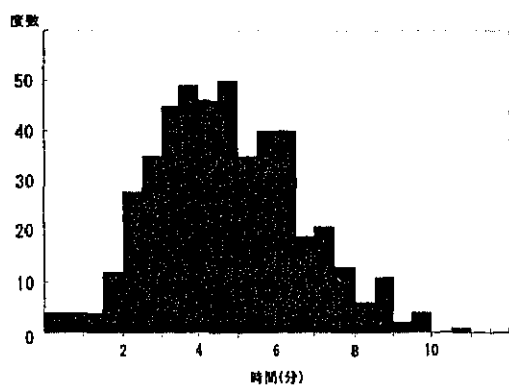


図 6: 地上（水平方向）の移動時間分布

4-3. エレベータの移動時間

次に、エレベータの移動時間のみを取り出して見ると、平均が 49.0 秒、分散が 767.0 秒^2 であった。10 秒刻みでヒストグラムにしたものを図 7 に示すが、予想以上にきれいな分布となっている。

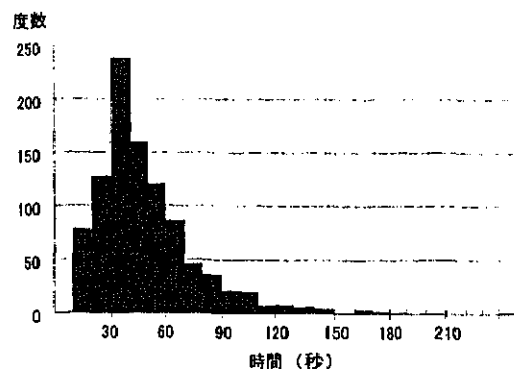


図 7: エレベータ（垂直方向）の移動時間分布

そこで、移動した階数毎に移動時間の分布がどのようなであったかを知るために、移動した階数（階差）を横軸に、移動時間を縦軸にとった散布図を図 8 に示す。

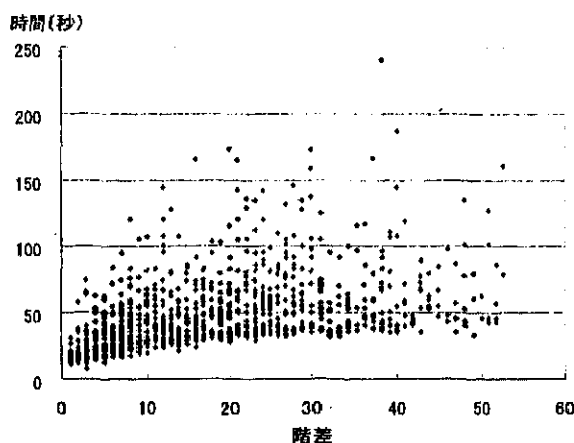


図 8: エレベータの移動階数と移動時間

図 8 において、各階差毎に最速の移動時間（移動時間の最小値）を読み取ることができる。それを辿っていくと、階差の増加につれて最速移動時間が増加していく傾向が読み取れるが、その増加傾向はリニアではなく、頭打ちになってきていることが読みとれる。このことが、エレベータの性能差に起因することなのか、運行システム等に起因することなのかについてはさらに検討する必要があるだろう。また、移動階数が増加するにつれ移動時間の分散が大きくなっているように見えるが、図 9 に示す移動階数の分布からも明らかなように移動の数がかなり少ないため明言することはできない。

次に、さらに詳しく見るために各階差毎に移動時間分布図を作成した。一例として、階差が 10 階と 20 階の移動ペアについて、移動時間分布を 10 秒刻みでヒストグラムにしたものをそれぞれ図 10、図 11 に示した。図 8 から読み取ることが出来る移動時間の下限値のようなものがこれらの図からも読み取れる。この下限値はおそらく、途中階での乗り降りが無くて最速で移動できた場合

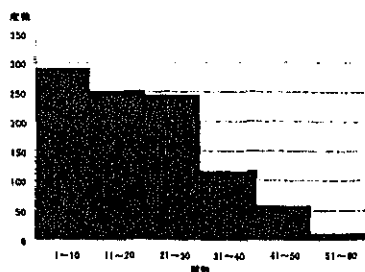


図 9: エレベータの移動階数分布

のものと予想されるため、加減速まで含めたエレベータの性能が現れているものと考えられる。

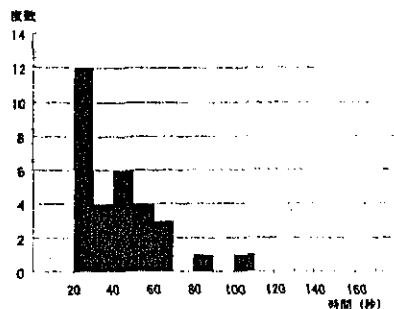


図 10: 10 階分の移動時間分布

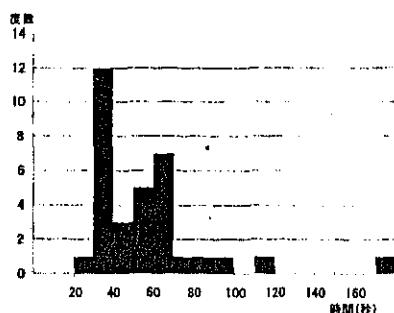


図 11: 20 階分の移動時間分布

4-4. エレベータの待ち時間

次に、エレベータの待ち時間については、平均が 25.9 秒、分散 615.0 秒²であった。10 秒刻みで待ち時間のヒストグラムを描くと図 12 のようになり、一見すると指数分布のような分布となった。そこで、指数分布を当てはめた結果を図 12 の実線で示す。すると、待ち時間が 30 秒以上 80 秒未満のところではよくあっているが、それ以外のところでは当てはまりがそれ程ではないことが分かる。

5. 移動時間分布の分析

新宿の実際の移動時間分布を理論的に説明しようとする、いくつかの難しい問題が存在する。ひとつはエレベータの待ち時間の分布であるが、これはエレベータが複数基あるだけでも厳密な理論的扱いは困難となる。実際の高層ビルにおいては群管理されたさらに複雑なエレ

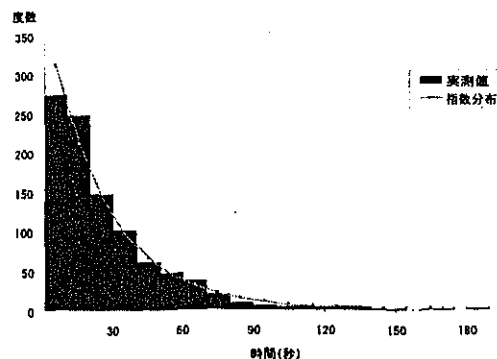


図 12: エレベータの待ち時間分布

ベータ運用システムを採用しているため理論的には難しいが、前述のような調査結果からは単純な指数分布のようにも見え、この点に関する本質を捉えたラフな追求がなされなければならない。もうひとつはエレベータの移動時間であるが、現実の高層ビルでは急行と各階止まりを併用しており、今回の調査からは明確な理論的結果は得られなかった。そこで今回はすべての時間が入っている新宿の総移動時間分布を単純なモデルの移動時間分布と比較し、移動からみた新宿高層ビル街の特徴を議論することにする。

前述の理由から、エレベータを利用しなければならないような高層建築群での移動時間分布を理論的に取り扱うことは困難である。しかし、垂直方向の移動を歩行(階段)あるいはエスカレータと限定して考えることができる低層の建築物での移動時間分布については、エレベータのように待ち時間や速度の変動を考えなくてもよい。2 章の式 (5) で示したような理論的分布を導くことが出来る。そこで、垂直方向の移動を階段やエスカレータに限定するため、理論モデルにおいては階高が 4m で 5 階建てのビルを想定した。また、階段とエスカレータでは垂直方向の移動速度がほぼ同じであり、これらによって h' が決まる。垂直方向に関する以上の仮定を置いた上で、街区の長辺と短辺の比を新宿の調査対象街区と同じくし、総床面積をやはり新宿と同じにすると街区の規模は長辺が 617m、短辺が 388m となる。街区の規模を実際の調査対象地区と比較すると単純なモデルでは長辺と短辺の長さが各々約 1.14 倍に拡大している。次に、このときの移動時間分布式 (5) を求めるために水平方向の速度を歩行の場合を想定して 4km/時、垂直方向は階段を昇るのとエスカレータはほぼ同じで 0.8km/時とする。これらの条件下での移動時間分布は図 13 の実線(モデル式)のように求めることが出来る。

一方、新宿で調査した 523 ペアについて総移動時間を 30 秒刻みのヒストグラムに表すと図 13 のようになっている。床面積を同じくし、街区の規模もおよそ同じに

したもの、建物の高さにはかなり差があり、移動時間分布がどのように異なるかについては興味あるところであった。実際、図13でこれを比較すると、移動からみると両者はほとんど差がないといえる。移動時間の平均値についてみても、実測値は6.8分、モデル式は6.5分でほぼ等しい。

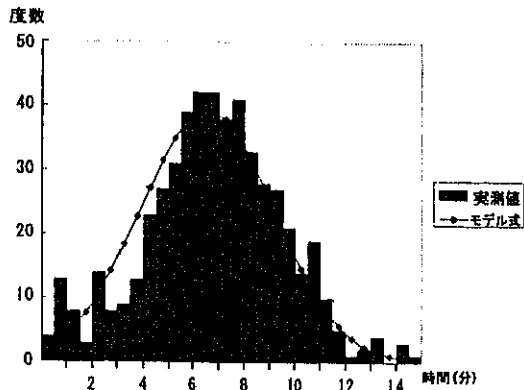


図13: 空間の移動時間分布の比較

ここで、それぞれの空間のバースを描くと図14のようになる。図の左側が調査対象地区のバースであり、右側が単純なモデルのバースである。目でみた限りではかなり異なる空間である。しかし、移動時間分布からみるとほとんど差がない。以上のことは移動時間分布を求めて、はじめて分かることと言えよう。

6. おわりに

前章でみたように、規模は同じであるが見た目にはかなり異なった空間でも、移動からみるとほとんど同じ場合があることを明らかに出来た。これは垂直方向の移動手段を階段かエスカレータと限定したために、高さを5階建て(20m)と決めて求めた結果である。このことから、移動時間や待ち時間の組み合わせによって、見た目では違っても移動からみれば同じものがたくさんあるに違いない。

前章の高層建築群の空間と、低層の空間の結果については様々な解釈ができると思われる。例えば高層の肩を持てば、同じ(建物内)空間で広いオープンスペースや

移動空間が確保できたという言い方ができるであろう。一方、低層の側からみれば、高層建築物を集中して建てなくても中層建築物の集合は移動からみてもそう悪くはないという言い方もできるであろう。どのようにこれを解釈するかは様々な考えがあってもよいが、移動時間分布という客観的道具がこれを救済ということが重要なことであるといわなければならない。

紙面の都合もあって移動時間分布の様々な局面における比較は省略するが、エレベータを本格的に考慮して分布を求めることには前述のようにいくつかの課題があり、これをどのように克服するかは今後の課題としておきたい。また新宿高層建築群の調査はラッシュアワーを避けて行った。ラッシュアワーで調査をすれば今回の結果とかなり異なる数値が予想される。特にエレベータに関しては待ち時間については乗りきれない事態がより多く起こり、エレベータに乗れたとしても各階止まりでなかなか上に進まなくなると予想され、移動時間からみて随分異なる空間となるであろう。

最後に本研究は平成10年、11年の科学研究費補助金の助成を受けた。ここで関係の方々に謝意を表したい。

参考文献

- [1] 腰塚武志(1995): コンパクトな都市のプロポーシオン. 日本都市計画学会学術論文集 30号 pp.499-504
- [2] 腰塚武志(1998): 移動時間分布からみた超高層建築物の分析. 日本都市計画学会学術論文集 33号 pp.325-330
- [3] 腰塚武志(1996): 建物内の移動時間からみた低層建物と高層建物との比較. 日本都市計画学会学術論文集 31号 pp.31-36
- [4] ハイパービル研究会(1996): ハイパービルディングの研究報告書. 日本建築センター.
- [5] M.Matsumoto, T.Nishimura(1998): "Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator", ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation Vol.8, No.1, January pp.3-30.

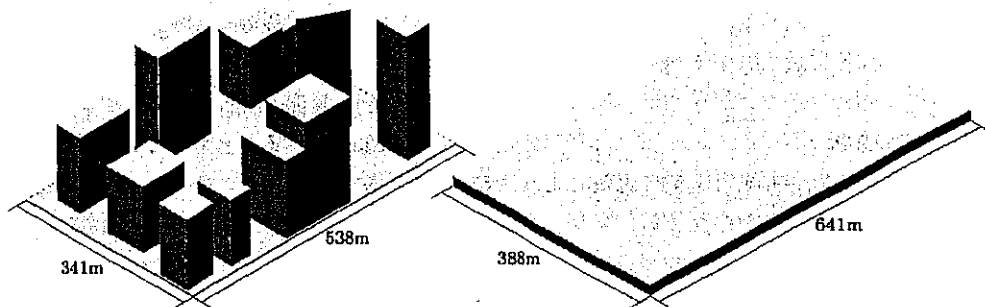


図14: 空間のバース

142. 移動途中の寄り道行動から見た施設への距離分布

Distance Distribution to the Facility in the Case of Trip Stopover

宮川雅至*・大澤義明**

Masashi Miyagawa and Yoshiaki Ohsawa

The purpose of this paper is to examine the facility location in terms of distance for trip stopover. First, we formulate two types of models: 1) ellipse model; 2) straw bag model. The degree of travel freedom which indicates the width of choosing the facilities is then derived. Second, we apply them to the road network of Ibaraki Prefecture and confirm that these models are applicable to real problems. Finally, we theoretically derive the probability density function of distance for trip stopover based on spatial Poisson process and demonstrate that the distance between the origin and the destination considerably affects the distance distribution and the degree of travel freedom.

Keywords: distance for trip stopover, degree of travel freedom, distance distribution

寄り道距離、旅行自由度、距離分布

1. はじめに

日常生活の移動では、時間に余裕を持って出発し、途中に寄り道をする事がよくある。通勤途中に買い物をしたり、銀行や郵便局などを利用することがその例である。観光目的の移動においても近年の泊まり込み型レジャーの増加による移動の長距離化に伴い、途中に休憩施設や別の観光施設に立ち寄ることが多い。このように、寄り道行動による施設利用は基本的な行動パターンであろう。

都市施設の立地を扱った既存研究^{1),2)}では、利用者の居住地から施設までの距離のみで評価することが多い。そこでは、利用者が居住地から施設に向かい、利用後は居住地に戻ると仮定していた。しかし、この仮定は移動途中で施設を利用するという状況には相応しないだろう。本研究では出発地から目的地へ移動する途中に立ち寄る施設について寄り道に要する距離の視点から考察する。

まず、移動の出発地と目的地が与えられたとき、時間的余裕によって最短経路からどれだけ離れた施設まで立ち寄り可能となるかについて議論し、それによって寄り道という移動パターンの基本的な特徴を明らかにする。目的地に到着する時間が決まっている実際の移動においては、途中で施設に立ち寄るためにはどれだけ時間に余裕を持って出発すれば良いかという判断は、普段経験的に行っている。本研究ではこの点を厳密に議論する。

移動の際に十分な時間的余裕があれば、多くの場所を訪れたり、様々な経路を選択できる。逆に時間的余裕がなければ、大きな寄り道は許されずほぼ最短距離で移動することになり、立ち寄り地や経路は限られる。そこでこれら場所や経路の選択の幅の広さを指標化するために、

本研究では、一定の寄り道を許すことによって立ち寄り可能となる地域の面積を旅行自由度と呼び、寄り道距離と旅行自由度との関係を解析的に明らかにする。そして、これらの関係から移動途中に利用する施設への距離分布を導出する。

図1を通して本研究で考察する2種類の寄り道方法を説明する。(a)は出発地から直接施設へ向かい、その後目的地へ向かう場合である。出発前からあらかじめ立ち寄る施設が決まっているときになされる移動である。(b)は目的地方向へ最短経路で移動し、その経路上から寄り道を開始し、施設利用後に再び元の経路に戻る場合である。沿道から見える施設に立ち寄るような移動に対応する。(a)は第2章で楕円モデル、(b)は第3章で俵型モデルとして示される。

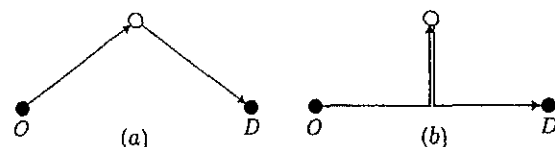


図1: 寄り道方法

以下では、楕円モデル・俵型モデルそれぞれについて旅行自由度を理論的に求める。さらに実際の茨城県道路網上においても理論的結果が成立することを確認する。そして、施設分布がポアソン過程に従う状況の下で、施設密度が一定の場合とそうでない場合について立ち寄る施設までの距離分布を導出する。なお、出発地と目的地が同一である移動を考えると、施設を利用するためだけに移動するので、既存研究¹⁾の状況に帰着する。従って、本研究は既存研究を一般化している。

*学生会員 筑波大学システム情報工学研究科 (Univ. of Tsukuba)

**正会員 筑波大学社会工学系 (Univ. of Tsukuba)

2. 楕円モデル

直線で自由に動ける連続平面上にて、起終点間距離が T である出発地 O から目的地 D へ向かう状況を考える。ここでは、途中の施設での滞在時間を考えず、時間を限界まで使って余計に走ることのできる距離を寄り道距離と呼び、それを $2r$ とおく。このとき総移動距離が等しくなる地点の軌跡は図 2 のように出発地・目的地を焦点とする楕円になる。つまり、楕円の境界上の施設へ立ち寄るときの移動距離はすべて $T + 2r$ となる。特に $r = 0$ のときこの楕円は起終点を結ぶ線分となる。

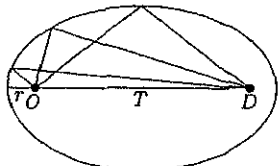


図 2: 楕円

2.1 道路網上の移動への適用

最初に、図 2 のように連続平面上で定まる楕円形状が実際の道路網でも現れることを確認しよう。ここでは、茨城県の国道及び主要地方道から成る道路網（ノード数：458、リンク数：685）を用いて確認する。道路網上のある地点に立ち寄るための寄り道距離を求めるには、出発地からその地点までの道路距離及びその地点から目的地までの道路距離を求める。そしてその和から、出発地と目的地との間の最短距離を引いたものがその地点の寄り道距離となる。本研究では、田村・腰塚³⁾が示した場合分けの方法を応用し、リンク上のすべての地点での寄り道距離を求める。リンク上で寄り道距離は隣接ノードからの距離に比例して増加する。

茨城県では国道 6 号線に沿った南北方向の移動が卓越しているため、出発地を取手市にある千葉県との県境、目的地を北茨城市にある福島県との県境とする。これら出発地と目的地との間の最短経路は国道 6 号線と一致する。各リンクにおける寄り道距離を 3 次元的に表したものが図 3 である。これから、県西地域や南東部の鹿行地域に加え、道路密度の低い県北西部では最短経路である国道 6 号線からさほど離れていない地点でも寄り道距離が大きくなっており、時間的余裕が少ないときには立ち寄れないことが分かる。

許容できる寄り道距離が与えられれば、立ち寄り可能な地点はその値以下の値を持つリンクの集合となる。そこで、図 3 を一定の高さで水平に切った断面の形が連続平面上で得られた楕円に対応するかどうかを確認しておこう。図 4(a), (b), (c) はそれぞれ寄り道距離を 10, 20, 30km とした際に、立ち寄り可能な道路網の部分を表している。これらの図から、道路密度の低い県北部を除けば、断面の形はほぼ楕円とみなすことができる。

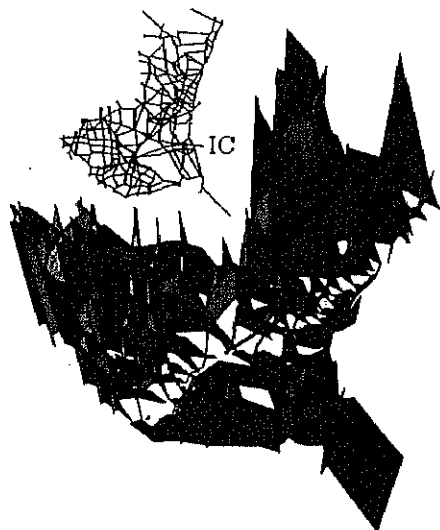


図 3: 茨城県の道路網と寄り道距離

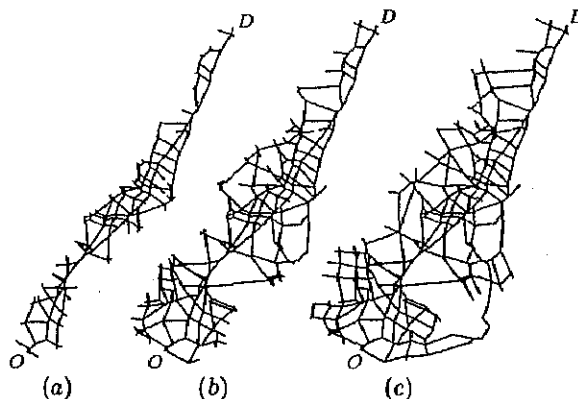


図 4: 寄り道距離 10, 20, 30km で立ち寄り可能な部分

2.2 旅行自由度

図 2 の楕円内部はすべて $2r$ 以内の寄り道で立ち寄り可能となることから、場所や経路の選択の幅の広さを表す旅行自由度を楕円の面積にて定義する。楕円の面積 S は、

$$S = \pi \left(\frac{T}{2} + r \right) \sqrt{Tr + r^2} \quad (1)$$

と表せる。従って、 S は r が大きいときには r についてほぼ 2 次の関数となり、また T に関しては、 T が大きくなるにつれ 1.5 次関数として表される。これより、寄り道距離が大きくなる程旅行自由度も大きくなることが分かり、その傾向は起終点間距離が大きいき程顕著になるといえる。

次に、式 (1) の旅行自由度が実際の道路網上でどの程度成り立つかを確認しよう。ここでは、道路網における旅行自由度をある一定の寄り道距離以内で立ち寄り可能なノード数で表すことにする。図 5 は出発地を図 3 に示した常磐道桜土浦 IC に最も近いノードに固定し、目的地をその他のノードとした全 457 トリップの起終点間の道路距離を横軸にとり、移動の際に 10km 以下の寄り道距

離で到達できるノード数を縦軸にプロットしたものである。曲線は旅行自由度 (1) を各ノードに平均面積 (対象地域面積/全ノード数) を割り当てることでノード数に変換したものを表している。起終点間距離 T が小さいときには両者はほぼ一致しているが、 T が大きくなるにつれ差が開く傾向にある。これは茨城県外や県東側の海上にノードが設定されていないためであろう。従って、移動に対して十分広い範囲で道路網がある状況では、連続平面上の楕円モデルが道路網上においても成立するといえる。しかし、楕円がノードを設定した範囲を大きく超えてしまう場合には、楕円モデルが成立しない可能性がある。

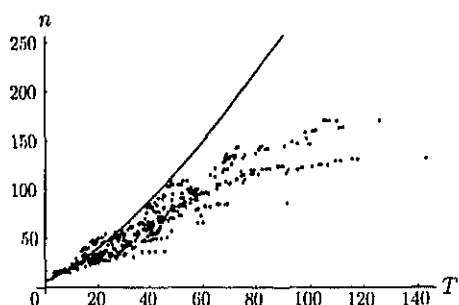


図 5: 起終点間距離と到達可能ノード数

2.3 寄り道距離分布

本節では平面上に分布する施設に対し、立ち寄るための寄り道が最も小さくて済む施設までの寄り道距離の確率分布を導出する。

なお、 $T=0$ つまり移動の起終点が一致する場合、旅行自由度 (1) は起終点を中心とする円の面積に等しくなる。従って、以下で求める距離分布は腰塚¹⁾による結果を一般化している。

2.3.1 施設密度が一定である場合

施設が一様にランダムに分布していると仮定する。つまり、腰塚¹⁾や Clark and Evans⁴⁾のように通常の空間ポアソン過程を考える。寄り道距離の確率密度関数を $f(r)$ とし、面積 S の領域に施設が x 個ある確率を $P(x, S)$ で表す。最も近い施設までの寄り道距離を表す確率変数を R とすると、 $0 < R < r$ である確率はこの領域内に少なくとも 1 つの施設がある確率に等しく、

$$\int_0^r f(R) dR = 1 - P(0, S) \quad (2)$$

という関係が得られる。 $f(r)$ は上式を r で微分して

$$f(r) = -\frac{dP(0, S)}{dr} \quad (3)$$

となる。ここで、施設密度を ρ とすれば、 $P(x, S)$ は

$$P(x, S) = \frac{(\rho S)^x}{x!} e^{-\rho S} \quad (4)$$

というポアソン分布に従うから⁴⁾、式 (1) より、

$$P(0, S) = \exp \left\{ -\rho \pi \left(\frac{T}{2} + r \right) \sqrt{Tr + r^2} \right\} \quad (5)$$

とできる。従って、寄り道距離の確率密度関数 $f(r)$ は次のように解析的に表現できる

$$f(r) = \rho \pi \left\{ \sqrt{Tr + r^2} + \left(\frac{T}{2} + r \right) \frac{1}{\sqrt{Tr + r^2}} \right\} \exp \left\{ -\rho \pi \left(\frac{T}{2} + r \right) \sqrt{Tr + r^2} \right\}. \quad (6)$$

図 6 には $\rho = 1$ として $T = 0, 1, 2, 3$ と変化させたときの寄り道距離の確率密度関数を表す。 T が大きくなるにつれて寄り道距離分布は左側にシフトすることが分かる。つまり長距離移動になる程寄り道距離が小さくても途中で施設に立ち寄れる確率が高くなることを示している。これは直感と合致する。 $T=0$ は移動の起終点が一致し、楕円が円になる場合であり、腰塚¹⁾、及び Clark and Evans⁴⁾で得られた結果と一致する。図 6 から、 $T=0$ の分布は $T=1, 2, 3$ の分布と大きく異なっているので、起終点間距離 T を考慮する意義が大きいことが分かる。

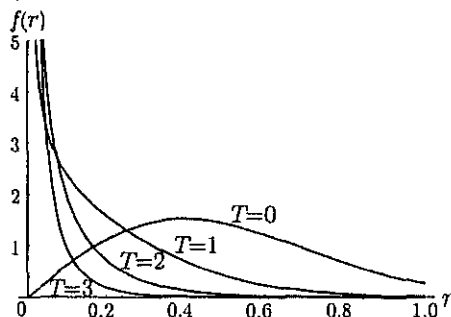


図 6: 寄り道距離分布

実際に施設を利用する際には最も近い施設のみを利用するとは限らない。施設は必ずしも同質ではないため、各個人の好みによって遠くの施設を利用することもある。そこで、立ち寄るための寄り道距離が k 番目に小さい施設までの距離分布を求める。それにより、2 番目・3 番目に近い施設を利用するためにはどれだけ寄り道をしなければならないかが分かる。逆に、寄り道できる時間が決まっている場合に、立ち寄り可能な施設がいくつあるかという選択肢の数を知ることができる。

k 番目に近い施設までの寄り道距離の確率密度関数 $f_k(r)$ は、Dacey⁵⁾と同様の議論から、次のように求まる

$$f_k(r) = \frac{\rho \pi}{(k-1)!} \left\{ \sqrt{Tr + r^2} + \left(\frac{T}{2} + r \right) \frac{1}{\sqrt{Tr + r^2}} \right\} \left\{ \rho \pi \left(\frac{T}{2} + r \right) \sqrt{Tr + r^2} \right\}^{k-1} \exp \left\{ -\rho \pi \left(\frac{T}{2} + r \right) \sqrt{Tr + r^2} \right\}. \quad (7)$$

$T=0$ のときについてのみ、Dacey⁵⁾が既に求めている。図 7 は $T=1, \rho=1$ とし、 $k=1, 2, 3$ と変化させたとき

の k 番目に近い施設までの寄り道距離の確率密度関数である。 k が大きくなるにつれ、立ち寄るためには大きな寄り道距離が必要になることが読み取れる。

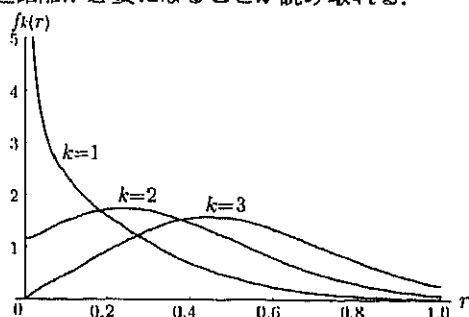


図 7: k 番目に近い施設までの寄り道距離分布

2.3.2 施設密度が一定でない場合

前節では施設密度 ρ は一定であった。本節では腰塚¹⁾と同じく密度 ρ がガンマ分布

$$f(\rho) = \frac{1}{a\Gamma(p)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{p-1} e^{-\rho/a} \quad (8)$$

に従っているときの寄り道距離分布を求める。ガンマ分布の2つのパラメータの内 p は分布の型に関係し、 a は対象全体における密度に関係する。 $p=1$ のときはよく知られている指数分布に帰着する。式 (8) より $E(\rho) = ap$ となる。大局的な密度である ap を一定とし、 $p \rightarrow \infty$ とすれば式 (8) の分散が 0 となり、ここでの状況は前節で論じた施設密度が一定である場合に一致する。

このとき式 (4) のポアソン分布を ρ が定まったときの条件付確率

$$P(x, S|\rho) = \frac{(\rho S)^x}{x!} e^{-\rho S} \quad (9)$$

であると考え、 $P(x, S)$ は

$$P(x, S) = \frac{\Gamma(p+1)}{x!\Gamma(p)} \left(\frac{1}{1+aS}\right)^p \left(\frac{aS}{1+aS}\right)^x \quad (10)$$

という負の二項分布に従う⁶⁾。式 (1) より、

$$P(0, S) = \left\{ 1 + a\pi \left(\frac{T}{2} + r \right) \sqrt{Tr + r^2} \right\}^{-p} \quad (11)$$

となるから、寄り道距離の確率密度関数は式 (3) より、次のように求まる

$$f(r) = \pi ap \left\{ \sqrt{Tr + r^2} + \left(\frac{T}{2} + r \right) \frac{1}{\sqrt{Tr + r^2}} \right\} \left\{ 1 + a\pi \left(\frac{T}{2} + r \right) \sqrt{Tr + r^2} \right\}^{-p-1} \quad (12)$$

図 8 は、 $p=1, a=1$ つまり密度分布が指数分布に従うときの寄り道距離の確率密度関数である。このとき $E(\rho) = 1$ となっているが、 $\rho=1$ に固定した場合である図 6 と比較すると、同じ寄り道距離でも到達可能となる確率が小さく、立ち寄りづらくなっていることが分かる。これは、寄り道距離分布は全施設ではなく、最も近い施設だけに依存するので、施設が空間的に均等に分布する方が寄り道距離が小さくなるからである。

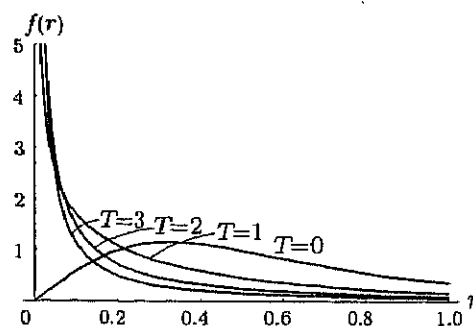


図 8: 寄り道距離分布 ($p=1, a=1$)

3. 俵型モデル

楕円モデルでは出発地から直接立ち寄る施設に向かう移動を扱っていたが、ここでは出発地から目的地方向へ最短経路で向かい、途中で寄り道をして再び元の場所に戻り、再度目的地方向へ行く移動について考える。このとき、総移動距離が等しくなる地点の軌跡は図 9 のような俵型になる。つまり、俵型の境界上にある施設に立ち寄るときには総移動距離は丁度 $T+2r$ となる。

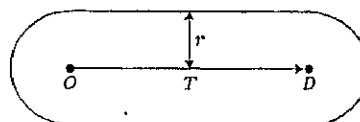


図 9: 俵型

3.1 道路網上の移動への適用

図 9 のような連続平面上での俵型形状が道路網にてどのような形状となるのかを確認しよう。2.1 節と同じく茨城県の国道及び主要地方道の道路網を考える。

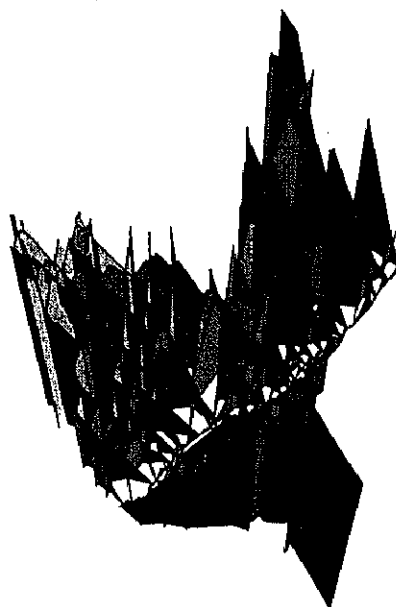


図 10: 道路網上の寄り道距離

道路網上の地点に立ち寄るための寄り道距離は、出発地から目的地までの最短経路上にあるノードへのその地点からの最短距離で与えられる。図 10 は 2.1 節と同様に

出発地を千葉県との県境、目的地を福島県との県境としたときの各リンクにおける寄り道距離を3次元的に表している。楕円モデルの図3と比較すると、どのリンクでも寄り道距離が大きくなっており、特に、経路中央部の谷の深さが強調されていることが分かる。

また、図11(a),(b),(c)はそれぞれ寄り道距離を10, 20, 30kmとした際に、立ち寄り可能な部分を表したものであり、図10を一定の高さで水平に切った断面に対応する。福島県側や千葉県側のリンクが含まれていないので、俵型の曲部の形状を確認できないが、図11から断面形はほぼ俵型とみなすことができよう。

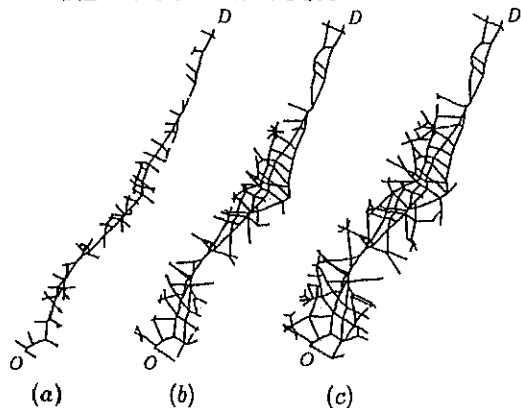


図11: 寄り道距離10,20,30kmで立ち寄り可能な部分

3.2 旅行自由度

俵型モデルの旅行自由度は俵型の面積に対応する。その面積 S は

$$S = 2Tr + \pi r^2 \quad (13)$$

となる。式(1)で見たように楕円の面積は T の1.5次関数であるのに対し、式(13)で表現された俵型の面積は1次関数である。従って、 T が大きくなるにつれ、両者の差は広がっていく。すなわち、長距離移動である程、楕円モデルの方が旅行自由度が大きくなることが分かる。

次に、式(13)の俵型モデルの旅行自由度が道路網上でどの程度当てはまるかを見る。

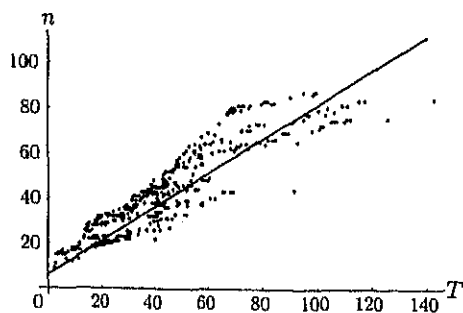


図12: 起終点間距離と立ち寄り可能ノード数

図12は出発地を常磐道桜土浦ICに最も近いノードに固定し、目的地をその他のノードとした全457トリップの起終点間の道路距離と10km以下の寄り道距離で立ち

寄り可能なノード数をプロットしたものである。直線は俵型モデルの旅行自由度(13)をノード数ベースへ変換したものである。図5との比較から楕円モデルの場合よりも両者の差は小さいといえる。これは楕円モデルと比べ、寄り道できるエリアが限られるためであろう。

以上の分析より、連続平面上の俵型モデルが道路網上においても成立するといえよう。

3.3 寄り道距離分布

俵型のときにも楕円の場合と同様に最も近い施設までの寄り道距離の解析的表現は可能である。第2章同様に、 $T=0$ の結果は腰塚¹⁾による結果と一致するので、ここで導出する距離分布はその一般化である。

3.3.1 施設密度が一定である場合

立ち寄る施設が一様にランダムに分布している場合には、式(13)より

$$P(0, S) = \exp\{-\rho(2Tr + \pi r^2)\} \quad (14)$$

とできる。寄り道距離の確率密度関数は式(3)より、

$$f(r) = 2\rho(T + \pi r) \exp\{-\rho(2Tr + \pi r^2)\} \quad (15)$$

となる。図13は $\rho = 1, T = 0, 1, 2, 3$ のときの確率密度関数を示す。楕円モデルである図6と比較すると、俵型の方が寄り道距離は大きくなり、この傾向は起終点間距離 T が大きくなる程顕著である。

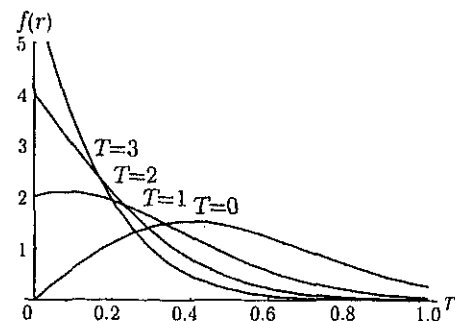


図13: 寄り道距離分布

楕円モデル、俵型モデルにおける寄り道距離に関する差異をより吟味するために、最も近い施設までの寄り道距離の期待値を比較してみよう。寄り道距離 R の期待値は定義より

$$E(R) = \int_0^{\infty} r f(r) dr \quad (16)$$

となる。しかし、楕円モデル・俵型モデルのいずれの場合も一般に初等関数では表すことができないため、 $\rho = 1, 2, 3$ のときの数値積分による結果を図14に載せた。実線は楕円モデル、破線は俵型モデルの寄り道距離の期待値である。 $T=0$ の期待値は両モデルで一致しているが、起終点間距離 T が大きくなるに従い俵型モデルの期待値の方が緩やかに小さくなっていくことが分かる。また、当然のことだが施設密度が大きくなれば、寄り道距離は小さくなることも確認できる。

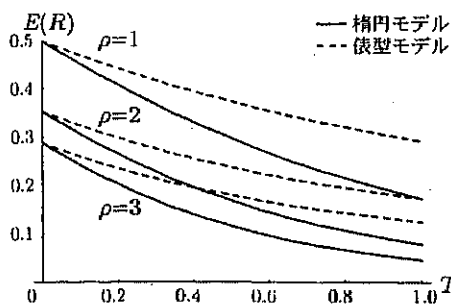


図 14: 寄り道距離の期待値

k 番目に近い施設までの寄り道距離の確率密度関数は、

$$f_k(r) = \frac{2\rho}{(k-1)!} (T + \pi r) (2\rho T r + \rho \pi r^2)^{k-1} \exp\{-\rho(2Tr + \pi r^2)\} \quad (17)$$

と導かれる。図 15 は $T = 1, \rho = 1, k = 1, 2, 3$ のときの確率密度関数を示す。この場合にも、図 7 の楕円モデルの方が施設利用が容易であることが分かる。

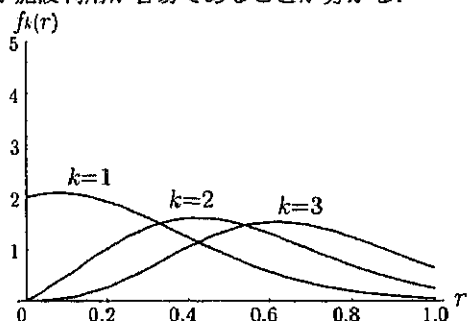


図 15: k 番目に近い施設までの寄り道距離分布

3.3.2 施設密度が一定でない場合

施設密度 ρ が式 (8) のガンマ分布 $f(\rho)$ に従っている場合には、

$$P(0, S) = \{1 + a(2Tr + \pi r^2)\}^{-p} \quad (18)$$

より、寄り道距離の確率密度関数は以下ようになる

$$f(r) = 2ap(T + \pi r) \{1 + a(2Tr + \pi r^2)\}^{-p-1}. \quad (19)$$

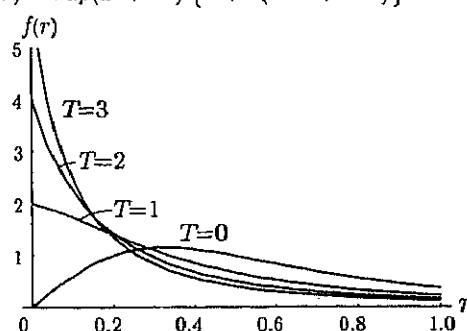


図 16: 寄り道距離分布 ($p = 1, a = 1$)

図 16 は $p = 1, a = 1$ のときの確率密度関数である。図 8 の楕円モデルよりも分布がやや右に動いていることが分かる。つまり、施設密度が一定でない場合も俵型モデルの方が施設への立ち寄りが困難であるといえる。また、通常のポアソン過程で $\rho = 1$ とした図 13 と比較すると、やはり立ち寄りづらくなっていることが分かる。

4. おわりに

従来の都市施設の立地を扱った研究では施設利用を第一義的と捉えて分析が行われた。つまり、利用者と施設との間の移動のみを想定していた。対照的に本研究では、別の目的で移動の途中に副次的に施設を利用するという状況をモデル化した。換言すれば、1 地点からの距離ではなく移動という観点から出発地・目的地の 2 地点からの距離で施設サービスを評価している。その際、寄り道パターンの差異により、楕円モデルと俵型モデルを提案した。モデルは単純なものであるが、得られた結果は直感とよく一致する。また、楕円モデル・俵型モデルで得られた結果は既存結果を特別な場合として含んでいる。

以下に本研究で得られた 3 つの結論を述べる。

- (1) 楕円モデル、俵型モデルにおける寄り道距離と旅行自由度との関係を理論的に明らかにした。さらに、直線移動が可能な連続平面における関係が道路網上においても成立することを茨城県の道路網データで確認した。
- (2) 楕円モデル・俵型モデルのそれぞれにおいて、立ち寄る施設の密度が一定の場合と確率変数として表される場合の寄り道距離分布を解析的に導出した。そして、長距離移動になる程、また、施設の密度が大きくなる程、施設への立ち寄り可能性が増加することを解析的に示した。
- (3) 茨城県道路網において、茨城県を縦断する移動に対する寄り道距離を求め、道路網が粗である県北部は移動途中の寄り道行動が難しいことを例証した。

移動という観点から施設サービスを評価する意義は大きい。この視点を施設立地選定問題に適用することはもちろん、寄り道という観点から道路網整備を評価することも可能である。

謝辞

腰塚武志先生 (筑波大学)、田口東先生 (中央大学)、栗田治先生 (慶應義塾大学)、及び匿名の査読者からの有用な御助言に感謝の意を表します。本研究の一部は平成 12 年度科学研究費補助金 [基盤研究 (C), 12680430] の援助を受けました。

参考文献

- 1) 腰塚武志 (1985): 都市施設の密度と利用者からの距離との関係について。昭和 60 年度第 20 回日本都市計画学会学術研究論文集, pp.85-90.
- 2) 谷村秀彦 (1986): 施設配置計画の数理。都市計画数理。朝倉書店, pp.56-95.
- 3) 田村一軌、腰塚武志 (2000): 道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究。日本都市計画学会学術研究論文集第 35 号, pp.1021-1026.
- 4) Clark, P.J. and Evans, F.C. (1954): Distance to Nearest Neighbor as a Measure of Spatial Relationships in Populations. *Ecology*, 35, pp.445-453.
- 5) Dacey, M.F. (1968): Two-Dimensional Random Point Patterns, A Review and an Interpretation. *Papers of the Regional Science Association*, 19, pp.41-55.
- 6) Dacey, M.F. (1965): Order Distance in an Inhomogeneous Random Point Pattern. *Canadian Geographer*, 9, pp.144-153.

143. 利用者行動属性の多様性を考慮した時空間施設配置モデル

Facility Location Model Considering Various Behavior of Users in Time-Space Plane

尾崎尚也*・大澤義明**

Naoya Ozaki and Yoshiaki Ohsawa

In this paper, we discuss facility location considering various behavior of users in time and space plane using a model. First, we exhibit a location model in time-space plane. Second, we compare three location patterns of facilities in time-space plane : (1)grid; (2)random; (3)(t,m,s)-net, based on average traveling, waiting cost of users and covering percentage of services. Then, we show that (t,m,s)-net, which is a regularly scattered pattern in time-space plane, is the best location among the three patterns. Finally, we apply the model to the library and book mobile service in Kobe city.

Keywords: facility location, time-space plane, behavior of users, public library
施設配置, 時空間, 利用者行動, 公共図書館

1. はじめに

本論文では、様々な行動属性を持つ利用者に対し、サービスを提供する施設について空間上のみならず時間上での配置について、移動図書館を具体例として議論する。

移動図書館とは自動車に本を載せ巡回し、図書の貸出しを行うサービスである。このようなサービスにより、図書館の本館や分館のような固定施設まで行く時間的余裕のない住民、あるいは交通手段を持たない住民もサービスを受けることができる。しかし、1回のサービスは短時間であるため、近くにサービス地点があってもサービスの時間に都合がつかなければ利用できない。つまり、距離制約は弱い時間制約を受ける。一方、固定施設ではサービス時間が長いので、都合のよい時間に合わせて利用できるが、近隣の住民を除いてその施設までの交通手段を持つ人しか利用できない。つまり、時間制約は弱い距離制約を受ける。

施設によって利用者の行動属性には特徴がある。小学校であれば、利用者は小学生に限られる。高齢者福祉施設であれば利用者は高齢者に限られる。このように利用者層がほぼ決まっている施設においては、利用者の行動属性に合わせて施設の配置を考えればよい。一方、図書館は読書に興味のある住民や図書館の資料で調査・研究をする住民など、不特定多数が利用する。このような施設では様々な行動属性の利用者を想定すべきである。

一部の郵便局では夜間・休日窓口を開設している。これにより平日昼間に利用できない人や急ぎの用で利用する人もサービスを受けられる。24時間営業のコンビニエンスストアはいつでも利用できることから時間制約を受

けない。利用者サイドの利便性を考える場合、空間的配置だけではなくサービスの時間的配置も重要となる。

移動図書館では、巡回地点の場所や時刻が利用者の利便性に大きな影響を与える。では、いつ、どこでサービスを提供すればよいのだろうか。様々な行動属性を持つ利用者にサービスを提供する場合、時間的にも空間的にも分散させることが利用者にとって便利であることは直感的にわかるが、具体的にどのように分散させればよいのだろうか。

図書館の配置についてはこれまでに様々な議論が行われている¹⁾。その多くが空間的配置のみを論点に置き、利用者の行動を同一属性として仮定し議論したものである。しかし、実際のサービスを考えると空間配置に加え時間の要素も含め、さらに多種多様な属性を持つ利用者を考えることが必要である。

以上をふまえ、本研究では利用者の利便性を基準に、利用者の行動属性の多様性を考慮した時空間施設配置モデルを提示する。そして、実例を用いて時間的・空間的に分散した施設配置の意義について議論する。

2. モデルの説明

武田・伊理²⁾により示されているように1次元の対象地域を想定し、縦軸に地点 x 、横軸に時刻 t をとった空間を考える(図1)。これを「時空間平面」と呼ぶことにする。この時空間平面上の1点はある時刻のある地点に対応している。そして対象地域の長さとしてサービスの1周期をそれぞれ規準化し1とする。サービス時間は1周期と比べ短いため点で表し、サービスポイントと呼ぶ。サービス時

* 学生会員 筑波大学システム情報工学研究科 (Univ. of Tsukuba)

** 正会員 筑波大学社会工学系 (Univ. of Tsukuba)

間の長い固定施設については線で表す。サービス i の行われる時刻を t_i 、地点を x_i とすると、時空平面上でのこのサービスポイントは図 1 のように座標 (t_i, x_i) で表わされる。

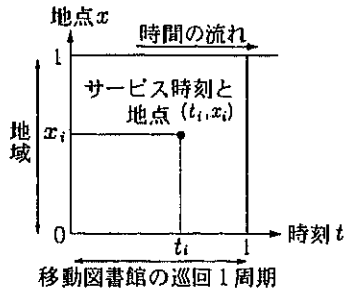


図 1: 時空平面

本研究では、就寝中などの非行動時間を除いて考え、サービスは周期的に無限に繰り返すものとする。時空平面上での施設配置を評価する基準として、次の 2 点を用いる。1 つは、サービスを欲した時刻とサービスを楽しむ時刻の差である待ち時間と移動距離を合算した「利用者コスト」である。この基準を用いるとき、距離と時間の制約を設けず最もコストの小さい点を利用するものとする。もう 1 つは、利用者全体のうち移動距離と時間の制約のなかでサービスを受けられる割合を示す「サービス被覆率」である。

利用者コストについて、岡部・鈴木³⁾ は時空平面上の直線距離により定義しているが、ここでは距離と時間とは次元が異なることを考慮し、待ち時間と移動距離との加重和で定義する。つまり、単位待ち時間あたりのコストを α 、単位移動距離あたりのコストを β とし、時刻 t 地点 x にいる利用者 (t, x) がサービス i を利用するコスト $\phi_i(t, x)$ を

$$\phi_i(t, x) = \alpha|t_i - t| + \beta|x_i - x| \quad (1)$$

とする(図 2)。また、時間は過去に戻ることができないため $t \leq t_i$ の時空間領域のみを考慮する。利用者は $\phi_i(t, x)$ が最小となるサービス点を利用するため、利用者コスト $\phi(t, x)$ は

$$\phi(t, x) = \min_i \phi_i(t, x) \quad (2)$$

となる。 α/β が大きい時、その利用者は移動距離より待ち時間をより重視することに対応する。例えば、自動車などの交通手段を持つモビリティの高い利用者である。逆に、徒歩しか交通手段のない利用者は、長距離の移動より近い地点でサービスを受けたいから α/β を小さくすることで表現できる。 α 及び β の値を変えることによって様々な行動属性を持つ利用者を想定できる。

利用者の行動可能範囲を、Hägerstrand⁴⁾ により示されている Time Space Prism の概念を受け時空平面上の図形で定義する。その施設を利用するために行動できる時

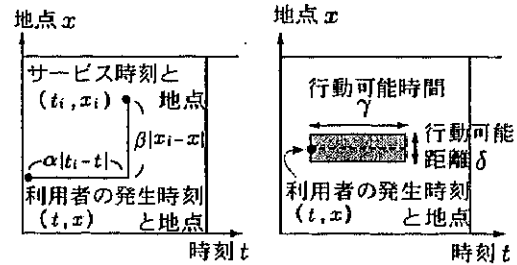


図 2: 利用者コスト 図 3: 行動可能範囲

間の長さを γ 、行動できる距離を δ とすると、図 3 の網かけを施した部分のように矩形で表現される。時間地理学では一般にプリズム型の範囲を用いるが、それではサービス被覆率を解析的に求めることが難しく、非行動時間を含めて考えるとモデルが複雑になる。そこで本論文では、移動速度差の代わりに限界移動距離で表現した。この矩形の縦横の辺の長さにより利用者の行動属性を表現できる。利用者の移動方法に関しては、自動車・自転車・徒歩など様々である。 γ が大きいことはサービス享受のために使える時間が多いことを表し、 δ が大きいことは長距離移動が可能であることを表す。つまり、時間の融通はきくが徒歩しか交通手段のない利用者は γ を大きくし、 δ を小さくすることで表現できる。逆に時間は限られるが長距離交通手段を持つ利用者は γ を小さくし、 δ を大きくすることで表現できる。 γ, δ を変化させることによって多様な行動属性を持つ利用者を想定できる。

3. モデルによる考察

3.1. サービスポイントの設定

本研究では、利用者は時空平面内に一様に発生するものとする。つまり、どの地点・時間においても等確率で需要が発生すると考える。そして、本館・分館と移動図書館は等しいサービスを行うものとする。

時空平面上において、移動図書館のサービスポイントとして、(1) 格子状・(2) ランダム・(3) (t, m, s) -net の 3 種類の時空間配置を考える。そして、2 章で述べた (1) 平均利用者コストと (2) サービス被覆率を評価値として算出しそれぞれの配置の利便性を比較し評価する。ここでは、 (t, m, s) -net の性質上⁵⁾ 2^n 個の配置が構成しやすいことから 1 周期に全部で 16 回サービスを行う状況を想定する。

格子状配置(図 4)は空間的にも時間的にも等間隔に規則的に並んでいる。つまり、少ない地点で頻度を高く、同じ時刻に複数箇所サービスを行っている状況を示す。利用者にとってサービス提供場所及び時間とともにとてわかりやすい配置である。この場合、平均利用者コスト、サービス被覆率ともに解析的に導出できる。

ランダム配置(図 5)は格子状配置の対極として空間的

にも時間的にも全く規則性がない状況である。時間も場所もばらばらにサービスポイントを配置したものである。従って、時空間配置におけるサービス水準の下限値を与えるものとみなせる。また、平均利用者コスト、サービス被覆率ともに解析的に導出できる。

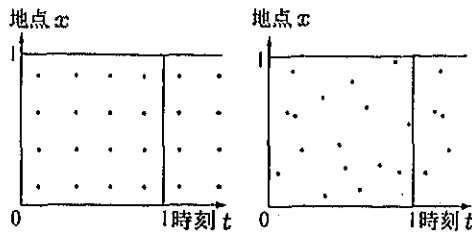


図 4: 格子状配置

図 5: ランダム配置

もう1つの配置は (t,m,s) -net 配置 (図 6) である。これは近年金融工学などの分野で、多重数値積分の精度を落とさずに早く近似値を求めるため注目されてきた準乱数の配置である。ここでは伏見⁶⁾により示唆された施設配置を、時空平面へ応用する。16 点の配置の例として図 6 の配置を考える。厳密な説明は手塚⁵⁾によるものを参考にされたい。図 6(a)-(f) のように同一配置において、 1×1 の正方形を $(1/1) \times (1/16)$, $(1/2) \times (1/8)$, $(1/4) \times (1/4)$, $(1/8) \times (1/2)$, $(1/16) \times (1/1)$ の各矩形で区切った時、どのように区切っても各矩形に点が 1 つ入るような配置である。図 6 の (b) 及び (c) からわかるようにこの配置は時間という側面からみても、距離という側面からみても等間隔になっている。また、図 6 の (b)(c)(d)(e)(f) から読み取れるように、時空間平面を点の個数の矩形群で区切ったときすべての矩形に点が 1 個含まれる。格子状配置より分散していて、ランダム配置より規則性があることからそれらの中間といえるであろう。

図 6(b) 及び (c) の (t,m,s) -net 配置からも分かるように α や β の一方が極端に大きい場合、すなわち待ち時間や移動距離に極端にウェイトを置く場合、 (t,m,s) -net 配置が時間軸もしくは空間軸で等間隔にあることから、最も優れていることは容易に分かる。しかし、その他の場合については直感的によく分からない。そこで、これ以降の分析では、これら 3 種類の時空間配置を比較する。

3.2. 平均利用者コストによる比較

平均利用者コストはすべての利用者のコストの和を求め利用者数で割ったものである。導出過程は紙面制約により省くが $n \times n$ 点での格子状及びランダム配置の平均利用者コスト $f_G(n, \alpha, \beta)$, $f_R(n, \alpha, \beta)$ は

$$f_G(n, \alpha, \beta) = \alpha/2n + \beta/4n. \quad (3)$$

$$f_R(n, \alpha, \beta) = \sqrt{\alpha\beta\pi}/2n. \quad (4)$$

となる。一方 (t,m,s) -net については解析的に求められないため、プログラム言語 Pascal により需要点を一様乱数

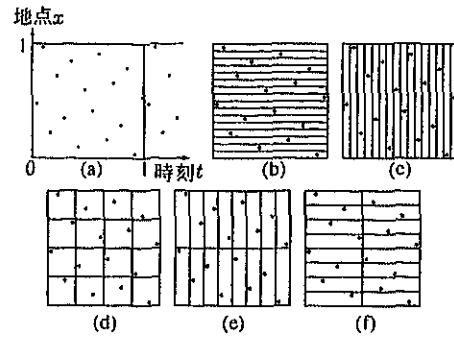


図 6: (t,m,s) -net 配置

で 10,000 点発生させ平均利用者コストを推定した。

まず、利用者の行動属性が同一の場合を考える。 $\alpha + \beta = 1$ とし、 α を変化させた結果を図 7 に示す。同一の行動属性をもつ利用者群を考えた場合、平均利用者コストが最も小さくなっているのは、待ち時間・移動時間をともに重視しない利用者の場合は格子状配置であり、それ以外は (t,m,s) -net 配置となっている。

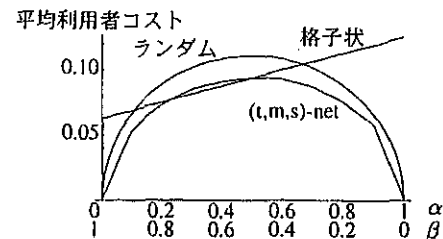


図 7: α, β の違いによる平均利用者コスト

次に、利用者の行動属性が混在している場合を考える。ここでは、以下の 3 パターンの利用者を考える。(1) 待ち時間重視の利用者 $(\alpha, \beta) = (0.9, 0.1)$, (2) 移動距離重視の利用者 $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.9)$, (3) その中間 $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.5)$ である。利用者がそれぞれのパターンについて $s, t, 1-s-t$ ($0 \leq s, t \leq 1$) の割合で構成されているとする。まず、行動属性が 1 パターンの場合の平均利用者コストを求める。図 7 から読み取れるように、それぞれの配置と行動パターンの平均利用者コストは表 1 のようになる。

表 1: 行動属性が 1 パターンでの平均利用者コスト

	$s=1$	$t=1$	$1-s-t=1$
格子状	0.069	0.119	0.094
ランダム	0.066	0.066	0.111
(t,m,s) -net	0.054	0.058	0.095

そして、表 1 の数値にそれぞれの属性の割合をかけ足しあげる。その結果が行動属性の異なる利用者が混在した場合の平均利用者コストとなる。これより、それぞれの配置における平均利用者コストは以下の式で求まる。

格子状 : $0.069s + 0.119t + 0.094(1 - s - t)$
 ランダム : $0.066s + 0.066t + 0.111(1 - s - t)$
 (t,m,s)-net : $0.054s + 0.058t + 0.094(1 - s - t)$

3種類の配置のうち最も平均利用者コストが小さくなる s, t の組み合わせを示したものが図8である。図8から待ち時間・移動時間をともに重視しない利用者が多い場合、すなわち $1 - s - t = 1$ に近い場合、格子状配置が最も有効である。それ以外では (t,m,s)-net 配置が最もコストが小さく (t,m,s)-net 配置がより利便性が高いことが示された。

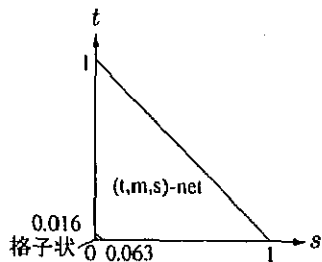


図 8: 様々な行動属性での利用者コストの低い配置

3.3. サービス被覆率による比較

サービス被覆率は、行動できる時間と行動できる距離の幅の中にサービスポイントがある利用者の全体に占める割合である。

まず、利用者の行動属性が同一の場合を考える。行動可能範囲を $\gamma\delta = 1/16$ と限定して、どのような場合においてどの配置がふさわしいのかを見るために、 γ, δ を変化させたときのサービス被覆率を求める。導出過程は紙面制約により省くが $n \times n$ 点での格子状及びランダム配置のサービス被覆率 $g_G(n, \delta, \gamma), g_R(n, \delta, \gamma)$ は

$$g_G(n, \delta, \gamma) = \begin{cases} n^2\delta\gamma & (\delta \leq \frac{1}{n}, \gamma \leq \frac{1}{n}) \\ n\delta & (\delta \leq \frac{1}{n}, \gamma \geq \frac{1}{n}) \\ n\gamma & (\delta \geq \frac{1}{n}, \gamma \leq \frac{1}{n}) \\ 1 & (\delta \geq \frac{1}{n}, \gamma \geq \frac{1}{n}) \end{cases} \quad (5)$$

$$g_R(n, \delta, \gamma) = 1 - e^{-n^2\delta\gamma} \quad (6)$$

となる。(t,m,s)-net 配置については解析的に計算できないため、利用者の時刻・地点 (t, x) を Pascal による乱数を用い 10,000 回発生させ求めた。これらの結果を図9に示す。横軸の左ほど移動制約は大きく時間制約が小さい場合であり、右ほどその逆となる。

図9から、時間制約は小さいが移動制約の大きい場合 ($\gamma < \delta$) と、移動制約は小さいが時間制約の大きい場合 ($\gamma > \delta$) は (t,m,s)-net が最も被覆率が高く、格子状は低い。それらの中間の場合 (γ, δ が同程度の場合) は格子状が最も大きくなっている。この結果をみると、多くの場

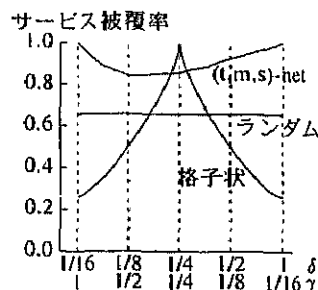


図 9: γ, δ の違いによるサービス被覆率

合 (t,m,s)-net 配置が優れるが、行動属性によっては格子状配置も高いサービスを提供することが読み取れる。

次に、利用者の行動属性が混在している場合を考える。ここでは、以下の3パターンの利用者を考える。(1) 時間制約はないが移動制約の大きい利用者 ($\gamma, \delta = (1/16, 1)$), (2) 移動制約はないが時間制約の大きい利用者 ($\gamma, \delta = (1, 1/16)$), (3) それらの中間の利用者 ($\gamma, \delta = (1/4, 1/4)$) である。利用者がそれぞれのパターンについて $u, v, 1-u-v$ ($0 \leq u, v \leq 1$) の割合で構成されているとする。まず、行動属性が1パターンの場合のサービス被覆率を求める。図9から読み取れるように、それぞれの配置と行動パターンのサービス被覆率は表2のようになる。

表 2: 行動属性が1パターンでのサービス被覆率

	$u = 1$	$v = 1$	$1 - u - v = 1$
格子状	0.250	0.250	1.000
ランダム	0.632	0.632	0.632
(t,m,s)-net	1.000	1.000	0.831

そして、表2の数値にそれぞれの属性の割合をかけ足しあげる。その結果が行動属性の異なる利用者が混在した場合のサービス被覆率となる。これより、それぞれの配置におけるサービス被覆率は以下の式で求まる。

$$\text{格子状} : 0.250u + 0.250v + 1.000(1 - u - v)$$

$$\text{ランダム} : 0.632u + 0.632v + 0.632(1 - u - v)$$

$$(t,m,s)\text{-net} : 1.000u + 1.000v + 0.831(1 - u - v)$$

このとき3種類の配置のうち最もサービス被覆率が大きくなる s, t の組み合わせを示したものが図10である。図10から移動制約・時間制約がともに中間程度の利用者が多い場合、すなわち $1 - u - v = 1$ に近い場合、格子状配置が最も有効である。それ以外では (t,m,s)-net 配置が最も被覆率が大きく (t,m,s)-net 配置がより利便性が高いことが示された。

以上の単純な分析を通して、平均利用者コストとサービス被覆率のいずれの評価基準を用いたとしても、多くの場合 (t,m,s)-net 配置が利便性が高いことがわかった。特に多様な利用者属性の場合、(t,m,s)-net 配置が優れる

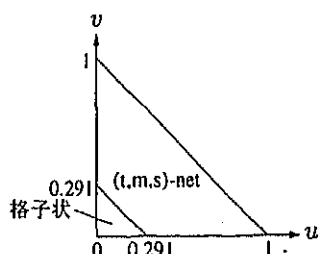


図 10: 様々な行動属性でのサービス被覆率の高い配置ことがわかった。

自動車交通の発達や高齢化社会において利用者のモビリティの変化が話題となっている。ここでの結果はそれに対応して、施設の時空間配置を考える必要のあることを示唆している。

4. 実証的考察

神戸市北区を考察の対象とする(図 11)。この地区の選定理由のひとつは移動図書館サービスを行っていることである。この地域には図 11 のように本館・分館は2地点あり、移動図書館の巡回地点は18点ある。もうひとつの理由として、図 11 において網かけを施した領域は平成7年の国勢調査による人口集中地区であり、太線で示された道路にほぼ沿って存在する。人口パターンや地形の影響もあり太線で示した道路に沿った線的地域とほぼみなすことができる。そのため、前述の理論的結果が活用できる。このような2つの主な理由から対象とした。

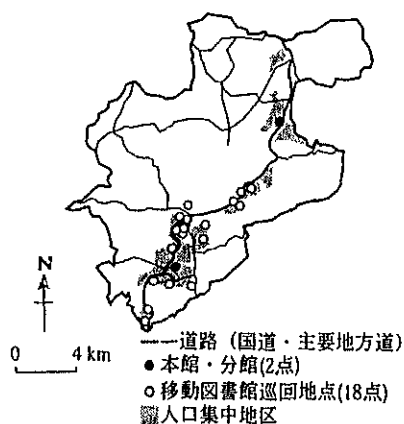


図 11: 神戸市北区図書館配置図 (現状)

図 11 の太線部分を1次元空間とし、サービス地点を直線距離で最も近い太線上に写像すると、図 12 のような時空間平面上配置となる。この配置と、前章でより利便性が高いことが示された (t,m,s) -net(16点)配置(図 14)とを人口分布一様という前提で比較する。時空間平面の縦軸には図 12 及び図 14 に示された主要道路の長さ(30km)をとる。横軸には移動図書館の巡回の1周期(4週間)をとる。

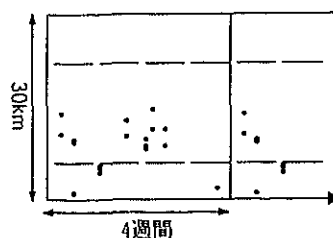


図 12: 神戸市北区図書館時空間平面図 (現状)

る。1日の行動時間を8時間とし、1周期を $8 \times 28 = 224$ 時間とする。なお、時空間平面上において本館・分館はサービス時間が長い線となり、移動図書館はサービス時間が短いため点となる。

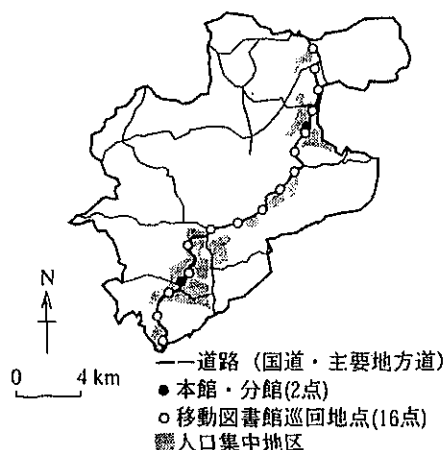


図 13: 神戸市北区図書館配置図 $((t,m,s)$ -net)

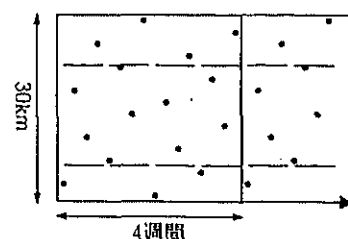


図 14: 神戸市北区図書館時空間平面図 $((t,m,s)$ -net)

平均利用者コストは以下の3パターンを設定して求めた。(1)1時間待つこと=1km移動すること、(2)1時間待つこと=3km移動すること、(3)1時間待つこと=5km移動することである。(2)は健康者の大人の徒歩のスピードであり、(1)のパターンの利用者はより移動に負担がかかり、(3)のパターンの利用者はより待ち時間に負担のかかる利用者を表わすことと考えられる。時空間平面の1時間は横軸の $\frac{1}{224}$ であり、1kmは縦軸の $\frac{1}{30}$ であるから、それぞれのパターンにおいて時間及び距離のウェイトは $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{224}, \frac{1}{30}), (\frac{1}{224}, \frac{1}{30 \times 3}), (\frac{1}{224}, \frac{1}{30 \times 5})$ とする。

現状の18地点より(t,m,s)-net配置の16地点のほうが巡回地点数が少ないことに注意したい。計算結果を表3に示す。いずれのパターンにおいても、この表から(t,m,s)-net配置の平均利用者コストは現状の配置より小さくなっている。特に、より待ち時間にウェイトを置くパターン(1)においては現状と比べ(t,m,s)-net配置が約2/3のコストとなっている。このことから交通手段の限られた利用者にとっては(t,m,s)-net配置は利便性を大きく向上させることがわかる。一方、より移動距離にウェイトを置くパターン(3)においては両配置にほとんど差異はない。自動車等の交通手段のある利用者にとって、(t,m,s)-net配置は現状と大きく変わらないことがわかる。

表 3: 神戸の例による平均利用者コスト

行動属性	現状	(t,m,s)-net
(1)1時間=1km	2.623×10^{-3}	1.871×10^{-3}
(2)1時間=3km	1.075×10^{-3}	0.958×10^{-3}
(3)1時間=5km	0.699×10^{-3}	0.668×10^{-3}

次に、利用者の行動属性が混在している場合を考える。表3よりいずれのパターンにおいても現状より(t,m,s)-net配置は平均利用者コストが小さいことから、利用者の構成がどのような割合であっても(t,m,s)-net配置の平均利用者コストが小さいことがわかる。よって利用者が混在している場合でも(t,m,s)-net配置がより利便性が高いことが示された。

サービス被覆率は以下の2パターンを設定して求めた。(1)いつでも1kmまで移動可能な場合、(2)1周期に1日限り5kmまで移動可能な場合である。パターン(1)は交通手段が徒歩しかないが時間制約のない利用者を表わす。パターン(2)は自動車等の交通手段を持つが時間制約のある利用者を表わす。計算ではそれぞれ $(\gamma, \delta) = (1, \frac{2}{30}), (\frac{1}{28}, \frac{19}{30})$ とした。

計算結果を表4に示す。いずれの場合においてもサービスポイントが少ないにもかかわらず、現状より(t,m,s)-net配置のほうがサービス被覆率はより大きくなっている。特に時間制約は小さいが移動制約の大きい利用者にとっては(t,m,s)-net時空間配置が利便性が高いことがわかる。

表 4: 神戸の例によるサービス被覆率

行動属性	現状	(t,m,s)-net
(1)いつでも1kmまで	0.557	1.000
(2)1日/1周期,5kmまで	0.713	0.723

次に、異なる行動属性の利用者が混在している場合を考える。表4よりいずれのパターンにおいても現状より(t,m,s)-net配置はサービス被覆率が大きいことから、利

用者の構成がどのような割合であっても(t,m,s)-net配置のサービス被覆率が大きいことがわかる。よって、利用者が混在している場合でも(t,m,s)-net配置がより利便性が高いことが示された。

人口分布一様という条件で平均コストとサービス被覆率という2つの評価基準を用いて考察すると、(t,m,s)-net配置は有効であると言える。特に移動制約の大きい利用者にとっては利便性が高いことがわかる。図12で示すように1日の巡回地点は近いところに固まっている。これを(t,m,s)-net配置のように1日の巡回地点をできるだけ広く分散することにより、より利便性の高い時空間配置が実現できることを例証した。

5. おわりに

本論文では、利用者の利便性を高めるという視点から、様々な行動属性を持つ利用者と時間を考慮した施設配置について議論した。行動の異なる利用者に対してはサービスポイントを(t,m,s)-net配置という時間的にも空間的にも分散させる政策により、利便性の高いサービスを提供できる配置となることを単純な数値例と神戸市の例を通して明らかにした。

本論文で示された結果は移動図書館サービスのみならず、震災等の被災地における給水車や生活物資の配布、移動検診車のサービスなどに応用できるだろう。今回示したモデルでは、利用者の移動速度、実際の人口分布、運営側の重要な要因である巡回サービスの移動コストを考慮していないという問題点があり、今後の課題としたい。また、利用者にとってわかりやすい配置という基準についても考慮していきたい。

謝辞

貴重なコメントを戴きました。伏見正則先生(南山大学)、藤塚武志先生(筑波大学)、田口東先生(中央大学)、諸星徳積先生(政策研究大学院大学)、匿名の査読者に対してここに謝意を表します。本研究の一部は平成12年度文部科学省科学研究費補助金(基盤研究(C),12680430)の補助を受けました。

参考文献

- 1) 中村恭三, 栗原嘉一郎(1998):地域図書館網の計画, 日本建築学会計画系論文集, 506, pp.53-60.
- 2) 武田晋, 伊理正夫(1984):地理的最適化手法を用いた動的施設配置, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.167-168.
- 3) 岡部篤行, 鈴木敦夫(1992):最適配置の数理, pp.127-141, 朝倉書店.
- 4) Hägerstrand, T. (1970): What about people in regional science? *Regional Science Association, Papers and Proceedings*, vol.24, pp.7-21.
- 5) 手塚集(1995):点列の discrepancy について, 離散構造とアルゴリズム IV, 室田一雄編, pp.99-130, 近代科学社.
- 6) 伏見正則(1995):施設配置問題への準乱数の適用について, 都市機能の集中・分散の得失に関する実証的研究, pp.108-112, 平成6年度科学研究費補助金重点領域研究『高度技術社会のバースペクティブ』研究成果報告書.

移動から見た線的施設までの距離分布

02602330 筑波大学 *宮川雅至 MIYAGAWA Masashi
01009480 筑波大学 大澤義明 OHSAWA Yoshiaki

1. はじめに

日常生活の移動では、時間に余裕を持って出発し、途中で寄り道をするのがよくある。本研究では、移動途中に立ち寄る施設が線的施設である場合を考え、線的施設が直線として表現できるとする。ただし、立ち寄る場所は直線上であればどこでも良いことにする。以下では、寄り道という移動パターンを表す楕円モデルと俵型モデルを用い、線的施設までの最近隣距離を理論的に導出する。

2. 楕円と交わる直線の測度

出発地 O から目的地 D へ向かうとき、起終点間距離を T 、迂回距離を $2r$ とすると、総移動距離が等しくなる地点の集合は楕円になり、楕円上の地点へ立ち寄るときの移動距離はすべて $T+2r$ となる（文献 [1]）。従って、楕円と直線が交われば、迂回距離 $2r$ 以内で立ち寄ることが可能である。

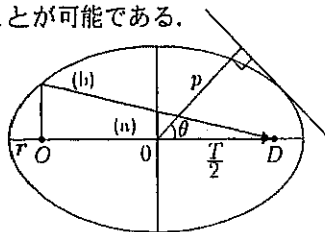


図 1: 楕円と交わる直線

原点から直線に下ろした垂線の長さを p 、 x - y 平面の直線は p - θ 平面における 1 点に対応させることができ、 $T=1, r=0.1$ のときの楕円と交わる直線群の p - θ 平面表示は図 2 のようになる。図 2 には、図 1 の移動 (a)、(b) と交わる直線群も表されている。(a) は全く迂回を許さない移動、(b) は移動距離 $T+2r$ の移動の一例である。

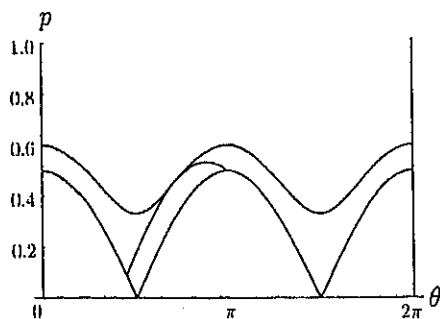
図 2: 楕円と交わる直線群の p - θ 平面表示

図 2 の領域の面積は、交わる直線の測度を表し、楕円の場合には

$$2(T+2r)E\left(\frac{T}{T+2r}\right) = L \quad (1)$$

と楕円の周長に一致し、第 2 種完全楕円積分を用いて表される。移動 (a)、(b) と交わる直線の測度はそれぞれ $2T, 2(T+r)$ となり、凸包の周長と一致する（文献 [2]）。

3. 直線までの最近隣距離

最近隣距離とは任意の移動に対し、最小の迂回で立ち寄り可能な直線までの迂回距離と定義する。そして、直線が一様にランダムに分布していると仮定する。

直線を p, θ を用いて表すと、一様にランダムな直線とは、 p 軸、 θ 軸上で点の分布が一様にランダムであるということに対応する（文献 [3]）。従って、楕円と少なくとも 1 本の直線が交わる確率は、 p - θ 平面において楕円と交わる直線群が示す領域の中に点が少なくとも 1 つある確率に等しい。

楕円と x 本の直線が交わる確率を $P(x, L)$ と表すことにすると、楕円と少なくとも 1 本の直線が交わる、つまり最近隣距離を R としたとき $0 < R < r$ である確率は

$$F(r) = 1 - P(0, L) \quad (2)$$

となる（文献 [3]）。ただし $F(r)$ は最近隣距離の累積分布関数である。直線の密度を ρ とすると、 $P(x, L)$ はポアソン分布に従うから、式 (1) より、

$$P(0, L) = \exp\left\{-2\rho(T+2r)E\left(\frac{T}{T+2r}\right)\right\} \quad (3)$$

とできる。従って、 $F(r)$ は

$$F(r) = 1 - \exp\left\{-2\rho(T+2r)E\left(\frac{T}{T+2r}\right)\right\} \quad (4)$$

と導かれる。図 3 は T を変化させたときの最近隣距離の累積分布関数を表す。 T が大きくなるにつれ、迂回距離が小さくても途中で立ち寄ることのできる確率が高くなる。 $T > 0$ のときの切片 $F(0) = 1 - \exp(-2\rho T)$ は O と D を結ぶ線分と直線が交わる確率を表しており、迂回を許さなくても立ち寄り可能となり得ることが点の場合と異なる直線の大きな特徴であるといえる。

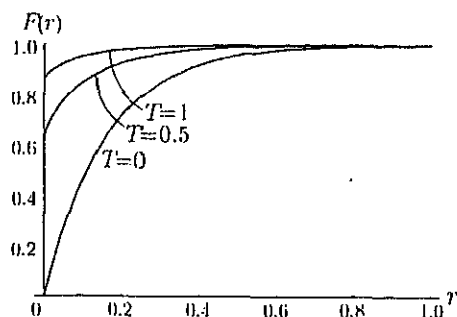


図 3: 最近隣距離の累積分布関数

4. 俵型モデル

楕円モデルでは出発地から直接立ち寄り施設に向かう移動を扱っていたが、ここではまずは目的地へ向かい、途中で寄り道をして再び元の経路に戻るような移動について考える。これは、沿道から見える施設に立ち寄りするような移動に対応する。このとき、総移動距離が等しくなる地点の集合は俵型になる。

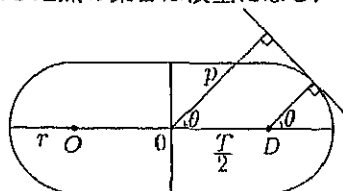


図 4: 俵型と交わる直線

図 5 は、俵型および O と D を結ぶ線分、すなわち迂回を許さない移動と交わる直線群の $p-\theta$ 平面表示である。楕円の場合と比較すると、迂回距離が等しくても迂回によって増加する部分が小さいことが分かる。

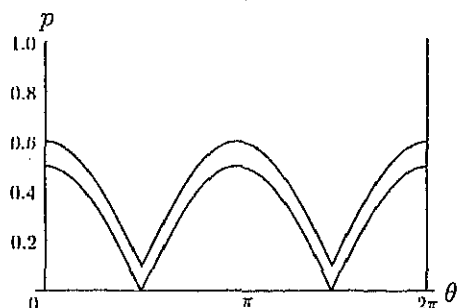


図 5: 俵型と交わる直線群の $p-\theta$ 平面表示

図 5 の領域の面積、すなわち俵型と交わる直線の測度は俵型の周長

$$L = 2(\pi r + T) \quad (5)$$

に一致し、最近隣距離の累積分布関数は

$$F(r) = 1 - \exp\{-2\rho(\pi r + T)\} \quad (6)$$

と導かれる。楕円の場合と比較すると、 $T > 0$ のときは楕円の方が確率が高く、さらに T が大きくなればその傾向は強まる。

5. 直線の密度が一定でない場合

直線が一様にランダムに分布している場合には、直線の密度 ρ は一定であったが、本節では ρ が確率密度関数

$$f(\rho) = \frac{1}{a\Gamma(p)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{p-1} e^{-\rho/a} \quad (7)$$

なるガンマ分布に従っているとすると、ここで p は分布の型に関係し、 a は対象全体における密度に関係する。このとき $P(x, L)$ は

$$P(x, L) = \frac{\Gamma(p+1)}{x!\Gamma(p)} \left(\frac{1}{1+aL}\right)^p \left(\frac{aL}{1+aL}\right)^x \quad (8)$$

という負の二項分布に従う (文献 [4])。最近隣距離の累積分布関数は式 (1), (2) より、

$$F(r) = 1 - \left[\frac{1}{1 + 2a(T + 2r)E\{T/(T + 2r)\}} \right]^p \quad (9)$$

と求まる。

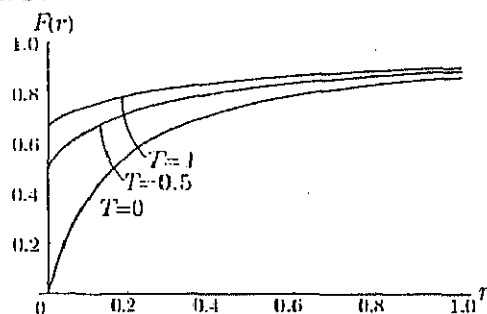


図 6: 最近隣距離の累積分布関数 ($a = 1, p = 1$)

6. おわりに

線形施設への立ち寄り易さの指標として楕円モデル、俵型モデルにおいて最近隣距離を求めた。また、一般化として直線の密度も確率変数として表される場合を考察した。

参考文献

- [1] 宮川雅至, 大澤義明 (2000): 迂回距離と旅行自由度との関係について, 日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.232-233.
- [2] L.A.Santaló(1976): Integral geometry and geometric probability. Addison-Wesley Publishing Company.
- [3] 腰塚武志 (1985): 都市施設の密度と利用者からの距離との関係について, 昭和 60 年度第 20 回日本都市計画学会学術研究論文集, pp.85-90.
- [4] 谷村秀彦, 梶秀樹, 池田三郎, 腰塚武志 (1986): 都市計画数理. 朝倉書店.

Bicriteria Euclidean Location Associated with Maximin and Minimax Criteria

Yoshiaki Ohsawa

*Institute of Policy & Planning Sciences, University of Tsukuba,
Ibaraki 305-8573 Japan*

1. INTRODUCTION

Since the seminal work of Halpern [8], many articles have been devoted to the study of single facility bicriteria planar location models. For example, McGinnis and White [14], Hansen and Thisse [11], Hansen, Peeters, and Thisse [13], Hamacher and Nickel [9], and Ohsawa [15] explored the efficient locations associated with the minisum and minimax criteria. An excellent review of multiobjective approach for location models can be found in Current, Min, and Schilling (1990). In their formulations, the facility may be considered as entirely *desirable*, or possessed of both desirable and *undesirable* characteristics, as analyzed by Hansen and Thisse [11], Erkut and Neuman [6], and Daskin [4]. An example of the latter is an airport. An airport is a desirable facility in the sense of needed accessibility, yet it is undesirable because of its noise. Another example is a radar station. A radar station is desirable in the sense that a central location reduces the power required to monitor the region. However, it is undesirable in the sense that the station needs to be located far from its neighborhood for secrecy and security. Fire stations, police stations, and hospitals can also be considered as such facilities, because they cause congestion and noise. Planners locating these facilities may wish to study the tradeoff between minimizing the distance to the farthest inhabitant and maximizing the distance to the nearest inhabitant.

We are concerned with a single facility bicriteria location model associated with maximin and minimax criteria in the Euclidean plane. We present a polynomial-time algorithm for generating the analytical expressions of the efficient set and the tradeoff curve between the conflicting goals. We characterize the set and the curve with the aid of nearest- and farthest-point Voronoi diagrams. Indeed the efficient set and the tradeoff curve will enable planners to reduce alternatives based on two criteria and, consequently, compare these remaining alternatives graphically in terms of these two criteria. Thus, the efficient set and the tradeoff curve will be much more useful to them than two types of single optimal solutions. Also, we will examine geometrically the solution set to scalarized planar location problems in which the objective is to minimize a convex combination of the maximin and minisum objective functions, with suitable weights assigned to each of the two objectives. Note that this solution set is a subset of the efficient set.

A related paper by Drezner and Wesolowsky [5] gave a numerical solution method to the constrained maximin planar problem, such that a facility to be located has to be within a threshold distance from each demand. This solution is also an efficient location for our formulation. Another related paper by Hansen and Thisse [11] proposed the Big Square–Small Square method for finding numerically the efficient locations for the single facility bicriteria planar problem associated with maximin and minisum criteria. Straightforward modification of their Big Square–Small Square method can also generate efficient locations for our formulation. However, to the best of

our knowledge, no analytical approaches to our subject have been reported in the literature. As compared to the numerical solutions, the analytical expression has at least two advantages. First, the efficient set for our bicriteria model frequently consists of some discontinuous segments. This means that it is difficult to interpolate the efficient set based on the efficient locations generated by the numerical methods. Second, analytical expressions will also enable the planners to carry out some sensitivity analyses both on the efficient set and the trade-off curve.

A theoretically related paper by Ohsawa [15] examined the bicriteria planar problem associated with the minisum and minimax criteria, where the travel cost between a facility and a demand is proportional to the squared Euclidean distance between them. A polynomial-time algorithm is proposed to find the efficient set for this problem, based on the farthest-point Voronoi diagram. The corresponding objective functions are both convex, so by Geoffrion [7] the efficient set coincides with the set of minimizers of the convex combinations of these two criteria, and by Hansen, Peeters, and Thisse [13], the efficient set consists of a continuous simple curve. The main difficulty in finding the efficient set for our formulation arises from the fact that the objective function corresponding to the maximin criterion is neither quasiconvex nor quasiconcave. Therefore, these two findings are of little help here. Instead, in this paper we reduce the candidate efficient locations by using a constrained minimax planar location problem, and find the efficient set by explicitly dealing with space generated by two criteria.

The remainder of this paper is organized as follows. Two types of single objective planar location models and their solution methods are presented in Section 2. Section 3 describes a polynomial-time algorithm for identifying the efficient set and the tradeoff curve, and characterizes the set and the curve, based on the geometrical analyses. Section 4 concludes the paper with a possible extension.

2. SINGLE OBJECTIVE MODELS

2.1. Formulation

Let Ω be a polygon with k (≥ 3) sides on the plane. We denote its boundary by $\partial\Omega$. Let p_1, \dots, p_m represent the distinct locations of m (≥ 2) population centers on the plane. In the *maximin* model, a facility is established within the feasible region Ω in order to maximize the Euclidean distance from the facility to its nearest population center (Hansen and Thisse [12]). Mathematically, this is

$$\max_{x \in \Omega} F(x) \equiv \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \|x - p_i\|. \quad (1)$$

The maximizer of $F(x)$, denoted by a^* , is called an *antcenter*.

Let q_1, \dots, q_n represent the distinct locations of n (≥ 2) demands on the plane. In the *minimax* model, a facility is set up within Ω in order to minimize the Euclidean distance from the facility to its farthest demand (Hansen and Thisse [12]). Mathematically, this is

$$\min_{x \in \Omega} G(x) \equiv \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|x - q_i\|. \quad (2)$$

The minimizer of $G(x)$, denoted by c^* , is called a *center*.

Models (1) and (2) are called the *largest empty circle* and the *smallest enclosing circle problems*, respectively, in computational geometry (Shamos and Hoey [18], Okabe and Suzuki [17]).

2.2. Voronoi Diagrams

In basic Voronoi diagram literature, the *nearest-point* (resp. *farthest-point*) *Voronoi polygon* associated with p_i (resp. q_j), denoted by V_i (resp. W_j), is defined as follows:

$$V_i \equiv \bigcap_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}} \{x \mid \|x - p_i\| \leq \|x - p_k\|\},$$

$$W_j \equiv \bigcap_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} \{x \mid \|x - q_j\| \geq \|x - q_k\|\}.$$

We denote their boundaries by ∂V_i and ∂W_j , respectively. The union of V_1, \dots, V_m (resp. W_1, \dots, W_n) is called a *nearest-point* (resp. *farthest-point*) *Voronoi diagram* (Shamos and Hoey [18]). The edges and vertices of these diagrams are called *Voronoi edges* and *vertices*, respectively. We define ∂V and ∂W by $(\cup_{i \in \{1, \dots, m\}} \partial V_i) \cap \Omega$ and $(\cup_{i \in \{1, \dots, n\}} \partial W_i) \cap \Omega$, respectively. We define \tilde{V} and \tilde{W} as the sets of the extreme points of ∂V and ∂W , respectively. Thus, \tilde{V} (resp. \tilde{W}) consists of nearest-point (resp. farthest-point) Voronoi vertices, and the intersections of nearest-point (resp. farthest-point) Voronoi edges and $\partial\Omega$. Similarly, we define $\tilde{\Omega}$ as the set of the extreme points of $\partial\Omega$. The nearest-point Voronoi diagram on the square feasible region is illustrated in Figure 1, where five population centers p_1, \dots, p_5 are designated by bullets, and ∂V and $\partial\Omega$

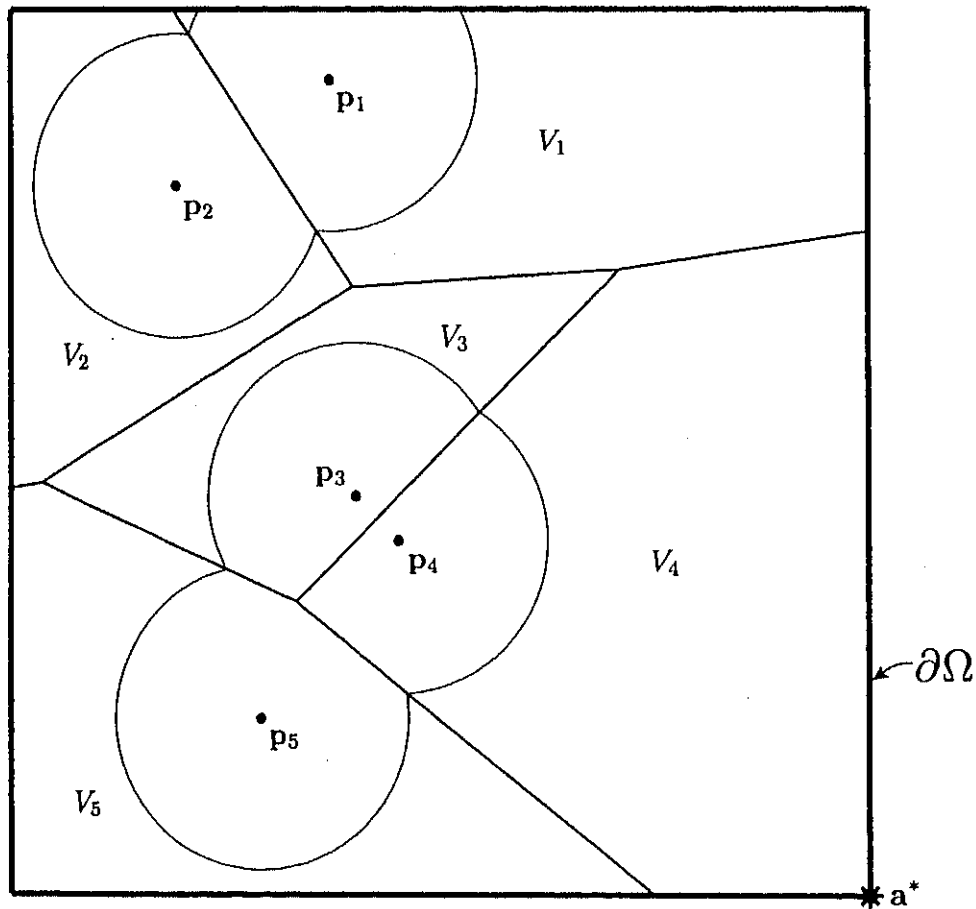


Figure 1. Nearest-point Voronoi diagram and a contour of maximin criterion.

are indicated by thin and thick segments, respectively. The farthest-point Voronoi diagram on the identical region is exhibited in Figure 2, where four demands q_1, \dots, q_4 are designated by small circles, and ∂W is indicated by broken segments.

2.3. Contours and Solutions

For specified values $\alpha (\geq 0)$ and $\beta (\geq 0)$, define $L_F(\alpha)$ and $L_G(\beta)$ by $L_F(\alpha) \equiv \{x \in \Omega \mid F(x) = \alpha\}$ and $L_G(\beta) \equiv \{x \in \Omega \mid G(x) = \beta\}$. Thus, $L_F(\alpha)$ and $L_G(\beta)$ correspond to the contours of the maximin and minimax criteria, respectively. Two notes, which will be of use in the theoretical developments, are in order. First, as pointed out by Hansen and Thisse [12] and Ohsawa and Imai [16], $L_F(\alpha)$ (resp. $L_G(\beta)$) is the boundary of the union (resp. intersection) of the region inside the disks around the p_i 's (resp. q_j 's) with radius α (resp. β) within Ω (see Figs. 1 and 2). Thus, $F(x)$ is neither quasiconvex nor quasiconcave, though $G(x)$ is quasiconvex. Second, a point x on the contour $L_F(\alpha)$ (resp. $L_G(\beta)$) is called a *kink* if and only if x is an intersection point of these two disks. Hence, any kink of $L_F(\alpha)$ (resp. $L_G(\beta)$) lies on a nearest-point (resp. farthest-point) Voronoi edge, i.e., it is equal distant from two population centers (resp. demands). For example, five and four kinks can be found in Figures 1 and 2, respectively.

The maximin model (1) can be solved in $O(m \log m + km)$ time with the help of the nearest-point Voronoi diagram, because the anticenter a^* is either an element of \tilde{V} or an element of $\tilde{\Omega}$ (Shamos and Hoey [18], p. 153). On the other hand, the minimax model (2) can be solved in

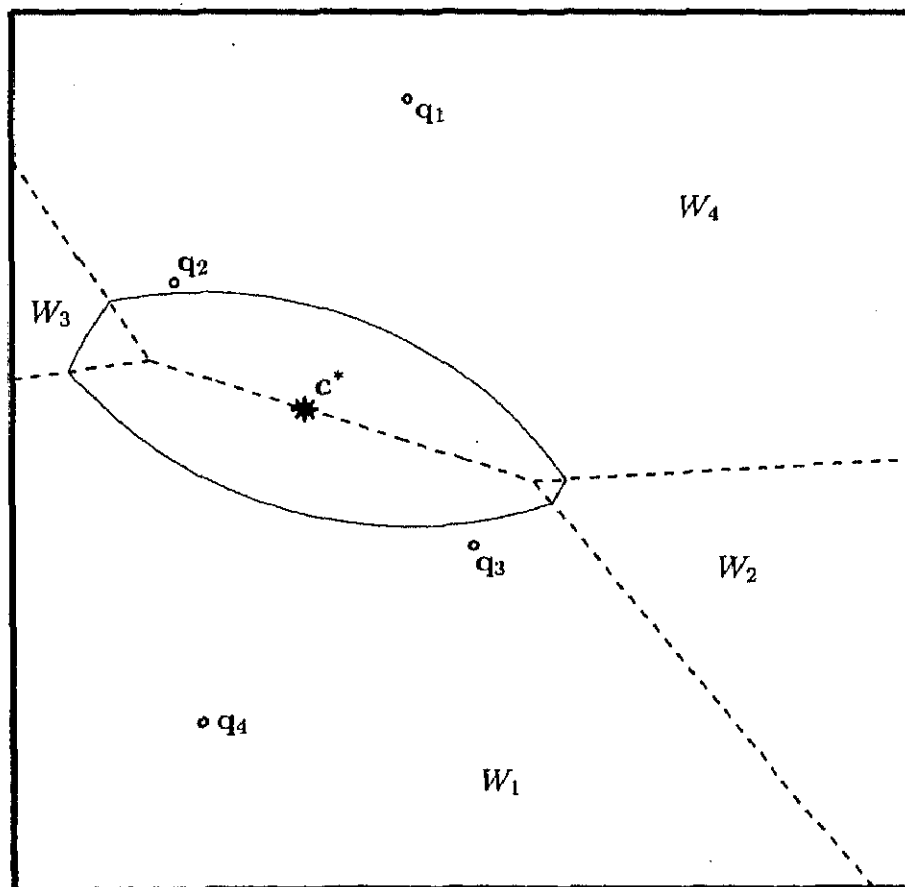


Figure 2. Farthest-point Voronoi diagram and a contour of minimax criterion.

$O(n \log n + kn)$ time with the aid of the farthest-point Voronoi diagram. In fact, the center c^* is (i) an element of \tilde{W} , (ii) a midpoint on ∂W between two demands, (iii) an element of $\tilde{\Omega}$, or (iv) a foot of the perpendicular to $\partial\Omega$ from a demand. Unless c^* lies on $\partial\Omega$, either of the first two cases occurs (Shamos and Hoey [18] p. 154). Otherwise either of the last two cases arises, since $G(x)$ is quasiconvex, and the contours of $G(x)$ consist of circular arcs from each demand, as we noted. Thus, these two single facility models (1) and (2) can be dealt with as discrete optimization problems. In Figures 1 and 2, a^* lying on $\tilde{\Omega}$ and c^* , which is the midpoint between q_1 and q_4 , are plotted by asterisks, respectively.

3. BICRITERIA MODEL

3.1. Dominance and Efficiency

For any two distinct points $x, y \in \Omega$, x dominates y , denoted by $x \succ y$, if and only if $F(y) \leq F(x)$ and $G(y) \geq G(x)$, with strict inequality for at least one inequality. The point x is *efficient* (Pareto-optimal) if and only if $y \in \Omega$ does not exist, such that $y \succ x$. The set of all the efficient points, denoted by E^* , is called the *efficient set*. Since we concentrate on the efficient locations throughout the remainder of this paper, only efficient anticenters and centers are denoted by a^* and c^* , respectively. As we have seen, all the anticenters (resp. centers) can be enumerated in $O(m \log m + km)$ (resp. $O(n \log n + kn)$) time. Accordingly, the efficient anticenters (resp. centers) can also be found in $O(m \log m + km)$ (resp. $O(n \log n + kn)$) time.

3.2. Characterization of the Efficient Set

For a fixed $\alpha (\geq 0)$, consider a constrained minimax problem in which the objective is to minimize $G(x)$ subject to the constraint $x \in L_F(\alpha)$. This was formulated in Brady and Rosenthal [2]. Let $s^*(\alpha)$ denote the solution of this constrained problem. The following proposition asserts that the search for the efficient set can be restricted from the two-dimensional region Ω to the one-dimensional region $\partial V \cup \partial W \cup \partial\Omega$.

PROPOSITION 1:

$$E^* = \{s^*(\alpha) \mid F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)\} \subseteq \partial V \cup \partial W \cup \partial\Omega.$$

PROOF: First, we establish that $E^* = \{s^*(\alpha) \mid F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)\}$. As implicitly mentioned by Hansen, Peeters, and Thisse [13], $E^* \subseteq \{s^*(\alpha) \mid 0 \leq \alpha < \infty\}$. (This is because for any $x \in E^* \setminus \{s^*(\alpha) \mid 0 \leq \alpha < \infty\}$, $F(s^*(\alpha_0)) = F(x)$ and $G(s^*(\alpha_0)) < G(x)$, where $s^*(\alpha_0) \in L_F(x)$, so $s^*(\alpha_0) \succ x$, which yields a contradiction.) For all α with $0 \leq \alpha < F(c^*)$, $s^*(\alpha) \prec c^*$ since $F(s^*(\alpha)) < F(c^*)$ and $G(s^*(\alpha)) > G(c^*)$. In addition, for all α with $F(a^*) < \alpha$, $s^*(\alpha)$ does not exist since $L_F(\alpha) = \emptyset$. Therefore, we get $E^* \subseteq \{s^*(\alpha) \mid F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)\}$. Moreover, since $G(x)$ is quasiconvex, $G(s^*(\alpha))$ is increasing in α for $F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)$. This means that any element of $\{s^*(\alpha) \mid F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)\}$ cannot be dominated by other elements of this set. Thus, we have the first assertion.

Next, we demonstrate that $\{s^*(\alpha) \mid F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)\} \subseteq \partial V \cup \partial W \cup \partial\Omega$. There are three possibilities for the location of $s^*(\alpha)$ on $L_F(\alpha)$: (i) $s^*(\alpha) \in \partial\Omega$; (ii) $s^*(\alpha)$ lies on a kink of $L_F(\alpha)$, so $s^*(\alpha) \in \partial V$; (iii) $s^*(\alpha)$ lies neither on $\partial\Omega$ nor any kink of $L_F(\alpha)$. For the third case, there are now two subcases for the location of $s^*(\alpha)$ on $L_G(G(s^*(\alpha)))$: (iiia) $s^*(\alpha)$ lies on a kink of $L_G(G(s^*(\alpha)))$, so $s^*(\alpha) \in \partial W$; (iiib) $s^*(\alpha)$ does not lie on such a kink. Since $F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)$, c^* is inside the contour $L_F(\alpha)$. Hence, the contour $L_G(G(s^*(\alpha)))$ has

to be inscribed in the contour $L_F(\alpha)$ due to the quasiconvexity of $G(x)$. Thus, in subcase (iiib), the circle with radius $G(s^*(\alpha))$ has to be inscribed in the circle with radius $\alpha = F(s^*(\alpha))$. However, this contradicts the fact that $F(s^*(\alpha)) < G(s^*(\alpha))$, so the subcase (iiib) cannot occur. In conclusion, $s^*(\alpha) \in \partial V \cup \partial W \cup \partial \Omega$, as required. \square

3.3. Method for Constructing the Efficient Set

Consider the planar network \mathcal{N} which is obtained by merging the nearest-point Voronoi diagram with farthest-point Voronoi diagram together, as shown in Figure 3. According to basic network literature, line segments of \mathcal{N} and their endpoints are called *links* and *nodes*, respectively. Note that the point set corresponding to all the links of \mathcal{N} coincides with $\partial V \cup \partial W \cup \partial \Omega$, and that the point set corresponding to all the nodes of \mathcal{N} coincides with $\tilde{V} \cup \tilde{W} \cup \tilde{J} \cup \tilde{\Omega}$, where \tilde{J} is the set of the intersections of ∂V and ∂W . In Figure 3, there are 29 links and 20 nodes.

For a link l such that $l \in V_i \cap W_j$, let p'_i and q'_j denote the feet of the perpendicular from p_i and q_j to the line containing l (see Fig. 4). For any point x on the link l , using the fact that $F(x) = \|p_i - x\|$ and $G(x) = \|q_j - x\|$ and applying the Pythagorean theorem leads to the

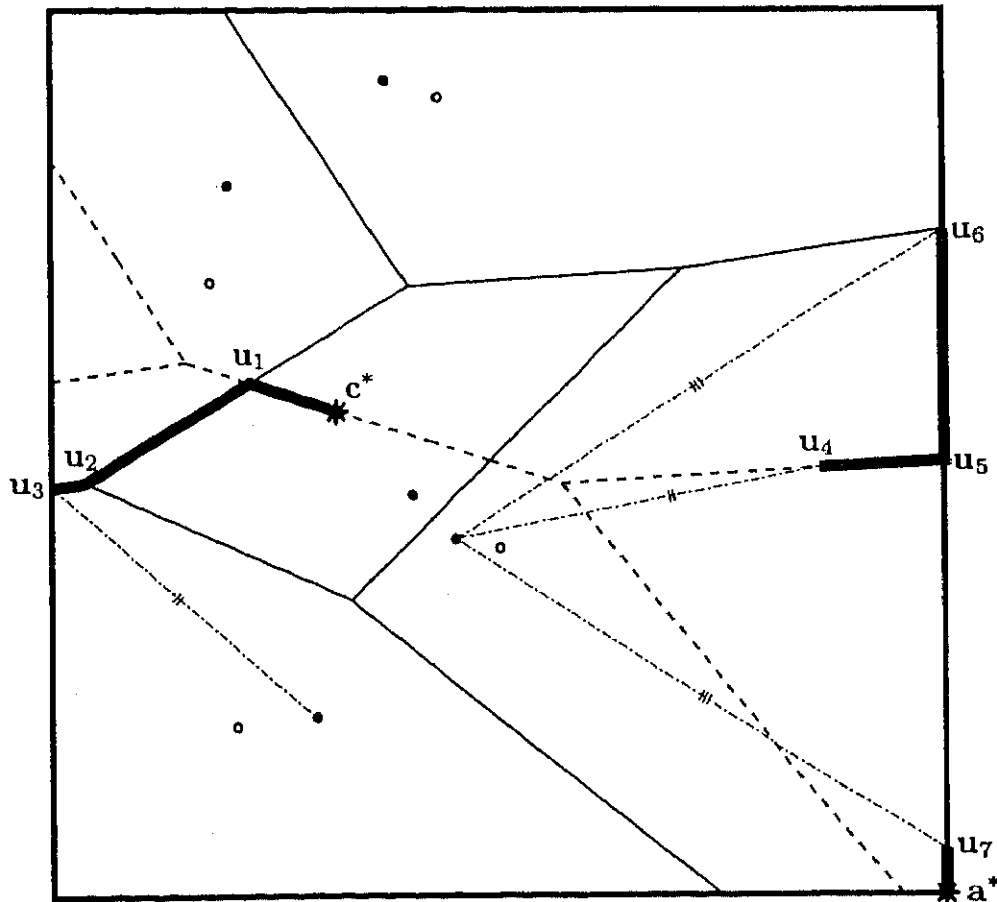
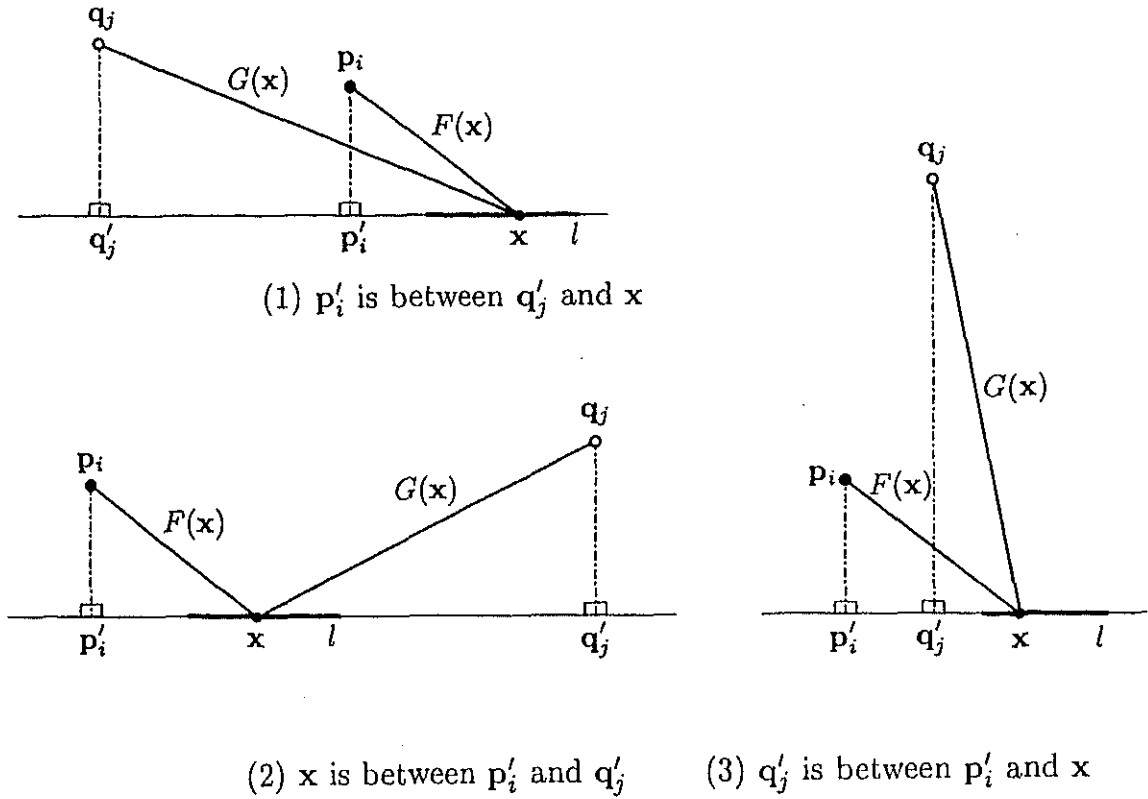


Figure 3. Efficient set in geographical space.

Figure 4. Relationship between $F(x)$ and $G(x)$.

following equation:

$$G(x)^2 = \begin{cases} (\sqrt{F(x)^2 - \|p_i - p'_i\|^2} + \|p'_i - q'_j\|)^2 + \|q_j - q'_j\|^2, & \text{if } p'_i \text{ is between } q'_j \text{ and } x, \\ (\sqrt{F(x)^2 - \|p_i - p'_i\|^2} - \|p'_i - q'_j\|)^2 + \|q_j - q'_j\|^2, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

Figure 5 shows the graph of $(F(x), G(x))$ for all the points lying on the network \mathcal{N} , i.e., $\partial V \cup \partial W \cup \partial \Omega$ in Figure 3, with the horizontal (resp. vertical) axis measuring the values of $F(x)$ (resp. $G(x)$) in criterion space. As in the case of Figures 1 and 2, the graphs corresponding to ∂V , ∂W , and $\partial \Omega$ are indicated by the thin, broken, and thick segments, respectively. As we move along a link of \mathcal{N} , both $F(x)$ and $G(x)$ change continuously, so this graph has the same topological structure as the network \mathcal{N} in Figure 3.

To avoid misunderstanding, the point set corresponding to the efficient set in criterion space is called the *tradeoff curve*. It follows from the definition of the constrained solution $s^*(\alpha)$ and the second assertion of Proposition 1, that the graph of $(F(x), G(x))$ for $s^*(\alpha)$ with $F(c^*) \leq \alpha \leq F(a^*)$ has to coincide with the lower envelope of the collection of the curves corresponding to the network \mathcal{N} between $F(c^*)$ and $F(a^*)$. Therefore, we can conclude from the first assertion of Proposition 1 that the tradeoff curve has to coincide with this lower envelope. While in the general case, the domain of the tradeoff curve consists of the union of disjoint intervals (see, e.g., Hamacher, Labbé, and Nickel [10]); in our model it consists of a single interval.

The algorithm to find the efficient set can be stated in compact form as follows:

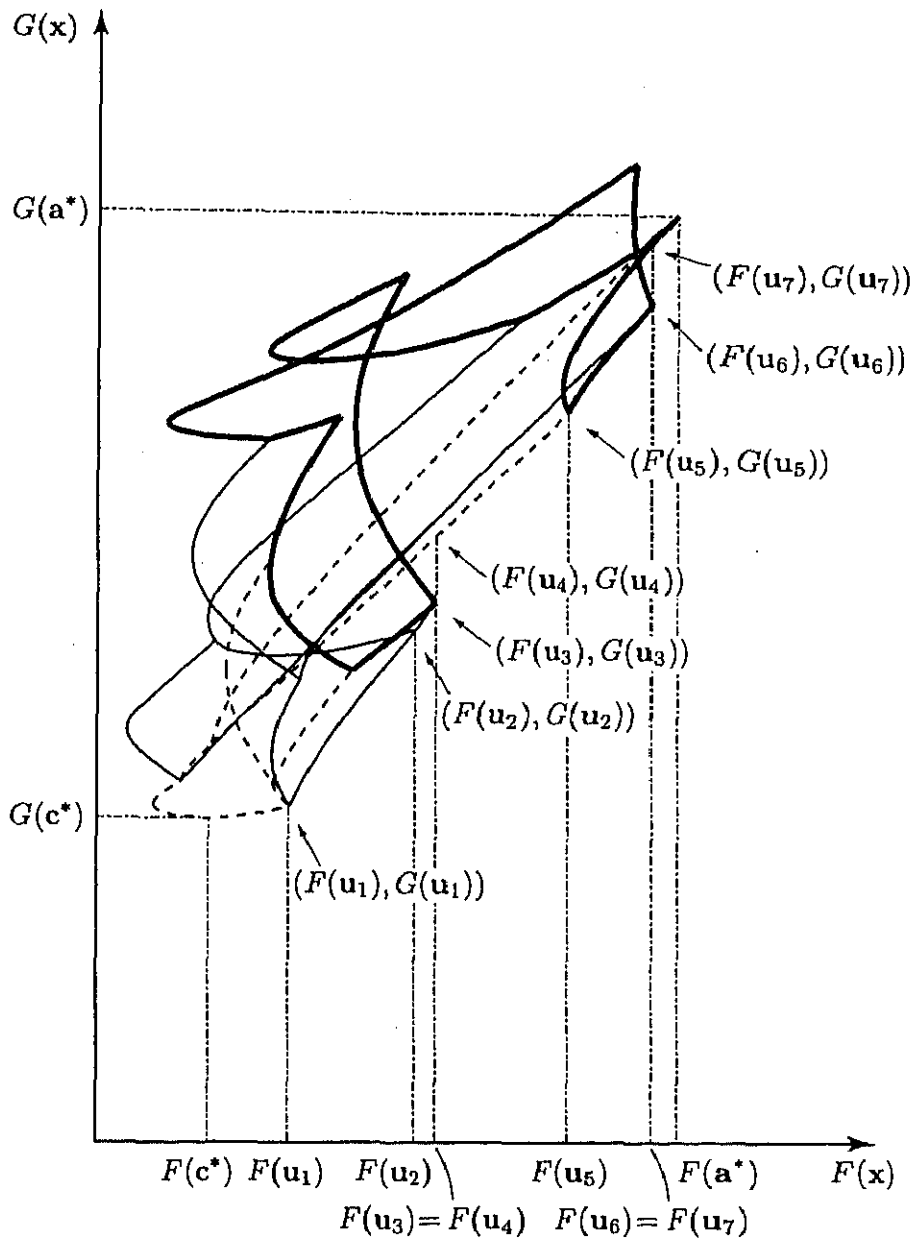


Figure 5. Tradeoff curve in criterion space.

1. In geographical space, construct the nearest-point Voronoi diagram generated by p_1, \dots, p_m , and the farthest-point Voronoi diagram generated by q_1, \dots, q_n within Ω , and find an efficient anticenter a^* and an efficient center c^* .
2. In criterion space, for each link of the network \mathcal{N} , draw the corresponding curve defined by Eq. (3) for $F(c^*) \leq F(x) \leq F(a^*)$.
3. Find the lower envelope of these curves.
4. In geographical space, find the set of links or sublinks (which are generated by splitting up links) corresponding to this lower envelope.

We see from Figure 5 that the lower envelope between $F(c^*)$ and $F(a^*)$ in our example consists of six curves. Therefore, the efficient set can be defined by the six bold line segments as shown in

Figure 3. The extreme points of the efficient set, which correspond to the endpoints of those six curves, except a^* and c^* are designated by u_1, u_2, \dots, u_7 . As shown in Figure 3, as α increases, the constrained solution $s^*(\alpha)$ moves from c^* to u_3 through u_1 and u_2 along three Voronoi edges, then jumps to u_4 and moves to u_6 through u_5 along a Voronoi edge and $\partial\Omega$, and then jumps to u_7 and moves to a^* along $\partial\Omega$. Thus, the efficient set consists of three discontinuous parts.

Let us now study the complexity of our algorithm. Step 1 can be done in $O(m \log m + km) + O(n \log n + kn)$ time, as we have seen. Since there are $O(m)$ nearest-point Voronoi edges and $O(n)$ farthest-point Voronoi edges in the entire plane, respectively, as shown in Shamos and Hoey [18], the number of the links of \mathcal{N} is $O(kmn)$. So, Step 2 requires $O(kmn)$ operations. In criterion space the curves corresponding to any two links of \mathcal{N} intersect each other at most twice, since these intersections can be obtained by solving a biquadratic equation based on (3). This means that the lower envelope consists of $O(kmn)$ curves. Step 3 requires $O(kmn \log kmn)$ time in the worst case with a divide-and-conquer method, as shown in Boissonnat and Yvinec [1]. Since the number of the curves on the lower envelope is $O(kmn)$, Step 4 can be carried out in $O(kmn)$ time. Therefore, the total time complexity, which equals the time complexity of Step 3, is $O(kmn \log kmn)$. Thus, we establish the following proposition:

PROPOSITION 2: The efficient set can be found in polynomial time.

Three remarks are in order. First, as the efficient set consists of only segments, it can be obtained using ordinary personal computers without sophisticated calculations. Second, when Ω is convex with $O(\max\{m, n\})$ edges, the total time complexity reduces to $O(mn \log mn)$, because $\partial\Omega$ intersects each Voronoi edge at most two times. Finally, instead of the Euclidean distance, consider the model with a generalized distance increasing in the Euclidean distance. Since the dominance is independent of the choice of such generalized distance, the efficient set using this generalized distance coincides with that using a simple Euclidean distance.

3.4. Characterization of Scalarized Location Problem

For each ω with $0 \leq \omega \leq 1$, consider the following scalarized planar location problem:

$$\min_{x \in \Omega} H(x : \omega) \equiv -\omega F(x) + (1 - \omega)G(x).$$

Let S^* denote the solution set to this scalarized problem for all ω with $0 \leq \omega \leq 1$.

Since the contours of $H(x : \omega)$ consist of upward sloping parallels in criterion space, observation of Figure 5 shows that only the points on the farthest-point Voronoi edge connecting c^* and u_1 , and three points u_3, u_6, a^* can be optimal for the scalarized problem. In fact, the trade-off curve corresponding to the four sublinks, namely, $\overline{u_1 u_2}, \overline{u_2 u_3}, \overline{u_5 u_6}$, and $\overline{u_7 a^*}$ are concave downward. Note that these sublinks belong to either ∂V or $\partial\Omega$. A feasible region Ω is called *star-shaped* with respect to a point x if, for any point $y \in \Omega$, the segment connecting x with y is contained in Ω . Note furthermore that the feasible region in our example is star-shaped with respect to $p_1, \dots, p_5, q_1, \dots, q_4$. The following proposition ensures that for a star-shaped feasible region, the search for the solution set to the scalarized problem is more limited than that for the efficient set.

PROPOSITION 3: When Ω is star-shaped with respect to $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n$,

$$S^* \subseteq \tilde{V} \cup \partial W \cup \tilde{\Omega}.$$

PROOF: Since $S^* \subseteq E^*$, it suffices to verify that for a link l lying on $\partial V \cup \partial \Omega$, its relative interior point x cannot belong to S^* . For $l \in V_i \cap W_j$, without loss of generality, we may assume that p_i and q_j are on the same side of the line containing l . (This is because if l lies on $\partial \Omega$, the segment connecting p_i and q_j cannot intersect that line by reason of the star-shaped assumption. If l lies on $\partial V_i \cap \partial V_k$ and p_i and q_j are on opposite sides, then we may replace k by i). Then, we break our analysis into two cases, corresponding to whether the ray $\vec{xq_j}$ is contained in the convex cone with the vertex x and generated by the ray $\vec{x p_i}$ and the line containing l . An example of that cone is depicted as the striped areas in Figure 6.

For the case where $\vec{xq_j}$ is not contained in that convex cone, as shown in Figure 6(1), consider the point x' such that (i) x' lies on the same side of the line containing l from p_i and q_j ; (ii) $\|x' - x\|$ is small enough; and (iii) $\|x' - p_i\| = \|x - p_i\|$. Conditions (i) and (ii) imply that $x' \in V_i \cap W_j \cap \Omega$. Combining $x' \in V_i$ together with condition (iii), gives $F(x') = F(x)$. Also, condition (i), while taking account of this case, means that $\|x' - q_j\| < \|x - q_j\| = G(x)$. Since $x' \in W_j$, $G(x') = \|x' - q_j\|$, so $G(x') < G(x)$. Thus, since $x' \succ x$, we have $x \notin E^*$, so $x \notin S^*$.

For the case where $\vec{xq_j}$ is contained in that convex cone, as shown in Figure 6(2), p'_i has to be between q'_j and x . So the first equation in (3) holds. In addition, for this case, we have $\|p_i - p'_i\|G(x) > \|q_j - q'_j\|F(x)$. Differentiating $G(x)$ in the first equation of (3) twice with respect to $F(x)$ and using this inequality leads to

$$\frac{d^2 G(x)}{dF(x)^2} = -\frac{\|p_i - p'_i\|^2 G(x)^2 - \|q_j - q'_j\|^2 F(x)^2}{G(x)^3 \|p'_i - x\|^2} - \frac{\|p_i - p'_i\|^2 \|p'_i - q'_j\|}{G(x) \|p'_i - x\|^3} < 0.$$

This means that the curve corresponding to l is concave downward. Since x is in the relative interior of l , we have $x \notin S^*$. \square

As indicated in Figures 3 and 5, the jumps of the trade-off curve in criterion space occur only at u_3 and u_6 , which belong to $\tilde{V} \cup \tilde{\Omega}$. An intuitive explanation of this is that, as α increases, some subregions of $L_F(\alpha)$ will shrink into some elements of $\tilde{V} \cup \tilde{\Omega}$, and then will disappear. So, if the

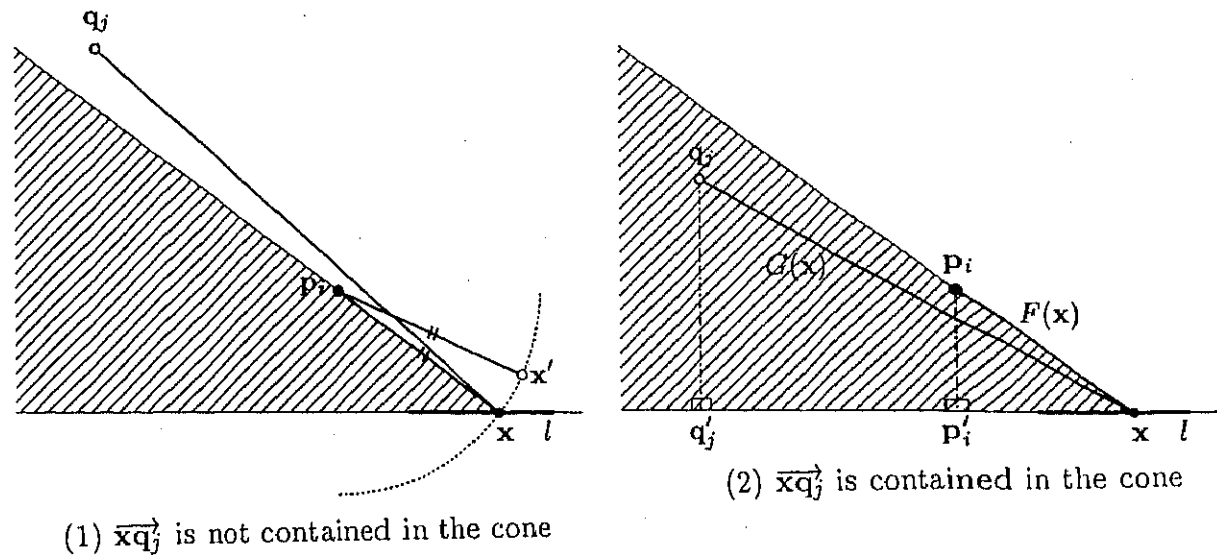


Figure 6. Relationship between $\vec{xq_j}$ and the convex cone.

constrained solution $s^*(\alpha)$ was on such subregion, it must jump towards a new feasible region. Since these jumps induce the minimax value $G(x)$ to discontinuously increase, we can expect that the elements of $\tilde{V} \cup \tilde{\Omega}$ will tend to be optimal for the scalarized problem.

4. CONCLUSION AND EXTENSION

In this paper, we have presented a polynomial-time algorithm for finding the efficient set and the tradeoff curve of the bicriteria planar location problem with maximin and minimax criteria. Also, we have characterized geometrically the efficient set and the tradeoff curve.

Consider the bicriteria planar problem, in which the s th nearest distance is maximized and the t th farthest distance is minimized from the facility for $1 \leq s \leq m$ and $1 \leq t \leq n$. For example, when a new airport is constructed, $(s - 1)$ population centers in the neighborhood of the airport may be transferred, and $(t - 1)$ demands may be ignored, because their locations are too far from the airport. As shown in Shamos and Hoey [18], Voronoi diagrams of order s and of order $n + 1 - t$ also consist of only segments. Accordingly, it seems that the efficient set for this generalized bicriteria problem can be found by the modification of our algorithm.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was supported in part by the Research Grant of the Ministry of Education, Science, Sports and Culture of Japan, Grant No. 10878063 (1998, 1999). An earlier version of this paper was presented at the 15th IFORS, held in 1999 in Beijing, China. The author gratefully acknowledges fruitful discussions with Keiko Imai, Naoki Kato, Takeshi Koshizuka, Osamu Kurita, Atsuyuki Okabe, Dominique Peeters, Atsuo Suzuki, and Kazuki Tamura. The comments of two anonymous referees and an associate editor were particularly helpful.

REFERENCES

- [1] J.T. Boissonnat and M. Yvinec, *Algorithmic geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] S.D. Brady and R.E. Rosenthal, Interactive computer graphical solutions of constrained minimax location problems, *AIIE Trans* 12 (1980), 241–248.
- [3] J. Current, H. Min, and D. Schilling, Multiobjective analysis of facility location decisions, *Eur J Oper Res* 49 (1990), 295–307.
- [4] M.S. Daskin, *Network and discrete location*, Wiley, New York, 1995.
- [5] Z. Drezner and G.O. Wesolowsky, A maximin location problem with maximum distance constraints, *AIIE Trans* 12 (1980), 249–252.
- [6] E. Erkut and S. Neuman, Analytical models for locating undesirable facilities, *Eur Oper Res* 40 (1989), 275–291.
- [7] A.M. Geoffrion, Proper efficiency and the theory of vector maximization, *J Math Anal Appl* 22 (1968), 618–630.
- [8] J. Halpern, Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph, *Manage Sci* 24 (1978), 535–544.
- [9] H.W. Hamacher and S. Nickel, Multicriteria planar location problems, *Eur J Oper Res* 94 (1996), 66–86.
- [10] H.W. Hamacher, M. Labbé, and S. Nickel, Multicriteria network location problems with sum objectives, *Networks*, 33 (1999), 79–92.
- [11] P. Hansen and J.F. Thisse, "The generalized Weber-Rawls problem," *Operational Research '81*, J.P. Brans (Editor), North-Holland, Amsterdam, 1981, pp. 569–577.
- [12] P. Hansen and J.F. Thisse, Recent advances in continuous location theory, *Sist Urbani* 5 (1983), 33–54.
- [13] P. Hansen, D. Peeters, and J.F. Thisse, Constrained location and the Weber-Rawls problem, *Ann Discrete Math* 11 (1981), 147–166.

- [14] L.F. McGinnis and J.A. White, Single facility rectilinear location problem with multiple criteria, *Transport Sci* 12 (1978), 217–231.
- [15] Y. Ohsawa, A geometrical solution for quadratic bicriteria location models, *Eur J Oper Res* 114 (1999), 380–388.
- [16] Y. Ohsawa and A. Imai, Degree of locational freedom in a single facility Euclidean minimax location model, *Location Sci* 5 (1997), 29–45.
- [17] A. Okabe and A. Suzuki, Locational optimization problems solved through Voronoi diagrams, *Eur J Oper Res* 98 (1997), 445–456.
- [18] M.I. Shamos and D. Hoey, Closest-point problems. *Proc 16th Annu IEEE Symp Foundations Comput Sci*, 1975, pp. 151–162.

Evaluation of Zone Orderings Based on the Correlation of Order Differences and Distances

When two-dimensional zones are arranged into one-dimensional tables, spatial characteristics on the original space should be preserved as much as possible. In this respect, we evaluate nine systematically generated zone orderings based on the magnitude of the Pearson's correlations of the order differences and the Euclidean distances. We show that standard row order is the best. The sensitivity of the shape and size of the study area, the critical distance, and the level of zonal aggregation are also examined.

One-dimensional orderings have to preserve as much spatial characteristics as possible when two-dimensional areas such as cities, provinces, or countries are arranged into data tables, as pointed out by Mark (1990). Relevant papers are those of Goodchild and Grandfield (1983) and Mark (1990). Goodchild and Grandfield (1983) assessed row, row-prime, Morton, and Hilbert orders in terms of mean absolute difference, mean square difference, Geary coefficient, and Moran coefficient. Mark (1990) evaluated ten zone orderings including the four above-mentioned orderings with respect to mean maximum absolute difference in addition to the four above-mentioned measures for both 8-by-8 and 256-by-256 areas. However, these two papers concentrate only on the order differences between zones and their spatial neighbors.

We also need to understand the relationship between the order differences and geographical proximity on the original space. We will look at this by considering an example of ordering prefectures in Japan. As shown in Figure 1, Japan is divided into 47 prefectures. It comprises 660 cities, and each city is assigned to a prefecture. In most data tables, these cities are arranged in two steps because of the hierarchy of administrative organizations. First, these cities are ordered according to the order of its prefecture established by the Ministry of Home Affairs, as shown in Figure 1, and then sequentially in the order of the Japanese alphabet. From a geographical point of view, the ordering of the cities should

The authors thank three anonymous referees for their helpful comments and suggestions. They also benefited from the presentation in the 10th European Colloquium on Theoretical and Quantitative Geography held in 1997 in Rostock, Germany.

Yoshiaki Ohsawa is associate professor and Takeshi Koshizuka is professor of policy and planning sciences at the University of Tsukuba.

Geographical Analysis, Vol. 32, No. 1 (January 2000) The Ohio State University

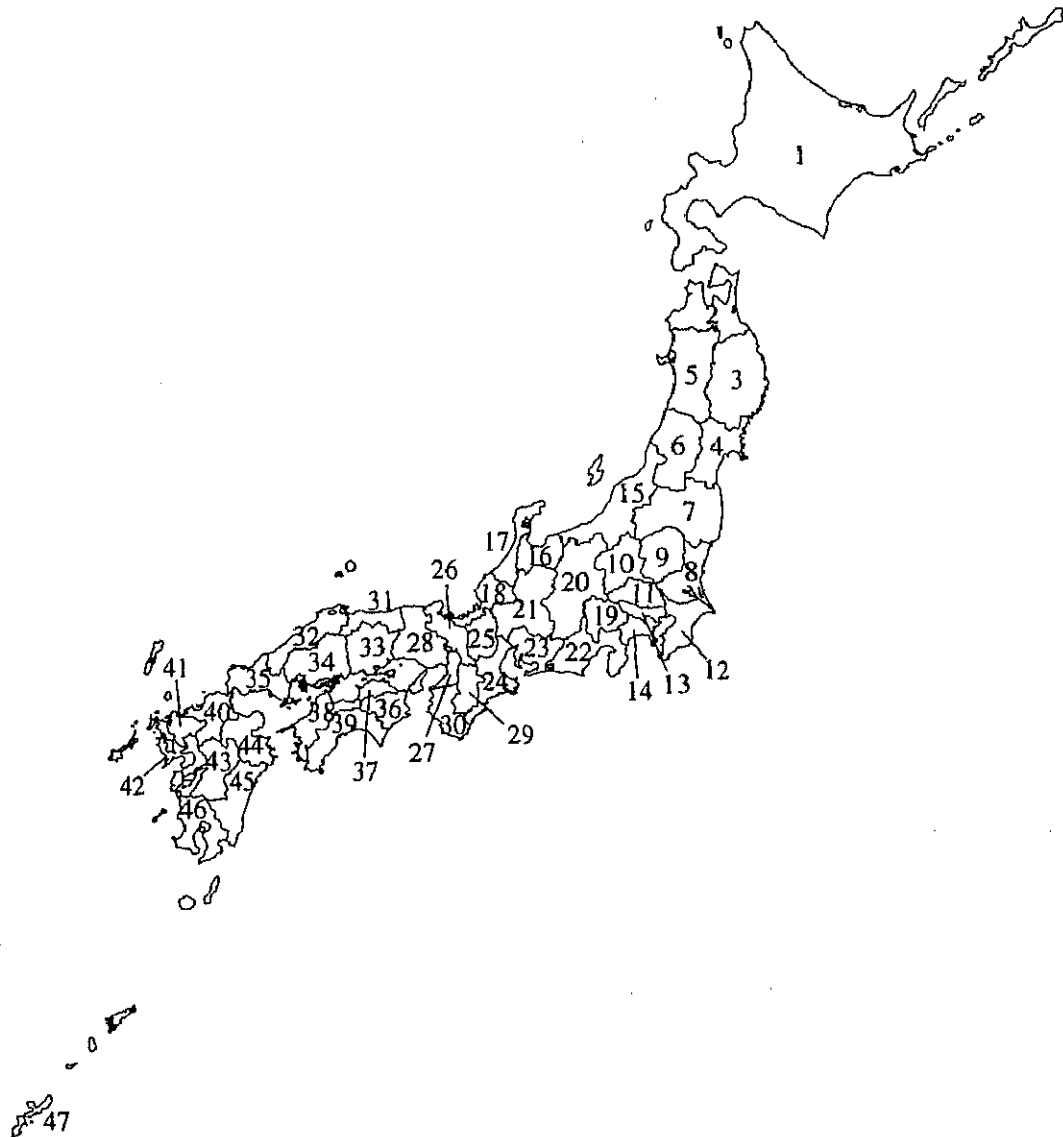


FIG. 1. Ordering of Prefectures in Japan

approximate the spatial proximity. In order to evaluate the ordering established by the Ministry of Home Affairs from this point of view, we utilize a Pearson's correlation of the order differences between two cities and the Euclidean distances between them. A greater correlation clearly indicates that the ordering is good at preserving the spatial proximity. In this case, we take ${}_{660}C_2 = 217,470$ pairs of measurements. The correlation coefficient using this ordering is 0.826, and it shows a very strong positive linear relationship. Hence, we may conclude that the ordering of prefectures basically preserves the spatial proximity. This example provides us with a starting point for this study. Can other orderings produce greater correlations? How do the shape and size of the study area affect correlations? How do the levels of the aggregation influence correlations? The ordering of maps in an atlas can also be used as an example because the geometrical relationship between maps must be preserved when the maps are paginated in the atlas.

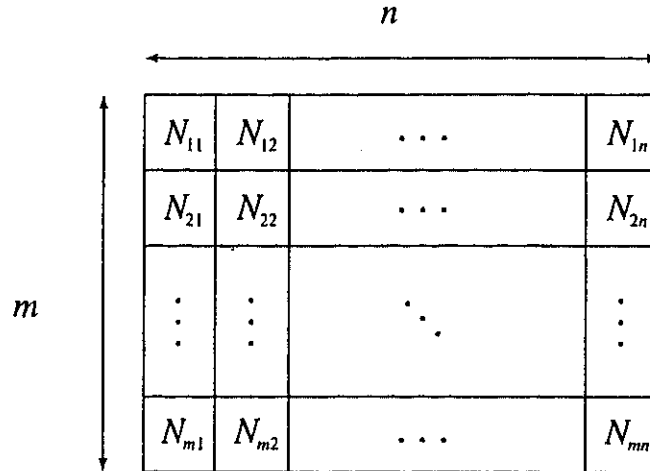


FIG. 2. Study Area

The purpose of this study is to evaluate nine systematically generated orderings according to the magnitude of the correlation coefficients of the order differences between two points and the Euclidean distances between them over a rectangular area. The sensitivity to these correlation coefficients of shape and size of the study area, the critical distance, and the level of zonal aggregation are also examined.

The organization of this paper is as follows. Our model is formulated in section 1, the nine orderings are evaluated based on their correlations in section 2, and finally our conclusions are presented in section 3.

1. MODEL

1.1 Assumptions

Consider an m -by- n rectangular study area for natural numbers m and n . This area is divided into mn unit squares, as shown in Figure 2. Each unit square is called a zone where s (≥ 1) points exist. We are concerned with numbering the mn s points over this study area. The orderings of these points are made in two phases. First, mn zones are ordered. Second, all the s points within each zone are ordered randomly. In other words, the ordering of these s points within a zone are independent of their positions. The example in which cities within a prefecture in Japan are arranged in the order of the Japanese alphabet is consistent with the orderings of this second phase.

Two subscripts are used, as in Figure 2, to describe the positions of the zones. The zone in the i th row and the j th column is called the (i, j) th zone. Let N_{ij} be the order of the (i, j) th zone. We consider that the zones are assigned consecutive integers 1 through mn in the first phase, and that s points within the (i, j) th zone are numbered from $N_{ij} - 1 + 1/s$ to N_{ij} with an interval of $1/s$ in the second phase. Thus, we use fractional numbers in our orderings of the points. This does not alter our findings in any way, but is convenient for presentation purposes.

We also assume that each point is continuously and uniformly distributed within its corresponding zone. Thus, this paper concentrates on the simplest situation because it could be viewed as providing benchmark results for evaluating zone orderings. We emphasize that we do not use representative points instead

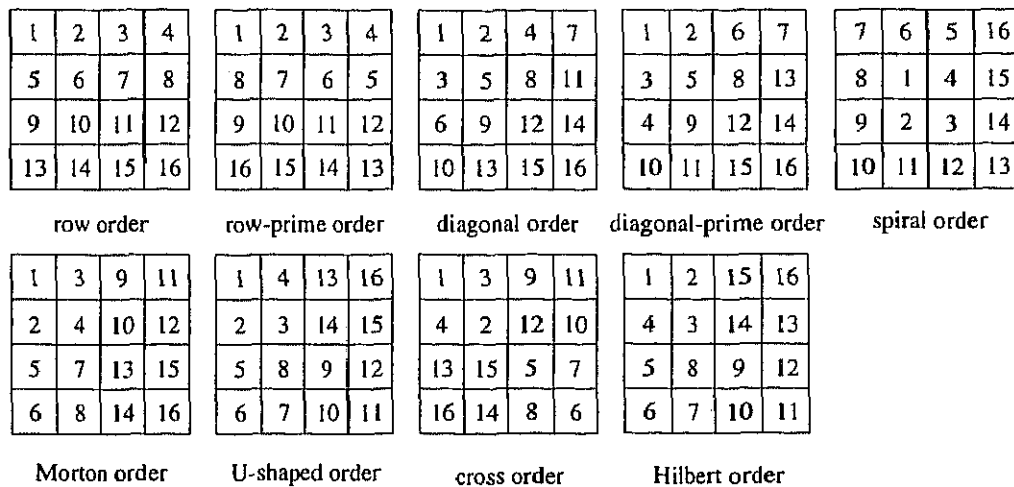


FIG. 3. Nine Zone Orderings of a 4-by-4 Study Area

of the continuous distribution. One reason is that although this use enables us to directly compute many types of statistics, there are no convincing and widely known procedures to arrange s representative points within a square for every s . Consider the case of $s = 3$, for example. Another reason is that it is difficult to approximate distances between zones by the use of representative points. This creates the significant differences of the true and approximating distances when these points are within the same zone or between neighboring zones, as pointed out in Koshizuka and Kurita (1991). This situation will play an important role in analyzing the impact of the critical distance in section 2.4. Since we focus on the effect of zone orderings, we have to eliminate completely these shortcomings caused by partially ignoring the geographical space within zones.

1.2 Zone Orderings

We deal with the following nine zone orderings: row order; row-prime order; diagonal order; diagonal-prime order; spiral order; Morton order; U-shaped order; cross order; and Hilbert order. Figure 3 consists of a series of nine diagrams illustrating the examples corresponding to $m = n = 4$. Their definitions can be found in Goodchild and Grandfield (1983), Mark (1990), and Samet (1990). The row (respectively diagonal) order is the row-by-row (respectively diagonal-by-diagonal) traversal of a rectangular grid from the upper left corner. Typical examples of the row order can be found in remote sensing and matrix ordering in computer programming. The row-prime (respectively diagonal-prime) order is defined as the row-by-row (respectively diagonal-by-diagonal) traversal, but in reversing the direction after each row (respectively diagonal). The spiral order simply begins at the center of the study area, moving in a counterclockwise direction. Since the orders generated eventually spiral away from the center, they correspond to the approximate accessibility to the center.

The rest of the zone orderings are called quadrant recursive (see Mark 1990). The Morton (respectively U-shaped, cross) order can be generated by utilizing a N-shaped (respectively U-shaped, cross) template recursively, as demonstrated by Mark (1990). On the other hand, the Hilbert order is established by applying the U-shaped template, and rotating the template systematically by a recursion procedure so that the ordering is continuous (see Goldschlager 1981). As seen

in Abel and Mark (1990) and Samet (1990), the quadrant-recursive orderings are most efficient for saving storage and execution time for aggregating data having identical or similar values in image analysis and Geographical Information Systems.

1.3 Joint Probability Density Functions

For mns points in the study area, there are $mnsC_2$ pairs of these points. Let Z be the random variable of the order difference of these pairs, and let R be the random variable of the Euclidean distance between them. To obtain the joint probability density function of Z and R , denoted as $h_{Z,R}(z, r)$, we consider all pairs of zones. Let Z_{ijkl} be the random variable of the order difference between s points within the (i, j) th zone and s points within the (k, l) th zones. Let R_{ijkl} be the random variable of the Euclidean distance between them. Let $h_{Z_{ijkl}, R_{ijkl}}(z, r)$ be the joint probability density function of Z_{ijkl} and R_{ijkl} . From the definition of $h_{Z_{ijkl}, R_{ijkl}}(z, r)$, we have

$$h_{Z,R}(z, r) = \frac{s^2}{mnsC_2} \sum_{(i,j) \prec (k,l)} h_{Z_{ijkl}, R_{ijkl}}(z, r) + \frac{sC_2}{mnsC_2} \sum_{(i,j)=(k,l)} h_{Z_{ijkl}, R_{ijkl}}(z, r) \quad (1)$$

where $(i, j) \prec (k, l)$ indicates that a) $i < k$ or b) $i = k$ and $j < l$, and where $(i, j) = (k, l)$ indicates that $i = k$ and $j = l$. Note that the initial (respectively final) term deals with pairs of two points within different (respectively same) zones, so it is expressed by the sum of $mnsC_2$ (respectively mn) joint probability density functions. Of course, $mnsC_2 = (mnC_2)s^2 + mn(sC_2)$.

The second phase of ordering implies that Z_{ijkl} and R_{ijkl} are stochastically independent. So we have $h_{Z_{ijkl}, R_{ijkl}}(z, r) = f_{Z_{ijkl}}(z)g_{R_{ijkl}}(r)$, where $f_{Z_{ijkl}}(z)$ (respectively $g_{R_{ijkl}}(r)$) is the probability density function of Z_{ijkl} (respectively R_{ijkl}). Thus, the function (1) can be rewritten as

$$h_{Z,R}(z, r) = \frac{s^2}{mnsC_2} \sum_{(i,j) \prec (k,l)} f_{Z_{ijkl}}(z)g_{R_{ijkl}}(r) + \frac{sC_2}{mnsC_2} \sum_{(i,j)=(k,l)} f_{Z_{ijkl}}(z)g_{R_{ijkl}}(r). \quad (2)$$

Therefore, to show that $h_{Z,R}(z, r)$ can be expressed analytically, it suffices to give analytical expressions for $f_{Z_{ijkl}}(z)$ and $g_{R_{ijkl}}(r)$.

From the definition of orderings, Z_{ijkl} can be regarded as the difference of two random variables that are uniformly distributed. This means that although $f_{Z_{ijkl}}(z)$ s depend on s , it can be expressed analytically. See Mood, Graybill, and Boes (1974) for an example. On the other hand, since s points are uniformly distributed within each zone, $R_{ijkl}(r)$ s are independent of s . Making use of the indirect method which Ghosh (1951) showed yields the following analytical expressions for $g_{R_{ijkl}}(r)$:

$$(1) \ (i, j) = (k, l)$$

$$g_{R_{ijkl}}(r) = \phi(r : 1, 1), \quad (3)$$

$$(2) \ (i, j) \prec (k, l) \text{ and } i = k$$

$$g_{R_{ijkl}}(r) = \frac{1}{2}\phi(r : 1, l - j + 1) + \frac{1}{2}\phi(r : 1, l - j - 1) - \phi(r : 1, l - j), \quad (4)$$

(3) $(i, j) \prec (k, l)$ and $i < k$

$$\begin{aligned}
 g_{R_{ijkl}}(r) = & \frac{1}{4}\phi(r : k-i+1, |j-l|+1) + \frac{1}{4}\phi(r : k-i-1, |j-l|-1) \\
 & - \frac{1}{2}\phi(r : k-i+1, |j-l|) - \frac{1}{2}\phi(r : k-i, |j-l|+1) \\
 & + \frac{1}{4}\phi(r : k-i+1, |j-l|-1) + \frac{1}{4}\phi(r : k-i-1, |j-l|+1) \\
 & - \frac{1}{2}\phi(r : k-i, |j-l|-1) - \frac{1}{2}\phi(r : k-i-1, |j-l|) \\
 & + \phi(r : k-i, |j-l|),
 \end{aligned} \tag{5}$$

where for $a = \max\{\alpha, \beta\}$ and $b = \{\alpha, \beta\}$,

$$\begin{aligned}
 & \phi(r : \alpha, \beta) \\
 = & \begin{cases} 2r\{ab\pi - 2(a+b)r + r^2\}, & 0 \leq r \leq b; \\ 2r\left\{2ab \arcsin \frac{b}{r} + 2a\sqrt{r^2 - b^2} - 2ar - b^2\right\}, & b \leq r \leq a; \\ 2r\left\{2ab\left(\arcsin \frac{b}{r} - \arccos \frac{a}{r}\right) + 2a\sqrt{r^2 - b^2} \right. \\ \quad \left. + 2b\sqrt{r^2 - a^2} - r^2 - a^2 - b^2\right\}, & a \leq r \leq \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

1.4 Pearson's Correlation

Based on the joint density function (2), to analytically express the correlation coefficient of Z and R , denoted as ρ , it suffices to give analytical expressions for the expectations $E[Z_{ijkl}]$, $E[R_{ijkl}]$, $E[Z_{ijkl}^2]$, and $E[R_{ijkl}^2]$. Some standard calculations yield

$$E[Z_{ijkl}] = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{3s^2}, & \text{if } (i, j) = (k, l); \\ |N_{ij} - N_{kl}|, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

$$E[Z_{ijkl}^2] = (N_{ij} - N_{kl})^2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6s^2}. \tag{7}$$

Moreover, for any $\alpha(>0)$ and $\beta(>0)$, Ghosh (1951) presented the following integration:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} r\phi(r : \alpha, \beta) dr \\
 = & \frac{1}{30} \left\{ 2\alpha^5 + 2\beta^5 - 2(\alpha^4 - 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right. \\
 & \left. + 5\alpha^4\beta \log \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta}{\alpha} + 5\alpha\beta^4 \log \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{\beta} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} r^2 \phi(r; \alpha, \beta) dr = \frac{1}{6}(\alpha^2 + \beta^2).$$

Combining these integrations with (3), (4), and (5) yields $E[R_{ijkl}]$ and $E[R_{ijkl}^2]$.

Three notes are in order at this point. First, when s is large, the magnitude of s has little influence on the coefficients. As s increases, the coefficients $s^2/mnsC_2$ and $sC_2/mnsC_2$ in (2) converge to $2/(m^2n^2)$ and $1/(m^2n^2)$, respectively, with the differences proportional to s^{-1} , and $E[Z_{ijkl}]$ for $(i, j) = (k, l)$ in (6) and $E[Z_{ijkl}^2]$ in (7) converge to $1/3$ and $|N_{ij} - N_{kl}|^2 + 1/6$, respectively, with the differences proportional to s^{-2} .

Second, although the row and row-prime orders may generate the different joint density functions, both produce the same correlation coefficient because of the symmetry on the pairs of zones. Similarly, for any square study area, the diagonal and diagonal-prime orders produce the same correlation. Therefore, the correlation coefficients of the row-prime order, and those of the diagonal-prime order for the square study area are omitted throughout the remainder of this paper.

Finally, the analytical methods presented in section 1.3 and this section can be also applied to more general cases where each zone to be ordered can be regarded as a subset of the same rectangular lattice and zones have different numbers of points.

2. COMPUTATIONAL RESULTS

2.1 Correlation Coefficients

In Figure 4, we plot the correlation coefficients versus the number of points per zone s for a 4-by-4 area. In all the figures in this paper, the symbol Δ (respectively ∇ , $*$, \circ) corresponds to the row and row-prime orders (respectively, the diagonal and diagonal-prime orders, the spiral order, the quadrant-recursive orderings).

We can recognize two characteristics from this figure. First, the nine orderings can be clearly split into two groups according to the magnitude of the cor-

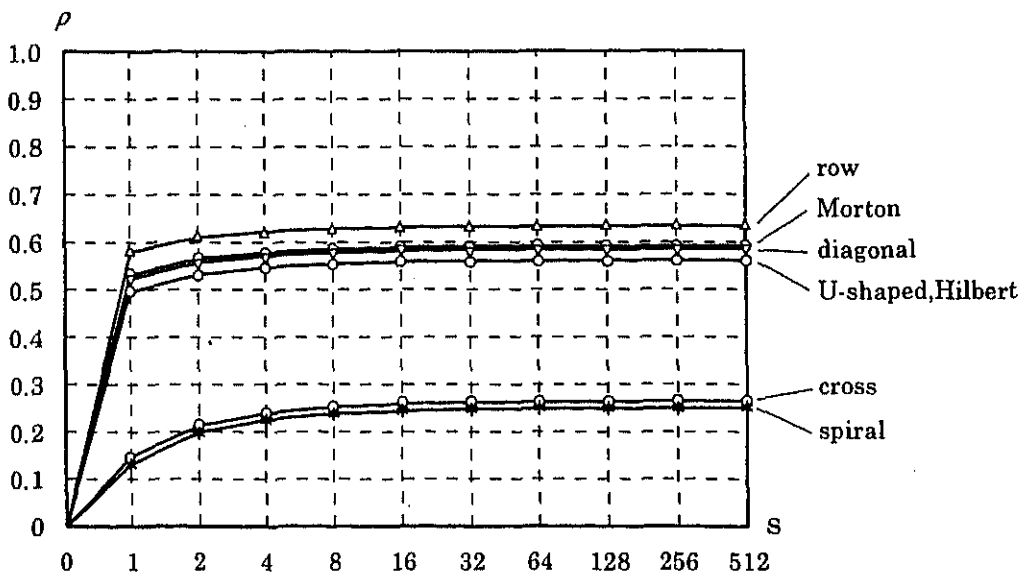


FIG. 4. Number of Points per Zone and Correlations

relations. The spiral and cross orders produce weak correlations, and the other orders generate strong ones. However, for every s , the row order produces the strongest correlations, and thus, is the most effective at preserving spatial proximity. This is consistent with the finding of Mark (1990) that the row order is frequently the best against several criteria. The second and third best are the Morton and diagonal orders, which have similar values. Thus, among the quadrant-recursive orderings examined, the Morton order is the most effective.

Second, the correlation coefficients increase with the number of points per zone s . The intuitive explanation for this is that for any two points within the same zone, both the order difference and the Euclidean distance between them are small, and that as s increases, the second term in the function (2) contributes more relatively to $h_{Z,R}(z, r)$. This figure also tells us that an increase in s reduces an increment in the correlation ρ , as we have noted theoretically in section 1.4.

2.2 Joint Probability Density Functions

We have seen from Figure 4 that the row and diagonal orders produce strong correlations. Since the row and row-prime orders generate the same correlations as noted in section 1.4, they are further examined by comparing their joint density functions. Similarly, we compare the diagonal and diagonal-prime orders in this respect. When $s = \infty$, we have

$$f_{Z_{ij}l}(z) = \begin{cases} 2 - 2z & (0 \leq z \leq 1), \\ 1 - |z - |N_{ij} - N_{kl}||, & (|N_{ij} - N_{kl}| - 1 \leq z \leq |N_{ij} - N_{kl}| + 1), \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{if } (i, j) = (k, l); \\ \text{otherwise.} \end{matrix}$$

Thus, $h_{Z,R}(z, r)$ s are generated by multiplying two continuous functions. This enables us to simplify the presentation. In addition, when s is not very small, it does not significantly affect the correlations, as seen in Figure 4. Therefore, we deal with only the case of $s = \infty$.

A three-dimensional surface of $h_{Z,R}(z, r)$ s according to the four orderings for a 4-by-4 area are shown in Figure 5. This surface is depicted by generating a regular gridded data for z from 0 to 16 at intervals of 0.5 and for r from 0 to 5.75 at intervals of 0.25. This figure reveals that the peaks and valleys of $h_{Z,R}(z, r)$ s occur at many places. The row order produces distinctive peaks near $(z, r) = (0, 1/2)$, $(1, 1)$, and $(4, 1)$. On the other hand, the row-prime order generates distinctive peaks near $(0, 1/2)$ and $(1, 1)$. In both orders, the density around $(2, 2)$ and $(8, 2)$ are also high, but not as high as these peaks. Thus, we see that although these four orderings produce strong correlations, their density functions are considerably different. Also, the row and diagonal orders produce rather similar patterns, likewise the row-prime and diagonal-prime orders also generate similar patterns.

2.3 Shape and Size of the Study Area

To examine how the shape of the study area affects the correlation coefficients, we consider the 8-by-8, 16-by-4, 32-by-2, and 64-by-1 areas and $s = 4$. Since the quadrant-recursive orderings can be defined only for the square study area, only the other orderings will be evaluated.

The computational results for a fixed $s = 4$ are plotted in Figure 6. We can see from this figure that as the study area becomes more oblong in shape, the correlations increase without exception, as expected, even though the spiral order has weak correlations throughout. In particular, the correlation coefficient of the row order is as small as 0.674 in the case of the 8-by-8 area, and it is as

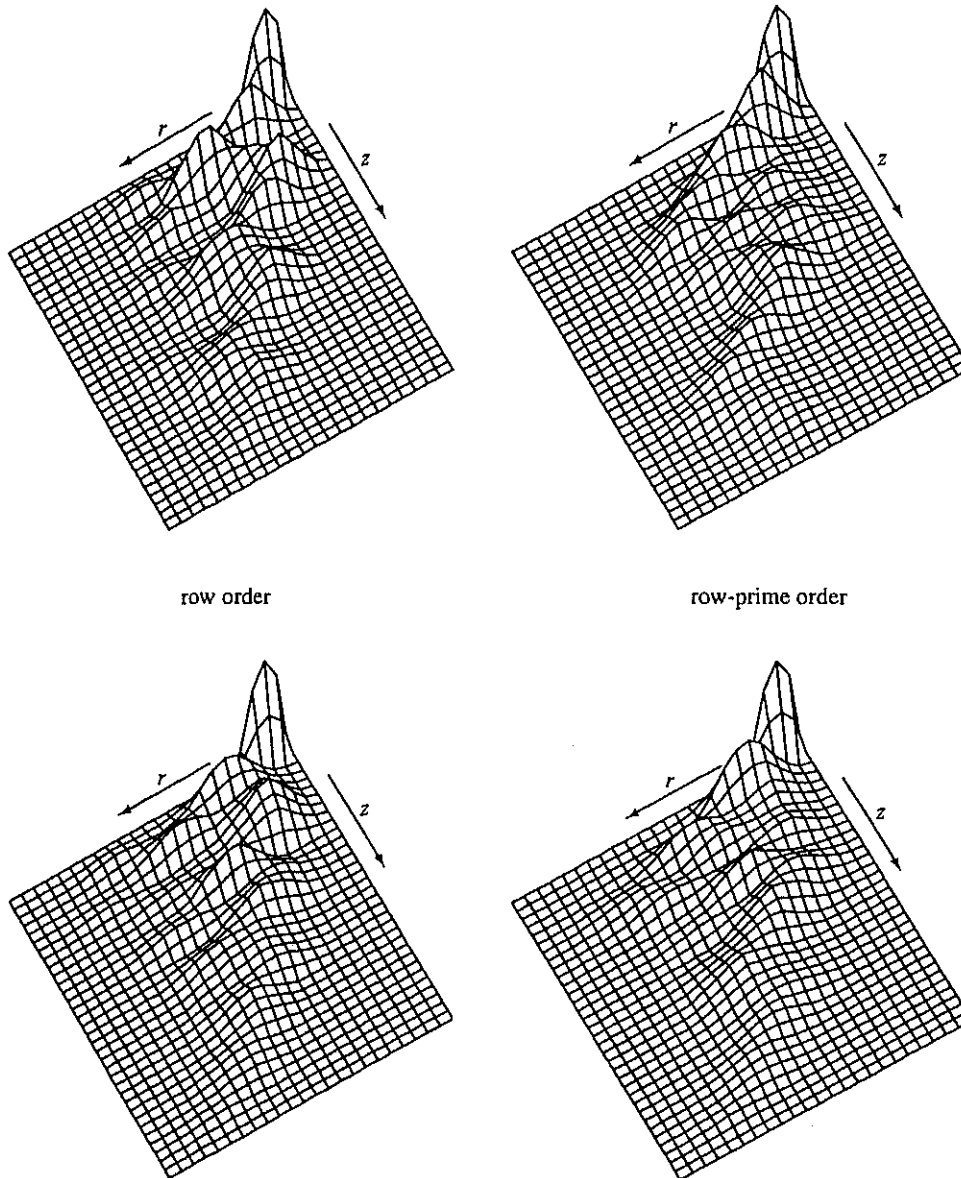


FIG. 5. Joint Density Functions for Four Zone Orderings

large as 0.997 in the case of the 32-by-2 area. This result supports the strong correlation of the Japanese example presented in the introduction.

Figure 7 shows sensitivity analysis information on the size of the study area. In this figure, the correlations for the cases of 2-by-2, 4-by-4, 8-by-8, and 16-by-16 areas, and $s = 4$ are plotted. In the case of the 2-by-2 area, all the orderings except the cross order are identical. An observation of this figure shows that excepting the spiral order, as the number of zones m increases, so do the correlations, even though the cross order takes low correlations throughout.

Thus, we see that the more oblong the shape (respectively the bigger the size) of the study area, the geographical proximity is better preserved without exception (respectively with a few exceptions). In addition, it can be concluded that to maintain the spatial proximity, the row order is still the most effective, the spiral and cross orders are still the least effective, and the other orderings are still moderately effective.

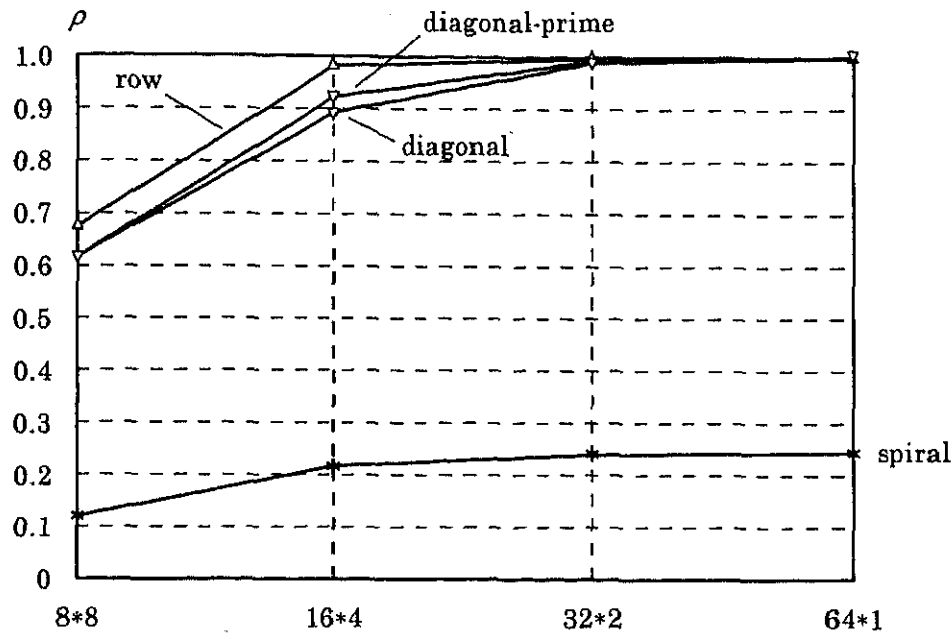


FIG. 6. Shape of Study Area and Correlations

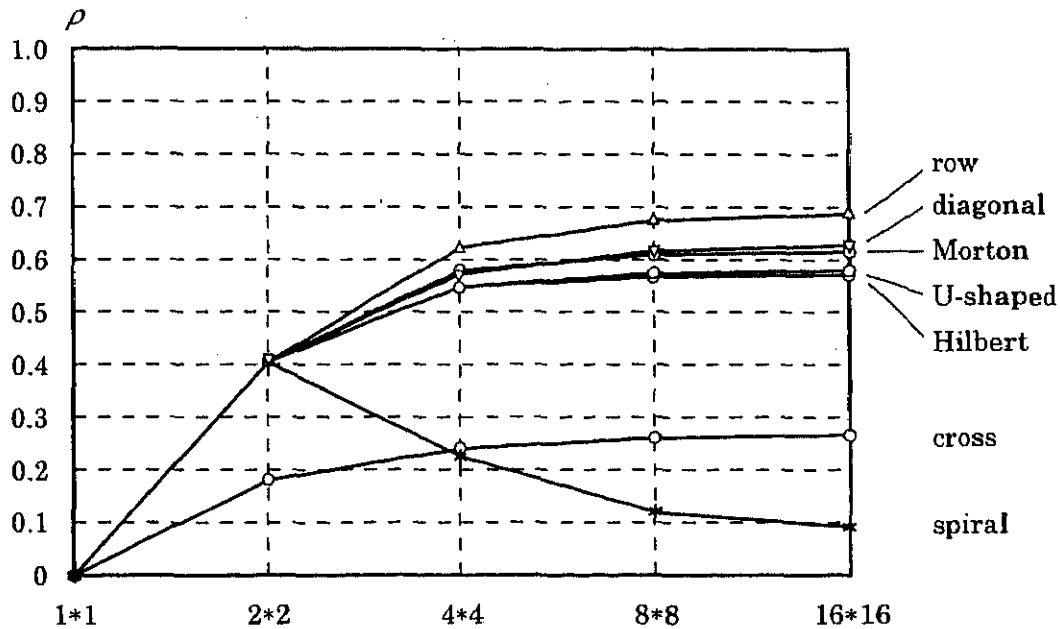


FIG. 7. Size of Study Area and Correlations

2.4 Critical Distance

Until now, we have considered all pairs of zones, regardless of the intervening distance. However, in general, many types of activities between zones diminish with intervening distance. Therefore, we consider only all pairs of any two zones where the rectilinear distance between their centers is equal to or less than r_0 . The rectilinear distance between the (i, j) th and the (k, l) th zones is expressed mathematically as $|i - k| + |j - l|$. Thus, we ignore the pairs of zones with rectilinear distances greater than r_0 . In the case of $r_0 = 1$, we con-

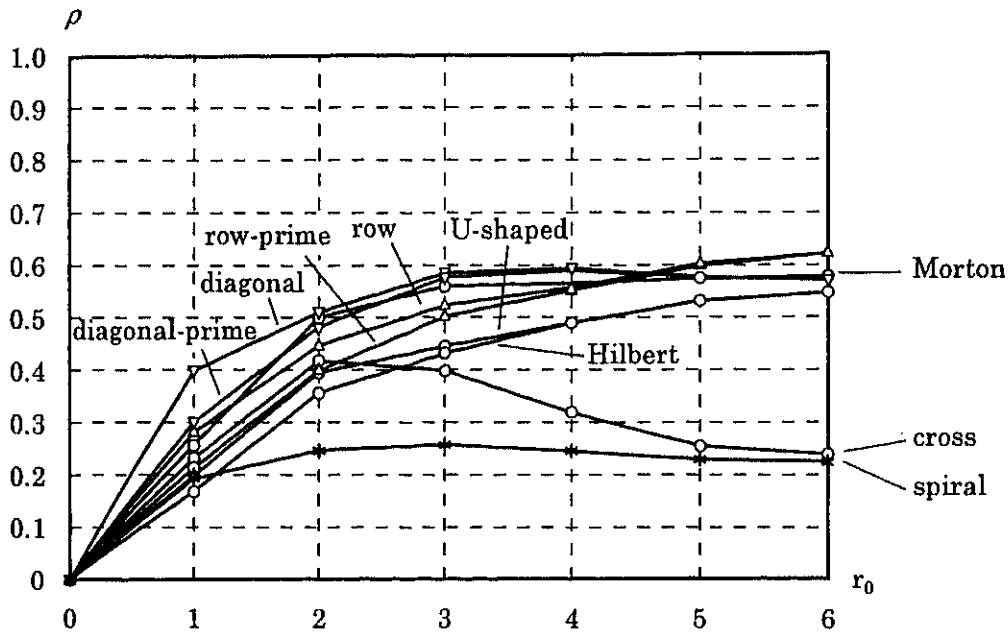


FIG. 8. Critical Distances and Correlations

sider only the pairs of zones that meet along an edge of the zonal boundary. The case of $r_0 \geq m + n - 2$ reduces to the former case where all pairs of zones are considered. For any $r_0 (\geq 0)$, define the set of zone pairs $I(r_0)$ by $I(r_0) = \{(i, j), (k, l)\} \mid |i - k| + |j - l| \leq r_0, (i, j) \prec (k, l)\}$. We can compute the correlations in this case by replacing the condition $(i, j) \prec (k, l)$ with $\{(i, j), (k, l)\} \in I(r_0)$, and by replacing the coefficient $mn_s C_2$ with $s^2 |I(r_0)| + mn_s C_2$ in (2), where $|I(r_0)|$ is the number of members in the set $I(r_0)$.

For the case of the 4-by-4 area and $s = 4$, we plot the correlations versus the critical distance r_0 from 0 to 6 at intervals of one unit in Figure 8. The most striking feature of this figure is that although the row order produces the strongest correlations for $5 \leq r_0$, the diagonal order generates the strongest ones for $1 \leq r_0 \leq 4$. Thus, we can conclude that in terms of maintaining the geographical proximity, the diagonal order is the most effective for small critical distances, and that the row order is the most effective for large critical distances. In addition, as the critical distance increases, the six orders are more clearly split into the two groups described in section 2.1. Furthermore, to be precise, the correlations of the diagonal, diagonal-prime, spiral, and cross orders are not always increasing throughout with respect to r_0 . Generally speaking, however, except for the cross order, the correlations increase or remain constant, that is, the spatial proximity is better preserved, as the critical distance increases.

2.5 Zonal Aggregation

The aggregation problems in spatial analysis have been analyzed in many papers. See Fotheringham and Wong (1991), Ohsawa, Koshizuka, and Kurita (1991), Fotheringham, Densham, and Curtis (1995). To investigate the effect of zonal aggregation on the correlations, we consider the situation where 256 points are distributed over the square study area such that each point is distributed over each zone of a 16-by-16 area. We take up four levels of zonal aggregations, 16-by-16, 8-by-8, 4-by-4, and 2-by-2 areas. The integers 1 through 256, 64, 16, and 4 are assigned, respectively, to the corresponding zones, using each of the orderings. Note that four points within a zone of the 8-by-8 area are sub-

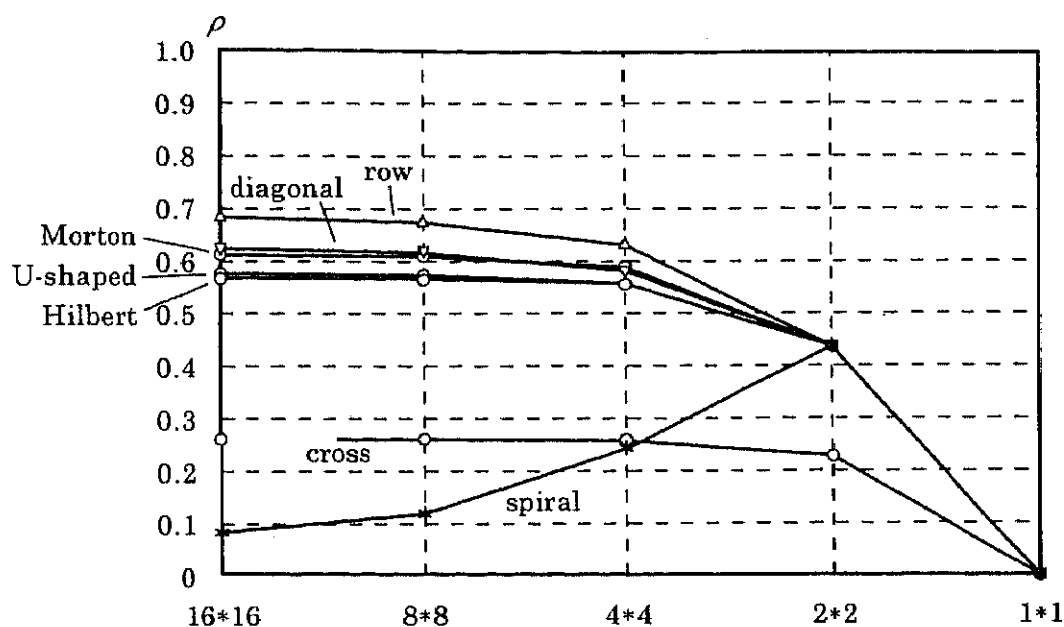


FIG. 9. Zonal Aggregation and Correlations

ject to the locational constraint that each of them lies on a quadrant of the zone. Therefore, this case essentially differs from the case of the 8-by-8 area with $s = 4$ in section 2.3. Since the correlation coefficients do not depend on the size of zones, the correlations for the 8-by-8 area can be computed based on $E[R_{ijkl}]$ and $E[R_{ijkl}^2]$ for the 16-by-16 area, and $E[Z_{ijkl}]$ and $E[Z_{ijkl}^2]$ for the 8-by-8 area.

The correlation coefficients are depicted in Figure 9. This figure tells us that with the exception of the spiral order, the correlation decreases as the zones are aggregated. This indicates that as data are more highly aggregated, none of the ordering methods are very effective at maintaining the geographical proximity. However, note that for all levels of zonal aggregation, the row order still produces the strongest correlations, and thus, is the best in terms of maintaining the spatial proximity regardless of the aggregation level. Furthermore, note that the decrease in the correlations are quite gradual until the data is highly aggregated, indicating that this result is problematic only for the highest levels of zonal aggregation.

3. CONCLUSIONS

When two-dimensional zones are arranged into one-dimensional tables, zone ordering should maintain as much of the spatial proximity as possible. In this respect, we evaluate the nine systematically generated zone orderings based on the Pearson's correlation of the order differences and the Euclidean distances in the simplest setting. This paper makes at least two primary contributions.

First, it illustrates that for large critical distances, without exception, the row order is the most effective ordering method at preserving the spatial proximity regardless of the number of points per zone, the shape and size of the study area, and the level of zonal aggregation. For small critical distances, the diagonal order, which is investigated neither by Goodchild and Grandfield (1983) nor Mark (1990), is the best. Therefore, the row or diagonal orders should be chosen when zones are arranged into one-dimensional data tables. The worst

is either the spiral order or cross order. In fact, so far as the computational results here are concerned, their correlations are at most 0.42. As a result, these orderings are inadequate to preserve the spatial proximity. The best quadrant-recursive order is always the Morton order, followed by the U-shaped and Hilbert orders, but these two have almost identical effects. However, to put it plainly, it is not too much to say from Figures 4, 6, 7, 8, and 9 that all the orderings except for the spiral and cross orders produce similar good effects.

Second, this paper characterizes how the shape and size of the study area, the critical distances, and the zonal aggregation affect the correlations. It is shown that for all orderings, the more oblong the shape of the study area, the better preserved (without exception) is the geographical proximity. Also, the bigger the size of the study area, the greater the critical distance, or the lower the level of the zonal aggregation, the better maintained is the spatial proximity. This, however, is subject to a few exceptions.

In this study, we limited our discussion to Pearson's correlations. The requirement of a linear relationship may be too strict. Future research is necessary to use other criteria such as Spearman's rank correlation coefficients.

LITERATURE CITED

- Abel, D. J., and D. M. Mark (1990). "A Comparative Analysis of Some Two-Dimensional Orderings." *International Journal of Geographical Information System* 4, 21-31.
- Fotheringham, A. S., and D. W. S. Wong (1991). "The Modifiable Areal Unit Problem in Multivariate Statistical Analysis." *Environment and Planning A* 23, 1025-10.
- Fotheringham, A. S., P. J. Densham, and A. Curtis (1995). "The Zone Definition Problem in Location-Allocation Modeling." *Geographical Analysis* 27, 60-77.
- Ghosh, B. (1951). "Random Distances within a Rectangle and between Two Rectangles." *Bulletin of Calcutta Mathematical Society* 43, 17-24.
- Goldschlager, L. M. (1981). "Short Algorithms for Space-Filling Curves." *Software—Practice and Experience* 11, 99-100.
- Goodchild, M. F., and A. W. Grandfield (1983). "Optimizing Raster Storage: An Examination of Four Alternatives." *Proceedings of Auto-Carto* 6(1), 400-407.
- Koshizuka, T., and O. Kurita (1991). "Approximate Formulas of Average Distances Associated with Regions and Their Applications to Location Problems." *Mathematical Programming* 52, 99-123.
- Mark, D. M. (1990). "Neighbor-Based Properties of Some Orderings of Two-Dimensional Space." *Geographical Analysis* 22, 145-57.
- Mood, A. M., F. A. Graybill, and D. C. Boes (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. New York: McGraw-Hill.
- Ohsawa, Y., T. Koshizuka, and O. Kurita (1991). "Errors Caused by Rounded Data in Two Simple Facility Location Problems." *Geographical Analysis* 23, 56-73.
- Samet, H. (1990). *The Design and Analysis of Spatial Data Structures*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

United States Postal Service
STATEMENT OF OWNERSHIP, MANAGEMENT, AND CIRCULATION
(Required by 39 U.S.C. 3685)

Publication Title: *Geographical Analysis*

Publication Number: 0016-7363

Filing Date: October 21, 1999

Issue Frequency: Quarterly

No. of Issues Published Annually: 4

Annual Subscription Price: \$100.00

Office of Publication: 1070 Carmack Rd., Columbus, OH 43210-1002

General Business Office: (same as above)

Publisher: Ohio State University Press, 1070 Carmack Rd., Columbus, OH 43210-1002

Editor: Morton O'Kelly, Department of Geography, Ohio State Univ., Columbus, OH 43210-1361

Managing Editor: Ava M. Stinnett, OSU Press, 1070 Carmack Rd., Columbus, OH 43210-1002

Owner: Ohio State University Press

The purpose, function, and nonprofit status of this organization and the exempt status for Federal income tax purposes has not changed during the preceding 12 months.

Publication Name: *Geographical Analysis*

Issue Date for Circulation Data Below: July 1999

Extent & Nature of Circulation	Average No. Copies Each Issue During Preceding 12 Months	Actual No. Copies of Single Issue Published Nearest to Filing Date
Total No. Copies (Net Press Run)	976	951
Sales Through Dealers	-0-	-0-
Mail Subscription	667	691
Total Paid Circulation	667	691
Free Distribution by Mail	40	40
Free Distribution Outside the Mail	-0-	-0-
Total Free Distribution	40	40
Total Distribution	707	731
Copies Not Distributed	265	220
Return from News Agents	-0-	-0-
Total	976	951
Percent Paid and/or Requested Circulation	94%	95%

This Statement of Ownership will be printed in the April 2000 issue of this publication.

I certify that all information furnished on this form is true and complete.

Ava M. Stinnett
Journals Manager
October 21, 1999

Theory and Methodology

A geometrical solution for quadratic bicriteria location models

Yoshiaki Ohsawa *

Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Tsukuba, Ibaraki 305-8573, Japan

Received 1 August 1997; accepted 1 May 1998

Abstract

This paper deals with a single-facility, unweighted, quadratic bicriteria location problem defined in the continuous space. First we describe an analytical method for constructing the set of Pareto-optimal locations for this problem based on the farthest-point Voronoi diagram. Then we present an analytical method for finding the solution to the scalarized location problems based on the Pareto-optimal locations. The analytical results enable planners to carry out some sensitivity analyses. Since both methods are based entirely on geometrical analysis, they can be understood intuitively. © 1999 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Keywords: Location; Facility; Pareto-optimal; Bicriteria model; Farthest-point Voronoi diagram

1. Introduction

Continuous, single facility location models, especially the minisum and the minimax models, have been attracting researchers for many years. In the minisum model, which is frequently called the Weber model, the average distance supported by all users is minimized, so its objective function can be considered as a criterion of *efficiency*. On the other hand, in the minimax model, the longest distance supported by a user is minimized, so its objective function can be regarded as a criterion of *equity*: (see Hansen et al., 1981). However, in some practical applications, it is more appropriate to consider both criteria rather than taking only one

criterion into account. In general, both criteria are antagonistic. As a result, the compromise which made by considering both the minisum and the minimax criteria should be used for choosing a location for the facility. In the last decade, several articles have been devoted to the study of such bicriteria location models – see Halpern (1976, 1978, 1980), McGinnis and White (1978), Hansen et al. (1981), Handler (1985), Buhl (1988), Aly and Rahali (1990), and Carrizosa et al. (1994). For example, Halpern (1976, 1978, 1980) and Handler (1985) analyzed the bicriteria location models on graph. McGinnis and White (1978) examined a rectilinear bicriteria location model in a continuous space. Hansen et al. (1981) developed a numerical algorithm to determine the set of Pareto-optimal locations associated with the bicriteria location model for Euclidean distance cases in a continuous space.

* Tel.: +81 298 53 5224; fax: +81 298 55 3849; e-mail: osawa@sk.tsukuba.ac.jp.

In this paper, we are concerned with the bicriteria location models in which the squared Euclidean distances between demand points and a facility location are used. Several examples of such a quadratic formulation are the problems of locating hospitals, fire stations, police stations, and other emergency service agencies. In these cases, the damage incurred increases more than proportionally with the waited time for intervention, hence with the distance travelled (see White, 1971). In addition, since the quadratic models can be considered as an approximation to the Euclidean distance cases, such a quadratic formulation is justified (see McHose, 1961). In this paper, we specialize in unweighted cases.

The purpose of this paper is twofold; first, we characterize the set of Pareto-optimal locations associated with the bicriteria location models which are based entirely on simple geometrical methods. Second, we derive a geometrical method for solving the scalarized location model in which the objective is to minimize a convex combination of the minisum and minimax objective functions with suitable weights assigned to each of the two objectives. It will be shown that both the set of Pareto-optimal locations and the solutions to the scalarized location model can be analytically and geometrically expressed with the help of the farthest-point Voronoi diagram. Although such analytical expressions will enable us to carry out some sensitivity analyses, little attention will be given to this point. In addition, these geometrical expressions may be valuable in terms of intuitive understanding. Both methods have markedly strong combinatorial features. In fact, we show that the computational complexity of our methods are both $O(n \log n)$, where n is the number of demand points.

This paper will be divided into four sections. In Section 2, the formulation and the solution of three location models are given. The definition and some properties of the farthest-point Voronoi diagram also appear. Section 3 is devoted to the characterization of the set of Pareto-optimal locations and of the minimizer of a convex combination of the two criteria. The paper concludes with several remarks in the final section.

2. Location models and farthest-point Voronoi diagram

2.1. Minisum and minimax location models

Consider the Euclidean plane where n demand points p_1, \dots, p_n are distributed. Then, the *minisum model* is used to find the position of a facility in order to minimize the average of the squared Euclidean distances from the demand points to the facility. This model can be stated as

$$\text{minimize } F(q) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \|q - p_i\|^2. \quad (1)$$

It is obvious from Eq. (1) that $F(q)$ is strictly convex. The minimizer of $F(q)$, denoted by g^* , coincides with the center of gravity $(1/n) \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} p_i$. Thus, g^* can be found in $O(n)$ time. It is well known that the contours of $F(q)$ are circles around g^* (see Francis and White, 1974).

On the other hand, the *minimax model* is used to find the location of a facility to minimize the largest squared Euclidean distance from any demand point to the facility. Its formulation is

$$\text{minimize } G(q) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|q - p_i\|^2. \quad (2)$$

We should notice that $G(q)$ is also strictly convex. Clearly, the minimizer of $G(q)$ is the center of the disk with the smallest radius containing p_1, \dots, p_n . This minimizer, denoted by c^* , is called a *center*. In order to solve this model, many algorithms have been developed. Shamos and Hoey (1975) presented an $O(n \log n)$ time resolution method. Megiddo (1983) and Dyer (1984) exhibited $O(n)$ techniques.

2.2. Farthest-point Voronoi diagram

The *Voronoi polygon* associated with p_i , denoted by V_i , is the set of the points farther to p_i than to any p_j with $j \neq i$. Its formulation is

$$V_i = \bigcap_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \{q \mid \|q - p_i\| \geq \|q - p_j\|\}. \quad (3)$$

It is evident from definition (3) that V_i is closed and convex. We denote its boundary by ∂V_i . Each

edge and each vertex of this polygon is called a *Voronoi edge* and a *Voronoi vertex*, respectively. The union of V_1, \dots, V_n is called a *farthest-point Voronoi diagram*. (See Shamos and Hoey (1975), Okabe et al. (1992) for a detailed discussion on this diagram.) Note that the demand point p_i is not at a vertex of the boundary of the convex hull of p_1, \dots, p_n if and only if V_i is empty. Otherwise, V_i is unbounded (see Shamos and Hoey, 1975). A consequence is that the Voronoi diagram has no cycles, so it must be a tree. We denote this network by T . In a tree, the path that connects two points is uniquely defined. Let $P(q_1, q_2)$ be the path joining $q_1, q_2 \in T$. An example of the farthest-point Voronoi diagram generated by the 47 locality points of Nara Prefecture in Japan is presented in Fig. 1. In this figure, six locations on the vertices of the boundary of the convex hull are indicated by bullets.

The minimax location model can be solved geometrically with the help of the farthest-point Voronoi diagram (see Shamos and Hoey, 1975).

Indeed, the center c^* is defined either by a Voronoi vertex, or by the intersection of a Voronoi edge and the line segment joining the two demand points generating the Voronoi edge. Fig. 1 also illustrates the occurrence of the former case. The center is indicated by an asterisk.

Ohsawa and Imai (1997) demonstrated that the farthest-point Voronoi diagram is useful for delineating the contours of the minimax function $G(q)$. It will be shown that this diagram also offers the key to identifying the set of the Pareto-optimal locations, and to finding the minimizer of the scalarized location problems.

2.3. Scalarization and Pareto-optimality

In actual location planning, a compromise location must be sought if both the minisum and minimax criteria are important. In practice, the approach suggested for finding such a location is to minimize the convex combination of the mini-

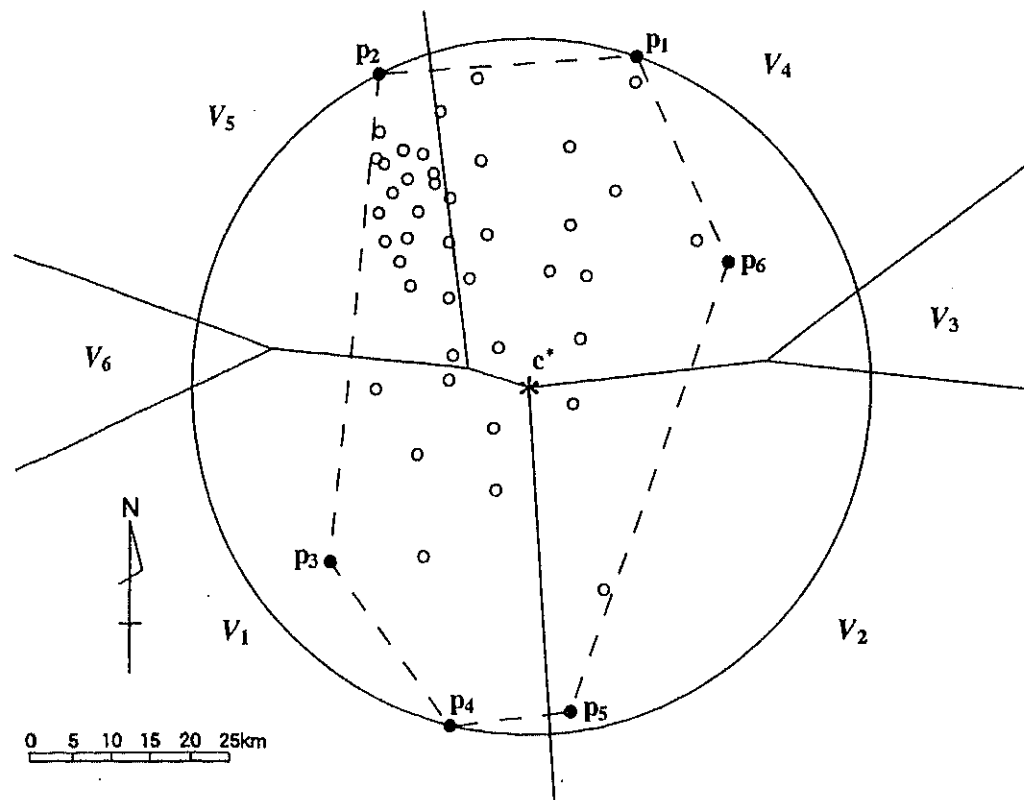


Fig. 1. Farthest-point Voronoi diagram and the center in Nara Prefecture.

sum and minimax functions with suitable weights assigned to each of the two objectives. Mathematically, this approach which is called a *scalarized location problem* can be written with a relative weight $\lambda \in [0, 1]$ as

$$\text{minimize } H(\mathbf{q} : \lambda) = (1 - \lambda)F(\mathbf{q}) + \lambda G(\mathbf{q}). \quad (4)$$

Since both $F(\mathbf{q})$ and $G(\mathbf{q})$ are strictly convex, $H(\mathbf{q} : \lambda)$ is also strictly convex for any $\lambda \in [0, 1]$. So, the scalarized problem (4) has a unique solution for any $\lambda \in [0, 1]$. Let us denote the solution to problem (4) by $\mathbf{s}^*(\lambda)$. Similarly for the minimax objective function $G(\mathbf{q})$, the contours of $H(\mathbf{q} : \lambda)$ for a fixed λ can also be analytically delineated with the aid of the farthest-point Voronoi diagram. Let us show this. For each i , define

$$H_i(\mathbf{q} : \lambda) \equiv ((1 - \lambda)/n) \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} \|\mathbf{q} - \mathbf{p}_j\|^2 + \lambda \|\mathbf{q} - \mathbf{p}_i\|^2.$$

It is evident from definition (3) that for any $\mathbf{q} \in V_i$, $H(\mathbf{q} : \lambda) = H_i(\mathbf{q} : \lambda)$. In addition, $H_i(\mathbf{q} : \lambda)$ can be regarded as the objective function of a weighted minisum problem, where the weight of the i th demand is augmented by λ . As in the case of the unweighted minisum problem in Eq. (1), the contours of $H_i(\mathbf{q} : \lambda)$ become circular arcs emerging from the center of gravity of the corresponding demand points. Thus we see that a contour of $H(\mathbf{q} : \lambda)$ in V_i is a circular arc emerging from

$$\sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} ((1 - \lambda)/n) \mathbf{p}_j + ((1 - \lambda)/n + \lambda) \mathbf{p}_i \\ = (1 - \lambda) \mathbf{g}^* + \lambda \mathbf{p}_i,$$

as required.

We call the point \mathbf{q}_0 *Pareto-optimal* (efficient or undominated) if there is no point \mathbf{q} in such a way that $F(\mathbf{q}) \leq F(\mathbf{q}_0)$ and $G(\mathbf{q}) \leq G(\mathbf{q}_0)$, with strict inequality for at least one of the inequalities. Let S^* be the set of the Pareto-optimal locations. Thus within S^* , there is the tradeoff between the minisum and the minimax criteria.

Before characterizing S^* and $\mathbf{s}(\lambda)$, some remarks should be mentioned. First, Geoffrion (1968) proved that when both objective functions of the bicriteria problem are convex, the set of Pareto-optimal can be obtained by solving all the

convex combinations of the two criteria. Since both $F(\mathbf{q})$ and $G(\mathbf{q})$ are convex, we see that $S^* = \{\mathbf{s}^*(\lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Further, Hansen et al. (1981) demonstrated that if a scalarized function has a unique solution for each possible relative weight, the set of the Pareto-optimal locations associated with the problem is a continuous curve joining the minimizers of two different criteria. Also, although it was not explicitly stated, this curve is always simple in the sense that it does not intersect itself. Here, since the solution to the scalarized location problem (4) is unique for each $\lambda \in [0, 1]$, we see that S^* is a simple continuous curve joining \mathbf{g}^* and \mathbf{c}^* .

3. Geometrical analyses

3.1. Set of Pareto-optimal locations

Where does the set of the Pareto-optimal locations S^* lie? We shall show that the set S^* can be described analytically with the help of the farthest-point Voronoi diagram. We define g as one of the indices such that $\mathbf{g}^* \in V_g$. We also define \mathbf{q}_0 as an intersection of the line segment $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{p}_g}$ and the boundary ∂V_g ; see Fig. 2, where the interior points of the convex hull of the demand points are suppressed.

Proposition 1. *The set of the Pareto-optimal locations S^* consists of the line segment $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{q}_0}$ and the path $P(\mathbf{q}_0, \mathbf{c}^*)$.*

Proof. For some λ , if a minimizer of $H_i(\mathbf{q} : \lambda)$, i.e., $(1 - \lambda) \mathbf{g}^* + \lambda \mathbf{p}_i$ lies on V_i , it is also a minimizer of $H(\mathbf{q} : \lambda)$. This is because $H(\mathbf{q} : \lambda)$ is strictly convex. By recalling the result by Geoffrion, this means that it belongs to S^* . Thus we see that if $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{p}_i} \cap V_i \neq \emptyset$, then $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{p}_i} \cap V_i \in S^*$. When $i = g$, the boundary ∂V_g intersects $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{p}_g}$ just once because $\mathbf{g}^* \in V_g$, $\mathbf{p}_g \notin V_g$, and V_g is convex. Thus, $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{p}_g} \cap V_g = \overline{\mathbf{g}^* \mathbf{q}_0} \in S^*$, as shown in Fig. 2 where $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{q}_0}$ is indicated by a thick line segment. On the other hand, when $i \neq g$, $\overline{\mathbf{g}^* \mathbf{p}_i} \cap V_i \setminus \partial V_i = \emptyset$; see Fig. 2. This can be proved as follows. The perpendicular bisector of the line segment $\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_g}$ divides the plane into two demi-spaces. It is clear

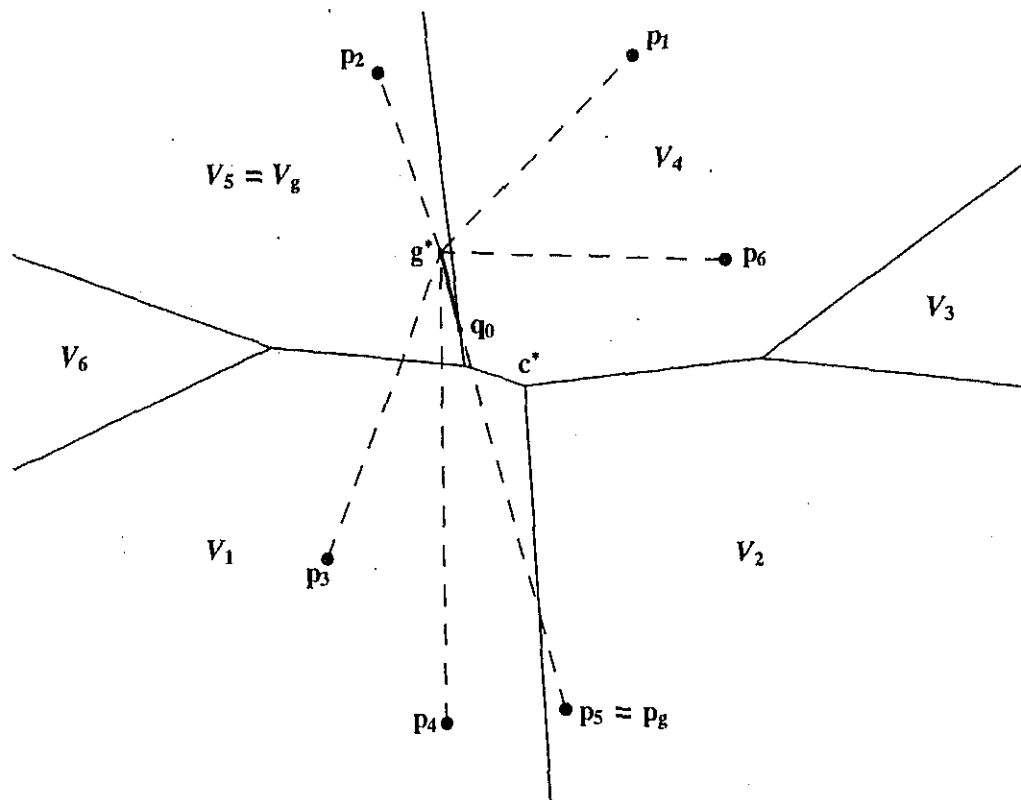


Fig. 2. Illustration of the proof of Proposition 1.

from the definition of Voronoi polygon in Eq. (3) that one demi-space includes p_i and V_g , and another demi-space contains p_g and V_i . It follows from $g^* \in V_g$ that $\overline{g^*p_i}$ could not intersect $V_i \setminus \partial V_i$, as required.

Otherwise, for each i , it follows from the strict convexity of $H_i(q; \lambda)$ that the minimizer of $H_i(q; \lambda)$ subject to $q \in V_i$ has to lie over the boundary ∂V_i . It should be noted that $s(\lambda)$ is also one of these minimizers. Thus we see that $s(\lambda)$ must lie in the tree T . This result together with the result that S^* is a simple continuous curve connecting q_0 and c^* , as we have shown in the preceding section, implies that $P(q_0, c^*) \in S^*$. \square

For example, the three edges e_1, e_2, e_3 in Fig. 3 correspond to the set S^* of Nara Prefecture. From this proposition, the method for delineating the set of the Pareto-optimal locations S^* can be summarized in the following steps.

Step 1: Compute the center of gravity g^* .

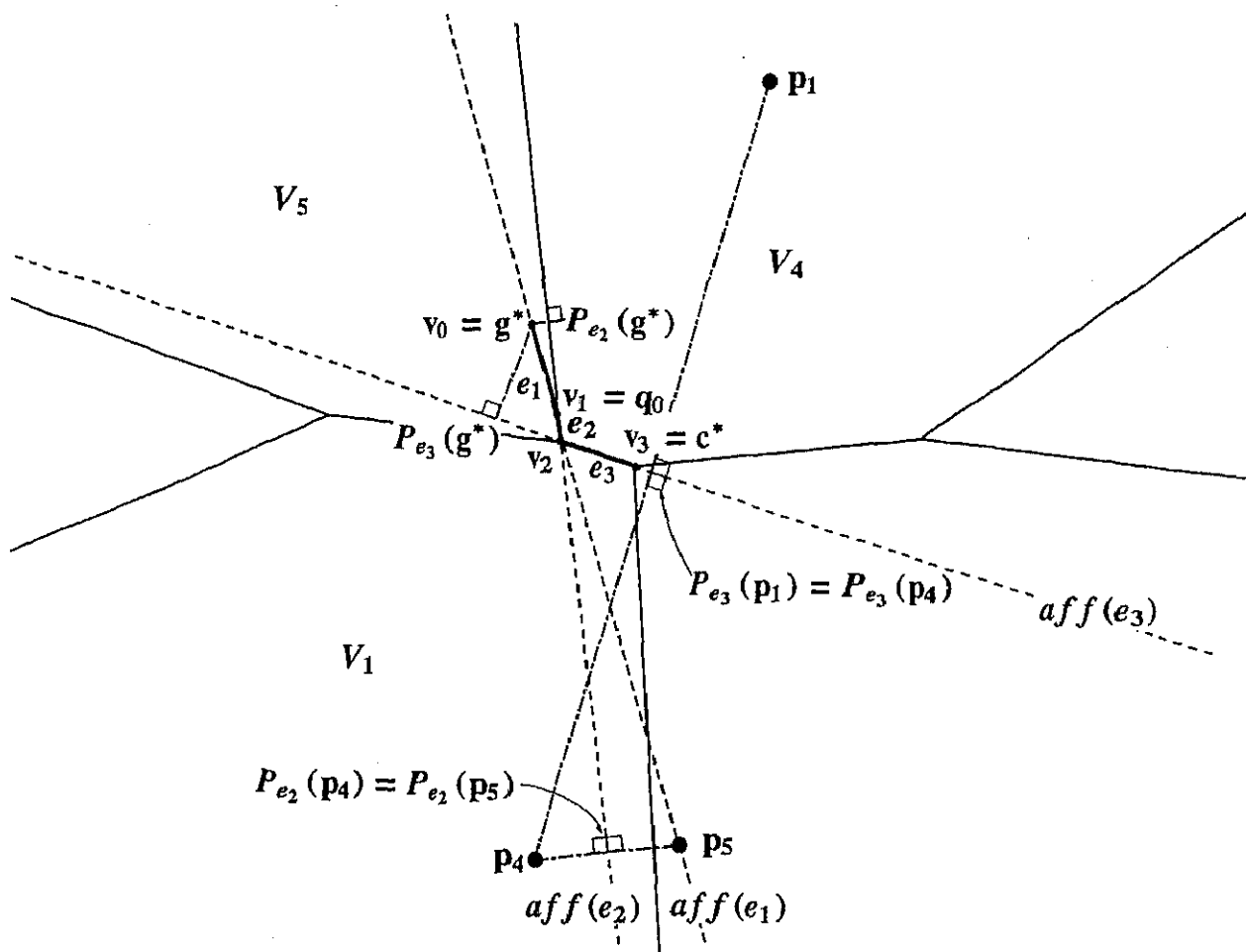
Step 2: Construct the farthest-point Voronoi diagram of p_1, \dots, p_n and find the center c^* .

Step 3: Find V_g , i.e., the Voronoi polygon containing g^* .

Step 4: Find q_0 , i.e., the intersection point of $\overline{g^*p_g}$ and ∂V_g , and find the path $P(q_0, c^*)$.

The center of gravity g^* can be calculated in $O(n)$ time. Shamos and Hoey (1975) showed that Step 2 can be performed in $O(n \log n)$ time by using a divide-and-conquer technique. Since the farthest-point Voronoi diagram contains only $O(n)$ Voronoi edges, see Shamos and Hoey (1975), both Steps 3 and 4 can also be done in $O(n)$ time. Thus, the complexity of the entire procedure is $O(n \log n)$.

Two additional remarks on the set S^* are as follows. First, since the farthest-point Voronoi diagram is determined only by the demand points located at the vertices of the boundary of the convex hull of p_1, \dots, p_n , S^* has at most the same number of line segments as these demand points, and consists of only line segments. This result states that S^* together with the farthest-point Voronoi diagram can be delineated only by using a straightedge and a compass. Of course, the method

Fig. 3. Definition of $P_{e_i}(g^*)$'s and $aff(e_i)$'s.

for constructing S^* may be utilized more easily with some software of GIS.

Second, consider a constrained minisum problem in which the objective is to minimize the minisum function $F(q)$ subject to the constraint that the value of the minimax function $G(q)$ will not exceed a certain level. As implicitly shown by Halpern (1978) and Hansen et al. (1981), the solution to this constrained problem is given by the intersection of S^* and the contour corresponding to that level. Since the contours of $G(q)$ are circular arcs as shown by Ohsawa and Imai (1997), this constrained problem can also be analytically solved. The same holds for a constrained minimax problem where the objective is to minimize the minimax function $G(q)$ while fulfilling an upper bound imposed on the value of the minisum function $F(q)$.

3.2. Solution to the scalarized location problem

What is the solution to the scalarized location problem (4) for a fixed λ ? It is possible to answer this question by means of existing numerical algorithms if only a numerical solution is required; see e.g., Hansen et al. (1981), Plastria (1987). However, Halpern (1980), Carrizosa et al. (1994) pointed out that it is often difficult for the planners to specify the relative weight λ exactly in the scalarized location problem (4). One way to overcome this problem is to provide an analytical expression of $s^*(\lambda)$ in terms of parameter λ . This analytical result will also enable us to evaluate how sensitive $s^*(\lambda)$ is to a change in λ . We shall show an analytical method for finding $s^*(\lambda)$ for a fixed λ , based on the set of Pareto-optimal locations S^* .

For clarity, we will call each maximal line segment within S^* a *Pareto-optimal edge*. For example, in Fig. 3, e_1, e_2, e_3 are Pareto-optimal edges. For notational purposes, let $\text{aff}(e)$ denote the straight line including the Pareto-optimal edge e , let $P_e(\mathbf{q})$ denote the foot of the perpendicular line from the point \mathbf{q} on $\text{aff}(e)$, and let D_e denote the length of the projection of the line segment $\overline{\mathbf{g}^*\mathbf{p}_i}$ to $\text{aff}(e)$ for $V_i \supseteq e$, i.e., $\|P_e(\mathbf{g}^*) - P_e(\mathbf{p}_i)\|$. Note that unless $e = \overline{\mathbf{g}^*\mathbf{q}_0}$, there exist two different indices s and t such that $\partial V_s \cap \partial V_t \supseteq e$, but $P_e(\mathbf{p}_s) = P_e(\mathbf{p}_t)$. For any point $\mathbf{q} \in e$, define the internal ratio $\mu(\mathbf{q}; e) \equiv \|P_e(\mathbf{g}^*) - \mathbf{q}\|/D_e$, see Fig. 3.

Proposition 2. *If $\mathbf{s}^*(\lambda)$ is located on the Pareto-optimal edge e , then $\mu(\mathbf{s}^*(\lambda); e) = \lambda$.*

Proof. If $\mathbf{s}^*(\lambda)$ lies on the Pareto-optimal edge $\overline{\mathbf{g}^*\mathbf{q}_0}$, then $e = \overline{\mathbf{g}^*\mathbf{q}_0}$ and $t = g$. We see from the proof of Proposition 1 that $\mathbf{s}^*(\lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{g}^* + \lambda\mathbf{p}_g$. This means that $\mathbf{s}^*(\lambda)$ divides the line segment $\overline{\mathbf{g}^*\mathbf{p}_g} = \overline{P_e(\mathbf{g}^*)P_e(\mathbf{p}_g)}$ internally in a ratio of $\lambda:(1 - \lambda)$, as required.

Otherwise, $\mathbf{s}^*(\lambda)$ must lie on ∂V_t for some t . In other words, $\mathbf{s}^*(\lambda)$ is also a minimizer of $H_t(\mathbf{q}; \lambda)$ subject to $\mathbf{q} \in e$. Based on Thales' theorem, since $H_t(\mathbf{q}; \lambda)$ is quadratic with respect to \mathbf{q} , the value of $H_t(\mathbf{q}; \lambda)$ over $\text{aff}(e)$ is minimized at the point that divides $\overline{P_e(\mathbf{g}^*)P_e(\mathbf{p}_t)}$ internally in a ratio of $\lambda:(1 - \lambda)$. \square

Let $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_m, v_m)$ be the sequence of the path S^* from \mathbf{g}^* to \mathbf{c}^* , where e_1, \dots, e_m are Pareto-optimal edges and v_0, \dots, v_m are their vertices such that v_{i-1} and v_i are the extreme points of e_i for $i \in \{1, \dots, m\}$. Let $v_0 = \mathbf{g}^*$, $v_1 = \mathbf{q}_0$, $v_m = \mathbf{c}^*$. It is easy to check that $\mu(v_1; e_1) = \mu(v_1; e_2)$. However, $\mu(v_i; e_i) \neq \mu(v_i; e_{i+1})$ for some $i \in \{2, \dots, m-1\}$ or $\mu(v_m; e_m) \neq 1$ may hold. Indeed, as λ increases, $\mathbf{s}^*(\lambda)$ moves towards \mathbf{c}^* . Therefore, v_i ($i \in \{2, \dots, m-1\}$) (resp. v_m) must be a minimizer of $H(\mathbf{q}; \lambda)$ for each $\lambda \in [\mu(v_i; e_i), \mu(v_i; e_{i+1})]$ (resp. $\lambda \in [\mu(v_m; e_m), 1]$). In fact, in Fig. 3, this scalarized objective is minimized at v_1 only for $\lambda = \|\mathbf{g}^* - v_1\|/D_{e_1} \approx 0.19$, at v_2 for each $\lambda \in [\|P_{e_2}(\mathbf{g}^*) - v_2\|/D_{e_2}, \|P_{e_3}(\mathbf{g}^*) - v_2\|/D_{e_3}] \approx [0.23, 0.41]$, and at $v_3 = \mathbf{c}^*$ for each $\lambda \in [\|P_{e_3}(\mathbf{g}^*) - v_3\|/D_{e_3}, 1] \approx [0.87, 1.00]$.

For a fixed λ , $\mathbf{s}^*(\lambda)$ can be obtained geometrically by the following steps, provided that S^* is given; Steps 1–4 have already been completed.

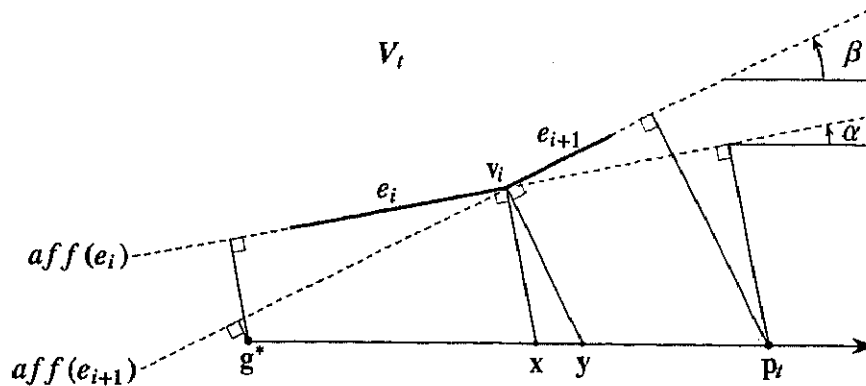
Step 5: For each $i \in \{1, \dots, m\}$, compute $\mu(v_{i-1}; e_i)$ and $\mu(v_i; e_i)$. Set $\mu(v_m; e_{m+1}) = 1$.

Step 6: If there exists an index i such that $\mu(v_{i-1}; e_i) \leq \lambda \leq \mu(v_i; e_i)$, then $\mathbf{s}^*(\lambda)$ is given by $(1 - \lambda)P_{e_i}(\mathbf{g}^*) + \lambda P_{e_i}(\mathbf{p}_i)$ for $V_i \supseteq e_i$. Otherwise, $\mathbf{s}^*(\lambda)$ is given by v_i such that $\mu(v_i; e_i) \leq \lambda \leq \mu(v_i; e_{i+1})$.

Since both Steps 5 and 6 can be performed in $O(n)$, the total time complexity is $O(n \log n)$.

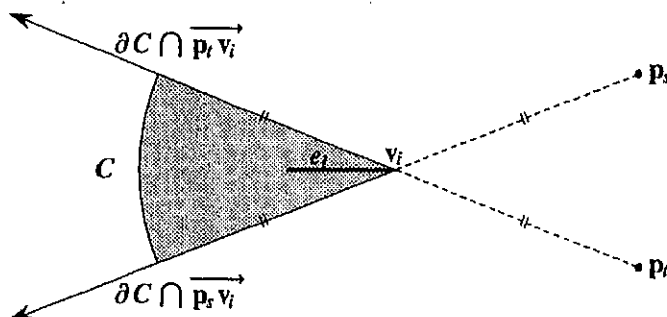
Several comments on the optimal solution to the scalarized location problem (4) are described. First, $\mu(v_i; e_i) < \mu(v_i; e_{i+1})$ for any $i \in \{2, \dots, m-1\}$, and $\mu(v_m; e_m) < 1$ for v_m which is on a Voronoi vertex. Therefore, a range of λ exists that will produce these v_i 's as the optimal solution to the scalarized problem (4). Thus, we see that any Voronoi vertex within S^* is stable in the sense that although λ changes, it remains optimal as long as λ belongs to that range. Other Pareto-optimal locations are unstable in the sense that if λ changes, they do not remain optimal. Let us prove that $\mu(v_i; e_i) < \mu(v_i; e_{i+1})$. There is a unique Voronoi polygon V_i such that $e_i, e_{i+1} \subseteq \partial V_i$. Let α (resp. β) be the directed angle from the ray $\overrightarrow{\mathbf{g}^*\mathbf{p}_i}$ to the ray $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ (resp. $\overrightarrow{v_iv_{i+1}}$). Without loss of generality, e_i and e_{i+1} lie above the line connecting \mathbf{g}^* and \mathbf{p}_i , and if the directed angle is to be considered counter-clockwise, its sign is positive; otherwise, its sign is negative. This situation is illustrated in Fig. 4. As λ varies, $\mathbf{s}^*(\lambda)$ on e_i , that is the projection of $(1 - \lambda)\mathbf{g}^* + \lambda\mathbf{p}_i$ to $\text{aff}(e_i)$, must move towards v_i . Therefore, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, and $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. In addition, $\text{aff}(e_i)$ separates V_i and \mathbf{p}_i , so $\alpha < \beta$. As shown in Fig. 4, for λ such that $(1 - \lambda)\mathbf{g}^* + \lambda\mathbf{p}_i$ is between x and y , v_i is the optimal solution to the scalarized problem, where x (resp. y) is the point on $\overline{\mathbf{g}^*\mathbf{p}_i}$ such that v_i is the projection of x (resp. y) to $\text{aff}(e_i)$ (resp. $\text{aff}(e_{i+1})$). This implies that $\mu(v_i; e_i) < \mu(v_i; e_{i+1})$. Similarly, we can prove that $\mu(v_m; e_m) < 1$ for v_m on a Voronoi vertex.

Second, Proposition 2 states that $\mathbf{s}^*(\lambda)$ on e_i moves at a constant speed as λ changes. However, as shown in the example of Fig. 3, as index i increases, the speed on e_i decreases. This result

Fig. 4. Definition of α , β , x and y .

suggests that changes in λ will have a tendency to produce much larger effect on the position of $s^*(\lambda)$ on e_i rather than on e_{i+1} . Let us prove the result. Since Proposition 2 says that the speed of $s^*(\lambda)$ on e_i is proportional to D_{e_i} , we show that $D_{e_i} > D_{e_{i+1}}$. This is true for $i=1$. For $i \in \{2, \dots, m-1\}$, since $D_{e_i} = \|g^* - p_t\| \cos \alpha$ and $D_{e_{i+1}} = \|g^* - p_t\| \cos \beta$ and $\alpha < \beta < \pi/2$, it suffices to show that $0 < \alpha$; see Fig. 4. Suppose that $e_i \subseteq \partial V_t \cap \partial V_s$ ($s \neq t$). Let C be the cone generated by the rays $\overrightarrow{p_t v_i}$ and $\overrightarrow{p_s v_i}$, and ∂C be its boundary; see Fig. 5. Then, based on the definition of Voronoi polygon (3), since $v_i \in \partial V_t \cap \partial V_s$, we have $(\partial C \cap \overrightarrow{p_t v_i}) \subset V_t \setminus \partial V_t$ and $(\partial C \cap \overrightarrow{p_s v_i}) \subset V_s \setminus \partial V_s$. This means that ∂C does not intersect any Voronoi edges except at v_i . Combining this result with Proposition 1 yields $g^* \in C$. Also, since g^* is contained inside the convex hull of the demand points, we have $\|g^* - v_i\| < \|p_t - v_i\| (= \|p_s - v_i\|)$. Therefore, g^* has to be contained within the shaded area as shown in Fig. 5. This gives $\alpha > 0$, as required.

Finally, Proposition 2 implies that for $\lambda \geq \frac{1}{2}$, $s^*(\lambda)$ must lie in the tree T , i.e., on a Voronoi

Fig. 5. Definition of C .

edge. This is because q_0 is within V_g , and g^* is contained inside the convex hull of the demand points, which means that $\|g^* - q_0\| \leq \|p_g - q_0\|$. This yields $\|g^* - q_0\| \leq \frac{1}{2} (\|g^* - q_0\| + \|q_0 - p_g\|) = \frac{1}{2} \|g^* - p_g\|$, as required.

4. Conclusion

This paper focused on a single-facility squared Euclidean distance bicriteria model with minimum and minimax objectives. It allowed us to characterize both the set of Pareto-optimal locations and the solutions to the scalarized location problems in an intuitively appealing manner using only geometry.

One possible extension of our results is to consider the weighted case; see Hansen et al. (1981). In the weighted case, instead of using the farthest-point Voronoi diagram, we have to utilize a *weighted* farthest-point Voronoi diagram in which the Voronoi edges consist of circular arcs and where the Voronoi polygons may be bounded; see Okabe et al. (1992). Although this diagram seems to be complex, it seems that the set of the Pareto-optimal locations consists of some weighted farthest-point Voronoi edges, and parts of line segments connecting the center of gravity and some demand points.

Acknowledgements

The author is grateful to Professor Dominique Peeters of the Catholic University of Louvain in

Louvain-la-Neuve, Belgium, and Professor Takeshi Koshizuka of the University of Tsukuba for their valuable suggestions and comments.

References

- Aly, A.A., Rahali, B., 1990. Analysis of a bicriteria location model. *Naval Research Logistics* 37, 937–944.
- Buhl, H.U., 1988. Axiomatic considerations in multi-objective location theory. *European Journal of Operational Research* 37, 363–367.
- Carrizosa, E., Conde, E., Fernández, F.R., Puerto, J., 1994. An axiomatic approach to the cent-dian criterion. *Location Science* 2, 165–171.
- Dyer, M.E., 1984. Linear time algorithms for two- and three-variable linear programs. *SIAM Journal on Computing* 13, 31–45.
- Francis, R.L., White, J.A., 1974. *Facility Layout and Location*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Geoffrion, A.M., 1968. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22, 618–630.
- Halpern, J., 1976. The location of a center-median convex combination on an undirected tree. *Journal of Regional Science* 16, 237–245.
- Halpern, J., 1978. Finding minimal center-median combination of a graph. *Management Science* 24, 535–544.
- Halpern, J., 1980. Duality in the cent-dian of a graph. *Operations Research* 28, 722–735.
- Handler, G.Y., 1985. Medi-centers of a tree. *Transportation Science* 19, 246–260.
- Hansen, P., Peeters, D., Thisse, J.F., 1981. Constrained location and the Weber–Rawls problem. *Annals of Operations Research* 11, 147–166.
- McGinnis, L.F., White, J.A., 1978. Single facility rectilinear location problem with multiple criteria. *Transportation Science* 12, 217–231.
- McHose, A.H., 1961. A quadratic formulation of the activity location problem. *Journal of Industrial Engineering* 12, 334–337.
- Megiddo, N., 1983. Linear time algorithms for linear programming in R^3 and related problems. *SIAM Journal on Computing* 12, 759–776.
- Ohsawa, Y., Imai, A., 1997. Degree of locational freedom in a single facility Euclidean minimax location model. *Location Science* 5, 29–45.
- Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., 1992. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley, Chichester.
- Plastria, F., 1987. Solving general continuous single facility location problems by cutting planes. *European Journal of Operational Research* 29, 98–110.
- Shamos, M.I., Hoey, D., 1975. Closest-point problems. *Proceedings of the 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. pp. 151–162.
- White, J.A., 1971. A quadratic facility location problem. *AIIE Transactions* 3, 156–157.

Optimal Facility Location with Multi-purpose Trip Making

Tsutomu Suzuki

Institute of Policy and Planning Sciences, The University of Tsukuba
Tsukuba, Ibaraki 305-8573 Japan
tsutomu@sk.tsukuba.ac.jp

and

M. John Hodgson

Department of Earth and Atmospheric Sciences, The University of Alberta
Edmonton, Alberta, Canada T6G 2E3
john.hodgson@ualberta.ca

June 4, 2002

Abstract

We address the optimal location problem for two different types of service, type-A and type-B, where some users may obtain both types of service in multi-purpose trips. We consider three user groups: users of only type-A service, users of only type-B service and multi-purpose users of both services in a single trip. We seek to locate three types of facilities: type-A, type-B, and joint facilities offering both services. We formulate a new p -median-based model minimizing total travel distance and use it to investigate the effect of multi-purpose trip makers on optimal facility types and locations.

Demonstrations show that services tend cluster in joint facilities, even when the proportion of multi-purpose behavior is small.

Keywords: location-allocation, p -median model, multi-purpose trip

Introduction

Location-Allocation (LA) models optimally locate facility systems and allocate demand to them. Traditionally, the LA literature has assumed that facility systems provide a single service. Consider a study area occupied by a number of *demand points*, each expressing demand for a certain amount of service, represented by a weight, for example, the number of patrons there. The most widely-used LA model, the p -median, locates facilities to minimize the weighted distance from demand points to their nearest facility. Behavioristically, the p -median model assumes that patrons seek only one type of service at a time, that they obtain it at the nearest facility, and that they are best served by facilities being as close to them as possible.

Patrons often obtain some types of service, however, in multi-purpose trips in which two or more facilities are visited in linked trips. People often organize errands so that several services may be obtained on a single trip. In this seminal paper, we consider the simple situation in which two services may be sought on a single trip – for instance, a visit to a doctor and a visit to a pharmacy. Although this is a very simple situation, this is the first LA model explicitly accommodating multi-purpose trip making.

We address the optimal location problem for two different types of service, type-A and type-B, considering that patrons may make multi-purpose trips to obtain both in a single trip. We consider three different types of patron: users of single type-A service, users of single type-B service, and multi-purpose users of both services. We locate three different types of facilities: type-A facilities offering only type-A services, type-B facilities offering only type-B services, and joint facilities providing both. Our approach is based on the p -median model, focused on minimizing travel cost, here equated with straight-line distance. In this environment, single-service users travel to the nearest

facility of interest and return home. Multi-purpose users take the shortest tour from home to one facility, to the next facility, and home. If all patrons are single facility users, two separate systems can be generated using two applications of the p -median model. If all patrons are multi-purpose users, a single application of the p -median model can be used to generate a system of joint facilities. If there is a mix of single- and multi-purpose trip makers, the three types of travel must be linked together in a different model.

The paper is organized as follows. We briefly review the importance of multi-purpose trip making behavior in theory and practice. We then explore simple examples to demonstrate how optimal facility locations change when we take multi-purpose users into account. We present a new mixed integer programming model to deal with this location problem, and use a 20-node test problem to examine the influence of the proportion of multi-purpose users on optimal facility location. We conclude with some remarks and suggestions for future work.

Multi-purpose Travel Behavior

There is much anecdotal evidence of the importance of multi-purpose trips in our lives. Most of us organize at least some of our errands along multi-purpose trips. We drop off the dry-cleaning, visit the post office, buy our groceries, and pick up a bottle of wine on the way home. The importance of multi-purpose trips is also well established in the geographical literature. Empirical studies have determined that more than 30 percent of shopping trips are multi-purpose (Hensher, 1976; Hanson, 1980; O'Kelly, 1981). Eaton and Lipsey (1979) and McLafferty and Ghosh (1986) have examined spatial competition in a linear city, within a traditional Hotelling (1929) framework, under the assumption that users may visit more than one facility on a trip. Studies have

considered the impact of multi-purpose trips on the spatial organization of retail firms (Eaton and Lipsey, 1982; Mulligan, 1987; Thill, 1992). One of the important features of multi-purpose trips is their impact on spatial allocation. South and Boots (1999) revealed that relaxing the nearest center assumption in central place theory leads to significant changes in market area organization. Accordingly, Ohyama and Suzuki (2001) developed the tour-distance based Voronoi diagram, which revealed that spatial agglomeration is advantageous to people making multi-purpose tours.

It is to be expected that multi-purpose trips will also affect the outcomes of facility location models. Yet, the LA literature has involved very little consideration of multi-purpose trip making. Hodgson (1981) located daycare centers to minimize the deviation from the parent's normal journey to work; here, both ends of the overall journey to work trip (the residence and workplace) are fixed, and only single intermediate facilities are located. Berlin et al. (1976) considered the locations of both ambulances and hospitals relative to accident sites, but because demands are exerted within the overall journey, they could show that ambulance and hospital location are separable into two traditional location problems. Suzuki and Hodgson (2002) locate multi-service facilities, but treat the demands as individual trips by different groups rather than multi-purpose trips. To conclude, although some related problems have been considered, no model has explicitly considered the locations of more than one type of facility within a multi-purpose trip.

The Effects of Multi-purpose Trip Making: An Example

To illustrate how multi-purpose demand affects facility location, we use a simple network, with four nodes and five links of unit length (Figure 1). In each case, we locate two clinics and two pharmacies. Each node exerts demands for clinics and for

pharmacy services. Demand for clinics is dominant at nodes 1 and 2; that for pharmacy service is dominant at nodes 3 and 4. In Configuration 1 (Figure 2), we locate clinics at nodes 1 and 2 and pharmacies at nodes 3 and 4. Total single-purpose round trip distance is: $((7*0+6*0+3*1+4*1) + (4*1+3*1+7*0+6*0))*2 = 28$. In Configuration 2, we co-locate both types of facility at nodes 1 and 4. Total single-purpose travel distance is: $((7*0+6*1+3*1+4*0) + (4*0+3*1+7*1+6*0))*2 = 38$. Configuration 3 has a stand-alone clinic at node 2, a stand-alone pharmacy at node 3, and a joint clinic and pharmacy co-located at node 1. (We term facilities located at the same node *joint facilities*. Our observations hold whether the facilities are actually amalgamated or merely located at the same place). Total single-purpose travel distance is: $((7*0+6*0+3*1+4*1)+(4*0+3*1+7*0+6*1))*2 = 32$. Configuration 1, with separate, single-purpose facilities, is optimal for single-purpose trips.

Now, consider multi-purpose trips in which all patrons demand both clinical and pharmacy service on the same journey. To maintain numerical compatibility with the single-purpose examples, we make multi-purpose demand equal to the sum of the type-A and type-B travel. The total multi-purpose travel distance for Configuration 1 is: $11*2+9*2+10*2+10*2 = 80$; for Configuration 2 is: $11*0+9*2+10*2+10*0 = 38$, and for Configuration 3 is: $11*0+9*2+10*2+10*2 = 58$. Configuration 2, with two joint facilities, is one of two optimal solutions for multi-purpose trips. (The other has joint facilities at nodes 1 and 3).

If patrons exhibit both types of trip making behavior, a compromise solution may be appropriate. Suppose that 20% of demand is for multi-purpose trips, and 80% for single-purpose trips. Configurations 1, 2, and 3 have total travel distances of $28*0.8+80*0.2 = 38.4$, $38*0.8+38*0.2 = 38.0$, and $32*0.8+58*0.2 = 37.2$, respectively.

Configuration 3 is optimal for this mix of travel behavior.

When all demands are single-purpose, optimal separate facility systems will never be worse than joint ones (some locations may coincidentally host facilities of both types); we may therefore locate both types of facilities separately using two separate runs of the p -median model. When all demands are multi-purpose, optimally located joint facilities will always be better than separate ones (see Appendix): we may locate the joint facilities using a single run of the p -median model. When there is a mix of demand types, neither of these polar approaches is appropriate. We present a model aimed at locating facilities where there is a mix of single- and multi-purpose demand.

The Mixed Travel Model Formulation

We consider the optimal facility location problem with three different user groups: single service users for type-A and type-B, and multi-purpose users demanding both types of service. We assume that all users minimize travel distance. Those who demand only one service go to the closest facility and return home. Those who demand both services go to one facility, to the next facility, and return home. Candidate locations for type-A facilities are denoted j , those of type-B facilities are denoted k .

The model minimizes the total travel cost for both types of travel:

$$\min_{X_{ij}^A, X_{ik}^B, Y_{ij}^A, Y_{ik}^B} Z = 2\left(\sum_i \sum_j w_i^A d_{ij} X_{ij}^A + \sum_i \sum_k w_i^B d_{ik} X_{ik}^B\right) + \sum_i w_i^{AB} \left(\sum_j d_{ij} Y_{ij}^A + \sum_k d_{ik} Y_{ik}^B + \sum_j \sum_k d_{jk} Y_{ij}^A Y_{ik}^B\right), \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_j X_{ij}^A = 1, \quad \forall i, \quad (2)$$

$$\sum_k X_{ik}^B = 1, \quad \forall i, \quad (3)$$

$$\sum_j Y_{ij}^A = 1, \quad \forall i, \quad (4)$$

$$\sum_k Y_{ik}^B = 1, \quad \forall i, \quad (5)$$

$$X_{ij}^A \leq V_j^A, \quad \forall i, j, \quad (6)$$

$$X_{ik}^B \leq V_k^B, \quad \forall i, k, \quad (7)$$

$$Y_{ij}^A \leq V_j^A, \quad \forall i, j, \quad (8)$$

$$Y_{ik}^B \leq V_k^B, \quad \forall i, k, \quad (9)$$

$$\sum_j V_j^A = p_A, \quad (10)$$

$$\sum_k V_k^B = p_B, \quad (11)$$

where

$X_{ij}^A \in \{0,1\}$	is the allocation of demand at i for type-A service to j .
$X_{ik}^B \in \{0,1\}$	is the allocation of demand at i for type-B service to k .
$Y_{ij}^A \in \{0,1\}$	is the allocation of multi-purpose demand at i to j for type-A service.
$Y_{ik}^B \in \{0,1\}$	is the allocation of multi-purpose demand at i to k for type-B service.
$V_j^A \in \{0,1\}$	is the facility existence at j for type-A service.
$V_k^B \in \{0,1\}$	is the facility existence at k for type-B service.
w_i^A	is the demand at i for type-A service.
w_i^B	is the demand at i for type-B service.
w_i^{AB}	is the demand at i both for type-A and for type-B services.
d_{ij}	is the distance from i to j .
p_A	is the number of type-A facilities to be located.

p_B is the number of type-B facilities to be located.

Z is the aggregate weighted travel distance.

The first term of the objective function is the round trip travel distance of single facility users, and the second term is the tour length of multi-purpose users; the model minimizes the sum of two types of travel distance. Constraints (2), (3), (4), and (5) ensure that every user is assigned to exactly one facility for each type of travel. Constraints (6), (7), (8), and (9) ensure that demands may only be allocated to locations with facilities. Constraints (10) and (11) ensure that the desired number of facilities of each type is located.

If $w_j^{AB} = 0$, the objective function is just the weighted sum of travel distance to and from the nearest type-A and type-B facilities and the model generates separate p -median solutions for type-A and type-B facilities. Otherwise, the objective function has a quadratic form with respect to allocation variables, which would impose a great computational burden.

Fortunately, the objective function can be reformulated to a linear form by the following procedure (Konno and Suzuki, 1982). We introduce new variables:

$$U_{ij} = Y_{ij}^A \sum_k d_{jk} Y_{ik}^B, \quad (14)$$

which satisfies

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } Y_{ij}^A = 0, \\ \sum_k d_{jk} Y_{ik}^B, & \text{if } Y_{ij}^A = 1, \end{cases} \quad (15)$$

and

$$D_j = \sum_k d_{jk}. \quad (16)$$

We can replace (15) by the following inequalities

$$0 \leq U_{ij} \leq D_j Y_{ij}^A, \quad (17)$$

$$\sum_k d_{jk} Y_{ik}^B - D_j(1 - Y_{ij}^A) \leq U_{ij} \leq \sum_k d_{jk} Y_{ik}^B, \quad (18)$$

because

i) if $Y_{ij}^A = 0$, (17) brings about $U_{ij} = 0$ which satisfies (18), its LHS being

non-positive and its RHS non-negative.

ii) if $Y_{ij}^A = 1$, (18) brings about $U_{ij} = \sum_k d_{jk} Y_{ik}^B$ which satisfies (17).

Thus the non-linear integer programming form of the model can be reformulated as the linear mixed-integer program:

$$\begin{aligned} \min_{X_{ij}^A, X_{ik}^B, Y_{ij}^A, Y_{ik}^B, U_{ij}} \quad & Z = 2\left(\sum_i \sum_j w_i^A d_{ij} X_{ij}^A + \sum_i \sum_k w_i^B d_{ik} X_{ik}^B\right) \\ & + \sum_i w_i^{AB} \left(\sum_j d_{ij} Y_{ij}^A + \sum_k d_{ik} Y_{ik}^B + \sum_j U_{ij}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

subject to (2), (3), ..., (11), and

$$0 \leq U_{ij} \leq Y_{ij}^A \sum_k d_{jk}, \quad \forall i, j, \quad (20)$$

$$0 \leq \sum_k d_{jk} Y_{ik}^B - U_{ij} \leq (1 - Y_{ij}^A) \sum_k d_{jk}, \quad \forall i, j. \quad (21)$$

This reformulation enables us to solve the problem within reasonable computation time.

Demonstrations

We demonstrate the model with a test problem comprising 20 randomly distributed points representing both demands and potential facility locations (Figure 3). Demands for type-A service and type-B service are represented by proportional circles. Demand for type-A service is dominant in the east, and that for type-B is dominant in the west. To maintain numerical comparability in both examples, we keep the sum $w_i^A + w_i^B + w_i^{AB}$, and the ratio w_i^A / w_i^B fixed, and increase the proportion of multi-purpose users, $r =$

$w_i^{AB}/(w_i^A + w_i^B + w_i^{AB})$ from zero to one, recording each distinct solution change. We solved the model using NUOPT 3.0 (Mathematical Systems Inc.) running on a 400 MHz Pentium III with 128 MB of RAM.

In our first example, we solve the model for $p_A = p_B = 3$. Figure 4 shows all distinct solutions, with allocations of multi-purpose users in solid lines. Allocations of single service users, to the nearest facilities, are not shown because of simplicity. At $r = 0.0000$, we get separate p -median solutions for the two distinct services; there are no multi-purpose users. Two type-A facilities are located in the east and two type-B ones in the west in response to the biased demand distributions. No joint facility is located. Under this configuration, single service users would face a travel cost of 84.21 (Table 1), multiple service users of 163.80. At $r = 0.0000$, total travel costs are 84.21; as the proportion of multi-purpose users rises, the allocations of multi-purpose trips are to the best pair of single facilities. At $r = 0.0464$, total travel costs are 87.90; at this breakpoint, a joint facility is created in the northwest – single-purpose users endure a higher cost, but the benefits to multi-purpose users compensate. At this and other breakpoints, the rate of increase of total cost is reduced (Figure 5). The advantage of joint facilities is demonstrated by users at P allocating to the joint facility rather than to the nearest type-A facility. At $r = 0.0905$, the greater dominance of multi-purpose users brings about two joint facilities. Under this configuration, all multi-purpose users allocate to a joint facility – there is no need for them to use single facilities. The type-A and type-B facilities minimize distance for a limited number of patrons requiring only one service. A rise to a relatively small proportion of multi-purpose users, $r = 0.2091$, consolidates all three facilities into the 3-median configuration for multi-purpose users. Beyond $r = 0.2091$, total travel distance is unaffected by r – the total of single- and multi-purpose

users are served optimally by the consolidated facilities.

In our second example, we solve the model for an unequal number of facilities of each type: $p_A = 2$, $p_B = 4$. Figure 6 shows all distinct solutions with allocations of multi-purpose users. At $r = 0.0000$, one joint facility occurs because the separate type-A and type-B solutions happen to have one facility in common. The power of joint facilities to reduce travel costs for multi-purpose users is demonstrated by their heavy use of the one joint facility as r rises above 0.0000. Even multi-purpose users at the type-A facility at Q are drawn to the joint facility to the south; at only two nodes in the extreme northwest do multi-purpose users make distinct two-facility tours. This is not to say that multi-purpose users are particularly well served by the one joint facility – the solutions at $r = 0.0062$ and 0.0244 are characterized by a type-A and a type-B facility coming closer together to reduce the costs of multi-purpose tours (Table 2). As the forces of multi-purpose trip making increase to $r = 0.0931$, this consolidation results in a second joint facility in the north. Beyond this point, all multi-purpose journeys are served by these two joint facilities; further break points involve slight shifting of the location of one of the joint facilities.

The unequal number of type-A and type-B facilities is problematic. After the consolidation at two locations, two type-B facilities remain in areas of strong type-B demand. These outliers become increasingly marginalized, serving decreasing numbers of nodes as the southern joint facility shifts, and serving a lower level of demand as r increases. Throughout the solutions, type-A and multi-purpose users endure higher travel costs for the sake of savings for type-B users. In the final configuration, overall travel costs are 1.279 (123.05/96.19, compare Tables 1 and 2) as high as in the first example with three facilities of each type. It seems a highly questionable strategy to

prescribe different numbers of type-A and type-B outlets for all but very low levels of multi-purpose demand.

Discussion

Multi-purpose trip making is a common way to obtain services in the real world. It is well established as an important influence on land use structure in the geographical and spatial marketing literature, but has not been addressed in the facility location literature. This paper is a seminal attempt to redress this situation. We have presented a mixed integer programming model for locating facilities to minimize travel costs for a mix of two types of service obtained at varying levels of multi-service use. Our two example problems demonstrate that even a moderate amount of multi-purpose trip making behavior results in the consolidation of services in joint facilities. Multi-purpose trip making strongly influences locational optimization – it deserves inclusion in some LA frameworks.

Incorporating realistic multi-purpose trip making behavior into LA will present difficulties for researchers. Our formulation, with only two types of facility, resulted in a quadratic term in the objective function, one which we resolved using constraints. Multi-purpose trips with larger numbers of facilities will result in higher order nonlinearities. Further, with two types of facility, the order in which they are visited is not important – with greater numbers, the order of trip making must be part of the solution. We hope that our exposition of the importance of this way of obtaining services will encourage other researchers to find clever ways of resolving such difficulties. We believe that because of the widespread use of multi-purpose trip making, and its potential impact on locational decisions, such investigations are warranted.

Acknowledgement

This paper was supported by the Bilateral Researcher Exchange Program of the Japan Society of Promotion of Science (JSPS), and by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC). We acknowledge especially helpful comments by Professor Kokichi Sugihara.

References

- Berlin, G. N., ReVelle, C. S. and Elzinga, D. J. (1976) Determining ambulance-hospital locations for on-scene and hospital services. *Environment and Planning A*, **8**, 553-561.
- Eaton, B. C. and Lipsey, R. G. (1979) Comparison shopping and the clustering of homogeneous firms. *Journal of Regional Science*, **19**(4), 421-435.
- Eaton, B. C. and Lipsey, R. G. (1982) An economic theory of central places. *The Economic Journal*, **92**, 56-72.
- Hanson, S. (1980) Spatial diversification and multi-purpose travel: implications for choice theory. *Geographical Analysis*, **12**, 245-257.
- Hensher, D. A. (1976) The structure of journeys and the nature of travel patterns. *Environment and Planning A*, **10**, 371-388.
- Hotelling, H. (1929) Stability in competition. *Economic Journal*, **39**, 41-57.
- Hodgson, M. J. (1981) The location of public facilities intermediate to the journey to work. *European Journal of Operations Research*, **6**, 199-204.
- Konno, H. and Suzuki, H. (1982) *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, Tokyo: Nikkagiren Press. (In Japanese)
- McLafferty, S. L. and Ghosh, A. (1986) Multi-purpose shopping and the location of retail firms. *Geographical Analysis*, **18**(3), 215-226.

- Mulligan, G. F. (1987) Consumer travel behavior: extensions of a multi-purpose shopping model. *Geographical Analysis*, **19**(4), 364-375.
- O'Kelly, M. E. (1981) A model of the demand for retail facilities, incorporating multistop, multi-purpose trips. *Geographical Analysis*, **13**, 134-148.
- South, R. and Boots, B. (1999) Relaxing the nearest center assumption in central place theory. *Papers in Regional Science*, **78**, 157-177.
- Suzuki, T. and Hodgson, M. J. (2001) Multi-service facility location models. Presented at the 48th Annual North American Meetings of the Regional Science Association International, Charleston, South Carolina, U.S.A., November 15-17, 2001.
- Ohyama, T. and Suzuki, T. (2001) Tour-distance Voronoi diagram and its application to location analysis. *Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**(1), 1-14. (In Japanese)
- Thill, J. C. (1992) Spatial duopolistic competition with multi-purpose and multi-stop shopping. *Annals of Regional Science*, **26**, 287-304.

Appendix: Optimally-located Joint Facilities are Optimal for Multi-purpose Trips.

Consider the situation in which all trips are multi-purpose. We solve a simple p -median problem to locate p joint facilities. The optimal solution partitions the study area into p allocation sets, each containing a joint facility at P_j , and the demand points that are closer to it than to any other optimal facility. Within one allocation set, let us try to improve upon this solution by providing services at separate type-A and type-B facilities. All nodes in the set now face a multi-step journey to obtain both services. If the triangular inequality holds, we know that for every node in the set there is some location where a joint facility will provide less costly service than the separate facilities do. Collectively, the least-cost such location is at the original location, P_j , of the joint facility. We cannot improve on the joint solution by separating facilities. Interaction with other allocation sets cannot improve travel costs – P_j is closer to every node in the set than is any other joint facility. Our reasoning extends to all allocation sets and hence to the system as a whole.

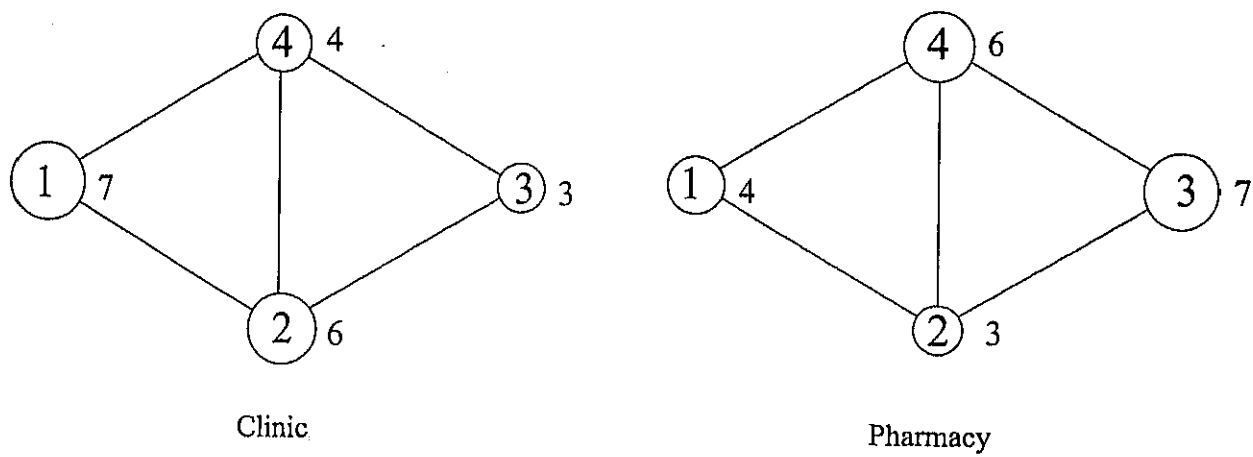


Figure 1

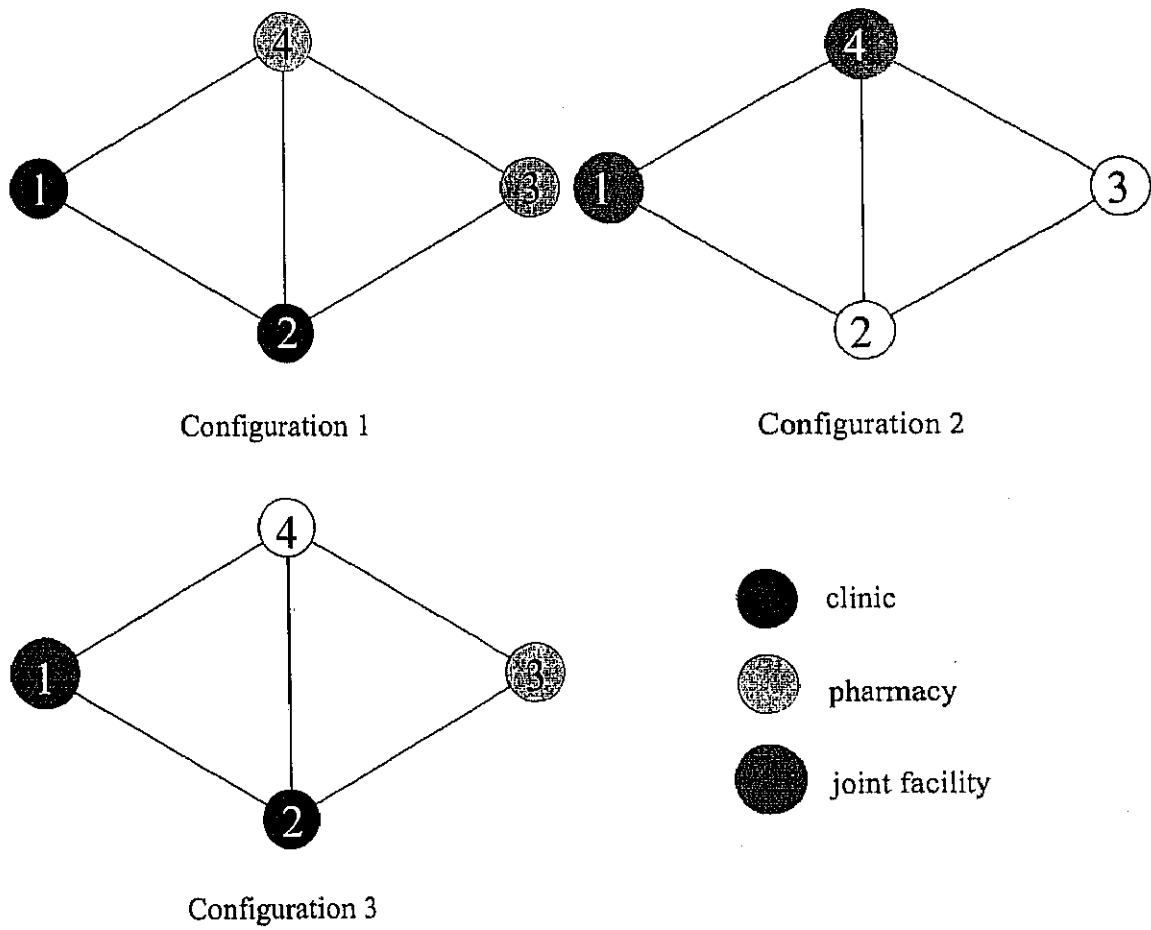


Figure 2

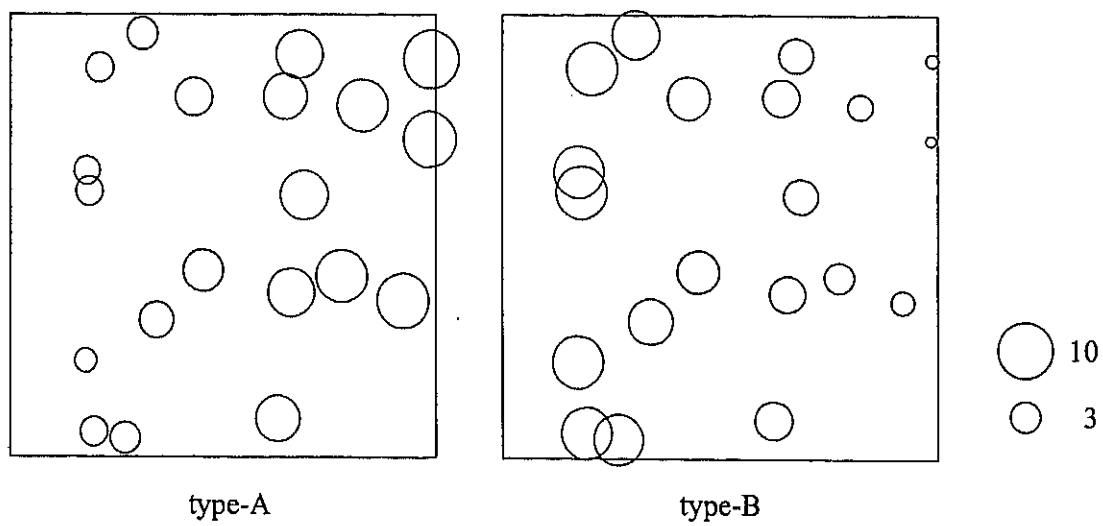


Figure 3

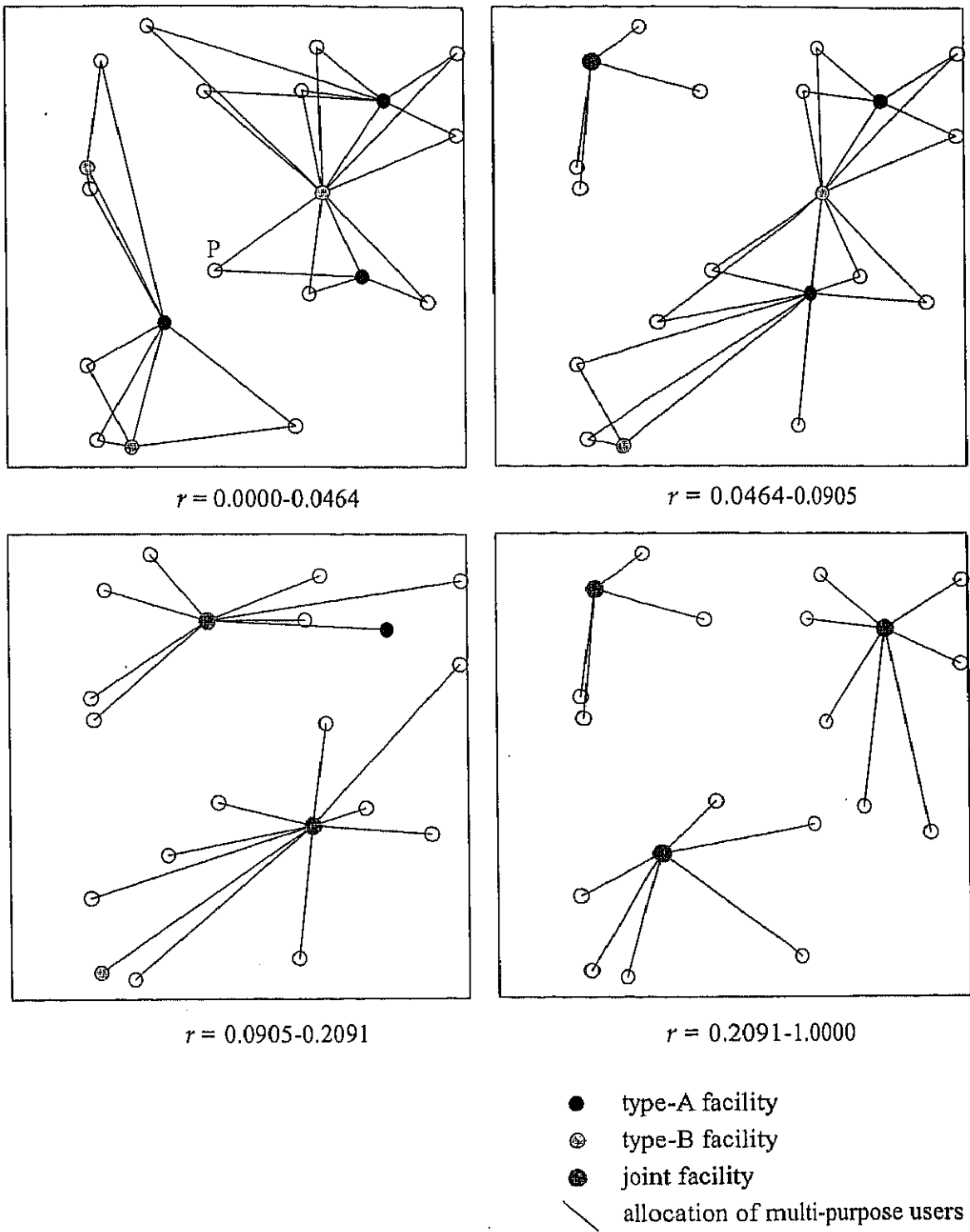


Figure 4

Table 1

Proportion of multi- purpose users, r	Demand weighted TD			Travel distance (TD)						
	Single- purpose users	Multi- purpose users	Total	Single-purpose users			Multi-purpose users			Total
				Type-A	Type-B	Total	Home to facility	Inter- facility	Total	
0.0000	84.21	0.00	84.21	45.34	38.87	84.21	105.63	58.17	163.80	
0.0464	80.91	6.99	87.90	45.94	38.90	84.84	103.02	47.72	150.73	
0.0905	78.86	11.95	90.81	46.08	40.62	86.70	132.07	0.00	132.07	
0.2091	76.08	20.11	96.19	52.88	43.31	96.19	96.19	0.00	96.19	

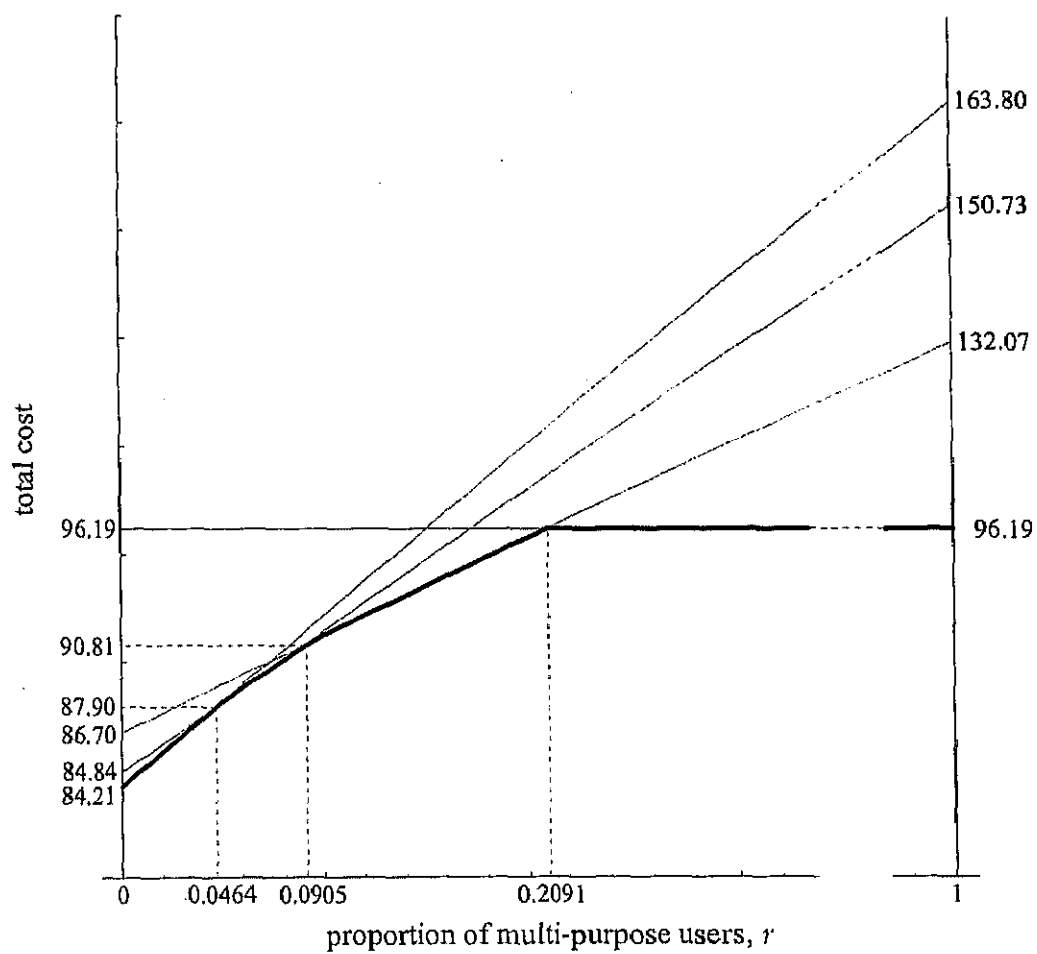


Figure 5

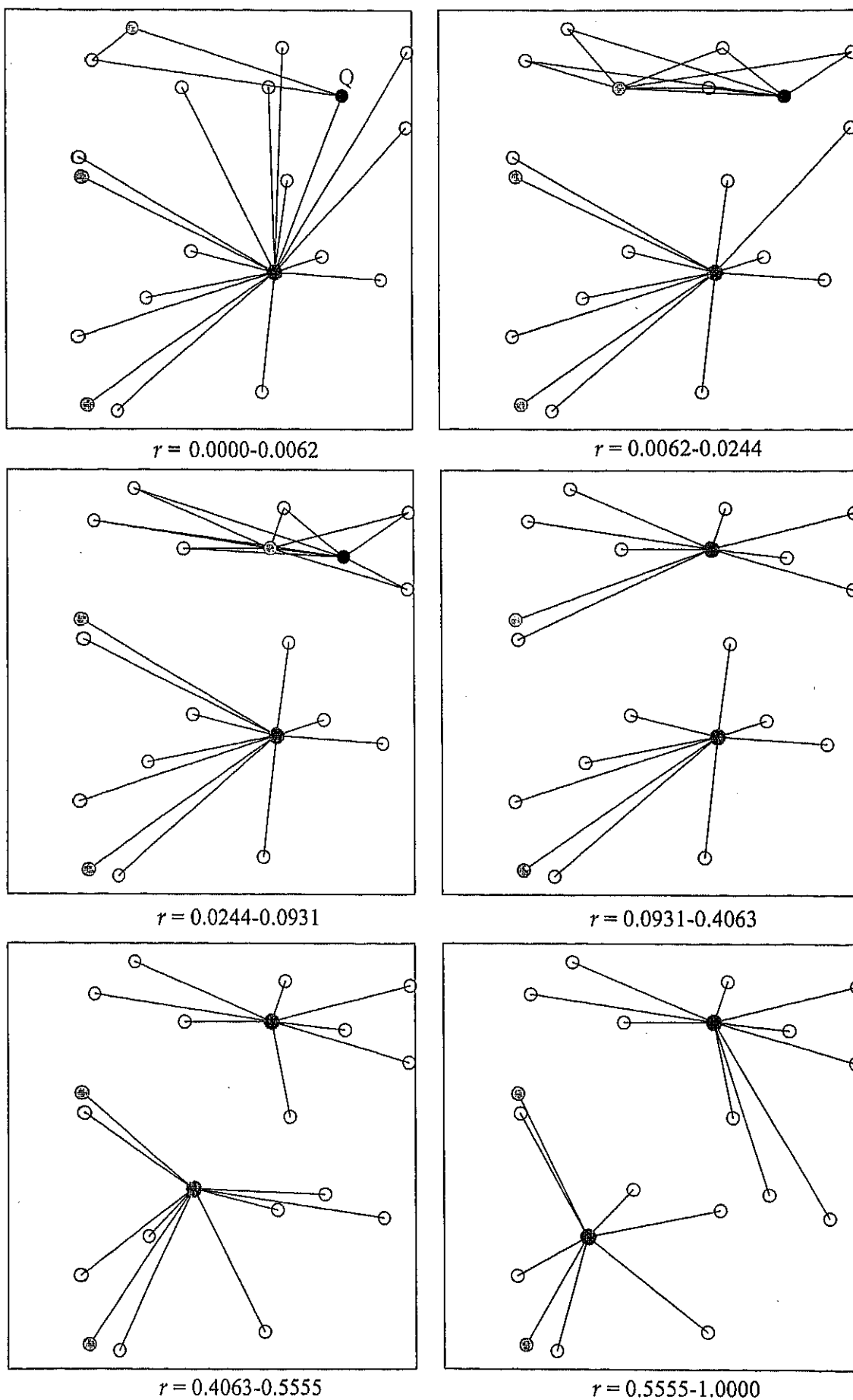


Figure 6

Table 2

Proportion of multi- purpose users, r	Demand weighted TD			Travel distance (TD)					
	Single- purpose users	Multi- purpose users	Total	Single-purpose users			Multi-purpose users		
				Type-A	Type-B	Total	Home to facility	Inter- facility	Total
0.0000	86.93	0.00	86.93	56.56	30.36	86.93	166.67	17.00	183.67
0.0062	86.44	1.09	87.53	56.56	30.41	86.98	145.05	30.20	175.25
0.0244	85.37	3.77	89.13	56.56	30.94	87.50	132.37	21.88	154.25
0.0931	81.28	12.44	93.72	58.69	30.94	89.63	133.55	0.00	133.55
0.4063	56.18	51.29	107.47	63.39	31.23	94.62	126.26	0.00	126.26
0.5555	43.84	68.35	112.19	66.09	32.53	98.62	123.05	0.00	123.05

20. フロー需要に基づく施設配置モデルと需要構成が施設配置に与える影響

A Flow-Demand Location Model and the Effect of Demand Structure on Facility Location

鈴木 勉
Tsutomu Suzuki

This paper focuses a facility location model assuming that demand for service originates from users traveling, which is not directly for the purpose of obtaining the service, as is seen in actual behavior. We combine such a flow-demand location model and the traditional median model. Effect of change in jobs-housing spatial structure on optimal facility location is analyzed considering two types of demand: commuting-based demand and home-based demand. With some examples on an ideal triangular lattice urban network, it is shown that facility location decentralizes toward outer suburbs as spatial correlation of home and workplaces gets stronger, or as home-based demand gets more dominant.

Keywords: 施設配置, 職住分布, フロー需要, 迂回距離, メディアン問題
facility location, jobs-housing distribution, flow-based demand, deviation, median problem

1. はじめに

p メディアン問題に代表される都市・地域施設の立地計画・評価のための従来モデルは、基本的に施設周辺の人口分布というローカルな地域属性から決定されるモデルである。小・中学校や図書館のように地域に密着した施設については、こうしたタイプのモデルは比較的良好に適合する。都市や商業地の立地理論についても、Christaller の中心地理論や Lösch の経済立地論などでは、ある地点から最寄りの商業地を利用するといった仮定を基本として構築されてきた。これらは相応の説明力を持ち、マーケティング分野など様々な局面で利用されてきた。

しかし、モータリゼーションの進展を経て生活圏が広がり、人々が広範囲の移動を行うようになってきた現在、従来タイプの施設立地モデルが適合しない場合も見られる。例えば、駅付設型の保育所が多く出現している現象は、駅周辺に託児需要が多いためではなく、共働き世帯が通勤経路上で子供を預けるのに便利であるためであると考えられる。また、周辺人口の少ない湾岸地域でも、通過交通が多いために巨大なショッピング・コンプレックスが相次いで進出してきている事例が見られる。このように、商業や公共サービス等の都市機能の中には、都市活動の相互作用としてのフローをベースとして立地しているものも存在すると考えられる。したがって、ローカルな需要のみならず、フローに基づく需要をも考慮した立地モデルによる都市機能の立地計画や立地評価が必要とされる。

一方、近年の情報通信技術の発展は、交通流動に影響

を及ぼす可能性を持っている。例えば、情報通信手段を就労形態に取り入れた結果、サテライトオフィスやリゾートオフィス、テレワークやテレコミュニケーション、SOHO といった多様な就労形態が見られるようになってきている。このような変化は、通勤流動を相対的に減少させ、ひいてはフロー需要に基づく施設配置にも影響を及ぼす可能性があると考えられる。

本研究は、近隣の需要を基本とする従来型モデルに対して、フローを需要としたモデルを取り上げ、従来型モデルの代表である p メディアン問題と対照して最適配置の基本的特性を把握するとともに、通勤フローをベース需要とする最適施設配置を考察し、通勤流動パターンの差違や情報化の進展による近隣の施設需要の相対的増加が施設配置に及ぼす影響を明らかにすることを目的とする。

2. フロー需要に基づく最適施設配置問題

既存の施設配置モデルの多くは、図1(a)に示すように、○で示される住宅等の点から施設利用の需要が発生することを想定するものであった。これに対し、本論文では、図1(b)に示すように、○を起点とし、●を終点とするような移動上に施設利用の需要が発生することを想定し、その最適配置問題を考察する。本論文では、前者を近隣需要、後者をフロー需要と呼ぶことにする。

近隣需要に基づいた最適施設配置問題は、 p メディアン問題や p センター問題をはじめとして数多くの問題が定式化され、研究されてきた⁵⁾。

一方、フロー需要に基づいた最適施設配置問題について

ては研究例は少ないが、いくつかの研究が見られる。それらは、ミニサム型とカバリング型の問題に大別することができる。

ミニサム型としては、Hodgson (1981)による通勤経路上の託児施設の配置を扱った研究⁶⁾がある。託児施設に立ち寄ることによって付加的に発生する迂回移動に要する所要時間の総和を最小化することを目的としたもので

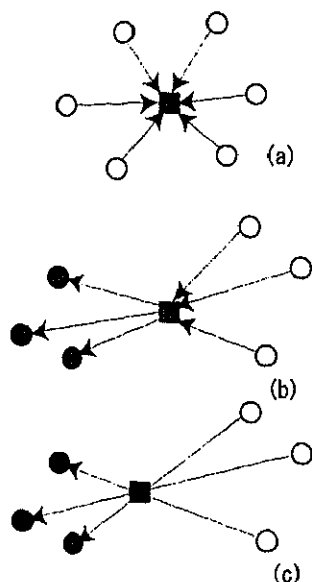


図1. 近隣需要とフロー需要

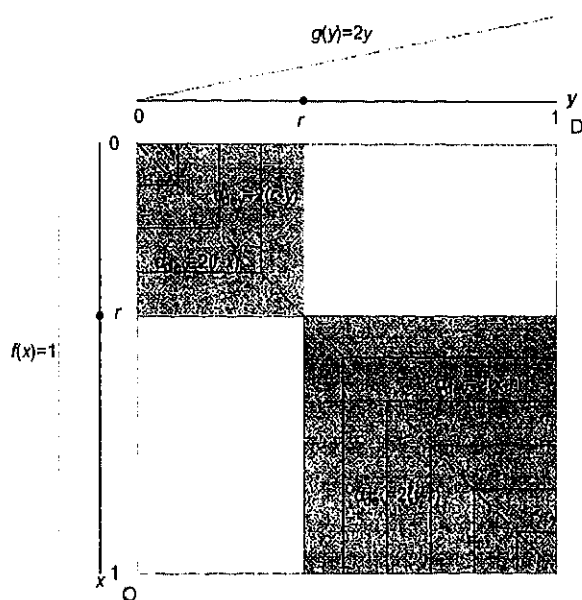


図2. 1施設の問題：迂回を要するODの組合せ

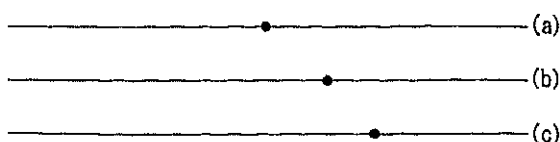


図3. 1施設の最適配置 (a):居住地, (b):フロー, (c)就業地

ある。瀬川・貞広 (1996)や松戸ら (1999)は通勤経路上で立ち寄るタイプの施設配置問題を考察し、総移動費用最小化の観点から最適な施設の配置を求めている⁸⁾¹⁰⁾。予めOD交通量が決まっているとすれば、迂回距離最小化は総移動距離最小化と同義であるので、これらの問題はp-メディアン問題と同様、ミニサム型の問題である。

これに対してカバリング型の問題としては、Hodgson (1990)やBerman et al. (1992)によりほぼ同時期に構築された、捕捉可能なフローを最大化するような施設配置を求めるモデルがある²⁾³⁾⁷⁾。この問題は、図1(c)に概念的に示すように、既に経路が決まっている流動が与えられたとき、最も多くの流動量をカバーするように施設配置を決定するものである。

本研究では、前者のフロー需要に基づくミニサム型の迂回距離最小化による最適配置問題を取り上げ、近隣需要の最適配置問題と比較対照することにより、その解の基本的特性を把握する。また、この問題を通勤流動に適用し、職住割当の空間的相関や、近隣需要とフロー需要の比率が最適施設配置に及ぼす影響を明らかにする。

フロー需要に基づくモデルとその求解方法、発展モデル等については、Berman et al. (1995), Berman (1997)などによって整理されており¹⁾⁴⁾、ATMやガソリンスタンド、コンビニエンス・ストア、広告掲示板の配置決定や危険車両調査地点の選定などに応用されている。

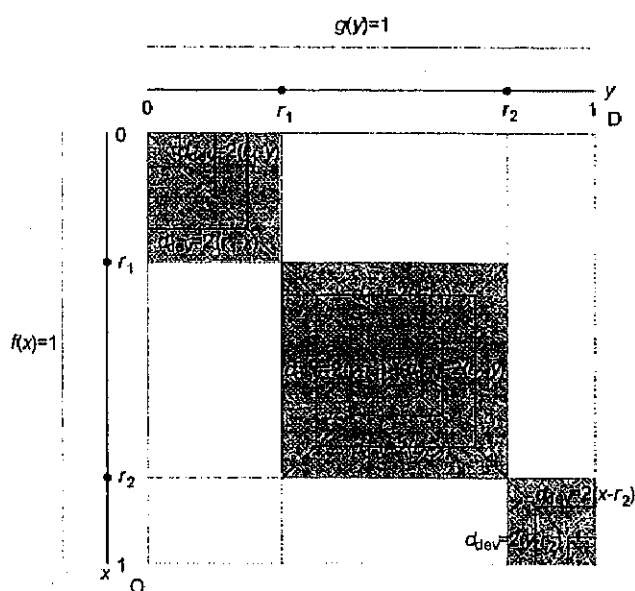


図4. 2施設の問題：迂回を要するODの組合せ

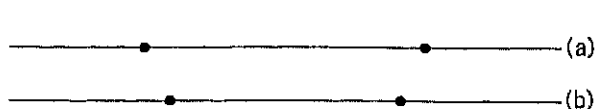


図5. 2施設の最適配置 (a):ミニサム配置, (b):フロー

3. 1次元都市モデルによる最適施設配置

まず、簡単な1次元都市モデルを用いて、フロー需要に対する移動距離を最小化する施設配置の特徴を捉えることにする。

3. 1 異なる発着地分布下で1施設を配置する場合

発着地の分布が異なる線分 $[0,1]$ 上に施設を位置 r に1ヶ所設けることを考える。居住地を発地、就業地を着地と考え、それぞれの側の就業者密度分布が $f(x)=1, g(y)=2y, 0 \leq x, y \leq 1$ で表され、単位長さの発着地間に f と g の積に比例する流動が発生するものと仮定する。そして、発地→施設→着地という経路が発地→着地の最短経路よりも長くなる場合に迂回が必要となるものとし、その増分を「迂回距離」と定義する。このとき、迂回を必要とするODの組合せと迂回距離 d^{dev} は図2の網掛部の領域で示される通りになる。したがって、総迂回距離 Z は

$$\begin{aligned} Z &= \iint_S d^{dev} f(x)g(y)dx dy \\ &= \int_0^r \int_r^1 2(r-x)2y dy dx + \int_r^1 \int_0^r 2(r-y)2y dy dx \\ &\quad + \int_0^r \int_r^1 2(y-r)2y dy dx + \int_r^1 \int_0^r 2(x-r)2y dy dx \\ &= \frac{1}{6}(4r^3 + 6r^2 - 12r + 5) \end{aligned} \quad (1)$$

となり、 Z を最小化する r は $\partial Z / \partial r = 0$ より

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \quad (2)$$

となる。図3に示すように、居住地分布のみで決定されるWeber点 $1/2=0.5$ と就業地分布のみで決定される

Weber点 $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ の中間に最適地点があることがわかる。

3. 2 同一発着地分布で複数の施設を配置する場合

発着地とも一様な密度分布 $f(x)=1, g(y)=1, 0 \leq x, y \leq 1$ を仮定し、施設を r_1, r_2 の2ヶ所に配置することを考える。但し、施設は同一の機能を有し、いずれも等しく利用可能であるため、利用者は迂回距離が最短となる施設を利用できるものとする。このとき、迂回の必要なODの組合せを表す領域は図4の網掛部のようになる。これをもとに総迂回距離 Z を求めると、

$$\begin{aligned} Z &= \iint_S d^{dev} f(x)g(y)dx dy \\ &= 2 \int_0^{r_1} \int_{r_1}^1 2(r_1-x)dy dx + 2 \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{r_1-r} 2(x-r_1)dy dx \\ &\quad + 2 \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1-r}^{r_2-r} 2(r_2-x)dy dx + 2 \int_{r_2}^1 \int_0^{r_2-r} 2(x-r_2)dy dx \\ &= \frac{1}{3}\{2r_1^3 + (r_2-r_1)^3 + 2(1-r_2)^3\} \end{aligned} \quad (3)$$

となり、 Z を最小化する r_1, r_2 は $\partial Z / \partial r_1 = \partial Z / \partial r_2 = 0$ より

$$r_1 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \approx 0.293, r_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \approx 0.707 \quad (4)$$

となる。図5に示すように、(a)の一樣分布で決定される通常のミニサム配置である $1/4, 3/4$ よりも、互いに近接した立地が最適となることがわかる。なお、この問題は大澤(1986)による橋を架ける位置の最適化問題⁹⁾と同じ問題となり、3施設以上の場合も、両端の施設と都市末端の距離に対して施設同士の間隔が $\sqrt{2}$ 倍になるように等間隔に配置するのが最適であることが明らかにされている。

これら2つの例からわかるように、フロー需要に基づく最適施設配置は、近隣需要に基づく最適施設配置とは一般に異なる。したがって、施設の最適配置を議論する際には、施設の需要が近隣需要に基づくものなのか、フロー需要に基づくものなのかを明示的に考慮していく必要がある。このことを踏まえて、フロー需要に対する最適配置問題を次章で定式化する。

4. ネットワーク空間上での最適施設配置

4. 1 フロー需要に対する最適配置問題の定式化

次に、ネットワーク空間で表される2次元都市を想定することにする。発地(居住地)ノード i と着地(就業地)ノード j 間の最短経路距離 d_{ij} および流動量 w_{ij} が与えられたとき、総迂回距離を最小化する p ヶ所の施設配置を求める問題は、

$$\min_{X_{jk}} Z = \sum_{i,j,k} w_{ij} d_{ijk}^{dev} X_{jk} \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i,j} X_{jk} = 1, \quad \forall i, j \quad (6)$$

$$X_{jk} \leq Y_k, \quad \forall i, j, k \quad (7)$$

$$\sum_k Y_k = p \quad (8)$$

となる。但し、

$X_{ijk} \in \{0,1\}$: ij 間の流動の候補地 k への配分

$Y_k \in \{0,1\}$: 候補地 k における施設の存在

$d_{ijk}^{dev} \equiv d_{ik} + d_{jk} - d_{ij}$: ij 間の流動が k の施設を利用する場合の迂回距離

である。制約式(6)は各流動が唯一の施設に配分されることを表し、(7)は配分される候補地 k に施設が存在しなければならないことを表す。この問題の解では、ある流動は迂回距離が最小となる施設へ配分される。(8)は総施設

数が p であることを規定している。

上記の問題は p メディアン問題と同じ構造を持つ問題となり、既存の解法で求解が可能である。

4.2 三角格子状ネットワークと Sherratt 型職住分布

図6のような格子間隔 100, ノード数 61 の三角格子状ネットワークを対象に最適解を求める。発地 (x_h, y_h) および着地 (x_w, y_w) の分布は鈴木 (1994) が用いた Sherratt 型密度分布 ¹¹⁾

$$f_h(x_h, y_h) = \frac{P}{2\pi\sigma_h^2} \exp\left(-\frac{x_h^2 + y_h^2}{2\sigma_h^2}\right) \quad (9)$$

$$f_w(x_w, y_w) = \frac{P}{2\pi\sigma_w^2} \exp\left(-\frac{x_w^2 + y_w^2}{2\sigma_w^2}\right) \quad (10)$$

に従うとし、発着地間には通勤流動

$$f_{hw}(x_h, x_w, y_h, y_w) = \frac{p}{(2\pi)^2 \sigma_h^2 \sigma_w^2 (1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x_h^2 + y_h^2}{\sigma_h^2} + \frac{x_w^2 + y_w^2}{\sigma_w^2} + \frac{2\rho(x_h x_w + y_h y_w)}{\sigma_h \sigma_w} \right)\right] \quad (11)$$

が発生するものとする。但し、

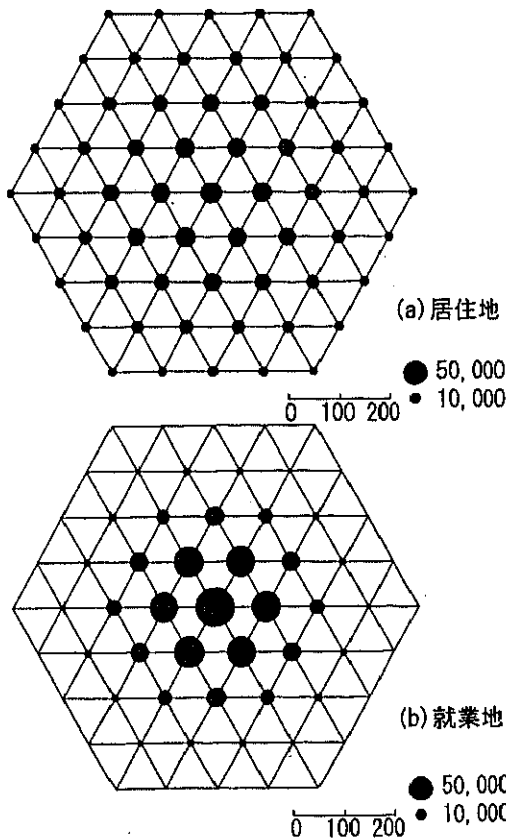


図6. 三角格子状ネットワークと居住地・就業地分布

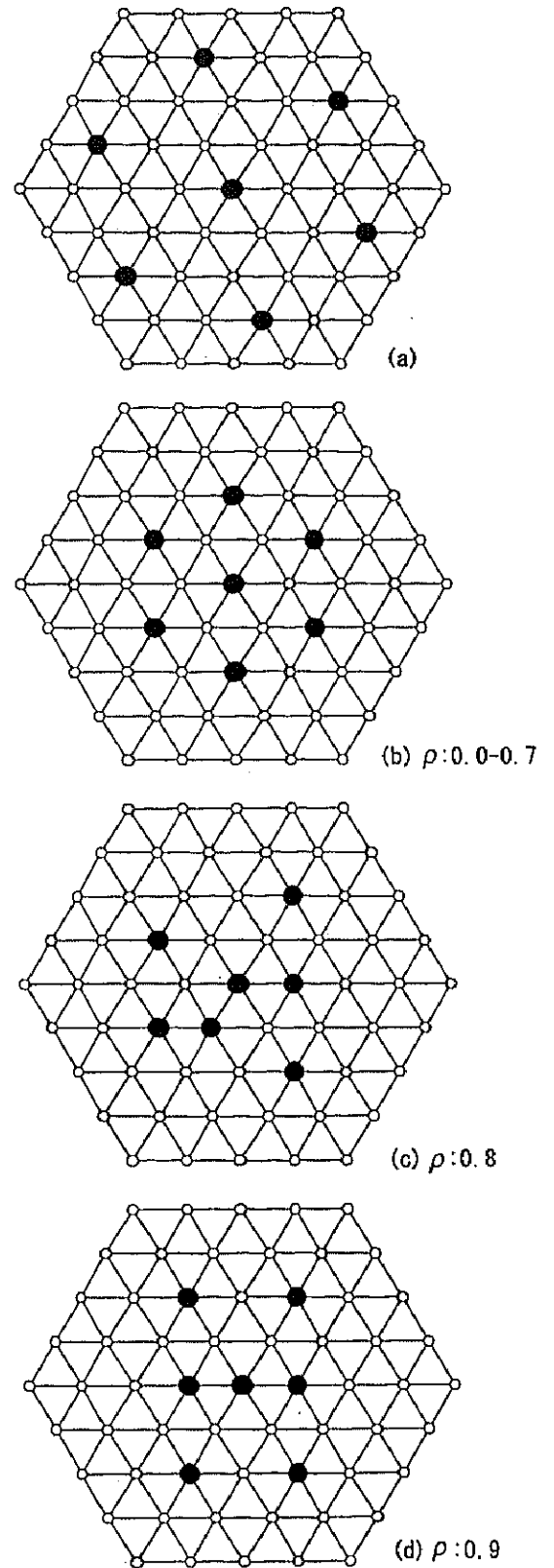


図7. 近隣需要とフロー需要の最適配置の比較

P : 総人口

σ_h, σ_w : 居住地および就業地の空間的広がり

ρ : 居住地と就業地の空間的相関 ($0 \leq \rho \leq 1$)

である。 ρ が0に近づくほど就業者の就業地は居住地と関係なく全体の就業地分布にほぼ比例する分布となり、逆に1に近づくほど居住地と就業地はほぼ一対一に対応する関係となることを意味する。(11)式は、発地、着地について積分することにより(9)(10)式を満たしている。パラメータとしては、一般に就業地の広がりよりも居住地の広がりの方が大きいことを考慮し、 $P=1 \times 10^6$, $\sigma_h=200$, $\sigma_w=100$ を用いた((11)式は (x_h, y_h, σ_h) と (x_w, y_w, σ_w) が対称の関係にあり、 $\sigma_h \geq \sigma_w$ としても一般性は失われない)。このときの就業者分布を図6に示す。

4. 3 三角格子状ネットワーク上での最適解

ρ を0.0から0.9まで0.1刻みで変化させながら施設数7の場合の最適配置を求めた結果を図7(b)(c)(d)に示す。図7(a)は居住地分布に対する ρ メディアン配置である。施設の位置を●によって表している。

この結果から、フロー需要に基づく最適配置は、近隣需要に基づく配置(a)よりも中心部に集まった配置となることがわかる。これは、3.1節で確認したように、中央に集中する就業地分布に引き寄せられることと、3.2節で確認したように、フロー需要であること自体が施設分布を集中させる方向に働くという2つの理由によるものと考えられる。また、この例ではほとんど差違は見られないが、居住地と就業地の空間的相関が強くなる(ρ が1に近づく)と施設配置が若干分散することがわかる。これは、相関が強いほど中心部のフローが少なくなることに起因するものと考えられる。

5. 需要構成の変化が施設配置に与える影響

5. 1 近隣需要とフロー需要の混合問題

一般には、商業や公共サービスなどの都市機能は、多様な都市活動の分布とそれらの相互作用のフローの双方に影響を受けている、すなわち、近隣需要とフロー需要の両方によって立地が決定されていると考えられる。さらに、情報化の進展によって交通の通信による代替が進むと、近隣需要がフロー需要に比べて相対的に支配的になっていくと考えられる。そこで本章では、近隣需要とフロー需要の混合問題を考え、両者の比率の変化が立地構造の変化に及ぼす影響を明らかにする。

実は近隣需要は、発地と着地が同一のフロー需要であると考えれば、フロー需要の特殊な場合と解釈することができる。したがって、混合問題についても4.1節の定式化をそのまま利用することができる。ここでは、全

人口 P のうち wP が居住地分布に比例する近隣需要、残りの $(1-w)P$ が(11)式の通勤流動に比例するフロー需要であるような混合需要を考える。

5. 2 三角格子状ネットワーク上での最適解

フロー需要については $\rho=0.5$ とし、 w を0.0から1.0まで0.1刻みで変化させながら、前章同様に施設数7の場合の最適配置を求めた結果を図8に示す。

w が0.3までは近隣需要のみの解と同一であるが、 w が0.4~0.6になると施設配置は中心への集中を見せ、0.7以上になるとフロー需要のみの最適配置と同一となる。このように、フロー需要の割合が高いほど就業者分布に

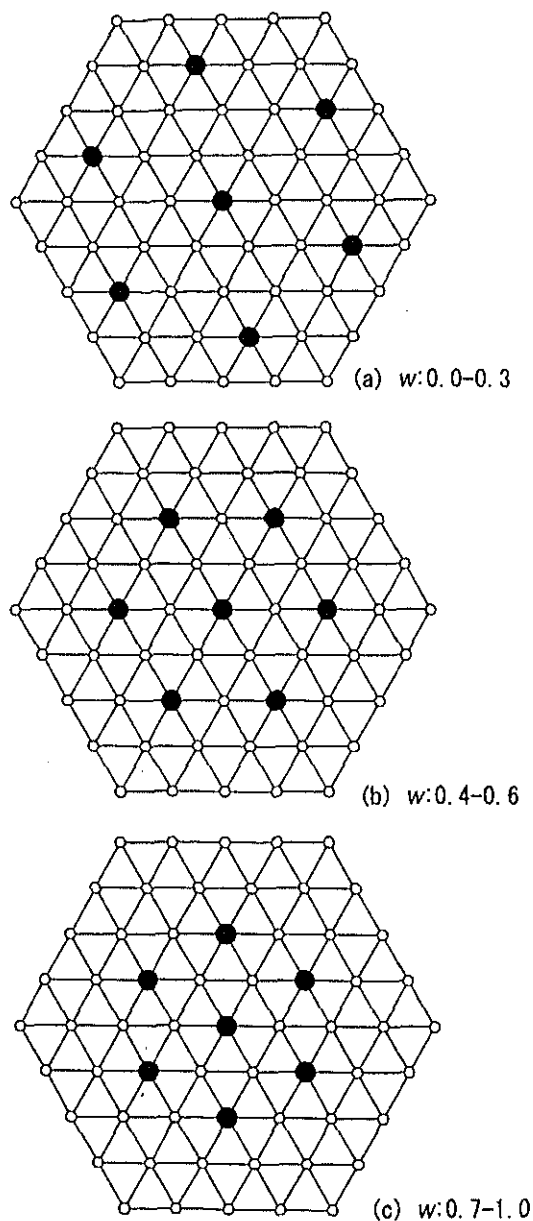


図8. 需要構成の変化が施設配置に与える影響

引き寄せられて中心へ集中することが読み取れる。逆に、情報化の進展によりフロー需要が相対的に減少するとすれば、施設配置は分散化することを意味する。

6. 結論と課題

本研究は、近隣需要に基づく従来型の施設配置モデルに対して、総迂回距離最小化の観点から見たフロー需要に基づく施設配置モデルを扱い、 p メディアン問題と対照しながらその最適配置の基本的特性を1次元都市モデルおよび三角格子状ネットワークを用いて把握した。そして、通勤フローを需要と考え、居住地と就業地の空間的相関の違いによる通勤流動パターンの差違や、近隣需要とフロー需要の構成変化が最適施設配置に及ぼす影響を考察した。その結果、以下のことが明らかとなった。

- ①フロー需要に基づく最適施設配置は、近隣需要に基づく最適施設配置と一般に異なる。近隣需要がフロー需要の特殊な場合であると考え、フロー需要の最適配置問題はより一般化した問題と位置づけることができる。
- ②フロー需要の最適配置問題の解は、発地側と着地側の近隣需要の最適配置の中間的配置となる。
- ③Sherratt 型密度分布で記述した職住分布を発着地分布として通勤フローとそれに基づく最適施設配置との関係を考察した結果、居住地と就業地の空間的相関が強まるほど、中心部のフローが減少することにより施設配置はやや分散する。
- ④近隣需要とフロー需要の混合問題を考察した結果、フロー需要の構成比が大きいほど、施設配置はミニサム型配置よりも中心に向かって集中する。
- ⑤情報化の進展によって近隣需要が相対的に増加するとすれば、最適施設配置は分散する。

本研究で考察したフロー需要に基づく具体的な施設としては、本文でも言及したように、ショッピング・センター、ATM、コンビニエンス・ストア等の商業施設や保育所等の公共サービスが挙げられるであろう。商業機能は、従来より業務機能に次いで都心部への一定の集積を見せてきた。しかし、大都市を中心とした方面別セクター化の傾向に見られるように、居住地と就業地の空間的相関は強まってきており、またテレコミュニケーション等の進展による近隣需要の相対的優位は強まってきていると見られることは、上記③や⑤の理由から、商業核の外縁化や郊外型SCの出現といった近年の現象との間に密接な関係があるものと推察できる。

本論文の結果は、大都市化や情報化によるコミュニケーション形態の革新が、遠隔勤務やテレワーク等の新しい就労形態の普及を通して、施設分布構造にも影響を与える可能性を示唆しており、情報化社会における都市空

間構造の変化の方向性を見据える上でフローの変化が重要な役割を持っていると捉えることができる。

カバリング型問題の検討や最適職住割当問題への組み込みなど、考察すべき事項も残されているが、これらは今後の課題として挙げておく。

なお、本研究の推進に当たっては、カナダ・アルバータ大学 M. J. Hodgson 教授より懇切なご指導と貴重なご助言を戴いた。また、このことは日本学術振興会特定国派遣研究者事業および外国人招へい研究者事業の助成により実現したものである。ここに記して感謝いたします。

参考文献

- 1) Berman, O. (1997): Deterministic flow-demand location problems. *Journal of Operational Research Society*, 48, 75-81.
- 2) Berman, O., Bertsimas, O. and Larson, R. C. (1995): Locating discretionary service facilities II: maximizing market size, minimizing inconvenience. *Operations Research*, 23(4), 623-632.
- 3) Berman, O., Fouska, N. and Larson, R. C. (1992): Optimal location of discretionary service facilities. *Transportation Science*, 26(3), 201-211.
- 4) Berman, O., Hodgson, M. J. and Krass, K. (1995): Flow-interception problems. In Drezner, Z. (ed.) *Facility Location: A Survey of Application and Methods*, Springer-Verlag, New York, 389-426.
- 5) Drezner, Z. and Hamacher, H. W. (eds.) (2002): *Facility Location: Applications and Theory*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- 6) Hodgson, M. J. (1981): The location of public facilities intermediate to the journey to work. *Regional Studies*, 15, 493-506.
- 7) Hodgson, M. J. (1990): A flow-capturing location-allocation model. *Geographical Analysis*, 22, 270-279.
- 8) 松戸利一・大津 晶・腰塚武志 (1999): 通勤行動と施設配置～千葉市を事例に～. 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 94-95.
- 9) 大澤義明 (1986): 橋の本数と迂回の関係について. 日本都市計画学会学術研究論文集, 21, 241-246.
- 10) 瀬川祥子・貞広幸雄 (1996): GISを利用した保育施設計画立案システムの開発. GIS-理論と応用, 4(1), 11-18.
- 11) 鈴木 勉 (1994): 職住分布構造と通勤距離の関係に関する理論的考察. 都市計画論文集, 29, 505-510.

【原著論文】

最近隣施設選択仮定を緩和した離散型施設配置モデル

鈴木 勉・M. John HODGSON・大山 崇

Relaxing the nearest facility assumption in discrete location models

Tsutomu SUZUKI, M. John HODGSON and Takashi OHYAMA

Abstract: This paper investigates the effects of relaxation of the nearest facility assumption, which is usually adopted in many location models, on optimal facility location. We formulate two new models based on p -median model: one is the model in which a user selects from the k nearest facilities, and the other is the model in which a user selects facilities so as to minimize its tour distance. We also build mixed models with the original p -median model. The optimal solutions show that facilities form clusters if the nearest facility assumption is significantly relaxed.

Keywords: 施設配置 (facility location), p -メディアンモデル (p -median model), 複合施設 (facility complex), 周遊 (tour), 多目的トリップ (multi-purpose trip)

1. はじめに

施設立地計画立案のための GIS の支援システムとしての役割は、今後益々一般的になっていくと同時に、GPS 等の技術進歩により、これを支える利用者の高精度な時系列行動データの整備が進むものと期待されている。マーケティングや都市計画の様々な局面で、詳細な行動実態を反映した空間的意識決定が可能になっていくものと考えられる。

施設立地選定のための施設配置モデルは、これまで様々なものが提案されてきた。離散型モデルに限ってみても、 p -median モデルや p -center モデル、max covering モデル、倉庫配置モデル等、目的に応じて目的関数に様々な改良が加えられた。一方、

利用者を施設に配分する部分 (allocation) に関しては、多くの場合、最も近い施設に施設利用者を帰属させるという「最近隣施設選択仮定」が採用されてきた。

ところが、この最近隣施設選択仮定はしばしば現実的でない。例えば、ある利用者にとっては最近隣の施設よりもさらに遠い施設の方が魅力的であることや、利用可能な時間に最近隣の施設が開いていないことが考えられる。病院と調剤薬局のように通常一連の訪問を同時に行う際にも、それらの施設は一般に利用者にとって最近隣の施設ではない。

近年の交通行動調査では、複数の交通目的を持ったトリップの把握が重要課題の一つになっている。購買行動における買い回り等の多目的トリップは無視できない程存在し、これらはトリップ長や経路選択に影響を及ぼすため、交通実態調査の設計や交通需要予測におけるモデル構築上、周遊行動やトリップ・チェーンの扱いが重要視されている。O'Kelly (1983) は、3 割から 5 割のトリップは多目的トリッ

鈴木：〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1

筑波大学社会学系

Institute of Policy and Planning Sciences

University of Tsukuba

1-1-1 Tennodai, Tsukuba, Ibaraki 305-8573 Japan

Tel. 0298-53-5186

E-mail: tsutomu@sk.tsukuba.ac.jp

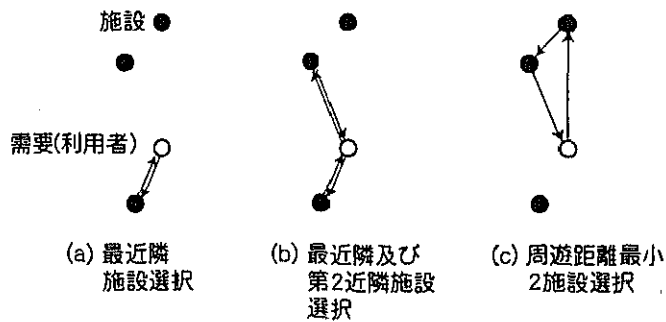


図1 施設選択の類型

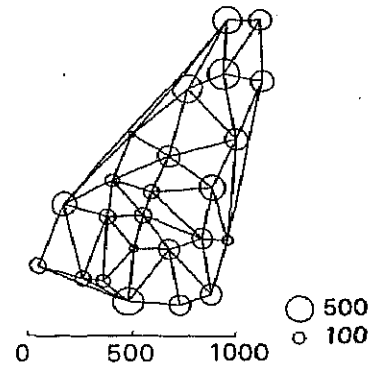


図2 対象ネットワークと
需要分布

プであるという実測例があることを紹介している。このような多目的トリップについても、当然ながら最近隣施設選択仮定は成立しない。

このように、現実の施設利用者行動では、施設間の魅力度やサービス内容の相違があることにより、また、鈴木(2001a)によって「利用複合」と呼ばれているような周遊利用が存在することにより、必ずしも最近隣施設選択仮定が成り立つとは限らない。2番目や3番目に近い施設が利用されたり、利用者が範囲の経済を享受することのできる同時購買行動のように、さらに遠くにあってもより高次の施設が共に集積する地域が利用されたりする。しかし、従来の施設配置モデルでは、こうした行動様式はほとんど反映されてこなかった。

そこで、本論文では、最近隣施設選択仮定を緩和した施設配置問題を定式化し、緩和によって最適解がどのような影響を受けるかを考察することを目的とする。そして、緩和が最適解の施設配置にクラスターの形成をもたらすことを明らかにする。

小売施設等については1次元空間上で競争立地や均衡立地等のアプローチを採用した既存研究がある(例えば、Eaton and Lipsey, 1979, 1982; McLafferty and Ghosh, 1986; Mulligan, 1987; 孫ほか, 1996)。しかし、最近隣施設選択仮定が成立しないのは小売施設に限らないので、本論文では施設立地モデルとして最も基本的な p -median モデルを取り上げる。これを基本に、施設利用者が2番目に近い施設を利用したり、2施設を周遊したりする場合の新たな問題の定式化を次章で行う。続く3章では、 p -median

モデルと比較しながらそれらの問題の解の特徴を考察する。4章では両者の問題の混合モデルを構築し、最近隣施設選択仮定の緩和の程度と最適解の変化の様子を考察する。最後に5章で結論と今後の研究課題を述べる。

2. 最近隣施設選択仮定を緩和した施設配置モデルの定式化

本章では、 p -median モデルを基本として、最近隣施設選択仮定を緩和した施設配置問題を定式化する。まず、最も近い施設から k 番目までに近い施設(第 k 近隣施設)までを利用すると仮定した場合の問題を考察し、次に k 個の施設を最小移動距離で周遊するように選択すると仮定した場合の問題を考える。

2.1. p -median モデル

p -median モデルは、あるネットワーク上において、ノード上の所与の需要に対して、所与の候補地の中から移動距離を最小化する施設の配置を求める離散型配置問題の典型的モデルである。この問題は以下のように定式化される。

$$\min_{X_{ij}} Z = \sum_i \sum_j w_i d_{ij} X_{ij}, \quad (1)$$

$$\text{subject to } \sum_j X_{ij} = 1, \quad \forall i, \quad (2)$$

$$X_{ij} \leq X_{jj}, \quad \forall i, j, \quad (3)$$

$$\sum_j X_{jj} = p \quad (4)$$

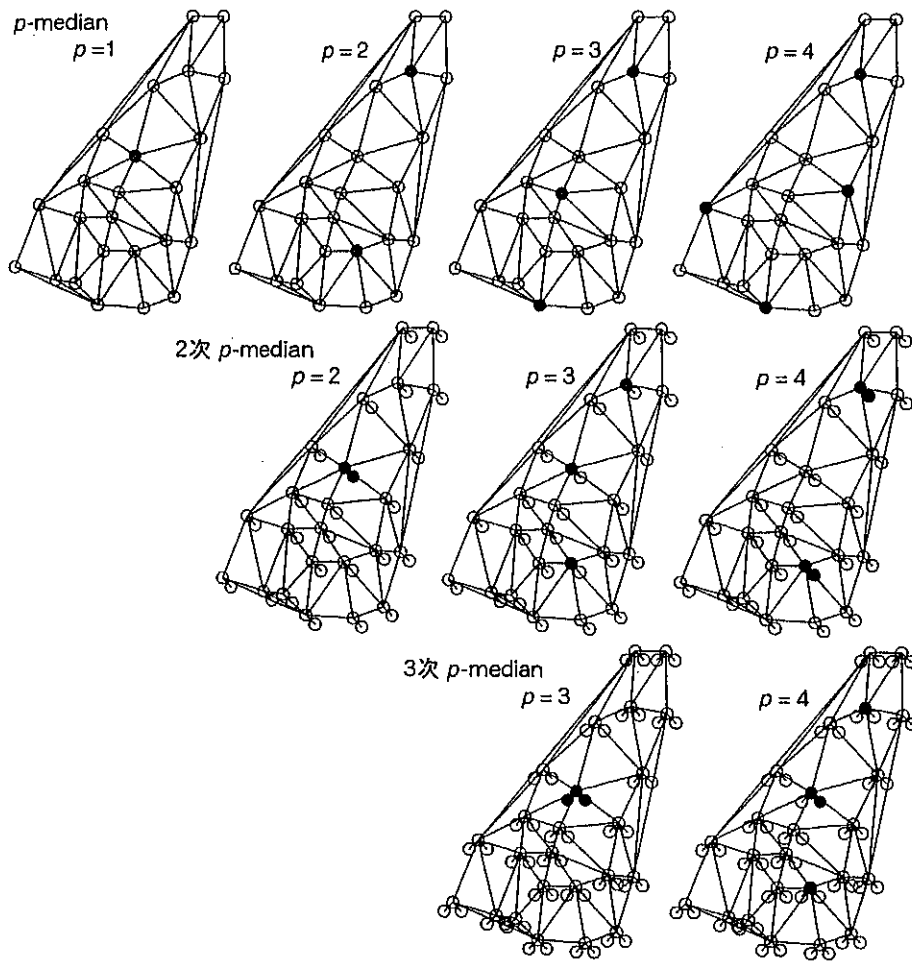


図3 p -median, 2次 p -median, 3次 p -medianモデルの最適解

但し,

$X_{ij} \in \{0, 1\}$: ノード i における需要の候補地 j への配分

w_i : ノード i における需要

d_{ij} : ノード i からノード j までの距離 ($d_{ij} \geq 0$)

p : 施設数

Z : 総移動距離

である。制約式 (2) はノード i の需要が唯一の施設に配分されることを表し、(3) は配分される候補地 j に施設が存在することを表す。この問題の解では、需要はその最近隣施設へ配分される。(4) は総施設数が p であることを規定している。

2.2. 2次 p -median モデル

p -median モデルでは、施設利用者が最近隣施設のみを利用するという仮定 (図 1(a)) に立脚していたが、この仮定を緩和し、第 2 近隣施設も利用す

ると仮定する場合 (図 1(b)) を考える。但し、それぞれの施設までの距離を別々のものと考え、移動距離は需要からそれぞれの施設までの片道距離の和と考える。この場合は、制約式 (2) を配分を表す 0-1 変数 X_{ij} が 2 回 1 となることを許すように以下の式に置き換えることで定式化できる。

$$\sum_j X_{ij} = 2, \quad \forall i \quad (5)$$

目的関数及び他の制約は同じである。このモデルを 2 次 p -median モデル (以下 2 次) と呼ぶことにする。

2.3. k 次 p -median モデル

同様に、最近隣施設、第 2 近隣施設、…、第 k 近隣施設を別々に利用すると仮定する場合は、 p -median モデルにおいて、制約式 (2) を

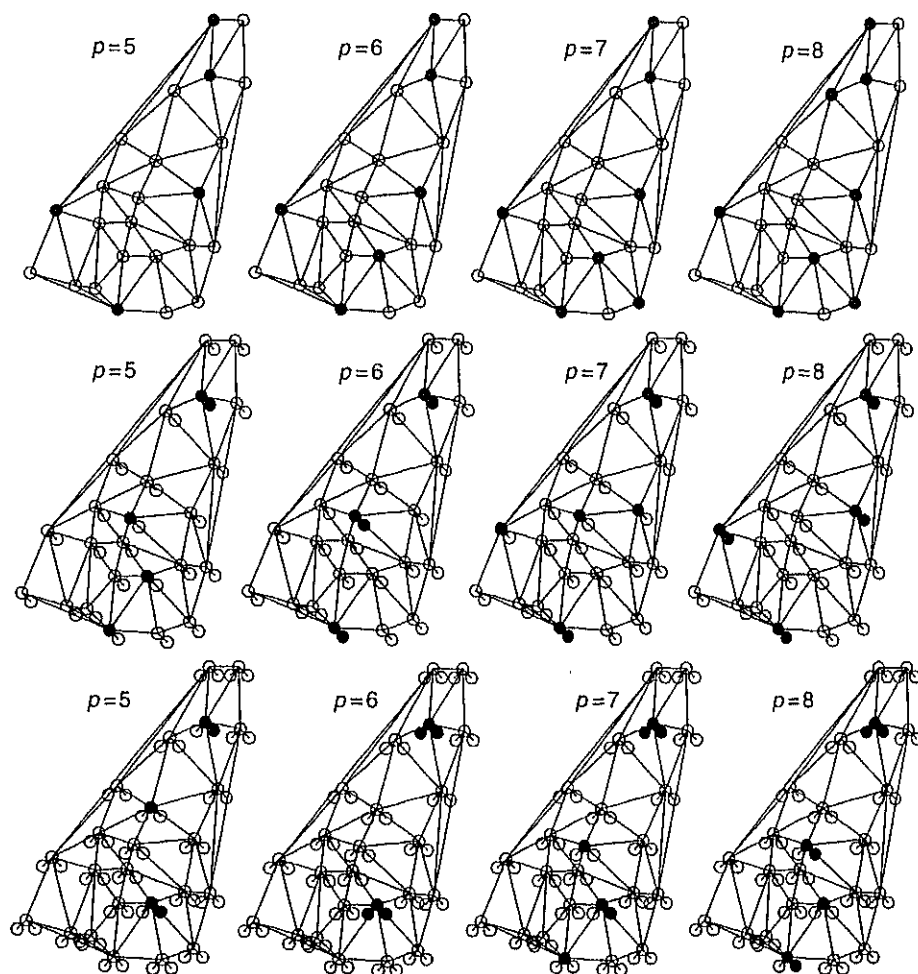


図3 p -median, 2次 p -median, 3次 p -medianモデルの最適解 (続き)

$$\sum_j X_{ij} = k, \quad \forall i \quad (6)$$

で置き換えることにより定式化される。これを以後 k 次 p -median モデル (以下 k 次) と呼ぶ。

2.4. 周遊2次 p -median モデル

次に、2 施設を最小移動距離で周遊するように選択すると仮定する場合 (図1(c)) を考える。すなわち、2 次では2 施設を別々に利用するとしていたが、ここでは2 施設を一度に利用することを考える。この場合、選択される施設は必ずしも最近隣施設と第2 近隣施設になるとは限らないことに注意していただきたい。目的関数は、需要から配分先の施設までの距離に2 施設間の距離を加えたものになるので、

$$\min_{X_{ij}} Z = \sum_i \sum_j w_i d_{ij} X_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_l w_i d_{ij} X_{ij} X_{il} \quad (7)$$

と表すことができる。但し、 $d_{ii}=0$ 及び $d_{ij}=d_{ji}$ を仮定している。制約式は2 次の場合と同様 (5) (3) (4) である。これを周遊2次 p -median モデル (以下周遊2次) と呼ぶことにする。

本稿では省略するが、2.3 節と同様に、一般に k 個の施設を最小距離となるように周遊する周遊 k 次 p -median モデルも考えることが可能である。

2.5. 周遊2次 p -median モデルの線形化

p -median や k 次は線形 0-1 計画問題であったが、上で定式化した周遊2次は2 次 0-1 計画問題であるので、これを実際に解く場合には以下のように線形化した問題に書き直す (今野・鈴木, 1982)。新たに以下の変数

$$U_{ij} = X_{ij} \sum_l d_{il} X_{il} \quad (8)$$

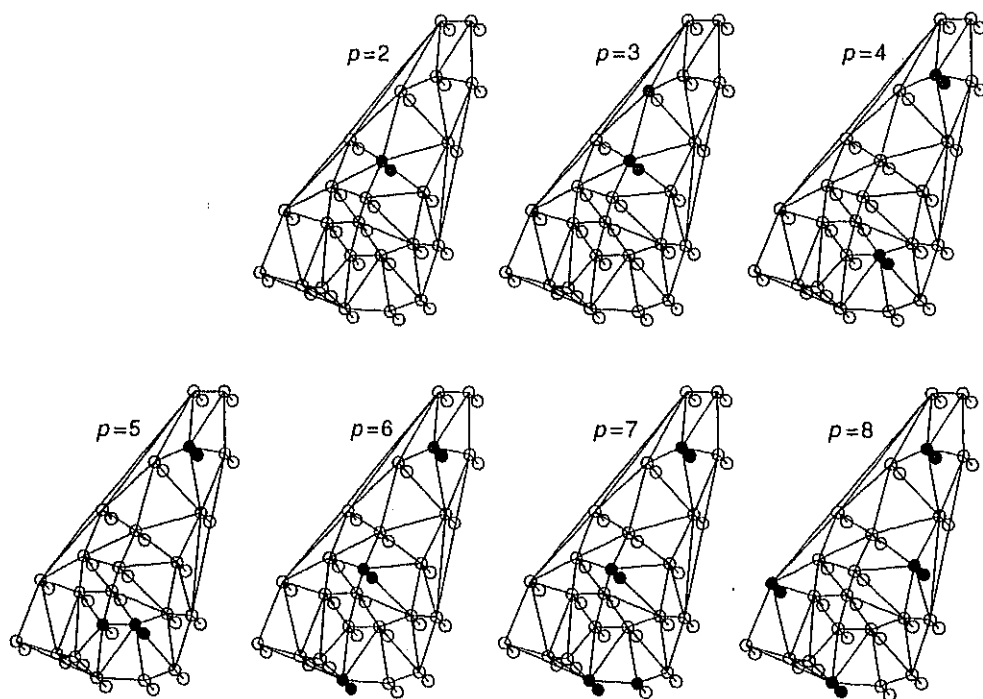


図4 周遊2次 p -median モデルの最適解

を導入すると、目的関数は

$$\min_{x_{ij}, U_{ij}} Z = \sum_i \sum_j w_i d_{ij} X_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_i U_{ij} \quad (9)$$

と書き改められる。 U_{ij} を定義する (8) 式は

$$0 \leq U_{ij} \leq \sum_i d_{ij} \cdot X_{ij}, \quad \forall i, j, \quad (10)$$

$$0 \leq \sum_i d_{ij} X_{ij} - U_{ij} \leq \sum_i d_{ij} \cdot (1 - X_{ij}), \quad \forall i, j \quad (11)$$

の2式と等価なので、これを制約式として加えることにより線形混合0-1計画問題にすることができ

3. 最適配置の特徴

3.1. 2次 p -median モデルと3次 p -median モデル

求解例として、東京都千代田区の神田公園・万世橋地域の町丁目代表点24点を抽出し、Delaunay網を構成することによって得られたネットワーク(図2)を対象に、需要として各町丁目の1995年夜間人口を与えて2次、3次 p -median モデルを解いた結果を、 p -median モデルの解と対比させながら図3に示す。距離にはネットワーク上の最短経路距離を用いた。

p -median モデルの場合は明らかに同一ノードに2

以上の施設が立地しても無意味であるが、2次や3次の場合は同一ノードにそれぞれ2施設、3施設立地するのが最適であることが考えられる。そこで、図3に示すように、各ノードに微小距離で結ばれたダミーノードを付加して解を求めた。また、施設数 p は1~8としたが、 k 次 p -median では $p < k$ の場合は意味を持たないので、 $p \geq k$ の場合を示している。数理システム社のNUOPT 3.0を使用し、数理計画問題として求解した。

2次の解は、 p が偶数の場合は施設がペアを形成し、その配置は施設数が $p/2$ 個の場合の p -median モデルの配置と一致することがわかる。 p が奇数の場合は必ずしもペアを形成しないが、 p -median の解よりも施設同士が近接して立地する。さらに、任意のネットワークや需要に対して必ずこのような配置になる保証はないが、この例では $\lfloor p/2 \rfloor$ 個の p -median の解と $\lfloor p/2 \rfloor + 1$ 個の p -median の解の重ね合わせになっており、この意味で前後の中間的配置となっていることがわかる ($\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数)。

3次の解も、2次と同様、 p が3の倍数の場合には3施設のクラスターが施設数 $p/3$ 個の p -median

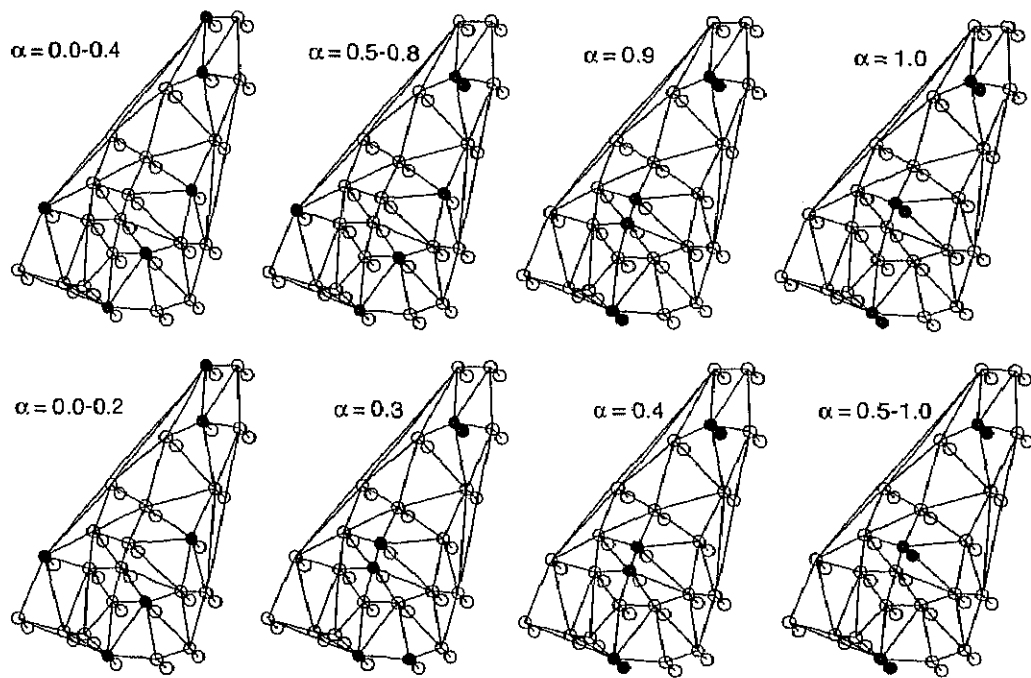


図5 2次のウェイトと混合問題の最適配置の関係
(上段：2次混合，下段：周遊2次混合； $p=6$)

モデルの解と同じ配置にでき、 p が3の倍数以外の場合も、この例ではその前後の施設数の最適解の中間的配置となっていることがわかる。

一般に、 k 次 p -medianモデルの解は、 p が k の倍数の場合は k 個のクラスターを施設数 p/k 個の p -medianモデルの解と同じように配置したものになり、 p が k の倍数でない場合はそれらの中間的配置になるものと推察される。

3. 2. 周遊2次 p -medianモデル

上記に対して、同一の対象ネットワークについての施設数 $p=2\sim 8$ の周遊2次の解は図4のようになる。2次の場合同様、ダミーノードを付加している。施設数 p が偶数の場合は、2次の解と同様、施設は全てペアを形成し、 $p/2$ 個の p -medianの解と同じ配置となる。

奇数の場合の解は施設数 $(p-1)$ 個の最適解を包含しており、その他に1施設が配置される。自明のことであるが、孤立して立地している施設にはどの需要も配分されないの、この施設は実はどこに立地していても同じである。この施設を利用する利用者がいるとすれば、彼らはペアを形成している他のど

れか1施設も利用しなければならないが、それよりもそのペアを利用することで周遊距離を同じに保つか、それより短くすることができるからである。

すなわち、周遊2次の解は、施設数の奇数・偶数に係わらず、 $\lfloor p/2 \rfloor$ 個の p -medianの解と同じ位置に施設ペアを配置したものとなり、 p が奇数の場合は施設が1つ余ることになる。2次に比べてペアの形成力が強いということになるが、これは周遊行動が施設間距離をより短くする方向に作用するためと考えられる。

類推になるが、一般の周遊 k 次 p -medianモデルの解も $\lfloor p/k \rfloor$ 個の p -medianの最適解の位置に k 個の施設クラスターが配置されたものになると考えられる。

4. 混合モデル

4. 1. p -medianと2次 p -medianの混合モデル

3章で考察したモデルは、いずれも全ての利用者が第 k 近隣施設までを利用したり、2施設を周遊したりすることを仮定していた。しかし、最近隣施設を利用する利用者が最も多く、遠い施設ほど利用者数が少なくなると考える方が現実的である。そこで本章では、3章のモデルと従来の p -medianモデル

を混合した中間的モデルを考えることにする。

まず、最近隣施設のみを利用する者と最近隣施設と第2近隣施設を利用する者が混在するケースを考える。このケースは、 p -median モデルと2次 p -median モデルの混合モデル（以下2次混合）になり、配分を表す変数を区別することにより、以下のように定式化される。

$$\min_{X_{ij}, Y_{ij}} Z = (1-\alpha) \sum_i \sum_j w_i d_{ij} X_{ij} + \alpha \sum_i \sum_j w_i d_{ij} Y_{ij}, \quad (12)$$

$$\text{subject to } \sum_j X_{ij} = 1, \quad \forall i, \quad (2)$$

$$X_{ij} \leq X_{jj}, \quad \forall i, j, \quad (3)$$

$$\sum_j X_{jj} = p, \quad (4)$$

$$\sum_j Y_{ij} = 2, \quad \forall i, \quad (5')$$

$$Y_{ij} \leq Y_{jj}, \quad \forall i, j, \quad (3')$$

$$X_{jj} = Y_{jj}, \quad \forall j \quad (13)$$

但し、

α : 2次の重み ($0 \leq \alpha \leq 1$)

であり、各ノードの需要の最近隣施設のみを利用する者と最近隣施設と第2近隣施設を利用する者の比が $1-\alpha:\alpha$ であることを意味する。したがって、 α が0の場合は p -median と、1の場合は2次と一致する。

4. 2. p -median と周遊2次 p -median の混合モデル

同様に、最近隣施設のみを利用する者と2施設を周遊する者とが混在するケースを考える。このケースは、 p -median モデルと周遊2次 p -median モデルの混合モデル（以下周遊2次混合）になり、 α を2次周遊の重みとすれば、目的関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \min_{X_{ij}, Y_{ij}} Z = & (1-\alpha) \sum_i \sum_j w_i d_{ij} X_{ij} \\ & + \alpha \left(\sum_i \sum_j w_i d_{ij} Y_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k w_i d_{ijk} Y_{ijk} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

制約式は4.1節と同じ (2) (3) (4) (5') (3') (13) であ

る。 α が0の場合は p -median と、1の場合は周遊2次と一致する。この問題も2次0-1計画問題であるので、実際に解く際には2.5節と同様の方法で線形化を施す。

4. 3. 混合モデルの解の特徴

これまでと同じネットワークを対象に、 α をパラメータとして0.1刻みで変化させながら $p=6$ の場合について上述の混合モデルを求解した結果を図5に示す。上段が2次混合、下段が周遊2次混合である。 α が小さいうちは p -median の解と一致するが、 α が大きくなるに連れて2施設同士が近接し、最終的には2次または周遊2次の解と同じになる。2次混合、周遊2次混合どちらについても、 α が一般の値をとる場合は、必ずしもペアを形成しないが、2施設ずつが近接した配置が最適解となることがわかる。

4. 4. 2次の重みとクラスター形成の関係

図5で注意すべき点は、 p -median の解からペアを形成するに至るパラメータ α の遷移点が2次混合と周遊2次混合とで明らかに異なることである。2次混合の場合は、 $\alpha=0.5$ の段階で初めて変化が起こり、 $\alpha=0.9$ の段階でも全てが完全にペアにならない。これに対して、周遊2次混合の場合は、 $\alpha=0.3$ でペアが明確になり、 $\alpha=0.5$ の段階で全施設が完全にペアを形成する。このように、周遊の方が施設間に作用する引力が強いことを意味している。

ペア形成の方が有利になる遷移点の重み α を理論的に検討してみよう。図6に示すように需要が一樣に分布する連続空間に同一施設密度で1つずつ施設を三角格子点状に配置する単独配置パターン（左： p -median の解に対応）と、2つずつ施設のペアを三角格子点状に配置するペア配置パターン（右：2次または周遊2次の解に対応）を比較する。前者の施設間距離を a とすれば、後者のそれは $\sqrt{2}a$ となる。最近隣施設までの距離をそれぞれ r_1, s_1 、第2近隣施設までの距離をそれぞれ r_2, s_2 とすれば、それらの平均は図中の影部についての平均を求めればよいので、1次積率の簡単な計算から、

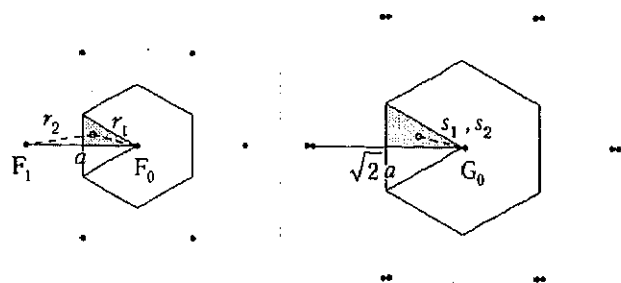


図6 連続平面上における三角格子点状の単独配置とペア配置（同一施設密度）

$$E[r_1] = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\log 3}{36}a \approx 0.351a$$

$$E[r_2] = \frac{18 - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\log(2 + \sqrt{3}) - 3\sqrt{3}\log 3}{18}a \approx 0.678a$$

$$E[s_1] = E[s_2] = \sqrt{2}E[r_1] \approx 0.496a$$

となる。2次混合、周遊2次混合の場合の遷移点ではそれぞれ

$$E[(1-\alpha)r_1 + \alpha(r_1 + r_2)] = E[(1-\alpha)s_1 + \alpha(s_1 + s_2)]$$

$$E[(1-\alpha)2r_1 + \alpha(a + r_1 + r_2)] = E[(1-\alpha)2s_1 + \alpha(s_1 + s_2)]$$

が成り立つので、これを解くと、2次混合の遷移点が $\alpha \approx 0.800$ となるのに対し、周遊2次混合の遷移点は $\alpha \approx 0.219$ となることがわかる。これらの値は図5で見た変化とほぼ整合する結果である。

このように、第2近隣施設の利用者の場合は8割程度存在するときに遷移点となるのに対し、2施設周遊利用者の場合は概ね2割を超えた程度で遷移点となることがわかる。

5. 結論と今後の課題

本研究では、多くの既存研究で採用されてきた最近隣施設選択仮定を緩和した場合の p -median モデルを定式化し、その解の特徴を分析した。その結果、以下のような結論を得た。

(1) 第2近隣施設の利用や2施設を周遊することを仮定した場合の最適配置は、2施設がクラス

ターを形成したものになり、周遊の方がその傾向は強い。施設数が3の場合も同様である。

(2) 最近隣施設のみ利用者と第2近隣施設の利用者または2施設の周遊利用者が混合している場合でも、後者の割合が一定値以上になると施設同士が近接立地し、クラスターを形成する配置が最適となる。近接の程度はミニサム配置の分散の力と最近隣以外の施設利用により働く集中の力のトレード・オフにより決まるが、周遊利用者の存在する場合は集中の力がより強く働く。

第2近隣施設の利用者や周遊利用者の存在が施設立地上クラスターを形成することは重要な知見である。クラスター形成を複合施設と読み替えれば、固定費用を共有することにより複合施設が形成されることを記述した鈴木(2001b)とは別の複合施設の形成される仕組みを記述することができたともいえる。

従来の商業立地モデルは商業施設相互を競合相手と見なすものがほとんどであった(姜, 2000)が、大型店の進出時の事後調査でも商業集積地での店舗間に正の相乗効果が存在することが明らかになっており、立地選定等のマーケティング戦略における重要な指針として認知されている。このことは周遊を前提とした場合に施設の集積が圏域を広げることが論じた大山・鈴木(2001)の手法で説明可能であるが、立地パターンの評価までは至らなかった。本研究の結果を商業立地の問題として解釈すれば、他の商業集積の正の影響を、歩行者流動量等を外生的に与えて取り込むのではなく、同時に周遊して利用するという行動として内生的に記述し、同業種であっても商業施設相互間に吸引力が働く原理を記述したことにもなる。郊外ショッピング・センターの形成や欧米に見られる巨大ショッピング・モールのように商業活動が集積するのは、周遊行動を前提とした利用者の利便性から見て合理的であるといえよう。

(2)については、3施設以上の利用者も混合していると考えるのが現実的である。類推になるが、このような場合は、1トリップで平均的に訪れる施設数に近い数の施設クラスターが最適配置の基本パターンになるであろうと考えられる。また、上述の結果は需要や立地候補点の分布が如何なるものでも

成立すると思われるが、その真偽については今後 GIS 上に空間的最適化ツールを構築し、様々な地域や時系列行動データを対象に検証されなければならない。その他の課題としては、現実の都市空間を対象とした大規模問題での求解とヒューリスティック算法の開発、連続空間モデルでの検討、利用者行動や施設種別の多様化、 α の内生化などが挙げられる。

謝辞

本研究については、東京大学大学院工学系研究科杉原厚吉教授及び匿名の査読者に貴重なご助言を戴きました。ここに謝意を表します。なお、本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金及び平成 13 年度特定国派遣研究者事業による助成を受けた。

参考文献

- 大山 崇・鈴木 勉 (2001) 周遊距離 Voronoi 図とその商業立地分析への応用, 「日本応用数学会論文誌」, 11 (1), 1-14.
- 姜 秉国 (2000) 商業施設の立地選定問題, 「オペレーションズ・リサーチ」, 45 (9), 452-458.

- 今野 浩・鈴木久敏 (1982) 『整数計画法と組合せ最適化』, 日科技連出版社.
- 鈴木 勉 (2001a) サービスの組合せに着目した複合サービス施設の最適配置, 「日本建築学会計画系論文集」, 540, 189-195.
- 鈴木 勉 (2001b) 土地費用の上昇に伴う地域施設複合化のモデル分析, 「日本建築学会計画系論文集」, 546, 193-197.
- 孫 相洛・谷村秀彦・歳森 敦 (1996) 同時購買行動モデルによる小売施設の立地分析, 「日本建築学会計画系論文集」, 487, 141-149.
- Eaton, B. C. and Lipsey, R. G. (1979) Comparison shopping and the clustering of homogeneous firms. *Journal of Regional Science*, 19 (4), 421-435.
- Eaton, B. C. and Lipsey, R. G. (1982) An economic theory of central places. *The Economic Journal*, 92, 56-72.
- McLafferty, S. L. and Ghosh, A. (1986) Multipurpose shopping and the location of retail firms. *Geographical Analysis*, 18 (3), 215-226.
- Mulligan, G. F. (1987) Consumer travel behavior: extensions of a multipurpose shopping model. *Geographical Analysis*, 19 (4), 364-375.
- O'Kelly, M. E. (1983) Multipurpose shopping trips and the size of retail facilities. *Annals of the Association of American Geographers*, 73 (2), 231-239.

周遊距離 Voronoi 図とそれを用いた商業立地分析

大山 崇* 鈴木 勉**

* 筑波大学大学院社会工学研究科

** 筑波大学社会工学系

Tour-Distance Voronoi Diagram and its Application to Location Analysis

Takashi OHYAMA* Tsutomu SUZUKI**

* Doctoral Program in Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba

** Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba

Abstract. The purpose of this paper is to show tour-distance Voronoi diagrams which represent catchment areas of facilities under the assumption that users use more than one facility. Bisectors composing tour-distance Voronoi diagrams are generally curved lines, although those of higher-order Voronoi diagrams are composed of straight lines. It is observed that contiguous facilities have larger joint catchment areas than scattered facilities. Applying them to locational selection of competitive facilities, it is found out that locational concentration tends to be superior for facilities which maximize their catchment areas, if users make tours to move around from one facility to another.

1. はじめに

公共施設や商業施設の立地を考える際に、その施設をどの利用者が利用するかといういわゆる配分をどのように考えるかは重要な問題である。この問題に対して、これまでの施設配置研究の多くが、利用者から最も近い施設を利用すると仮定してきた。このような仮定の下で連続平面上の立地問題を扱う場合には、施設への利用者の配分は Voronoi 図で表現されることになる。それ故、これまで Voronoi 図を用いた最適配置問題が数多く検討されてきた (例えば [5][8][9][11][13] 等)。

ところが、実際の利用者の行動の仕方に着目すれば、このような仮定はしばしば現実的でない。施設の提供するサービスが複数種類存在する場合には、利用者が複数の施設を利用するというモデルを考える必要もあるだろう。

もし、利用者が最も近い施設だけでなく、2 番目、3 番目に近い施設も利用する場合には、高次 Voronoi 図を応用することが考えられる。[12] は、高次 Voronoi 図 ([10] など参照) を利用して、利用者が k 番目までに近い施設を近い順に優先して利用する場合の圏域構造を明らかにした。しかし、商業施設の買い回り行動などに見るように、利用者が周遊する場合も往々にして考えられる。このように利用者が施設を連続して訪れるような場合には、周遊経路を考慮した施設への配分を考慮しなければならない。実際に、いくつかの店舗の買い回り行動をする場合には、必ずしも近い施設を利用しないことは頻繁にあることである。例えば、[7] は、複数の製品を消費者が購入する multipurpose shopping model の研究を行い、数理計画問題として解を導いている。

そこで、本稿では、2 次元平面上で利用者が複数の施設を連続的に周遊して利用し、その総距離が最短になるように移動すると仮定して、利用者の施設への配分を表す周遊距離 Voronoi 図がどのようになるかを明らかにし、併せてこの周遊距離 Voronoi 図の商業立地への初歩的応用を行うことを目的とする。

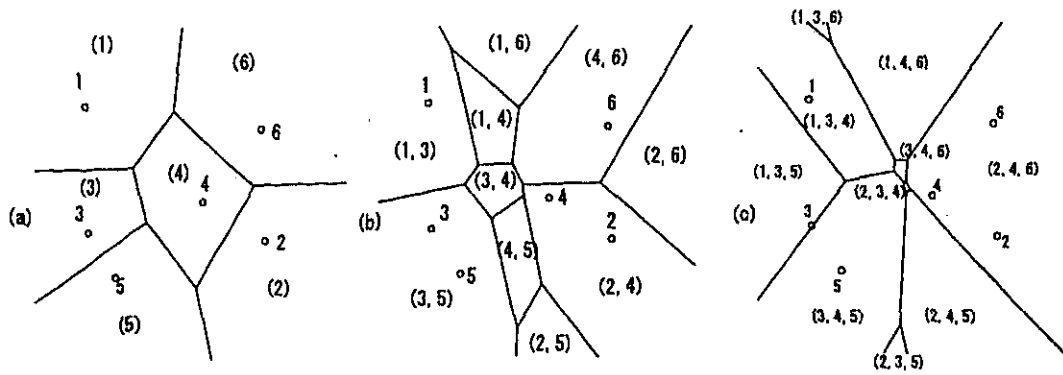


Fig. 1: (a) A Voronoi diagram; (b) An order-2 Voronoi diagram; (c) An order-3 Voronoi diagram.

2. 周遊距離 Voronoi 図

本論文では2点 x_1 と x_2 の間の距離をユークリッド距離

$$(2.1) \quad d(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で定義する。但し、 x_1, x_2 の座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする。

2.1 Voronoi 図と高次 Voronoi 図

\mathbb{R}^2 上に n ($2 \leq n < \infty$) 個の母点 (施設) p_1, \dots, p_n があるとするとき、その中で p_i までの距離 $d(x, p_i)$ が最短となる点の集合を母点 p_i の Voronoi 領域 $V(p_i)$ という。すなわち、

$$(2.2) \quad V(p_i) = \{x | d(x, p_i) \leq d(x, p_j), \forall j \in I \setminus \{i\}\}$$

但し、 $I = \{1, \dots, n\}$ とする。母点 p_1, \dots, p_n の Voronoi 領域の集合

$$(2.3) \quad \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$$

を、 p_1, \dots, p_n によって構成される Voronoi 図という (以下同様に、Voronoi 領域の集合を Voronoi 図という)。

また、 n 個の母点 p_1, \dots, p_n の中から k ($1 < k < n$) 個の母点を選ぶ組み合わせの数は $nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 通りあるが、そのうちの i 番目の母点の組 $A_i = (p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ の要素全てが近い方から k 番目以内の母点となる点の集合

$$(2.4) \quad V_O^k(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}) = \{x | \max_{\mu} d(x, p_{i_\mu}) \leq \min_{\nu} d(x, p_{j_\nu}), i_\mu \in \{i_1, \dots, i_k\}, j_\nu \in I \setminus \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

を p_{i_1}, \dots, p_{i_k} の k 次 Voronoi 領域 $V_O^k(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ という [10]。これらの Voronoi 図・高次 Voronoi 図は例えば Fig.1 のようになる。ここで、同じ母点配置で比較していることに留意されたい。

さらに、母点 $P_1 = \{p_{1_1}, \dots, p_{1_{n_1}}\}, \dots, P_k = \{p_{k_1}, \dots, p_{k_{n_k}}\}$ ($2 \leq n_i < \infty, i = 1, 2, \dots, k$) があるとする。 P_1 の母点の中で p_{1_i} が最も近く、 \dots 、 P_k の母点の中で p_{k_i} が最も近い領域

$$(2.5) \quad V_M^k(p_{1_i}, \dots, p_{k_i}) = \left\{x | \sum_{l=1}^k d(x, p_{l_i}) \leq \sum_{l=1}^k d(x, p_{l_j}), \forall j \in I \setminus \{i\}\right\}$$

を p_{1_i}, \dots, p_{k_i} の k 次重ね合わせ Voronoi 領域ということにする。ここで、 $I = \{1, \dots, \prod_{l=1}^k n_l\}$ である。 k 次重ね合わせ Voronoi 図の例を Fig.2 に示す。

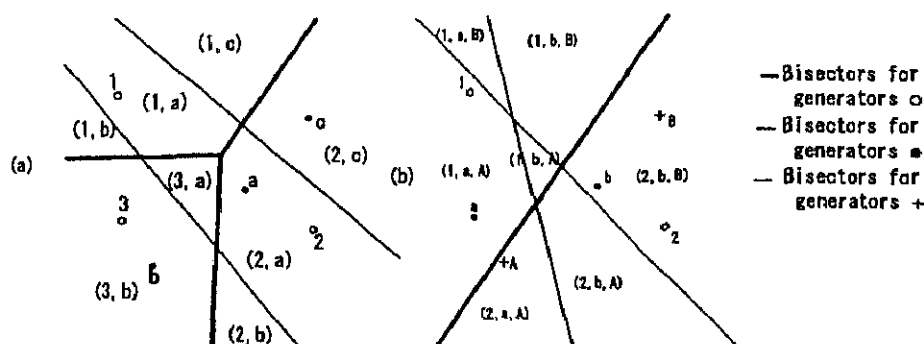


Fig. 2: (a) An order-2 multiple Voronoi diagram; (b) An order-3 multiple Voronoi diagram.

高次 Voronoi 図や重ね合わせ Voronoi 図を用いれば、複数の施設の利用を考えた施設の圏域や配置配分を分析することが可能である。しかし、このような場合には往々にして、利用者が複数の施設を連続的に利用することがある。この場合、施設の利用圏域を考慮するときには、複数の施設を連続して訪れるという周遊行動を考慮した Voronoi 図を考えなければならない。ここでは、これを周遊距離 Voronoi 図と呼ぶことにする。そして、同じサービスを提供する複数の施設を周遊する場合と、異なるサービスを提供する複数の種類の施設を 1 施設ずつ選んで周遊する場合の 2 つのケースについて、周遊距離 Voronoi 図の形状がどうなるか、またそれがどのような性質を持つかを明らかにする。

2.2 全ての施設が同種類である場合の周遊距離 Voronoi 図

まず、施設が全て同じサービスを提供していて、利用者はその中のいくつかの施設を周遊する場合を考えよう。例えば、ある消費者がいくつかのデパートを訪れるような場合である。ここでは簡単のため、どの消費者も k ヶ所のデパートを訪れるとしよう。このとき、消費者にとって、訪れるデパートは必ずしも最も近いデパートではなく、 k 個のデパートの組み合わせのうち、周遊距離が最小になる組み合わせとなる。

n 個の母点 p_1, \dots, p_n から k 個 ($2 \leq k \leq n$) の母点の組と順番を選ぶ方法(ただし、同じ施設の組を逆の順序で訪れる場合は数えない)は $n P_k / 2 = \frac{n!}{2(n-k)!}$ 通りあるが、そのうちの i 番目の母点の組を $P_i = (p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ とする。 p_1, \dots, p_n の中から k 個の施設を選んで周遊するとき、 p_{i_1}, \dots, p_{i_k} を連続して訪れる移動距離が最短となる領域を p_{i_1}, \dots, p_{i_k} の k 次周遊距離 Voronoi 領域 $V_T^k < p_{i_1}, \dots, p_{i_k} >$ と呼ぶことにする。すなわち、

$$\begin{aligned}
 V_T^k < p_{i_1}, \dots, p_{i_k} > &= \left\{ x \mid d(x, p_{i_1}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(p_{i_l}, p_{i_{l+1}}) + d(p_{i_k}, x) \right. \\
 (2.6) \quad &\quad \left. \leq d(x, p_{j_1}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(p_{j_l}, p_{j_{l+1}}) + d(p_{j_k}, x), \forall j \in I \setminus \{i\} \right\}
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $I = \{1, \dots, n P_k / 2\}$ である。

Fig.3(a) は 2 次周遊距離 Voronoi 図の例である。例えば、領域 (2, 4) は、2 と 4 を選んで周遊する場合の移動距離が最も短くなる領域である。境界点はニュートン法を用いて数値的に求めている。我々は多少遠くてもデパートの集中した地域に買い物に出かけることがある。このことは、複数の施設を連続して利用する際には、施設の位置が必ずしも利用者から近くなくても、お互いに近接して立地している施設の組が選ばれるということを意味している。もし、近い方から 2 つのデパートを選ぶならば、Fig.1(b) に示した 2 次 Voronoi

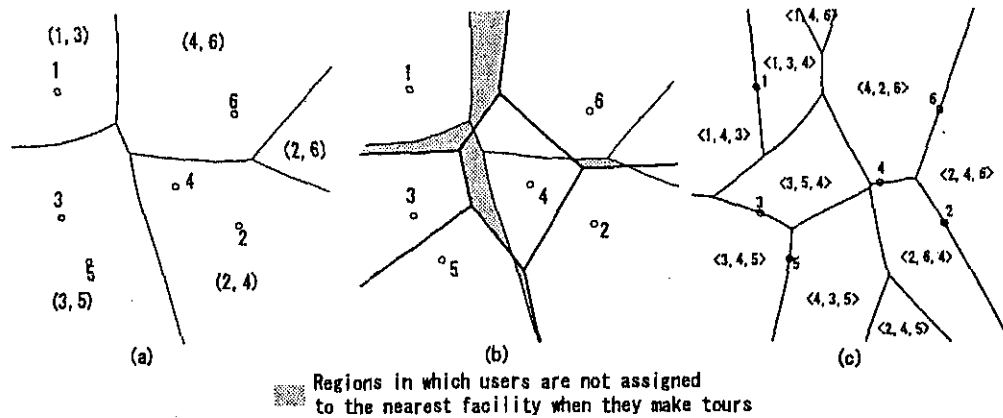


Fig. 3: (a) An order-2 tour-distance Voronoi diagram; (b) Difference between the ordinary Voronoi diagram and the order-2 tour-distance Voronoi diagram; (c) An order-3 tour-distance Voronoi diagram.

図のような圏域が構成されるが、これと比較すると、比較的近接している母点の組 (3,5) の領域が拡大し、逆に互いに離れている母点の組 (3,4) の領域は消失してしまっている。また、最も近い母点に帰属しない領域を示すと Fig.3(b) の影付の部分のようになる。このように、必ずしも最も近い施設を利用しない点が存在することがわかる。

Fig.3(c) は、3 次周遊距離 Voronoi 図の例である。例えば、領域 $\langle 2, 4, 5 \rangle$ は 2, 4, 5 を選んでこの順番に、あるいは、この逆の順番に周遊する場合の移動距離が最も短くなる領域である。2 次の場合と同様に、Fig.1(c) の 3 次 Voronoi 図と比較する (比較にあたっては、3 次周遊距離 Voronoi 図の施設を訪れる順番は考慮しない) と、母点 2, 4, 6 のような近接している 3 つの母点の組の領域 ($\langle 2, 4, 6 \rangle$, $\langle 4, 2, 6 \rangle$, $\langle 2, 6, 4 \rangle$ を合わせた領域) は、3 次 Voronoi 図の (2,4,6) の領域より広がっていることがわかる。

k 次周遊距離 Voronoi 図には以下のような性質がある。

性質 1 (p_i, p_j) が互いに最も離れた 2 つの母点の組であるとき、2 次周遊距離 Voronoi 図において p_i, p_j の領域は、 p_i を除いた母点で構成される Voronoi 図における p_j の領域と、 p_j を除いた母点で構成される Voronoi 図における p_i の領域の積集合の部分集合である。

証明: 他の任意の一母点を加えた p_i, p_j, p_k の 3 点で構成される領域を考えると、 (p_i, p_j) の領域が、 p_i と p_k ができる Voronoi 図の p_i の領域と p_j と p_k ができる Voronoi 図の p_j の領域の積集合の部分集合となっていることは以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned}
 V_{T^2}^2(p_i, p_j) &= \{x | d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, x) \leq d(x, p_i) + d(p_i, p_k) + d(p_k, x), \forall k \neq j\} \\
 &\subseteq \{x | d(p_j, x) \leq d(p_k, x), \forall k \neq j\} \\
 V_{T^2}^2(p_i, p_j) &= \{x | d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, x) \leq d(x, p_j) + d(p_j, p_k) + d(p_k, x), \forall k \neq i\} \\
 (2.7) \quad &\subseteq \{x | d(p_i, x) \leq d(p_k, x), \forall k \neq i\}
 \end{aligned}$$

それぞれの式の右辺は、 p_i を除いたときの p_j の Voronoi 領域、 p_j を除いたときの p_i の Voronoi 領域を意味しているので、 p_i, p_j の領域は、 p_i を除いた母点で構成される Voronoi 図の p_j の領域と、 p_j を除いた母点で構成される Voronoi 図の p_i の領域の積集合の部分集合である。第三の点は何の点であっても上の関係が成り立つので、証明された。□

Fig.4(a)において, $d(1,2), d(2,3), d(3,1)$ のうち, 最も長いのは $d(1,2)$ である. 2次周遊距離Voronoi図における $(1,2)$ の領域は, 母点1,3で描かれたVoronoi図の母点1の領域と, 母点2,3で描かれたVoronoi図の母点2の領域の積集合, つまり図の薄灰色の領域の部分領域になっている.

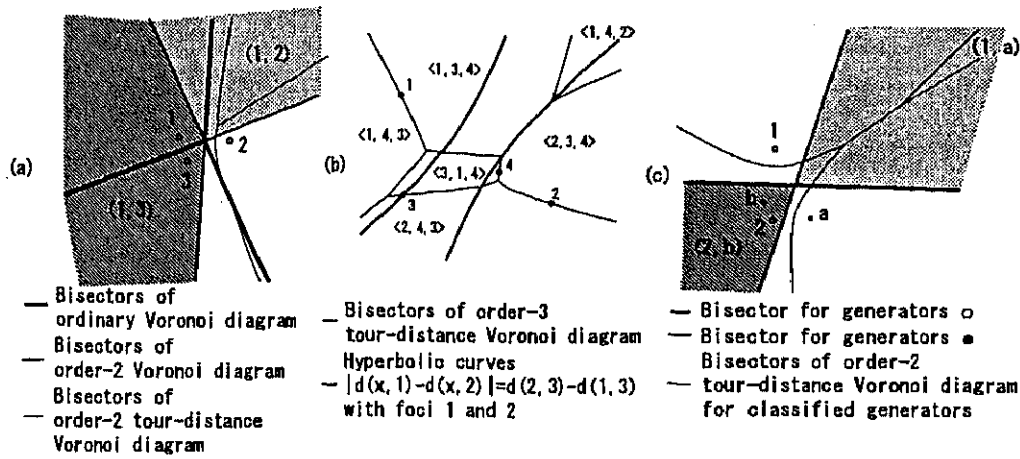


Fig. 4: (a) Proof of property 1; (b) Example of property 6; (c) Proof of property 9.

性質 2 $d(p_i, p_j)$ が互いに最も近接した2つの母点の組であるとき, 2次周遊距離Voronoi図における p_i, p_j の領域は, p_i を除いた母点で構成されるVoronoi図の p_j の領域と, p_j を除いた母点で構成されるVoronoi図の p_i の領域の積集合を部分領域に持つ.

証明: p_i, p_j の2次周遊距離Voronoi領域は,

$$\begin{aligned}
 & V_T^2(p_i, p_j) \\
 &= \{x | d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, x) \leq d(x, p_k) + d(p_k, p_l) + d(p_l, x), \forall (k, l) \neq (i, j)\} \\
 &\supseteq \{x | d(x, p_i) + d(p_j, x) \leq d(x, p_k) + d(p_l, x), \forall (k, l) \neq (i, j)\} \\
 &\supseteq \{x | \max\{d(x, p_i), d(p_j, x)\} \leq \min\{d(x, p_k), d(p_l, x)\}, \forall (k, l) \neq (i, j)\} \\
 &= V_O^2(p_i, p_j) \\
 (2.8) &= V(p_j | P \setminus \{p_i\}) \cap V(p_i | P \setminus \{p_j\})
 \end{aligned}$$

となる. ただし, $V(p_j | P \setminus \{p_i\})$ とは p_i を除いたときの p_j のVoronoi領域である. 従って, p_i, p_j の2次周遊距離Voronoi領域は, p_i を除いた母点で構成されるVoronoi図の p_j の領域と, p_j を除いた母点で構成されるVoronoi図の p_i の領域の積集合を部分領域に持つ. □

Fig.4(a)において, $d(1,2), d(2,3), d(3,1)$ のうち, 最も短いのは $d(1,3)$ である. 2次周遊距離Voronoi図における $(1,3)$ の領域は, 母点2,3で描かれたVoronoi図の母点3の領域と, 母点1,2で描かれたVoronoi図の母点1の領域の積集合(図中の濃灰色の領域)を部分領域に持つ.

性質 3 $\overline{p_i p_j}$ を直径とする円を線分 $\overline{p_i p_j}$ によって分けて得られる2つの半円内に, それぞれ p_i, p_j 以外の母点が1つ以上存在するとき, 2点 p_i, p_j の2次周遊距離Voronoi領域は存在しない.

証明: $d(x, p_i) < d(x, p_j)$ を満たす任意の点 x を考える. 一方の半円内に p_k , もう一方の半円内に p_l があるものとする.

最初に p_i を利用するものとする, 次に周遊する母点は p_i からの周遊距離が最短となる母点であるが, p_k, p_l は p_i を中心とする半径 $d(p_i, p_j)$ の円内にあるので, $d(p_i, p_k) < d(p_i, p_j), d(p_i, p_l) < d(p_i, p_j)$ である. また, p_k, p_l のどちらかは x を中心とする半径 $d(x, p_j)$ の円内にあるので, $\min\{d(x, p_k), d(x, p_l)\} < d(x, p_j)$ である (Fig. 5 参照).

よって,

$$\begin{aligned} & \min\{d(x, p_i) + d(p_i, p_k) + d(p_k, x), d(x, p_i) + d(p_i, p_l) + d(p_l, x)\} \\ & < d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, x) \end{aligned}$$

となり, x は (p_i, p_k) または (p_i, p_l) の 2 次周遊距離 Voronoi 領域に含まれることになる. 故に, p_i, p_j を母点とする 2 次周遊距離 Voronoi 領域は存在しない. \square

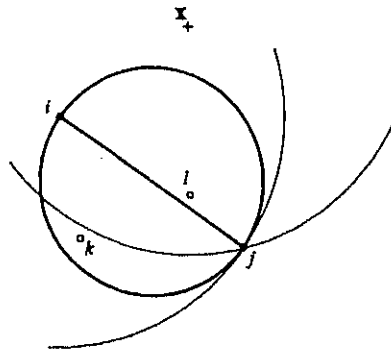


Fig. 5: Proof of property 3.

性質 4 2 次周遊距離 Voronoi 図の隣接する 2 領域が 1 つの共通の帰属母点を有する場合, 2 領域の境界線は双曲線の一部である.

証明: 2 領域の帰属母点の組を $(p_i, p_j), (p_i, p_k)$ とする. このとき 2 領域の境界線は, 以下のように表される.

$$\begin{aligned} d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, x) &= d(x, p_i) + d(p_i, p_k) + d(p_k, x) \\ (2.9) \quad d(p_j, x) - d(p_k, x) &= d(p_i, p_k) - d(p_i, p_j) \end{aligned}$$

したがって, 境界線は双曲線の一部である. \square

Fig.3(a) において, 例えば, (1, 3) の領域と (3, 5) の領域の境界線は双曲線である.

性質 5 3 次周遊距離 Voronoi 図の隣接する 2 領域が, 同じ帰属母点の組を持つが周遊する順番のみが異なる場合, すなわち, 2 番目の母点が異なる場合, 2 領域の境界線は双曲線であり, 2 番目の母点とならない母点はこの境界線上にある.

証明: 2 領域の帰属母点の組と周遊する順番を $(p_i, p_j, p_k), (p_i, p_k, p_j)$ とする. このとき, 2 領域の境界線は以下のように表される.

$$\begin{aligned} d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, p_k) + d(p_k, x) &= d(x, p_i) + d(p_i, p_k) + d(p_k, p_j) + d(p_j, x) \\ (2.10) \quad d(p_k, x) - d(p_j, x) &= d(p_i, p_k) - d(p_i, p_j) \end{aligned}$$

よって, 境界線は双曲線であり, p_i はこの境界線上にある. \square

Fig.3(c)において、例えば、 $\langle 2, 4, 6 \rangle$ の領域と $\langle 2, 6, 4 \rangle$ の領域の境界線は双曲線であり、2はこの境界線上にある。

性質 6 3次周遊距離Voronoi図の隣接する2領域が、帰属母点として2番目の母点を含む2母点を共有する場合、2領域の境界線は双曲線の一部であり、共有する2番目の母点はこの双曲線と対をなすもう一方の双曲線上にある。

証明: 2領域の帰属母点の組と周遊する順番を $\langle p_i, p_j, p_k \rangle$, $\langle p_i, p_j, p_l \rangle$ とする。このとき、2領域の境界線は次のようになる。

$$\begin{aligned} d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, p_k) + d(p_k, x) &= d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, p_l) + d(p_l, x) \\ (2.11) \quad d(p_k, x) - d(p_l, x) &= d(p_j, p_l) - d(p_j, p_k) \end{aligned}$$

したがって、境界線は双曲線で、 p_j はこれと対をなすもう一方の双曲線

$$(2.12) \quad d(p_k, x) - d(p_l, x) = d(p_j, p_k) - d(p_j, p_l)$$

上にある。 \square

Fig.4(b)において、 $\langle 1, 3, 4 \rangle$ の領域と $\langle 2, 3, 4 \rangle$ の領域の境界線は双曲線であり、3は境界線と対をなすもう一方の双曲線上にある。

性質 7 k 次周遊距離Voronoi図($k \geq 2$)の領域数は高々 $O(n^2)$ である。

証明: p_{i_1}, \dots, p_{i_k} を周遊するときの周遊距離

$$d_k(x, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}) = d(x, p_{i_1}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(p_{i_l}, p_{i_{l+1}}) + d(p_{i_k}, x)$$

に着目すると、第2項を最小にする母点の組が1組であれば、 p_{i_1}, p_{i_k} が与えられたとき、 d_k を最小にする母点も1組である。従って、 k 次周遊距離Voronoi図の領域数は、高々最初に訪れる母点と最後に訪れる母点の組み合わせ数 nC_2 である。 \square

Fig.3(c)において、最初に訪れる母点が1、最後に訪れる母点が3となる領域については、 $\arg \min_l \{d(1, l) + d(3, l)\} = 4$ なので、 $\langle 1, 4, 3 \rangle$ の領域しか存在しない。

以上のように、周遊を前提とした場合の領域分割は、高次Voronoi図とも異なる分割となる。このことは、距離が周遊距離で定義される場合の圏域や施設への配分を論じる場合は、周遊距離Voronoi図を用いた分析が必要となることを意味している。

2.3 複数の種類の施設を周遊する場合の周遊距離Voronoi図

さて、前節では母点の種類は全て同じとしていたが、複数の種類があつて別々の目的で訪問する場合はどうなるであろうか。本節では、種類の異なる母点を連続して利用する場合の領域分割を考察することにする。

例えば、生鮮食料品を買うために、青果店、鮮魚店、精肉店を買い回るケースを考えてみよう。この場合も、なるべく買い回り距離が短くなるように、多くの店舗の中からこれら3種類の店舗を1店ずつ選択することができるが、店舗の種類を区別する必要があるので、前節の場合の組み合わせとは一般的には異なる。

生鮮三品の買い回りでは、訪問の順番は任意であろうが、例えば、外来患者として病院に行き、診察後、近くの調剤薬局に立ち寄って処方された薬を購入する場合は、薬局よりも先に病院を訪れなければならない。このように種類毎に訪問順番が定められているという制約があるケースも考えられる。但し、3種類以上のサービスを考えるときは順番を考

えなければならないが、2種類のサービスを考えるときは周遊距離に違いがないので順番は無意味である。

まず、 k 種類の異なる母点を周遊することを考える。 $l(1 \leq l \leq k)$ 種類目の母点の数を n_l とし、母点 $Q_1 = \{q_{11}, \dots, q_{1n_1}\}, \dots, Q_k = \{q_{k1}, \dots, q_{kn_k}\}$ があるとする。

まず、順序制約がない場合を考える。 Q_1, \dots, Q_k からそれぞれ1つの施設を選び、それらを自由な順番で周遊して元の地点に戻ることを考える。 Q_1, \dots, Q_k の中から1つずつ母点を選んで自由な順番で周遊するとき、 p_{1i}, \dots, p_{ki} を選んだ場合の総移動距離が最短となる領域 $V_T^k < p_{1i}, \dots, p_{ki} >$ を p_{1i}, \dots, p_{ki} の分類された母点による k 次周遊距離 Voronoi 領域ということとする。すなわち、

$$(2.13) \quad \begin{aligned} V_T^k < p_{1i}, \dots, p_{ki} > &= \left\{ x \mid d(x, p_{1i}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(p_{li}, p_{(l+1)i}) + d(p_{ki}, x) \right. \\ &\leq d(x, p_{1j}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(p_{lj}, p_{(l+1)j}) + d(p_{kj}, x), \forall j \in I \setminus \{i\} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $I = \{1, \dots, \prod_{l=1}^k n_l \cdot k!\}$ である。

母点の種類によって周遊する順序が決まっている場合も同様に定義することが可能である。ただし、施設の選び方は順番を考慮する必要がないので、 $\prod_{l=1}^k n_l$ 通りとなる。すなわち、 $I = \{1, \dots, \prod_{l=1}^k n_l\}$ である。

Fig.6(a) は、分類された2種類の母点による2次周遊距離 Voronoi 図である。例えば、(2,a)の領域では、○の中から2, ●の中からaを選んで周遊する場合の移動距離が最短であることを意味している。Fig.2(a)の2次重ね合わせ Voronoi 図と比べると、互いに近接している母点の組の圏域ほど大きくなっていることがわかる。(2,a)の領域は、Fig.2(a)に比べて広がっている。Fig.3(a)の2次周遊距離 Voronoi 図と比較したときの違いは、同じ種類同士の組の圏域が存在しないことである。したがって、Fig.3(a)の(4,6)という領域はこの図では消滅し、その分(2,a)の領域がさらに広がっていることが分かる。

Fig.6(b) は、3種類の分類された母点で構成される3次周遊距離 Voronoi 図である。例えば、 $<b, 2, B>$ の領域では、●の中からb, ○の中から2, +の中からBを選んでこの順(あるいは逆順)に訪れると総移動距離が最小となることを意味している。Fig.2(b)の3次重ね合わせ Voronoi 図と比較する(3次周遊距離 Voronoi 図のときと同様、比較にあたっては母点を訪れる順番は考慮しない)と、3母点が近接しているほど圏域が広い傾向にあることがわかる。例えば、Fig.2(b)の3次重ね合わせ Voronoi 図における(2,b,B)の領域よりも、Fig.6(b)の分類された母点による3次周遊距離 Voronoi 図における $<2, b, B>$, $<b, 2, B>$, $<2, B, b>$ を合わせた領域の方が大きい。

Fig.6(c) は、3種類の分類された母点を必ず○, ●, +の順(または+, ●, ○の順)に周遊するという順序制約をつけた場合の3次周遊距離 Voronoi 図である。例えば、(2,b,A)の領域では、○の中から2, ●の中からb, +の中からAを選び、順に訪れると総移動距離が最短となることを意味する。Fig.6(b)の種類別の順序に制約がない場合と比較すると、可能な母点の組み合わせが少なくなるため、領域分割数はさらに少なくなることがわかる。

分類された母点による k 次周遊距離 Voronoi 図は以下の性質を持つ。

性質 8 分類された母点による2次周遊距離 Voronoi 図において、隣接する2領域が帰属母点のうち1つを共有するとき、その境界線は双曲線となり、共通の施設はこの双曲線と対をなすもう一方の双曲線上にある。

証明: 双曲線となることは2次周遊距離 Voronoi 図と同様に示される。また、bを共通

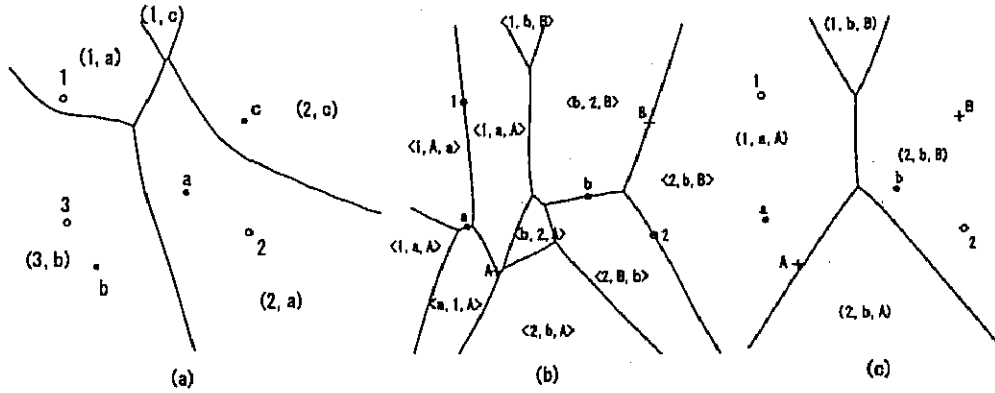


Fig. 6: (a) An order-2 tour-distance Voronoi diagram for classified generators; (b) An order-3 tour-distance Voronoi diagram for classified generators; (c) An order-3 tour-distance Voronoi diagram for classified generators with order condition.

の母点とし、もう一方の種類の母点が p_i, p_j であるとする、境界は、

$$(2.14) \quad \begin{aligned} & \{x | d(x, p_i) + d(p_i, b) + d(b, x) \leq d(x, p_j) + d(p_j, b) + d(b, x)\} \\ & = \{b | d(b, x) + d(x, p_i) + d(p_i, b) \leq d(b, x) + d(x, p_j) + d(p_j, b)\} \end{aligned}$$

と表される。したがって、共通の母点 b は、境界線である双曲線と対をなすもう一方の双曲線の上にあることがわかる。□

Fig.6(a)において、例えば、(2,a)と(2,c)の境界線は、 a と c を焦点とする双曲線である。また、母点2はこの双曲線と対をなすもう一方の双曲線上にある。

性質 9 $d(p_{1i}, p_{2i}) \geq d(p_{1j}, p_{2j}) (\forall j \neq i)$ ならば、分類された母点による2次周遊距離Voronoi図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域は、2次重ね合わせVoronoi図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域の部分集合になる。

証明: 性質1と同様に、

$$(2.15) \quad \begin{aligned} & \{x | d(x, p_{1i}) + d(p_{1i}, p_{2i}) + d(p_{2i}, x) \leq d(x, p_{1j}) + d(p_{1j}, p_{2j}) + d(p_{2j}, x), \forall j \neq i\} \\ & \subseteq \{x | d(x, p_{1i}) + d(p_{2i}, x) \leq d(x, p_{1j}) + d(p_{2j}, x), \forall j \neq i\} \end{aligned}$$

従って、分類された母点による2次周遊距離Voronoi図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域は、2次重ね合わせVoronoi図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域の部分集合になる。□

Fig.4(c)において、 $d(1,a), d(1,b), d(2,a), d(2,b)$ のうち、最も長いのは $d(1,a)$ である。分類された母点による2次周遊距離Voronoi図の $(1,a)$ の領域は、重ね合わせVoronoi図の $(1,a)$ の領域（薄灰色の領域）の部分集合である。

性質 10 $d(p_{1i}, p_{2i}) \leq d(p_{1j}, p_{2j}) (\forall j \neq i)$ ならば、2次重ね合わせVoronoi図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域は、分類された母点による2次周遊距離Voronoi図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域の部分集合になる。

証明: 性質9と同様に、

$$(2.16) \quad \begin{aligned} & \{x | d(x, p_{1i}) + d(p_{2i}, x) \leq d(x, p_{1j}) + d(p_{2j}, x), \forall j \neq i\} \\ & \subseteq \{x | d(x, p_{1i}) + d(p_{1i}, p_{2i}) + d(p_{2i}, x) \leq d(x, p_{1j}) + d(p_{1j}, p_{2j}) + d(p_{2j}, x), \forall j \neq i\} \end{aligned}$$

となることから、2次重ね合わせ Voronoi 図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域は、分類された母点による 2次周遊距離 Voronoi 図の (p_{1i}, p_{2i}) の領域の部分集合になる。□

Fig.4(c) において、 $d(1,a), d(1,b), d(2,a), d(2,b)$ のうち、最も短いのは、 $(2,b)$ である。分類された母点による 2次周遊距離 Voronoi 図の $(2,b)$ の領域は、2次重ね合わせ Voronoi 図の $(2,b)$ の領域 (濃灰色の領域) を部分集合に持つ。

性質 11 順序制約がないとき、分類された母点による 3次周遊距離 Voronoi 図において、3つとも同じ帰属母点を共有するが、2番目の母点異なるような隣接する2領域の境界線は双曲線となり、どちらの領域でも2番目の母点とならない共有母点はこの境界線上を通る。

証明：性質5と同じ。□

例えば、Fig.6(b) において、 $\langle 2,b,B \rangle$ の領域と $\langle 2,B,b \rangle$ の領域の境界線は双曲線であり、母点2はこの境界線上にある。

3. 商業施設立地への初歩的応用

Christaller[1] は中心地理論において、2次元平面上で消費者は、ある製品を自分で作る費用と商業施設まで移動して購入するときの費用 (商品の値段と移動距離に比例した交通費) を比較して安い方を選択すると仮定し、サービスを受けない領域がないように、かつ、各施設の圏域が最大になるように都市が立地するとすれば、その立地点は三角格子状になることを明らかにした ([6] 等参照)。また、Hotelling[4] は競争立地モデルにおいて、利用者が最も近い商業施設のみで購買行動を行うと仮定し、線分状の市場領域に2つの競合する商業施設が、自分の施設を訪れる利用者の数を最大にするように立地点の変更を繰り返すと、線分の midpoint に2つの商業施設が併設されることを明らかにした。しかし、利用者の周遊行動を前提とした立地分析は、1次元空間において分析した [2] 等の若干の例はあるものの数少ない。

そこで本章では、本論文で論じた周遊距離 Voronoi 図を用いて、手始めとして、(C) 利用者が種類の区別のない2つの商業施設を周遊するという仮定の下で、各施設がその圏域を最大にするように立地するとしたとき、どの地点を選択するかを検討する。まず、三角格子状の商業施設分布が与えられたときに、商業施設が新規に1つ参入する場合、ならびに、既存の商業施設のうちの1施設が移転する場合の2ケースについて、圏域が最も大きくなる場所はどこかを調べ、(A)1施設のみ訪問する場合 (Voronoi 図) や (B)2施設を訪問するが周遊しない場合 (高次 Voronoi 図) と比較する。

3.1 新規施設参入ケース

Fig.7 のように、隣接施設の間隔を1として、三角格子状に施設が配置されているとする。このとき、Voronoi 図、2次 Voronoi 図、2次周遊距離 Voronoi 図はそれぞれ Fig.8(a), (b), (c) のようになる。図中の影の領域は、それぞれの Voronoi 図における中央の施設に帰属する圏域である。この場合は、2次 Voronoi 図と2次周遊距離 Voronoi 図の圏域の形が全く同じであることがわかる。

新規参入施設を Fig.7 の一辺1の正方形 STUV の領域内に置くことにし、圏域が最大になる地点を数値的に求めた。正方形の領域内に新しい施設を置く候補地を間隔 $\frac{1}{36}$ で格子状に等間隔に置き、全領域を $\frac{1}{100}$ のメッシュに分割し、各メッシュに一様の需要 $\frac{1}{100^2}$ があるとして、総移動距離が最も小さい施設 (または施設の組) を探すことによって求めた。

それぞれの場合についての圏域面積の分布を、Fig.9(a), (b), (c) に示す。これを見ると、1施設訪問、2施設訪問非周遊の場合では圏域面積の変化は小さいが、2施設訪問周遊の場合では新規参入する場所によって圏域面積が大きく変わることが分かる。新規参入の場合

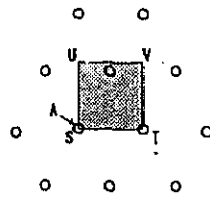


Fig. 7: Facility locations and investigated area for a candidate point.

の圏域面積最大の意味での最適点とその圏域形状は Fig.8(d), (e), (f) に示すとおりである。それぞれの場合で最適点が変わることが分かる。すなわち, (A)1 施設のみ訪問の場合では最も施設の疎な最大空円の中心 (Voronoi 図の Voronoi 点) に参入するのに対し, (B)2 施設訪問非周遊の場合では既存 2 施設の中点に, (C)2 施設訪問周遊の場合においては, 既存の施設と一致する地点に立地した場合に圏域が最大となることがわかる。これは, 性質 1 に示した通り, 2 施設が互いに近くに立地していると圏域が大きくなるためである。

3.2 既存施設移転ケース

次に, 既存の施設のうち 1 つが自らの圏域を広げるように移転するケースを考えよう。三角格子状に規則的に施設が立地しているとき, Fig.7 の施設 A を正方形の内部に移動させ, 圏域が最大になる点を数値的に求めた。

その結果, それぞれの場合での圏域面積の分布は Fig.9(d), (e), (f) のようになる。これを見ると, 新規参入のときと同様に, (C) では移転する場所によって圏域が大きく変わることが分かる。既存施設が移転した場合の最適点とその圏域形状は Fig.8(g), (h), (i) のようになる。このケースでもそれぞれの場合で最適点が変わることが分かる。すなわち, (A)1 施設のみ訪問の場合では既存の地点が最適であるのに対し, (B)2 施設訪問非周遊の場合ではやや隣接施設寄りに移転した場合が最適になり, (C)2 施設訪問周遊の場合においては, 既存の隣接施設と一致するまで移転した場合に圏域が最大となることがわかる。これも, 性質 1 に示した通り, 2 施設が互いに近くに立地していると圏域が大きくなるためである。

ショッピングセンターのように, 商業施設が集中して立地することは往々にして見られる ([3] 等参照)。利用者が 2 つの施設を周遊するという仮定の下では, 新規参入や施設移転の場合, 既存の施設と一致する場所に立地すると圏域が最大になるということは, このような集中立地を利用者行動から説明する手がかりとなると言えよう。

4. おわりに

本論文では, 2 次元平面において, 利用者がいくつかの施設を総移動距離が最小になるように周遊するという前提の下で, 利用する施設の組を明らかにする周遊距離 Voronoi 図の概念を提示し, 高次 Voronoi 図や重ね合わせ Voronoi 図との比較を行った。また, 周遊距離 Voronoi 図の境界線の形状などについての性質を明らかにした。さらに, 三角格子状の施設配置で新規参入および施設移転を考えると, 周遊を前提とした場合は, 周遊しない場合とは異なり, 他の施設と同じ場所に立地したときに圏域が最大となることが明らかにされた。

今後の展開としては, 競争立地モデルへの展開, 公共施設を想定した社会的最適配置モデルへの応用, 個人属性により異なるであろう現実の周遊行動を取り入れた施設配置の評価への応用などが考えられるが, これらは今後の課題としたい。

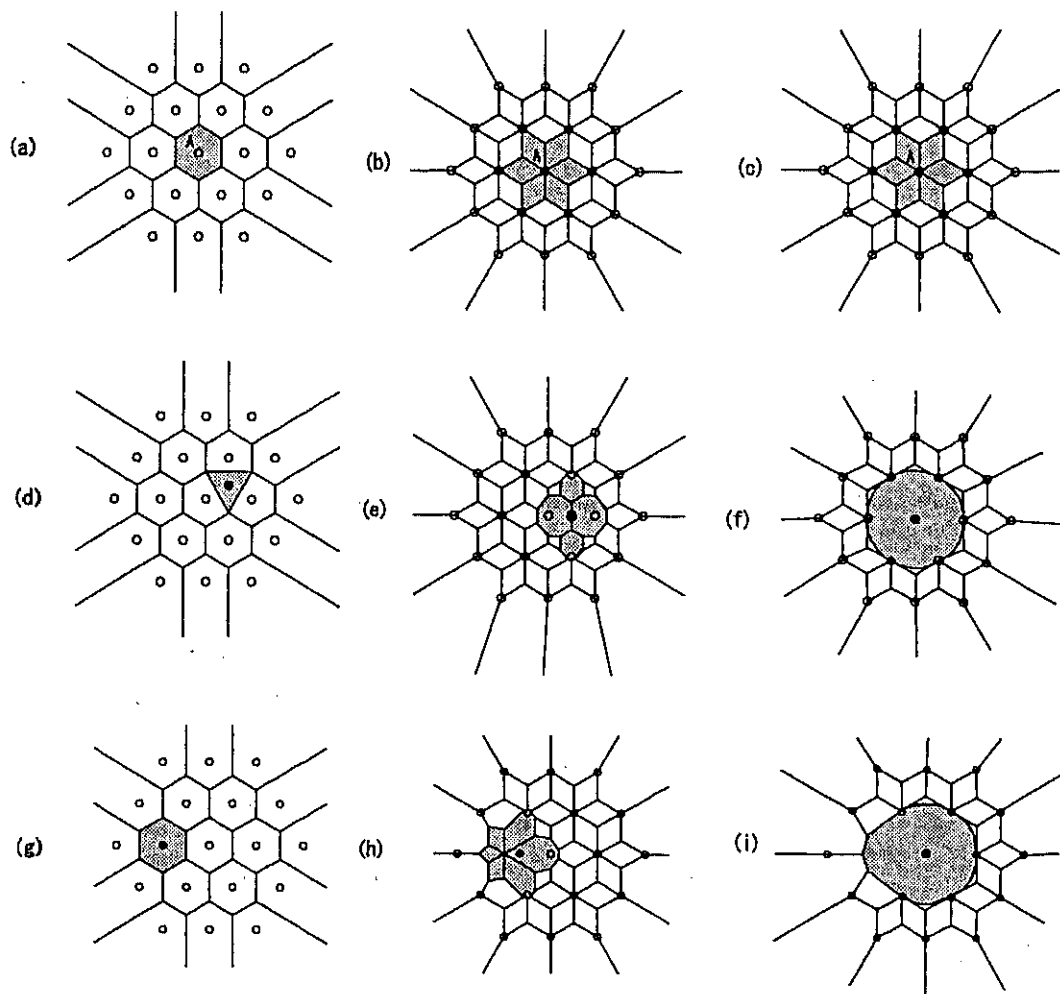


Fig. 8: Voronoi diagram and the shape of catchment area A at optimal point: (a) The case of triangular lattice when consumers are assumed to use one facility; (b) The case of triangular lattice when consumers are assumed to use two facilities separately; (c) The case of triangular lattice when consumers are assumed to use two facilities successively; (d) The case of facility entry when consumers are assumed to use one facility; (e) The case of facility entry when consumers are assumed to use two facilities separately; (f) The case of facility entry when consumers are assumed to use two facilities successively; (g) The case of facility relocation when consumers are assumed to use one facility; (h) The case of facility relocation when consumers are assumed to use two facilities separately; (i) The case of facility relocation when consumers are assumed to use two facilities successively.

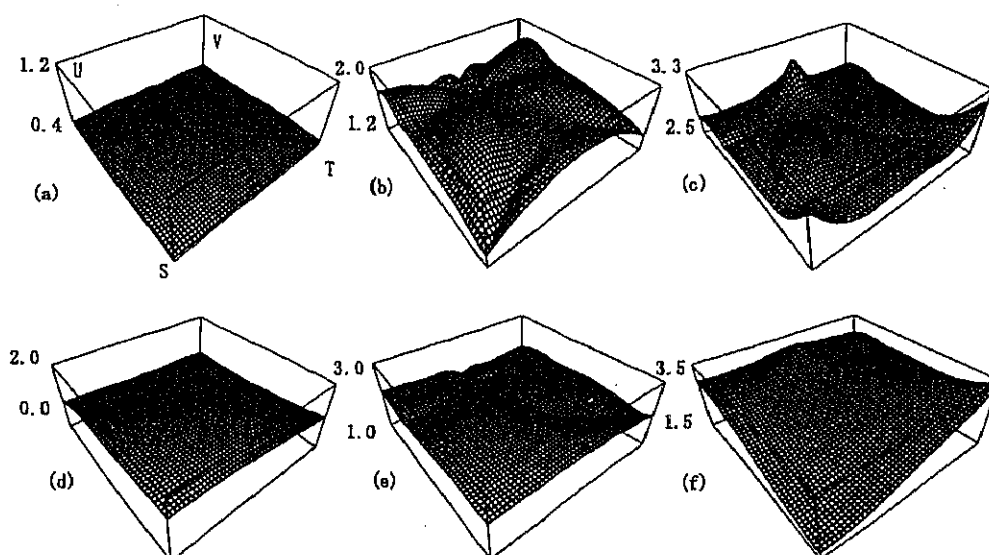


Fig. 9: Catchment areas: (a) The case of facility entry when consumers are assumed to use one facility; (b) The case of facility entry when consumers are assumed to use two facilities separately; (c) The case of facility entry when consumers are assumed to use two facilities successively; (d) The case of facility relocation when consumers are assumed to use one facility; (e) The case of facility relocation when consumers are assumed to use two facilities separately; (f) The case of facility relocation when consumers are assumed to use two facilities successively.

謝辞

本研究については、筑波大学腰塚武志教授、大澤義明助教授、慶応義塾大学の栗田治助教授、東京都立大学吉川徹助教授及び匿名の査読者には、貴重なご助言を頂きました。ここに深く感謝申し上げます。なお、本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金による成果である。

参考文献

- [1] Christaller, W., Die Zentralen Orte in Süddeutschland: Eine ökonomisch-geographische Untersuchung über die Gesetzmässigkeit der Verbreitung und Entwicklung der Siedlungen mit städtischen Funktionen, Jena: Gustav Fisher, 1933.
- [2] Eaton, B. C. and Lipsey, R. G., Comparison Shopping and the Clustering of Homogeneous Firms, Journal of Regional Science, 19(4) (1979), 421-435.
- [3] Foster, J. R., Real Estate Financing and the Opportunity for Shopping Center Occupancy, Land Economics, 44 (1968), 319-329.
- [4] Hotelling, H., Stability in Competition, Economic Journal, 39 (1929), 41-57.
- [5] Matsutomi, T. and Ishii, H., Minimax Location Problem with A-distance, Journal of the Operations Research Society of Japan, 41(2) (1998), 181-195.

- [6] Mills, E. S. and Hamilton, B. W., *Urban Economics: 5th Ed.*, New York, N.Y.: Harper Collins College Publishers, 1994.
- [7] Mulligan, G. F., *Consumer Travel Behavior: Extensions of a Multipurpose Shopping Model*, *Geographical Analysis*, 19(4) (1987), 364-375.
- [8] 大沢義明・鈴木敦夫, グループ利用施設の最適配置とその頑健性について, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 30(3) (1987), 368-393.
- [9] Okabe, A. and Aoyagi M., Existence of Equilibrium Configurations of Competitive Firms on an Infinite Two-dimensional Space, *Journal of Urban Economics*, 29 (1991), 349-370.
- [10] Okabe, A., Boots, B. and Sugihara, K., *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Chichester: John Wiley & Sons, 1992.
- [11] Okabe, A. and Suzuki, A., Stability of Spatial Competition for a Large Number of Firms on a Bounded Two-dimensional Space, *Environment and Planning A*, 19 (1987), 1067-1082.
- [12] South, R. and Boots, B., Relaxing the Nearest Center Assumption in Central Place Theory, *Papers in Regional Science*, 78 (1999), 157-177.
- [13] Suzuki, T., Asami, Y. and Okabe, A., Sequential Location-Allocation of Public Facilities in One- and Two-Dimensional Space: Comparison of Several Policies, *Mathematical Programming*, 52 (1991), 125-146.

大山崇 (正会員) 〒121-0055 東京都足立区加平 3-3-17-409

1999 年東京理科大学大学院理工学研究科修士課程修了。修士 (理学)。同年, 筑波大学大学院博士課程社会工学研究科 3 年次編入。施設配置問題の研究に従事。日本オペレーションズ・リサーチ学会, 地理情報システム学会会員。

鈴木勉 (非会員) 〒276-0023 千葉県八千代市勝田台 3-40-7

1989 年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了。博士 (工学)。同年, (財) 電力中央研究所。1996 年, 筑波大学社会工学系講師。現在に至る。施設立地および都市空間構造の研究に従事。日本都市計画学会, 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 日本建築学会, 地理情報システム学会, 応用地域学会会員。

(2000年 8 月10日 受付)

(2000年11月17日 最終稿 受付)

サービスの組合せに着目した複合サービス施設の最適配置

OPTIMAL CONFIGURATION OF MULTIPLE SERVICE FACILITIES AND ITS DEPENDENCE ON THE COMBINATION OF PROVIDING SERVICES

鈴木 勉*
Tsutomu SUZUKI

This article formulates an optimal location problem for multiple service facilities which provide with some part of all the services. Two facilities which provide with high degree overlapping services have mutually expulsive relation each other. However, the relation shifts to mutually complement as the services provided by the facilities diversify and the degree of overlapping facility function decreases. It is found that the balanced condition of the two brings about non-uniform optimal configuration of facilities generally. It is notable that the high degree overlapping facilities should be located so that the configuration has a vibrated systematic pattern.

Keywords: multiple service facilities, facility location, Voronoi diagram, travel distance

複合施設, 施設配置, ボロノイ図, 移動距離

1. はじめに

近年, 地域施設における複合化や多機能化の動きが盛んである。例えば, 小中学校等の学校教育施設と公民館, 図書館等の社会教育施設を同一建物として設置するコミュニティスクールの例や, 保育園や幼稚園, 小学校に高齢者施設を隣接させ, 世代間交流を促進しようとする例など, 管轄官庁の垣根を越える積極的試みも見られるようになってきている。公立小中学校の空き教室を利用して, デイサービスセンターや学童保育所とするケースも現れているが, これも異なる機能を持つ施設の複合化と見なすことができる。また, 立地問題の緩和策として, 廃棄物焼却場の余熱を利用して温水プール等を併設する事例も増加してきているが, これも複合化の範疇でとらえることができよう。

このような複数種の施設の空間的統合だけではなく, サービス水準の向上を目的とした単一施設の多機能化によって, 同種の施設でもそのサービス内容が施設毎に個性化し, それによって施設間に役割分担が見られる例も見られる。分散配置したそれぞれの図書館がカバーする分野を差別化し, 図書購入の重複率をさけながら, 蔵書検索・電子図書館などのオンライン化の充実により, 相互連携によって他図書館の図書利用も可能にする試みがされている。施設の提供

するサービスの多機能化が進むということは, それらのサービスを細分化して見れば, 施設間のサービスに差が生じ, 同種の施設でも相異なる多様なサービスが複合化していると解釈することができる。

このような地域施設の複合化の理由としては, 地方部においては, 自治体の財政力の弱さという背景から, 公共用地の有効利用や管理運営の合理化による経費節減を目的として行われている。自治体が単独で公共施設整備を行うことが困難な場合もあり, 広域市町村が複合施設を共有するケースも見られる。一方, 大都市都心部では, 高地価による公共用地難を背景として, 土地・空間の高度利用を進めることを目的として行われている場合が多く見られる。しかし, コミュニティスクールの考え方のように機能上の相乗効果を期待するという積極的理由から複合化が行われる場合もある。また, 公共施設ではないが, 全国各地で見られる郊外部における大規模商業コンプレックスも, 商業施設の複合化したものと見なすことができる。

このように地域施設が複合サービスを提供する場合, 施設の最適配置はどのようになるであろうか。本論文では, 以下, 配置の評価指標として, 施設までの総移動距離あるいは平均移動距離の最小化するという Weber 型の問題を対象とする。Weber 型の最適施設配置に関する研究の中で複数のサービスを扱ったものとしては, 提供サ

* 筑波大学社会工学系 講師・博士(工学)

Assistant Prof., Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Dr. Eng.

ービスに階層構造を持つ施設の最適配置を論じた研究がある(鈴木(1990), Okabe *et al.* (1997))。これらの研究では、下位の施設のサービスが上位の施設でも提供されるという包含関係の仮定に基づいている。しかし、この階層構造を持つ施設は複合サービス施設の特殊ケースと考えられる。施設間に包含関係が成立せず、施設Aでしか提供されないサービスもあれば、施設Bでしか提供されないサービスもあるといった場合がより一般的である。岸本(2000)はこのような多層的な構造を持った施設群の最適配置を求める手法を開発し、複合施設や迷惑施設と複合させた場合の最適配置などを議論している。

2つの施設を取り上げたとき、一方の施設の提供するサービスの内、他方の施設でも提供しているサービスの割合を重複度と呼ぶことにする。このとき、Weber型の施設配置では、提供するサービスの内容の重複度が大きい施設同士は、相互排斥の関係にある。すなわち、お互いに離れて立地しようとする排斥の力が働く。しかし、施設の提供するサービスが多様化し、施設機能の重複度が減少するにつれ、施設間の関係が相互補完に移行する。この場合、お互いが近接して立地してもよい状況となる。このように、複合化した施設に対しては、近隣住区論のような生活圏のレベル毎に施設を配置するというような古典的な配置パターンは必ずしも成立せず、上述の排斥と近接のバランスが最終的にもたらす適正な配置パターンを明らかにしておく必要がある。

そこで本研究は、複数のサービスが空間的に結合した複合サービス施設の最適配置を求め、サービスの組合せが最適配置にどのような影響を与えるかを明らかにすることを目的とする。複合化のパターンは多数の組合せが考えられるが、本研究ではその中でどのような複合化が望ましいかという問題は扱わず、あらかじめ複合化することが与えられている施設群の最適配置パターンがどのようなものになるかを明らかにすることを主眼とする。

続く2章では、本論文で対象とする複合サービス施設の定義を行い、その最適配置問題を定式化する。3章では、最も単純な線分都市での解析解を導出し、解の基本的特性を明確にする。そして4章では、都市平面上での問題を非線形計画問題として解く解法を概説し、施設数が少ない場合と多い場合について計算例を示すことにより、複合サービス施設の最適配置パターンの特性と、サービスの組合せとの関係について論じる。最後に5章で本論文の結論と課題をまとめる。

2. 複合サービス施設の最適配置問題の定式化

(1) 複合施設の多義性と本論文での定義

施設の複合化とは、どのように定義されるであろうか。屋敷・谷口・山口(1993)は、生涯学習化社会に向けた学習基盤整備の具現化として文教施設(学校)と地域施設の複合化を取り上げているが、この中で複合の多義性を指摘している。すなわち、複合とは元来「2種以上のものが合わさって一つとなること」、つまり集合体であるが、施設における複合の意味としては、空間的結合の形態、管理運営の方法、所有関係、機能・活動の連携状況等により様々な解釈があり得るため、狭義には同一の建物や敷地内に複数種の施設が同居するという空間的結合の状態を指すが、広義には建物や敷地が分離していても相互利用や共同事業を行うなどの機能的連携を有すればよいとする場合もあるとしている。こうした整理をした上で、屋敷他は、

「複合建築」という語が一般に機能的連携を条件としない空間的結合を意味することを指摘し、論文での定義として、機能的連携の有無を問わず同一建物あるいは同一敷地内に複数の用途や機能を持たせた施設(空間複合)を意味することとしている。

一方、大内・高倉・横塚(1994)は、救急医療というサービスが、ドクターカー等の救急施設(あるいは救急車の配備される消防施設)と、救急病院等の医療施設の連携で成立していることに着目し、これらを複合施設と捉えた上で双方の施設の適正配置を論じている。この場合の複合化とは、地域内においてあるサービスの実現に複数用途の施設群が相互補完を行うことを意味しており、上の整理に依れば、機能的連携を有すること(機能複合)を意味している。

さらに、病院と調剤薬局のように、上述のようなサービスの供給側での複合は見られなくても、需要側で同時に利用することの多い施設の組合せもあり、利用者が同時利用するような一連の施設(利用複合)も広義の複合施設と位置づけることができる。

このように、複合施設には様々な定義があり得る(図1)が、本論文では最初に挙げた空間複合の意味での複合施設を対象とすることとし、一施設がその場所で複数のサービスを提供することを明確に表すために、以降、「複合サービス施設」と呼ぶ。本論文では、複合サービス施設の最適配置が複合化されていない場合とどのように異なるかを明らかにすることを目的とする。

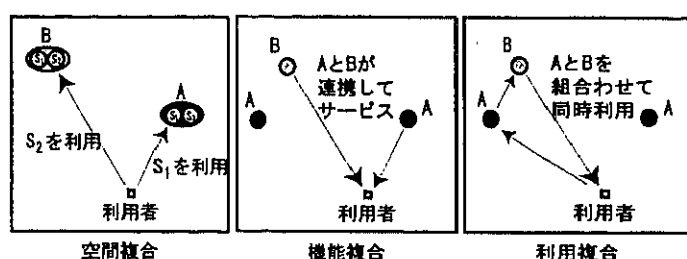


図1 複合施設の類型

(2) 複合サービス施設のサービスの組合せ

施設の提供するサービスの組合せ方は、施設数やサービスの種類数が多くなるほどネズミ算的に増加するが、本論文では複合化の影響のみを抽出するために、サービスや施設は全て対等であるとする。すなわち、サービスに優劣がある場合は、より重要なサービスを持つ施設ほど最適性が優先されることになるし、また、施設間に提供

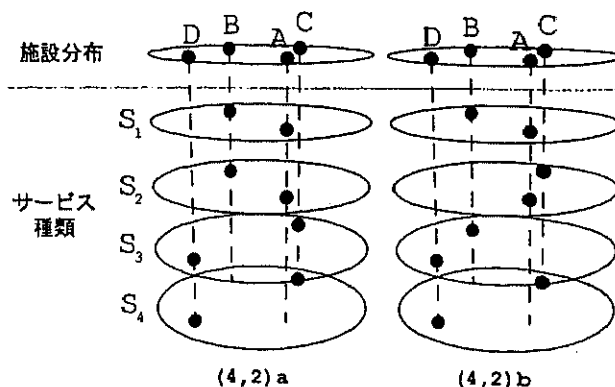


図2 複合サービス施設におけるサービスの組合せの例 ($n=4, k=2$)

施設		サービス			+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	
サービス	S ₁	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	

(3,1)a (3,2)a (3,3)a		施設			+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	
サービス	S ₁	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	

(4,1)a (4,2)a (4,2)b (4,3)a (4,4)a		施設				+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	D	
サービス	S ₁	+	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	+	
	S ₄	+	+	+	+	

(5,1)a (5,2)a (5,2)b (5,3)a (5,3)b (5,4)a (5,5)a		施設					+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	D	E	
サービス	S ₁	+	+	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	+	+	
	S ₄	+	+	+	+	+	
	S ₅	+	+	+	+	+	

(6,1)a (6,2)a (6,2)b (6,2)c (6,2)d (6,3)a (6,3)b		施設						+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	D	E	F	
サービス	S ₁	+	+	+	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	+	+	+	
	S ₄	+	+	+	+	+	+	
	S ₅	+	+	+	+	+	+	
	S ₆	+	+	+	+	+	+	

(6,3)c (6,4)a (6,4)b (6,4)c (6,4)d (6,5)a (6,6)a		施設							+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	D	E	F	G	
サービス	S ₁	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₄	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₅	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₆	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₇	+	+	+	+	+	+	+	

(7,1)a (7,2)a (7,2)b (7,2)c (7,2)d (7,3)a		施設								+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	D	E	F	G		
サービス	S ₁	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₄	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₅	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₆	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₇	+	+	+	+	+	+	+	+	

(7,3)b (7,3)c (7,4)a (7,4)b (7,4)c (7,5)a		施設									+ : 施設がそのサービスを提供 (n, k) : n種の施設がk種のサービスのうちk種をサービスするケース (各サービスはk種の施設により提供される)
		A	B	C	D	E	F	G			
サービス	S ₁	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₂	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₃	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₄	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₅	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₆	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	S ₇	+	+	+	+	+	+	+	+	+	

図3 施設種数・サービス種数別のサービスの組合せパターン

するサービス数に差がある場合は、その数の多い施設ほど優先されることになる。このような場合、得られた最適配置が複合化によるものなのか、サービスや施設の優劣に起因するものなのか判断ができない。そこで本論文では、複合化することが決まっているときに複合化が配置に与える影響を明らかにするために、複合サービス施設が提供するサービスは S_1, S_2, \dots, S_n の n 種類があるとし、それらの

間には優劣関係がないものとする。施設はそれぞれこれらの内の一部のサービスを提供するものとする。サービスと施設の対応関係についても一般には無数に考えられるが、ここでは施設も n 種類あるとし、各施設はどれでも n 種類の中から k 種類 ($1 \leq k \leq n$) のサービスを提供し、各サービスも k 種の施設により提供されるものとする。

例えば、 $n=4, k=2$ の場合、A~D の4種の各施設はそれぞれ2種の

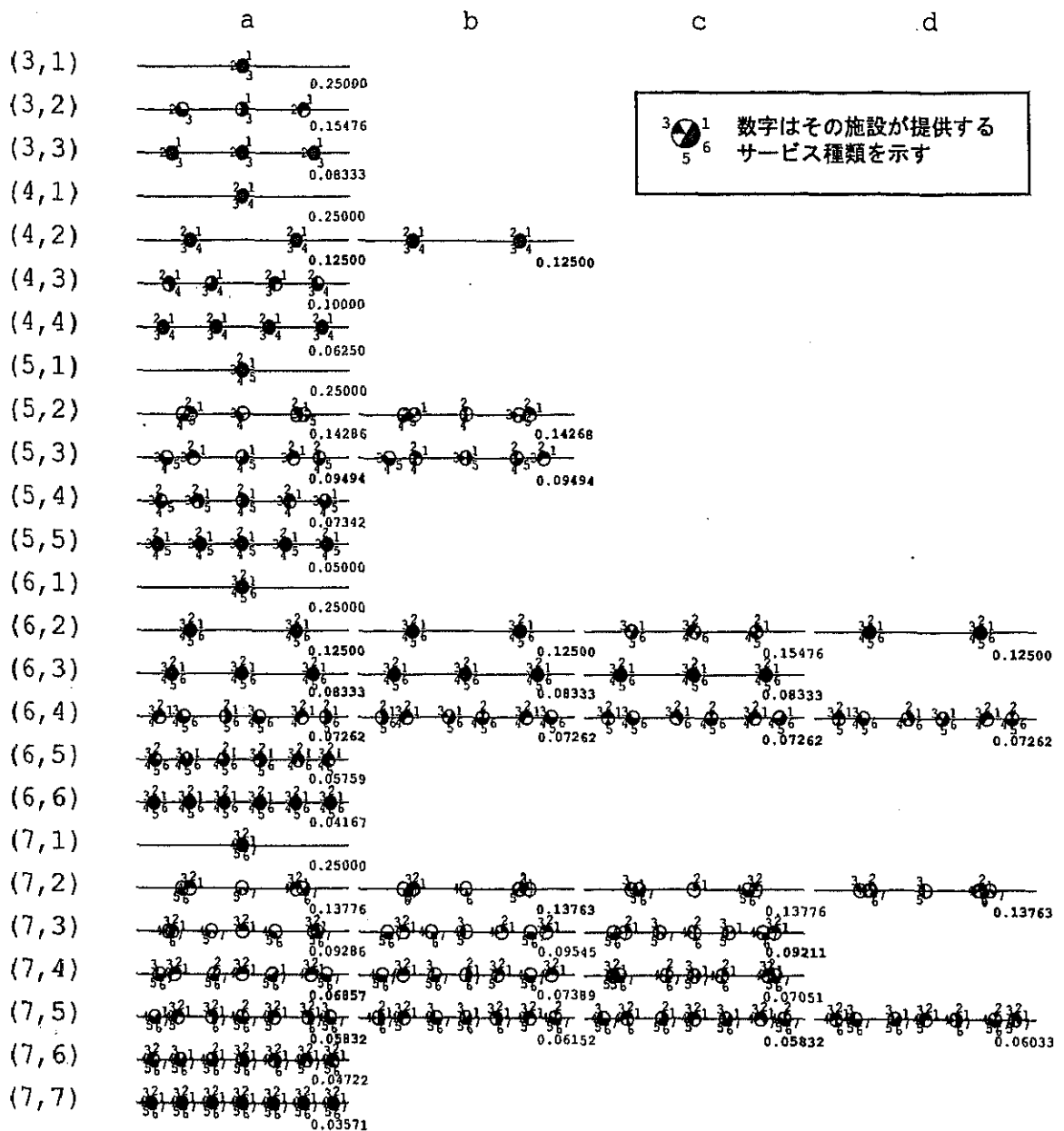


図4 一次元空間における複合サービス施設の最適配置（右下の数字は総利用距離 T の値）

サービスを提供し、 $S_1 \sim S_k$ の各サービスはそれぞれそのうち 2 種の施設により提供されることとなる。このとき、図 2 に示すように、同じ (n, k) の組に対してサービスの組合せパターンが 2 通りあるが、このように複数種の組合せパターンがある場合には、それらを a, b, ... を付すことで区別することにする。このようにして (n, k) に対して考えられるサービスの組合せパターンを、 $n=3, 4, 5, 6, 7$ の場合について図 3 に示す。以下ではこれらに対して最適配置を求める。

(3) 最適配置問題の定式化

ある領域 M 内に連続な需要分布が与えられたとき、上述のようなサービスの組合せに対し、総利用距離（平均利用距離でも同じ）を最小化する連続平面上での minimun タイプの空間複合型施設配置問題を考える。

各々のサービスに対する利用者（需要）は領域^{注1)}内に均等に分

布しており、それぞれのサービスについてユークリッド距離で最近隣の施設を選択すると仮定すると、利用者のサービス S_i についての移動距離の総和は

$$T_i = \int_{x \in M} \min_{j \in F_i} \|x - x_j\| \rho_i(x) dx \quad (1)$$

となる。但し、 x_j は施設 j の位置、 $\rho_i(x)$ は地点 x における需要密度を表し、サービス S_i についての施設利用圏はそのサービスを提供する施設 F_i を母点とする Voronoi 領域となる。これを用いて、全サービスに関する総移動距離は

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (2)$$

と求められる。以下では、 T を最小化する施設配置を求める問題

$$\min_{\{x_j | j \in \bigcup_{i=1}^n F_i\}} T \quad (3)$$

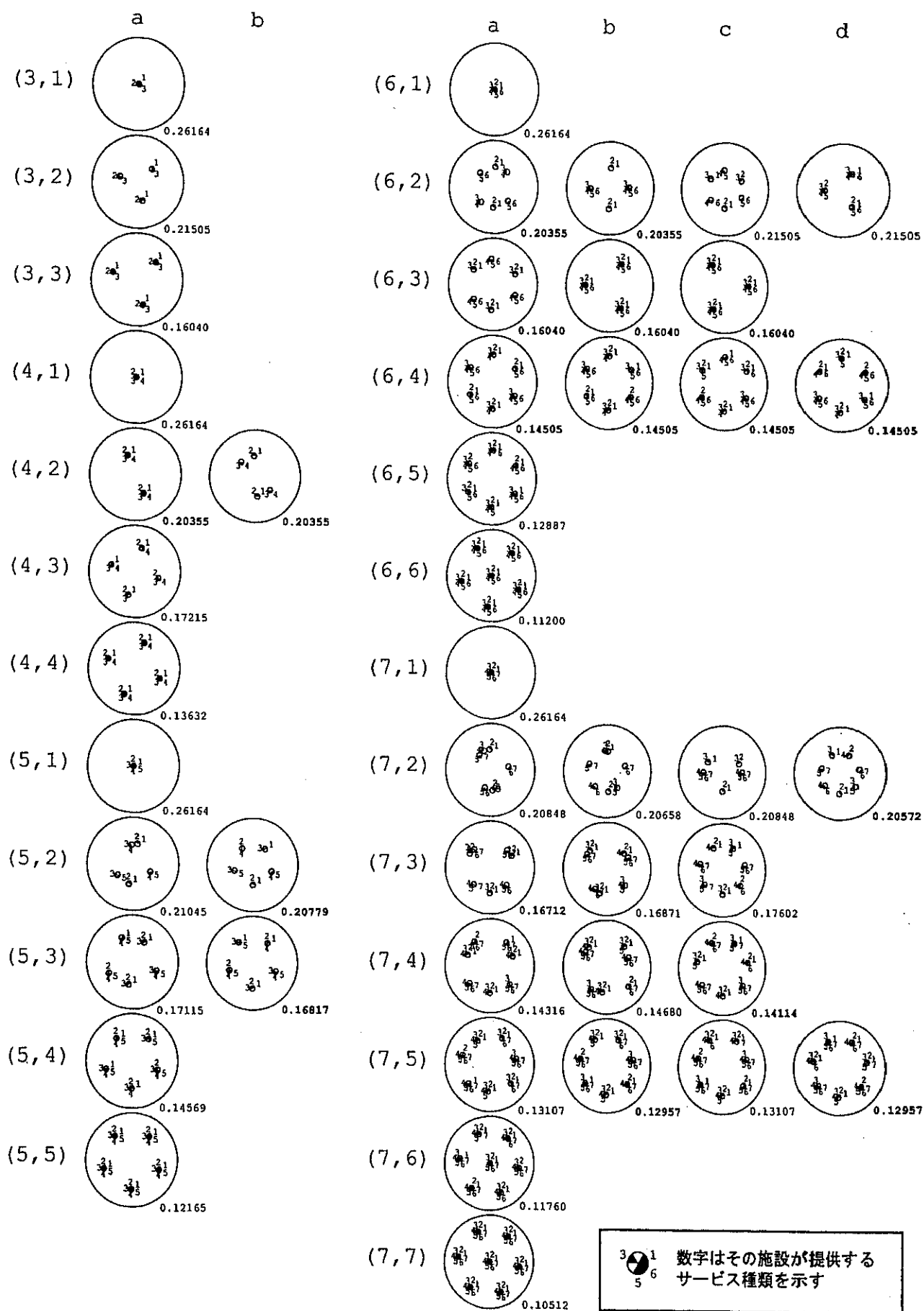


図5 平面上における複合サービス施設の最適配置（施設数が1つずつの場合）（右下の数字は総利用距離 T の値）

を考え、需要密度が一樣な場合について解を求め、その性質を調べていくことにする。

3. 線分上における最適施設配置

(1) 解法

領域 M を線分 $[0, 1]$ とし、この上に一樣な施設需要が分布しているものとする。サービス S_i を提供する施設 F_i を座標の小さい順に並べ替えたものを $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ とすると、

$$T_i = \frac{1}{2} x_{(1)}^2 + \left(\frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - x_{(n)})^2 \quad (4)$$

と表されるので、施設の並び順が与えられれば T は (2) 式より x_i を用いて解析的に表される。ここでは考えられる並び順それぞれについて、 T を導出して連立方程式 $\partial T / \partial x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) を解き、それらの中で T が最小となる並び順の解をもって最適配置の解を得る。

(2) 最適配置の解

図3のサービスの組合せに対し、各施設が1つずつある場合の最適な施設配置を求めた結果を図4に示す。凡例に示すように、施設の周囲に記された数は提供するサービスを示している。また、いくつかの施設が同じ地点に立地した場合はあたかも一施設のように示してある。この結果から、以下のことが読みとれる。

- ① $(n, 1), (n, n)$ の場合は、それぞれ一地点への中心集中立地、 n 地点の均等分散立地となる。
- ② サービスの重複のない施設は重なって立地しても良いが、サービスの重複する施設は互いに離れて立地する。
- ③ 一般に、 (n, k) ($1 < k < n$) の場合は、 (n, n) の場合の均等分散立地よりも領域中心に片寄った配置となり、施設間距離が一樣でないパターンが得られる。また、施設のペアが生じる傾向が見られる。
- ④ k が n の因数の場合 (例えば $(4, 2), (6, 2), (6, 3)$ など) は、複数の施設が同じ場所に立地し、全サービスを提供する施設が k ヶ所に n/k 箇所ずつ同一地点に重なるように抱き合わせて配置される状態が最適になる。この場合、施設の位置が重なることにより、あたかも全てのサービスが統合したような状態になるため、 k ヶ所に配置された施設は均等立地 (つまり (k, k) の最適配置) となる。
- ⑤ $k > n/2$ になると、隣接施設の提供サービスに必ず重複が生じるため、④のような抱き合わせ配置は見られなくなる。
- ⑥ サービスの組合せパターンが複数種ある場合でも、多くの場合、配置上の大差は見られない。

このように、互いに対等なサービスの提供を前提とした場合でさえ、全サービスの一部を提供する複合施設の最適配置パターンは均等配置にはならず、中心集中立地と均等分散立地との中間的なパターンとなるということは、直観では想定できない結果である。

4. 有限平面上における最適施設配置

次にこの問題を実際の都市活動が展開されている二次元平面上で考え、どのような配置パターンが現れるかを調べることにする。

(1) 解法

有限平面上における (3) 式の問題は、非線形計画問題として数値的に解くことにより、厳密解ではないが近似解として局所最適解を求

めることができる。降下方向ベクトルは、

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \quad (5)$$

であることを利用すれば、各サービスにおける移動距離に関する降下方向の和として求めることができる。右辺項は鈴木(1990)、Suzuki et al. (1991)等と同様に、Iri et al. (1984)の方法を用いて求められる。

(2) 施設数が各サービスについて1施設ずつの場合の解

領域 M を直径1の円形領域とし、需要密度は一樣とする。図3に示したサービスの組合せについて、各施設が1つずつの場合の解を図5に示す。初期配置は、線分上の場合と同様、各サービスの提供施設の間隔がなるべく均等になるように与えた。●で表された施設の周囲の数字は提供するサービスを示す。この結果から、最適配置は一般に均等分散立地よりも領域の中心に片寄った配置となり、線分上の最適解の性質と同じ性質を持つことが読みとれる^(注2)。上の結果は、岸本(2000)の多層構造モデルによる検討で明らかにされた、「施設の複合化により凝集型が優れた配置パターンとなる性質がある」ことをより体系的に示していると考えられる。

このように有限平面上でも複合サービス施設の最適配置パターンは一般には均等配置にはならず、サービスの重複度に応じて中心集中立地と均等分散立地との中間的なパターンが最適配置となることが明確になった。この結果は、複合サービス施設の配置のあり方に関する基本的知見として重要である。

(3) 施設数が各サービスについて複数ある場合の解

これまでの計算例は施設は1つずつであった。これに対して、施設が多数配置される場合はどのようなようになるであろうか。単一サービス施設の場合、総移動距離を最小にする配置は六角形状の圏域を持った三角格子状配置パターンとなることが知られている。ここでは複合サービス施設について施設が多数配置される場合を検討する。

図6は、正六角形領域内で $n=7$ とし、各サービスを提供する施設が7施設ずつある場合 (計49施設) についての最適配置を示したものである。サービスの組合せに a, b, \dots など複数あるものについては、総移動距離が最小になるサービスの組合せの最適配置を示している。

施設数が1施設の場合には、線分上のときと同様に均等分散立地よりも領域の中心に片寄った配置ではあるものの、環状に均等に並んだパターンが得られており、均等配置との差異は明確ではなかった。図6より、多施設の場合、隣接施設間の距離が一樣でない状態が最適となり、最適配置パターンは均等配置とならない。 k が n に近づくに従って三角格子状配置に近づいていくことがわかる。

このように、複合サービス施設の最適配置パターンは、正確にシステマティックな配置とはならず、中心集中立地と均等分散立地との中間的なパターンとなることが明らかとなった。

5. 結論と今後の課題

本論文では、複合サービス施設の最適配置を求め、サービスの組合せが最適配置に与える影響について、以下のような結論を導いた。

- ① 全サービスの一部を提供する複合サービス施設の最適配置問題を定式化し、線分空間での解析解を求めた結果、一樣需要のもとで互いに対等なサービスの提供を前提とした場合でも、一般に中心集中立地と均等分散立地の中間的な配置として均等分散立地

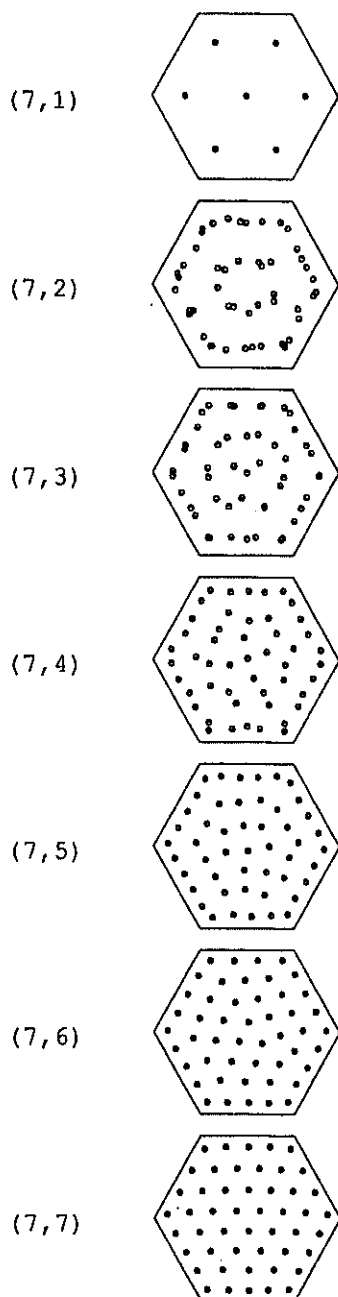


図6 平面上における複合サービス施設の最適配置
(施設数が7施設ずつの場合)

よりも領域の中心に片寄った様でないパターンが得られることが明らかとなった。このことは、施設を複合化させる場合、たとえ同等な施設であっても、利用者の平均距離最小化を目的とするならば対象地域において様でない配置を検討する必要があることを示唆している。

- ② 平面上での局所最適解を数値的に求めた結果、有限平面上でも一般に最適配置パターンは均等配置にはならず、サービスの重複度に応じて中心集中立地と均等分散立地との中間的なパターンが最適配置となることがわかった。提供サービスの重複度が大きい場合 ($k > n/2$) でも、正確にシステマティックな配置にはならないことが明らかとなった。複合サービス施設の場合、様でない配置を検討する必要があることは都市平面上での施設配置に

においても言えることが明らかとなった。

実際の施設のサービスについて考えると、たとえ同じ種類のサービスを行っている施設の間でも、様々な点で施設の提供サービスは異なったものであるだろう。例えば、図書館では蔵書の種類が全く同じであるということはない。この場合、両方の図書館に存在する蔵書に関しては互いに重複するサービスと見なせるし、一方の図書館にはあるが他方の図書館にはない蔵書は重複しないサービスと見なすことができる。このように同様の施設群でもサービス内容に差があるならば、その最適配置は本論文で明らかにされた程度の規則的配置からのズレがあった方が望ましいことになる。

本論文では、複合化まずありきとしてその最適配置を論じた。しかし、複合化がなぜ有利となるかというメカニズムの部分については明らかにされていない。この問題を考えるためには、複合化が有利となる仕組みを内包したモデルを構築する必要がある。機能複合や利用複合の場合等の最適配置と併せて、今後の研究課題としたい。

大変貴重なご意見を頂きました匿名の査読者には、ここに記して謝意を表します。なお、本論文は文部省科学研究費補助金による研究成果の一部である。

注

注1) 本論文での計算では領域の大きさは一定としたが、目的関数値を適宜換算することにより、施設数の多寡を対象領域の設定範囲の広狭と解釈した比較検討も可能である。

注2) 但し、回転対称のため配置の自由度が一次元の場合よりも大きくなり、同じ (n, k) に対してもサービスの組合せによって配置パターンに差が見られる。

参考文献

- 宮下清栄・高橋賢一・石田容：「市町村連携による公共施設整備の可能領域に関する研究」, 都市計画論文集, 34, 139-144, 1999.
- Okabe, A., Boots, B. and Sugihara, K.: *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Chichester: John Wiley, 1992.
- Okabe, A., Okumaki, K. and Suzuki, T.: "A Computational Method for Optimizing the Hierarchy and Spatial Configuration of Successively Inclusive Facilities on a Continuous Plane," *Location Science*, 5, 4, 255-268, 1997.
- 大内宏友・高倉朋文・横塚雅宜：「救急医療システムと施設配置の関係性に関する実証的研究 - 地域における医療施設と救急施設との複合化の適正配置に関する研究 その1 -」, 日本建築学会計画系論文集, 466, 87-94, 1994.
- Iri, M., Murota, K. and Ohya, T.: "A Fast Voronoi-diagram Algorithm with Applications to Geographical Optimization Problems," in: P.Thoft-Christensen (ed.) *Lecture Notes in Control and Information Science, Vol. 59: System Modelling and Optimization*, Proceedings the IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Copenhagen, Springer, Berlin, 273-288, 1984.
- 岸本達也：「多層構造モデルによる複合施設の最適配置」, 日本建築学会計画系論文集, 529, 233-239, 2000.
- 野坂正史・吉川徹：「通所型高齢者施設の配置計画に関する研究」, 日本建築学会計画系論文集, 525, 201-208, 1999.
- 斎尾直子・荻澤宏・土本俊一・村山直樹：「公立小・中学校の地域施設としての機能複合化に関する研究」, 日本建築学会計画系論文集, 523, 131-138, 1999.
- 佐谷宣昭・内田晃・趙世俊・萩島哲：「ショッピングセンターの業種の組み合わせと立地動向に関する研究」, 日本建築学会計画系論文集, 531, 163-170, 2000.
- 鈴木勉：「利用者の移動費用最小化による施設の最適な建設順序と配置」, 都市計画論文集, 23, 61-66, 1988.
- 鈴木勉：「施設の最適な階層構造に関する考察」, 都市計画論文集, 25, 331-336, 1990.
- Suzuki, T., Okabe, A. and Asami, Y.: "Sequential Location-Allocation of Public Facilities in One- and Two-dimensional Space: Comparison of Several Policies," *Mathematical Programming B*, 52, 1, 125-146, 1991.
- 谷口汎邦・熊谷昌彦：「教育関連施設における複合施設の設置条件と施設相互関連の特性について - 都市における教育関連施設の複合化計画に関する研究(1) -」, 日本建築学会計画系論文集, 336, 121-131, 1984.
- 上野淳・本野純：「公立小・中学校と地域公共施設の複合化事例における建築計画と管理・運営の実態」, 日本建築学会計画系論文集, 493, 117-124, 1997.
- 屋敷和佳・谷口汎邦・山口勝巳：「建物区分所有による複合形態と複合の経緯 - 学校と地域施設の複合化に関する研究 その1 -」, 日本建築学会計画系論文集, 452, 65-74, 1993.

(2000年1月6日原稿受理, 2000年9月18日採用決定)

172. 規模の経済性を考慮した階層的収集・配送輸送システムに関する研究

A Study on the Hierarchical Collection/Distribution System with Economies of Scale

渡部大輔*・鈴木 勉**

Daisuke Watanabe and Tsutomu Suzuki

This paper analyzes the optimal hierarchical collection/distribution system for many-to-one (or one-to-many) transport demand using a criterion of transport cost minimization. We consider the continuous terminal locations and define the parameters which are scale economy in weight(α), scale economy in distance(β) and demand volume (n_0). We find that logarithmic function of demand volume mainly determines hierarchical levels, and that the number of hierarchical levels and the number of intermediate terminals of the optimal system become larger as α gets smaller, β gets larger or n_0 gets larger. The actual postal and parcel systems are compared with our theoretically optimal systems.

Keywords : collection/distribution system, hierarchical structure, transport cost, economy of scale
輸送システム, 階層構造, 輸送費用, 規模の経済性

1. はじめに

都市内で人や物を運ぶときに、最短距離で運んだ方が輸送にかかる時間や費用を短くすることができる。しかし、輸送需要が複数箇所で発生・集中する場合、輸送技術の発展や輸送品目の特性によって輸送規模の経済性が現れるため、多少遠回りをしてでもまとめて運んだ方が効率が良いこともある。これは、例えば現状の郵便物などの輸送において見られるような多階層輸送を形成する。

小倉¹⁾は、輸送費用には長距離運減・重量運減といった規模の経済性があり、輸送ネットワークの拡大には需要の増加が重要な要因になるとしている。宅配便の全国的な輸送ネットワーク構築に際して望ましい集配施設の密度として警察署の密度を目標としたが、規模の経済性の与える影響については定量的に述べられていない。

施設の階層構造に注目した研究に、Dökmeci²⁾、鈴木³⁾、奥貫・岡部⁴⁾があるが、図書館のような利用者出向き型施設において、利用者の移動距離から見た施設数の最適化を図っている。しかし、本研究で取り上げる「輸送」を考えると、施設間の移動について考慮しなければならぬため、異なる定式化が必要となる。

輸送の階層構造を扱った研究として、以下の2つが挙げられる。輸送量の規模の経済性に着目して輸送システムの階層構造の最適化を意図した家田⁵⁾は、一様無限平面で輸送需要が距離減衰するという仮定で、動的計画法によって最適な輸送段階数を収束させる演算を行っている。しかし、数値計算によるパラメータの特性の考察に留まり、かつ距離による規模の経済性については触れら

れていない。笠原・古山⁶⁾は、グラフ理論を用いて階層構造を有する木の総延長を最小化する領域分割数を理論的に算出しているが、2階層に固定されており、かつ規模の経済性は全く考慮されていない。

本研究では、輸送費用に規模の経済性が存在する場合に、上位階層へ収集(あるいは下位階層へ配送)されていく階層的輸送システムにおいて、費用が最小という意味での最適な「輸送階層数」と「階層別施設数」を求め、規模の経済性を表すパラメータと需要密度の増加による影響について考察する。

本研究は以下のように構成される。2章では、需要が連続的に密に存在し、輸送費用に規模の経済性が存在する多階層輸送モデルを設定し、輸送費用を定式化する。3章では、最適な輸送階層数・施設数とその費用を解析的に導出する。4章では、3章で求めた最適なシステムの特性をパラメータが階層構造へ与える影響について比較し、5章で現実の階層的輸送システムについて考察する。6章では、本研究の結論と課題をまとめる。

2. モデルの概要と輸送費用の定式化

2.1 モデルの概要

最下階層の施設 n_0 個(輸送需要と考える)が一様に分布しており、 n_M 個の最上階層施設へ運ぶ需要が一様に発生するものとする。(many-to-one demand)。各輸送需要の移動については、図1のように、 $m-1$ 階層までに収集された需要が m 階層 ($1 \leq m \leq M$) で n_m 個の均等に配置された階層施設の中で最寄りの施設へ必ず直行で収

* 学生会員 筑波大学社会工学研究科 (Univ. of Tsukuba)

** 正会員 筑波大学社会工学系 (Univ. of Tsukuba)

集されるような m 階層輸送が行われ、 M 階層輸送を経て最上階層に到着することを考える。なお、中間階層で需要が増加することはなく、階層間の施設の関係はサービスが排他的 (successively exclusive) であるとする。各階層での施設数は $n_0 \gg n_1 \gg \dots \gg n_m \gg \dots \gg n_M$ を満たすとする。 n_m は本来自然数であるが、十分大きいと仮定して連続量近似して考える。なお、配送の場合 (one-to-many demand) も、これと全く逆の輸送過程となるので、同様の定式化となる。

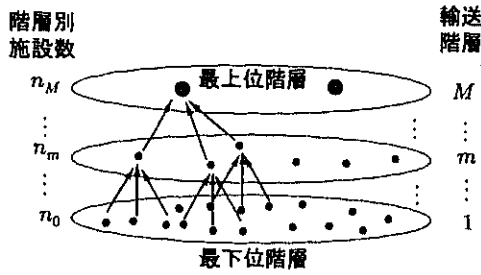


図 1: 多階層輸送モデル

輸送費用は、輸送量・輸送距離が増加するとともに、その費用増加分が逓減していく「規模の経済性」の存在を考慮して、以下の2つのパラメータを設定する。

α : 重量逓減を表すパラメータ ($0 \leq \alpha \leq 1$) であり、輸送品目の特性に依存し、まとめて運ぶ方が有利な品目ほど α は小さくなる。

β : 長距離逓減を表すパラメータ ($0 \leq \beta \leq 1$) であり、長距離高速輸送技術の向上により β は小さくなる。

以下、輸送量の α 乗、輸送距離の β 乗に輸送費用が比例しており、模式的に表現した図2のような関係にあるものと仮定する。

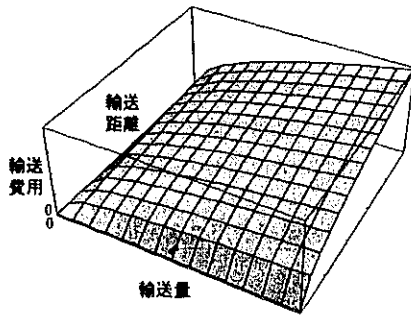


図 2: 輸送量・輸送距離と輸送費用の関係

2.2 領域の次元別の各階層での輸送費用

(i) 一次元都市

まず領域が一次元の場合を考える。全長 L の線形都市において、 m 階層の n_m 個の施設に向かって図3のような収集輸送をする状況を考える。 m 階層一施設当たりの $m-1$ 階層施設数は $\frac{n_{m-1}}{n_m}$ であるが、 $n_{m-1} \gg n_m$ を考

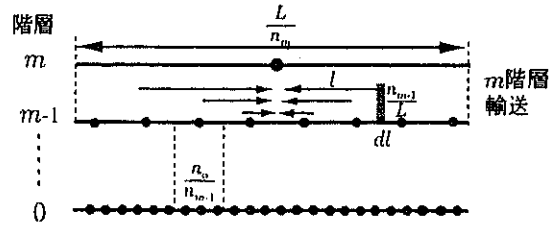


図 3: 一次元都市での m 階層での収集輸送の概要

慮し、一施設の収集領域である長さ $\frac{L}{n_m}$ に渡って連続的に立地する $m-1$ 階層の $\frac{n_{m-1}}{L}$ 個の施設から収集領域の中心に向かって、輸送量 $\frac{n_0}{n_{m-1}}$ を輸送距離 l だけ輸送する。規模の経済性 ($0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$) を考慮し、階層数と関係しない項を定数 K_1 で表すと、 m 階層での輸送費用は以下になる。

$$\begin{aligned} c(\alpha, \beta, m) &= n_m 2 \int_0^{\frac{L}{n_m}} \frac{n_{m-1}}{L} \left(\frac{n_0}{n_{m-1}} \right)^\alpha l^\beta dl \\ &= K_1 \frac{(n_{m-1})^{1-\alpha}}{(n_m)^\beta} \end{aligned} \quad (1)$$

(ii) 二次元都市

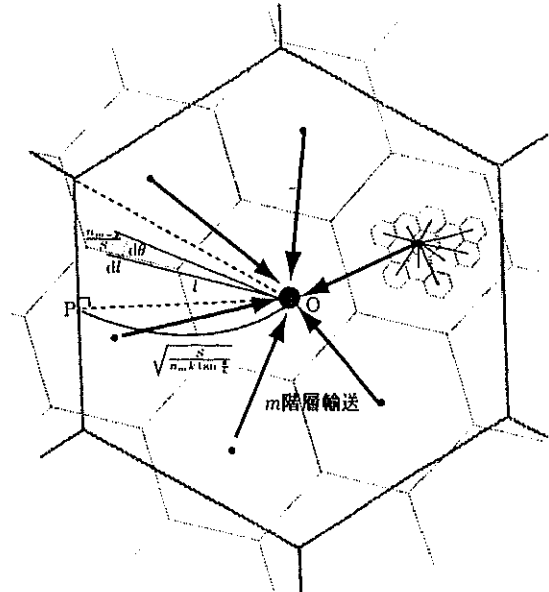


図 4: 二次元都市での m 階層での収集輸送の概要 ($k=6$)

次に、領域が二次元の場合を考える。簡単のため、各階層の収集領域は正 k 角形とする。面積 S の正 k 角形都市において、 m 階層の n_m 個の施設に向かって図4のような収集輸送をする状況を考える。 m 階層の正 k 角形領域の中心 (図4点 O) から隣接領域の中心間の中点 (図4点 P) までの長さは $\sqrt{\frac{S}{n_m k \tan \frac{\pi}{k}}}$ であり、(i) と同様に領域内で連続的に立地する $\frac{n_{m-1}}{S}$ 個の施設から m 階層の領域の中心に向かって、輸送量 $\frac{n_0}{n_{m-1}}$ を輸送距離 l だけ輸送する。二次元平面の特性によって β の定義域が $\frac{1}{2}$ より大となるが、規模の経済性 ($0 \leq \alpha \leq 1, \frac{1}{2} < \beta \leq 1$)

を考慮し (i) と同様に K_2 を用いると, m 階層での輸送費用は以下ようになる。

$$\begin{aligned} c(\alpha, \beta, m) &= n_m 2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{S}{n_m k \tan \frac{\pi}{2}}} \sqrt{\frac{S}{n_m k \tan \frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\cos \theta} \\ &\quad \frac{n_{m-1}}{S} \left(\frac{n_0}{n_{m-1}} \right)^\alpha l^{2\beta} dl d\theta \\ &= K_2 \frac{(n_{m-1})^{1-\alpha}}{(n_m)^{\beta-\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2)$$

2.3 総輸送費用

式 (1) と式 (2) は, 規模の経済性のパラメータ α, β と領域の次元の違いを表す K_1, K_2 を a, b, K へ表 1 のように置き換えることで, 一般化表記ができる。

表 1: 変数の置換

	a	b	K
(i)	$1-\alpha$	β	$K_1 = n_0^{\frac{\alpha}{\beta+1}} \left(\frac{L}{2} \right)^\beta$
(ii)	$1-\alpha$	$\beta - \frac{1}{2}$	$K_2 = \frac{2n_0^\alpha}{S(2\beta+1)} \left(\frac{S}{k \tan \frac{\pi}{2}} \right)^{\beta+\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos \theta} \right)^{2\beta+1} d\theta$

総輸送費用は, 各階層 ($m = 1, 2, \dots, M$) での輸送費用の総和で求められ,

$$C(a, b) = K \sum_{m=1}^M \frac{(n_{m-1})^a}{(n_m)^b} \quad (3)$$

となる。以下, これを最小にするような条件が存在する場合, その時の階層数 M^* と階層別施設数 n_m^* を最適な階層的輸送システムとして導出する。

3. 輸送費用が最小となる階層構造

3.1 輸送費用最小化による最適輸送システム

輸送費用を最小化するとき, まず費用を最小とする各階層での上下階層との施設数の関係を求めることによって, その条件のもとで階層数を求めることができる。式 (3) は, a と b の値によって, 以下のように場合分けする必要がある。

(i) 輸送量に対して規模の経済性が存在しない場合

$a = 0$ であるので, 式 (3) に代入すると,

$$C(a, b) = K \sum_{m=1}^M \frac{1}{(n_m)^b} \quad (4)$$

となるが, n_m についての増加関数なので $M = 0$ のとき最小値をとる。しかし, 本研究では必ず最上階層施設へ輸送しなければならないので, 最適な輸送システムは途中に収集輸送を行わない直行輸送 ($M^* = 1$) となる。

(ii) a と b に一定の関係がある場合

$a = b$ ($0 < a \leq 1$) の場合を考え, 式 (3) に代入すると,

$$C(a, b) = K \sum_{m=1}^M \left(\frac{n_{m-1}}{n_m} \right)^a \quad (5)$$

となり, この式が施設数 n_m について最小となる必要条件 $\frac{\partial C(a, b)}{\partial n_m} = 0, \frac{\partial^2 C(a, b)}{\partial (n_m)^2} > 0$ から,

$$\frac{n_m}{n_{m+1}} = \frac{n_{m-1}}{n_m}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

が得られる。これを所与である n_0, n_M を用いて表すことにより, 階層別施設数 n_m^* は,

$$n_m^* = n_0 \left(\frac{n_M}{n_0} \right)^{\frac{a}{M}} \quad (6)$$

となる。式 (5) に代入すると, 式 (6) が成り立つときの総輸送費用 $C^*(a, b)$ は,

$$C^*(a, b) = KM \left(\frac{n_0}{n_M} \right)^{\frac{a}{M}} \quad (7)$$

となる。この式が階層数 M について最小となる必要条件 $\frac{\partial C^*(a, b)}{\partial M} = 0, \frac{\partial^2 C^*(a, b)}{\partial M^2} > 0$ から, 最適な階層数 M^*

$$M^* = a \log \frac{n_0}{n_M} \quad (8)$$

と得られ, 式 (6) から最適な各階層別施設数 n_m^* は,

$$n_m^* = n_0 e^{-\frac{a}{M^*}} \quad (9)$$

となる。最適な階層輸送システムでの総輸送費用 $C^*(a, b)$ は式 (7) より, 以下のように求まる。

$$C^*(a, b) = K a e \log \frac{n_0}{n_M} \quad (10)$$

ここで, $a = b = 0.5$ ($K = 2, n_0 = 1000, n_M = 1$) の場合, $C^*(a, b)$ をプロットすると図 5 のようになり, 輸送費用が階層数 3 近くで最小となることが分かる。階層数が多すぎると遠回りが多くなるため, また階層数が少なすぎるとまとめて運ぶメリットが生かされないため, それぞれ輸送費用が高くなると考えられる。最適となる階層数は式 (8) によると $M^* = 3.45$ とほぼ一致する。

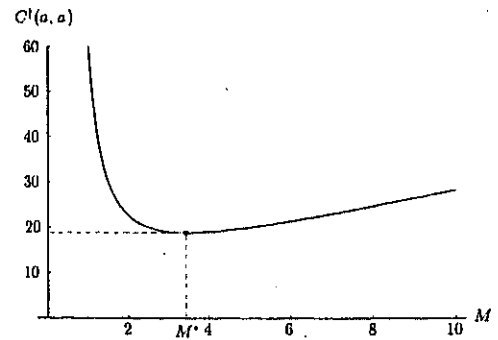


図 5: 階層数 M と $C^*(a, b)$ の関係

(iii) 一般の場合

$a \neq b$ ($0 < a \leq 1$) の場合, 式 (3) が施設数について最小となる必要条件 $\frac{\partial C(a, b)}{\partial n_m} = 0, \frac{\partial^2 C(a, b)}{\partial (n_m)^2} > 0$ から

$$\frac{n_m}{n_{m+1}} = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \left(\frac{n_{m-1}}{n_m} \right)^{\frac{a}{b}}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

が得られる。よって、階層別施設数 n_m^+ は、

$$n_m^+ = n_0 \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left\{ m - \frac{1-(a/b)^m}{1-(a/b)^M} M \right\} \left(\frac{n_M}{n_0} \right)^{\frac{1-(a/b)^m}{1-(a/b)^M}} \quad (11)$$

となる。式(3)に代入すると、総輸送費用 $C^+(a, b)$ は、

$$C^+(a, b) = K \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{a}{1-\alpha} + \frac{M}{1-(b/a)^M}} \frac{a}{a-b} \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^M \right\} \left(\frac{n_0}{n_M} \right)^{\frac{a-b}{1-(a/b)^M}} \quad (12)$$

となる。上式が階層数 M について最小となる必要条件 $\frac{\partial C^+(a, b)}{\partial M} = 0, \frac{\partial^2 C^+(a, b)}{\partial M^2} > 0$ より、最適階層数 M^* は、

$$M^* = \frac{a-b}{\log \frac{a}{b}} \log \frac{n_0}{n_M} \quad (13)$$

となる。式(11)から最適階層別施設数 n_m^* は、

$$n_m^* = n_0 \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{m}{1-\alpha}} \quad (14)$$

となり、式(12)とより最適階層数での総輸送費用 $C^*(a, b)$ は以下ようになる。

$$C^*(a, b) = K \frac{b}{b-a} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{a}{1-\alpha}} \left\{ \left(\frac{n_0}{n_M} \right)^{b-a} - 1 \right\} \quad (15)$$

ここで、 $a = 0.7, b = 0.8 (K = 2, n_0 = 1000, n_M = 1)$ の場合、 $C^+(a, b)$ をプロットすると図6のようになり、輸送費用が階層数5で最小となることが分かる。最適となる階層数は式(13)による $M^* = 5.173$ とほぼ一致する。

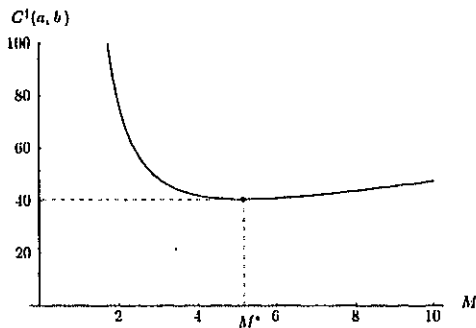


図6: M による $C^+(a, b)$

3.2 最適な階層数と施設数

(iii) で得られた式(13), 式(14), 式(15)は(i)(ii)の場合も成立するので、本章で求めた最適な階層構造 M^*, n_m^* の結果をまとめ、 α, β で表現すると、以下のようにまとめられる。

(i) 一次元の場合 ($0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$)

$$M^* = \frac{1-\alpha-\beta}{\log \frac{1-\alpha}{\beta}} \log \frac{n_0}{n_M} \quad (16)$$

$$n_m^* = n_0 \left(\frac{1-\alpha}{\beta} \right)^{\frac{m}{1-\alpha-\beta}} \quad (17)$$

(ii) 二次元の場合 ($0 \leq \alpha \leq 1, \frac{1}{2} < \beta \leq 1$)

$$M^* = \frac{\frac{3}{2}-\alpha-\beta}{\log \frac{1-\alpha}{\beta-\frac{1}{2}}} \log \frac{n_0}{n_M} \quad (18)$$

$$n_m^* = n_0 \left(\frac{1-\alpha}{\beta-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{m}{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}} \quad (19)$$

一次元と二次元の場合との比較によって空間の広がりの違いによる影響を考えると、 $n_0 = 1000, n_M = 1$ のとき、最適な輸送階層数 M^* は、式(16)と式(18)から図7のようになり、一次元の方が二次元より最適な階層数は多くなる。これは、同じ α, β であっても、面的広がりをもつ場合の方が、遠距離の需要ほど多くなり距離に対する規模の経済性がより働くためであると考えられる。

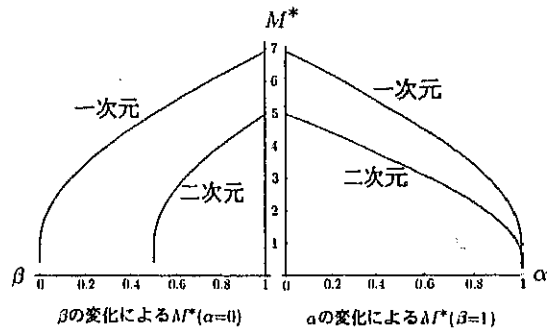


図7: 次元による最適階層数 M^*

4. 最適な階層輸送システム特性

次に、パラメータ α, β, n_0 の変化により、最適な階層的輸送システムの階層数 M^* と各階層施設数 n_m^* がどのような影響を受けるのかを考察する。なお本章では説明がない限り、二次元都市において、 $n_0 = 1000, n_M = 1$ (一般性は失われない) の場合について考える。

4.1 規模の経済性との関係

(i) 輸送階層数 M^*

規模の経済性 α, β による最適な輸送階層数は、式(18)から図8のようになる。

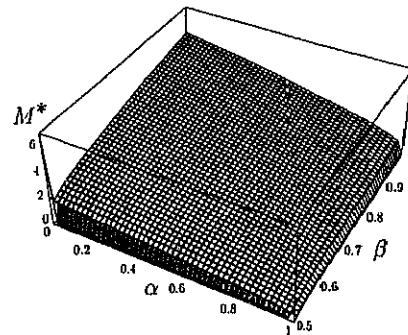


図8: α, β による最適階層数 M^*

グラフでは、 α が小さくなり β が大きくなるほど、 M^*

が大きくなる事が分かる。つまり、 α が小さくなり輸送量に対して費用が通減する度合(規模の経済性)が大きくなる程、また β が大きくなり輸送距離に対して規模の経済性が小さくなるほど程、最適な輸送階層数は増加しこまめに積み替えた方が良いことを示している。

(ii) 階層別施設数 n_m^*

m 階層での最適施設数 n_m^* は、式(19)から図9のようになる。 $n_m^* = 1$ のときに階層数 $m = M^*$ となり、これに最も近い整数が現実な意味での最適階層数となる。左図の α を一定にした場合、 β が小さくなるほど、グラフは左へシフトし傾きが急になっている。よって、輸送距離に対する規模の経済性が大きくなると、階層数とともに最適な階層別施設数も少なくなる。また、右図の β を一定にした場合、 α が小さくなるほど、グラフは右へシフトし傾きが緩やかになっている。よって、輸送量に対する規模の経済性が大きくなると、階層数とともに最適な階層別施設数も多くなる。

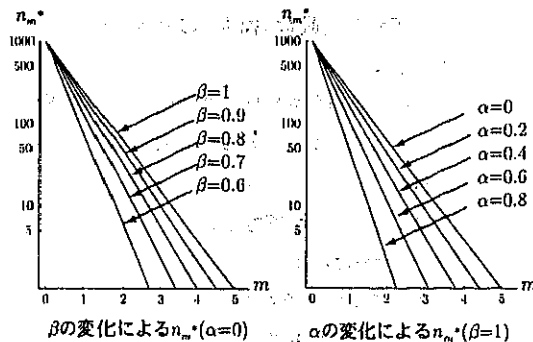


図9: 規模の経済性による n_m^* の変化

4.2 最下層施設(需要密度)との関係

同じ領域であっても需要の増大により、需要密度が高くなることにより輸送階層構造も変化すると考えられる。

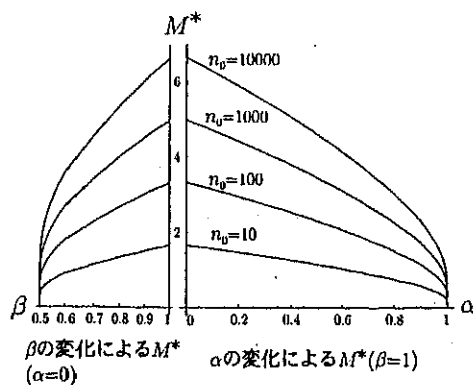


図10: n_0 の変化による α, β と M^* の関係

(i) 輸送階層数 M^*

n_0 を変化させることにより輸送需要の密度を変えた

場合の最適な輸送階層数 M^* は、式(18)より図10のようになる。輸送需要の密度が高くなるにつれて最適な階層数は増加するが、その増え方は $\log n_0$ に比例することがわかる。よって、需要の増大により階層的輸送システムは発展するが、その階層数は需要の伸びに対して高々対数程度にしか増加しないことが分かる。

(ii) 階層別施設数 n_m^*

輸送需要の密度を変えた場合の階層別施設数 n_m^* は、式(19)より図11のようになる。需要の増大とともに階層数が高くなり、それに伴い m 階層での施設数も増加していることが分かる。右図と左図の場合と比較すると、 $\frac{1-\alpha}{\beta-1/2}$ の値は同じであるが $\alpha + \beta - \frac{3}{2}$ の値は右図の場合の方が小さいため傾きの方が緩やかになっており、階層数・階層別施設数が多く必要になっている。

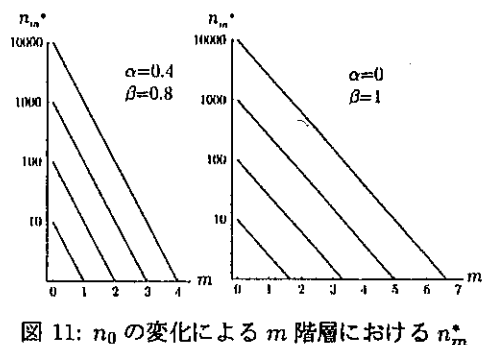


図11: n_0 の変化による m 階層における n_m^*

5. 現実の輸送における階層構造の考察

本研究で考えたモデルに適用する現実の輸送として、郵便・宅配便(広域的集配施設 \leftrightarrow 家庭)、新聞(印刷所 \rightarrow 家庭)、牛乳(牧場 \rightarrow 工場、工場 \rightarrow 家庭)などが挙げられる。しかし、実際の輸送費用から α, β を個別に推計することは困難である。

そこで、ここでは郵便輸送(通常郵便物・小包郵便物)と宅配便輸送での、広域的集配施設への収集輸送(many-to-one demand)の場合における現状の階層数と需要量による階層別施設数について考察する。階層別施設数は表2の施設のものとし、現実の輸送過程ではなく、施設と需要は領域に一樣に分布し輸送過程は必ず一つずつ階層を経ることを仮定する。また、配送(one-to-many demand)については、収集と過程が異なるため、本章の結果は通用できない。

表2: 各輸送階層の施設数(小倉¹⁾, 郵政省⁷⁾より作成)

m 階層	0	1	2	3
通常郵便(1998年)	一日当り 引受数	ポスト, 郵便局	集配局	地域区分 局
小包郵便(1998年)	一日当り 引受数	郵便局, 取扱店	集配局	地域区分 局
宅配便(1999年)	一日当り 取扱数	取扱店, デポ	センター	ベース
宅配便(1976年)	一日当り 取扱数	センター	ベース	

5.1 郵便輸送

図12は、 m 階層の施設数 n_m を通常郵便と小包郵便について実測値と理論値をプロットしたものである。これより理論値(点線)を見ると、通常郵便は小包に比べると傾きが急なので、輸送距離による規模の経済性が比較的に強いということが分かる。

現実の郵便輸送では、通常郵便と小包が第2階層以降は共通の集配ネットワークとなっているため、通常郵便は理論値より小さく、小包は理論値より多いということが分かる。これは、通常郵便にとっては施設数過小、小包には施設数過多というシステムであることを意味する。本来は、需要量も輸送特性も違うこの2つの品目は、別々に最適な輸送システムを構築するべきであると言える。

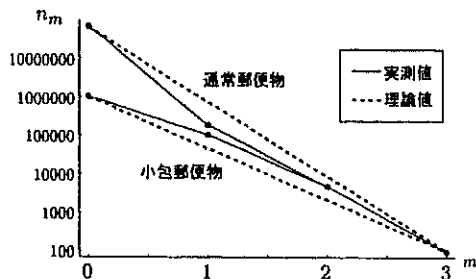


図12: 郵便輸送での各階層別施設数

5.2 宅配便輸送

一方、図13は、 m 階層の施設数 n_m を宅配便の1999年と1976年について実測値と理論値をプロットしたものである。これより理論値(点線)を見ると、1999年は1976年に比べると傾きが急なので、輸送距離による規模の経済性が比較的に強くなったということが分かる。また、同じ輸送品目の特性がある図12の小包郵便物と比較したとき、距離による規模の経済性は宅配便の方が傾きが少し急であるもののほぼ同程度であることも分かる。

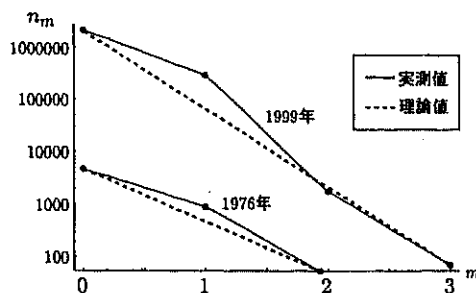


図13: 宅配便輸送での各階層別施設数

宅配便は小包の輸送に特化しているため、現実でも企業にとって望ましい輸送システムになっていると考えられる。現実の施設数は理論値に近いが、第1階層だけがやや多めになっている。取扱店は、他業種店舗を利用していることが多いため、企業にとって施設数を増やすこ

とが容易である。また、取扱店へは利用者が持参する輸送階層であり、出向き型施設の要素を持つこの階層施設数の多さが利用者の利便性も高めている。

また、宅配便サービスを開始した1976年から1999年へ需要の増加に対応して、階層数や施設数を増加させていることも分かる。

6. まとめ

本研究では、輸送費用に規模の経済性が存在することに着目して、その輸送費用を最小にするような多階層輸送システムを需要量と規模の経済性により表現した。そして、以下のような結論が得られた。

- (1) 輸送量による規模の経済性が利くほど輸送階層数は増加し、輸送距離による規模の経済性が利くほど輸送階層数は減少する。そして、階層数の増加に伴い、各階層での施設数も増加する。
- (2) 一次元都市は二次元都市より階層数は多くなる。
- (3) 需要が増加すれば階層数も増加するが、最上階層1施設当りの最下階層施設数(需要)の対数に比例する程度にしか増加しない。
- (4) 現実の輸送では、輸送品目の特性によって階層施設数に違いが見られる。また、需要の増加に対応して、階層構造も多階層化していることが分かった。

今後の課題としては、現実輸送システムでの α, β の推計、多段階での仕分けによる多点間輸送(many-to-many demand)、直行ではなく停車型のルーティング、集配に必要な車両数などを考慮していくことが挙げられる。また、一様でない需要・施設分布の場合や施設の立地費用といった他のコスト要因を考える必要がある。

最後に、貴重なコメントを頂きました東京都立大学吉川徹助教授にここに謝意を表します。

参考文献

- 1) 小倉昌男(1999): 小倉昌男経営学, 日経BP社。
- 2) Dökmeci, V.F. (1973): An Optimization Model for a Hierarchical Spatial System, *Journal of Regional Science*, 13, 3, 439-451.
- 3) 鈴木勉(1990): 施設の最適な階層構造に関する研究, 都市計画論文集, 25, 331-336.
- 4) 奥貫圭一・岡部篤行(1995): 包含階層構造を持つ施設システムの最適化, 都市計画論文集, 30, 565-570.
- 5) 家田仁(1997): Hub-Spokes/Point-to-Pointや集約型/直行型輸送など階層的輸送システムの均質無限平面上における定式化と解法, 土木計画学研究・論文集, 14, 773-782.
- 6) 笠原一人・古山正雄(1998): 最短本および階層を有する木の長さに関する考察, 日本建築学会計画系論文集, 504, 155-161.
- 7) 郵政省(1999): 日本の郵便1999/2000.
- 8) 鈴木勉・川口明子(1998): 線分都市内での輸送における規模の経済性と最適地域単位, 日本オペレーションズ・リサーチ学会1998年度秋季研究発表会アブストラクト集, 24-25.
- 9) 渡部大輔・鈴木勉(2000): 一次元都市における最適な集約・分配輸送システムに関する研究, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2000年度春季研究発表会アブストラクト集, 136-137.

p -メディアン問題における規模密度法則の成立性A TEST OF THE SIZE-DENSITY HYPOTHESIS
IN p -MEDIAN PROBLEMS

鈴木 勉*

Tsutomu SUZUKI

This paper is devoted to test the size-density hypothesis in classical p -median problems in which the sum of users' travel distance is minimized. It is known that multisource Weber problems on a continuous plane show the relationship that the facility size is proportional to the demand density raised to the one-third power. By using numerical examples, we show that the relationship sufficiently holds also in large size p -median solutions with the Delaunay network. We lose somewhat this relationship with less connected network such as the minimum spanning tree or an actual network, but some relationship still exists between the facility size and the demand density. This rule can be applied to seeking approximate solutions of p -median problems.

Keywords: demand density, facility size, facility location, large size p -median problem, size-density hypothesis

需要密度, 施設規模, 施設配置, 大規模 p -メディアン問題, 規模密度仮説

1. はじめに

オペレーションズ・リサーチ(OR)手法による施設配置問題はこれまで盛んに研究されてきており, それらの研究目的の多くは厳密な最適解を求める手法に主眼が置かれてきた。しかし, 建築・都市計画分野での地域施設計画への応用の観点からは, 必ずしも唯一の厳密な解を求めることを必要とはせず, いくつかの最適に近い解を大凡求めておくことの方が重要であると思われる場合が多い。このような大略解を求める方法も重要な研究課題であると考えられるにもかかわらず, 今日までの研究例は数少ない。

施設配置計画の評価指標の中でも, 総移動距離の最小化といういわゆる minisum 基準は, 数多くの種類の施設に適用できるものとして広範に応用されている。離散的な需要分布に対し, 施設が連続平面上の任意の場所に立地可能な場合は多施設ウェーバー問題(multisource Weber problem)として定式化でき, 離散的な点又はネットワーク上に立地可能な場合は p -メディアン問題(p -median problem)として定式化できる。需要点数や施設数が大規模な場合は, 一般に, これらの問題の大域的最適解を求めることは困難である。

しかし, 施設需要が空間上で滑らかな連続分布として与えられる場合の多施設ウェーバー問題の最適解では, 鈴木(1999)により整理されているように, いわゆる規模密度法則が成立することがわかって

いる。規模密度法則とは, 最適な状態での一施設が受け持つ面積(圏域規模)は, 需要密度の $2/3$ 乗に比例するというものである。このように, minisum 型施設配置問題を連続需要分布・連続立地問題として定式化し, この性質を用いれば, 需要の多寡によって施設数の多寡にどの程度差を持たせるかについて, 大凡の見当をつけることができ, 大略解を導くことが可能である。

ところが, 実際の施設配置計画に際しては, 空間的集計データとして与えられた需要分布を用いるために, あるいは, 現実の交通条件を反映するために, p -メディアン問題として定式化したい場合も多い。需要点数や施設数が大規模な場合, NP 困難な組合せ最適化問題であるこの問題を解くことは難しい。しかし, 元来多施設ウェーバー問題と同じ minisum 基準である p -メディアン問題でも, 規模密度法則はある程度成り立つであろうと考えられる。もしこの法則が成り立つならば, その性質を利用して p -メディアン問題についても大略解の導出が可能になることが期待される。

本研究は, 大規模な p -メディアン問題において厳密解の得られるケースを対象にして, 規模密度法則がどの程度成り立つかを分析することを目的とする。2章では規模密度法則についてレビューを行い, 3章では大規模な p -メディアン問題での法則成立性の検証方法について論じる。そして4章では, 東京大都市圏の市区町村別位置・

* 筑波大学社会工学系 講師・博士(工学)

Assistant Prof., Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Dr. Eng.

人口データを用いた実例から、法則の成立性を検討する。最後に5章で本論文の結論と課題をまとめる。

2. 規模密度法則

施設に対する需要（利用者）が連続で滑らかな分布であるとし、連続平面上に複数の施設を立地させる minisum 型配置問題を考える。但し、以下の仮定が成り立つものとしておく。

- ①施設としては、人口分布や利用需要をベースとして社会的公平性が重視されるものを想定し、提供するサービスを利用者が外向いて享受し、その後、元の場所に戻るような出向き型施設を対象とする。
- ②施設利用者は最近隣の施設を選択する。
- ③施設利用頻度は移動費用に依存せず一律である。
- ④移動費用は施設までの直線距離に比例する。
- ⑤施設費用（建設・運用）は、利用者の多寡によって決まる施設規模に依存しない。つまり、総施設数が一定の場合、施設費用は定数として無視できる。
- ⑥施設数は十分に多く、施設数密度は連続量として扱える。また、施設の近傍における需要は一様分布である。

需要密度が一様でない平面領域を考える。この領域内の地点 x 近傍の微小領域における需要密度（所与）及び施設数密度が、それぞれ $h(x)$, $n(x)$ と表されるとする。設置できる総施設数が与えられているとき、施設までの平均距離を最小化する施設数密度 $n(x)$ は、人口密度 $h(x)$ を用いて

$$n(x) = C_1 \{h(x)\}^{2/3} \quad (1)$$

となることが導かれる（鈴木, 1999 を参照）。但し、 C_1 は定数である。すなわち、施設数密度が需要密度の $2/3$ 乗に比例する状態が総距離の最小をもたらすということができる。

この関係式は、栗田(1999)による施設の建設運営費用と利用者の移動費用の総和を最小化する施設数を決定するモデルで得られた、最適施設数 N が需要 H の $2/3$ 乗と対象領域面積 S の $1/3$ 乗とに比例するという関係

$$N \propto H^{2/3} S^{1/3}$$

を、面積で除したものと等価の関係にある ($n=N/S$, $h=H/S$)。

上の(1)式の関係が満たされるとき、 x に立地する一施設がサービスする面積（圏域規模） $a(x)$ は、施設数密度 $n(x)$ に逆比例するので、

$$a(x) = C_2 \{h(x)\}^{-2/3} \quad (2)$$

となる（但し C_2 は定数）。また、これに需要密度を乗じた

$$s(x) = a(x)h(x) = C_3 \{h(x)\}^{1/3} \quad (3)$$

は、施設に容量制約がないとした場合に施設が受け持つ需要であり、施設規模を表すものと考えることができる（但し C_3 は定数）。このようにして、圏域規模が需要密度の $2/3$ 乗に比例する、あるいは、施設規模が需要密度の $1/3$ 乗に比例するという規模密度法則が導かれる。

この法則が意味するところは、各地域の施設数、圏域規模、あるいは施設規模を、全地域で(1)~(3)式のいずれかが成り立つように調整すれば、全体として minisum 型配置が得られるということである。このことは理論的に重要であるばかりでなく、施設整備の配分を決定する際に基準として用いることなどにより、実用上も応用可能な

性質である。

3. 大規模 p -メディアン問題における規模密度法則の成立性

施設需要として用いる人口などのデータは、一般に、空間的に集計されたデータである。現実には、このような集計データを用いたり、現実の交通ネットワーク等の空間構造を反映させたりして、 p -メディアン問題として定式化した minisum 型配置問題を解きたいことも少なくない。ところがこのような問題は大規模な問題になりがちであり、最適解を見つけることは困難になる。しかし、このような場合にも規模密度法則が成り立てば、前章で論じたように需要に対応して施設数や規模を調整することにより、大凡の解を求めることができる。ここでは、解ける範囲で大規模 p -メディアン問題の解を得て、その解について規模密度法則が成り立つかどうか検証する方法を提示する。

大規模 p -メディアン問題を解く方法については、既に多くの研究の積み重ねが見られ、線形緩和法(ReVelle and Swain, 1970; Morris, 1978)、双対勾配法、ラグランジュ緩和法(Galvão and Raggi, 1989)などの他様々な解法があるが、ここでは条件次第では厳密解を得ることのできる線形緩和法を用いることにする(Rosing, 1992; Rosing, Hillsman, and Vogelaar, 1979; Rosing, ReVelle, and Vogelaar, 1979などを参照)。 p -メディアン問題は、

$$\begin{aligned} \min_{(Y_{ij})} & \sum_i \sum_j H_i d_{ij} Y_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \\ & \sum_i Y_{ij} = p \\ & Y_{ij} - Y_{ji} \leq 0 \quad \forall i, j \\ & Y_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる。但し、 H_i はノード i の需要、 d_{ij} は ij 間のネットワーク上距離、 Y_{ij} はノード i の需要の施設 j への割当を表す 0-1 変数 ($Y_{ij}=1$ の場合に需要 i を施設 j に割り当てる; $Y_{ij}=1$ となるノード i に施設が立地する) である。線形緩和法とは、4 番目の制約条件である Y_{ij} の 0-1 条件を非負条件

$$Y_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

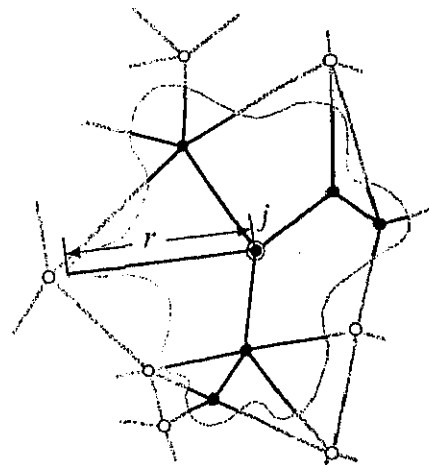


図1 需要密度の定義

で置き換えることにより、線形計画問題に変換して解く方法である。解は元の0-1条件を満たさない場合もあるが、多くの場合に0-1解をもたらすことが報告されている。

この問題の解 Y_{ij}^* においてノード j に施設が立地した場合、その施設規模 s_j は、 $Y_{ij}^*=1$ となる i の需要 H_i の総和で与えられるので、

$$s_j = \sum_{i \in N_j} H_i \quad (5)$$

で与えられる。但し、 $A_j = \{i | Y_{ij}^*=1\}$ である。これに対してノード j 近傍の需要密度 h_j については、そのノードから距離 r 未満の範囲にある需要の総和を半径 r の円の面積で除した

$$h_j = \frac{\sum_{i \in N_j} H_i}{\pi r^2} \quad (6)$$

で定義する(図1)。但し、 r は所与の値とし、 N_j は j からネットワーク上距離が r 未満にあるノードの集合、すなわち $N_j = \{i | d_{ij} < r\}$ である。ここで、 r の与え方が問題となるが、小さすぎると局地的な需要しか反映されず、極端に小さいと無限大となり需要密度の意味を失う。逆に大きすぎると需要の疎密が均されてしまい、近傍の需要密度を表しているとは言えなくなる。そこで基本的には、各施設の圏域と同じくらいの大きさとなるような円の半径を r として用いることにする。厳密には施設密度が場所により異なることから圏域のサイズも場所により異なるが、 r は一定値を用いることにする。

上の s_j と h_j を用いて、(3)式と同様の関係

$$s_j = C_3 h_j^{1/3} \quad (7)$$

が成立するかを調べることにより、規模密度法則の成立性を検証する。

4. 東京大都市圏での実例に基づく成立性の検討

3章の議論にしたがい、ここでは千代田区を中心とする半径約70km圏内に含まれる東京大都市圏市区町村の役所役場位置・人口

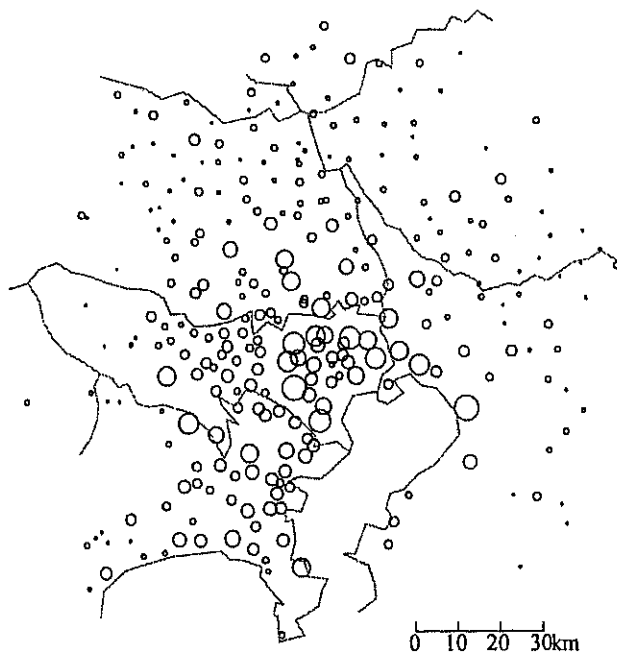


図2 需要分布(1990年国勢調査人口)

データを用いて、 p -メディアン問題の厳密解を線形緩和法によって求め、施設規模と施設立地点近傍の需要密度の関係を分析する。

対象とする東京大都市圏280市区町村の1990年国勢調査による人口分布(役所役場を位置の代表とする)を、図2に円の面積で示す。本章では、例として需要が人口に比例するような施設を想定し、人口を各市区町村の施設に対する需要と考える。これらのノードを結ぶネットワークは無数に考えられるが、ここではまず図3に示したDelaunay網と最小木(minimum spanning tree)の2種のネットワークを例に計算する。完全グラフの場合は連続平面と同じ空間条件となるが、Delaunay網でも連続平面に近い空間条件をもたらすため、規模密度法則もほぼ成立するであろうと考えられる。ここでは線形計画問題のサイズをなるべく抑えるためにDelaunay網を取り上げる。また、現実には地理的条件などにより隣接していながら分断され迂回が必要な状況も考えられることから、リンクが疎なネットワークの極端なケースとして最小木についても計算を試みる。それぞれのネットワークの場合について d_{ij} を計算し、これを用いて(4)の問題を解くことにする。

それぞれのネットワーク上での $p=28$ のときの p -メディアン解は図4のようになる(どちらの場合も0-1解が得られる)。これらの解について、28個の施設の施設規模 s_j と、その立地点の近傍の需要密度 h_j を3章にしたがい計算すると、図5に示すような関係が得られる。ここで r は、対象地域の総面積を施設数 p で除したものを一施設当たりの平均的な圏域面積とし、それと等積の円の半径に近い値である15kmとした(以下の計算でも同様)。これらの関係を(7)式から導かれる一般式

$$s_j = C_3 h_j^\alpha \quad (8)$$

に当てはめるように、quasi-Newton法による最小二乗法を用いて回帰分析を行うと、推定結果は次のようになる。

$$\text{Delaunay 網: } s_j = 346168 h_j^{0.345} \quad (R^2=0.761) \quad (9)$$

$$\text{最小木: } s_j = 342030 h_j^{0.421} \quad (R^2=0.646) \quad (10)$$

回帰曲線は図5中に記したようになる。Delaunay網の場合、 α の推定値はほぼ1/3となり、(7)式の関係、すなわち、連続平面上で成立する規模密度法則と同様の関係がほぼ成り立つことがわかる。一方、最小木の場合、 α の推定値は1/3よりも大きめの値となり、(8)式への適合性も良くないことがわかる。このことは同じ需要分布であっても、ネットワークの接続の程度の違いがこの関係の頑健性に影響することを意味している。

施設数 p による違いも調べるため、異なる p による検討を行った結果を説明済み分散比 R^2 とともに表1(Delaunay網)、表2(最小木)に示す。双方のネットワークについて0-1解が得られた $p=10, 19, 28, 40, 56, 70$ の場合について比較している。また、 p が増えるにしたがい、施設の近傍の範囲を小さくするために、 r も小さい値に設定している。表1より、Delaunay網の場合の α の推定値は $p=10$ の場合を除いて1/3に近い値で安定しており、法則の成立が頑健であることがわかる。施設数が少なくなると、プロット点数が少なくなるので R^2 は1に近づくが、一施設当たりの圏域規模が大きくなり、圏域内で需要が一様であるという2章で論じた仮定⑥の条件が満たされなくなるため、法則

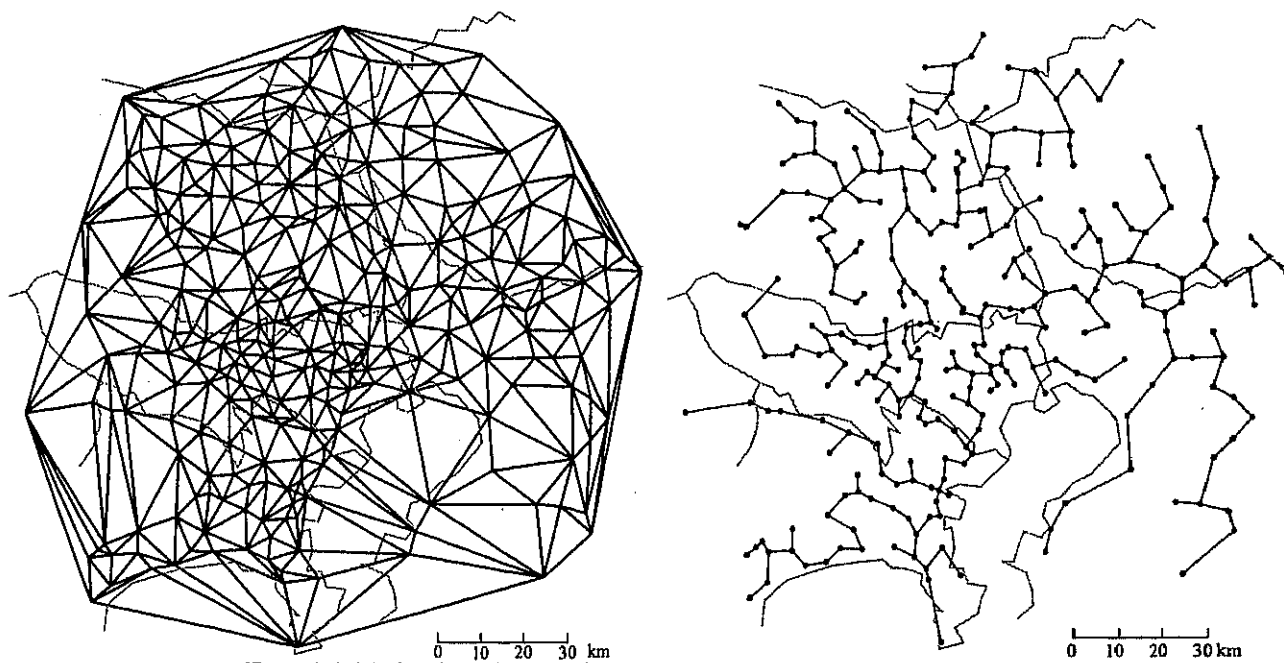


図3 東京大都市圏市区町村から生成したネットワーク (左: Delaunay網, 右: 最小木)

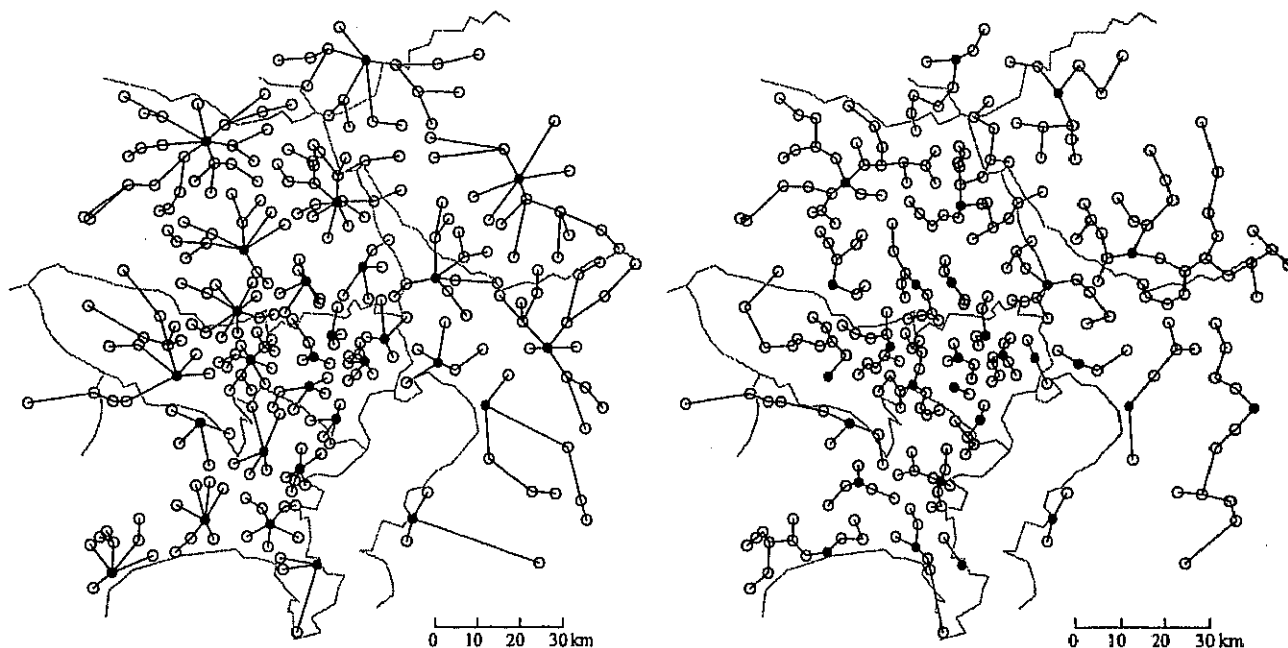


図4 p -メディアン問題の解 ($p=28$) (左: Delaunay網, 右: 最小木)

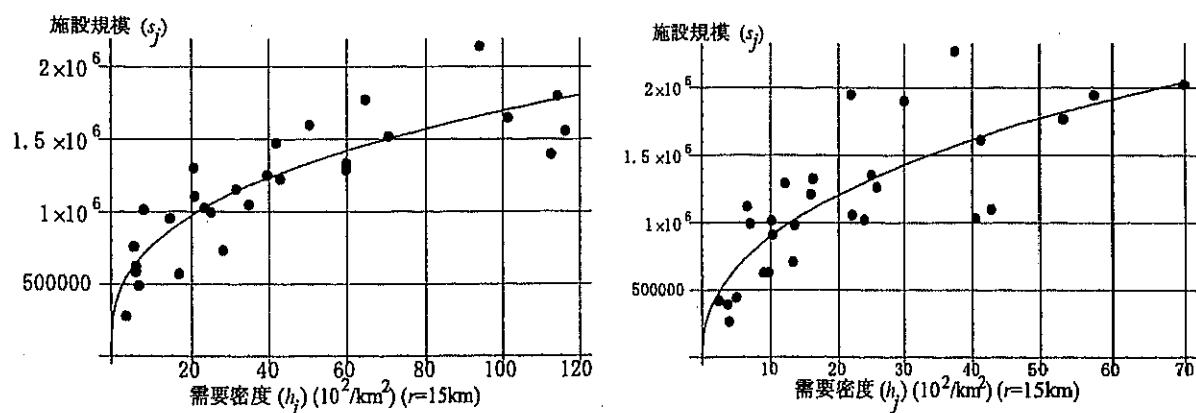


図5 需要密度と施設規模の関係 ($p=28$) (左: Delaunay網, 右: 最小木)

が成り立たなくなるものと考えられる。逆に、施設数が極端に多くなると、施設に帰属する需要点数が少なくなり、需要の一意性が崩れていくと思われ、やはり法則は成り立たなくなるものと推測される。しかし、需要4ノード当たり施設1ヶ所の割合である $p=70$ の場合でも、ほぼ1/3乗になることが明らかになった。

この性質を利用すると、対象地域内の需要密度の分布を把握し、その1/3乗に比例するような需要規模を持つ p 個の地域へ区分することによって、大略解を求めることが可能である。

最小木の場合は α の推定値は安定せず、 $p=28$ の場合同様、1/3より大きめの値となることがわかる。この場合は、空間の2次元平面としての性質がかなり失われ、むしろ1次元に近い空間条件になるため、法則が成立しにくくなるものと考えられる。

しかし、施設は次数の高い分岐点ノードに立地する傾向があり、図4の例でもわかるように、需要密度の高い場所の施設数密度が高いという立地パターン上、Delaunay網の場合と大きな差は見られない。需要密度と施設規模の関係についても、頑健性は多少失われるものの、 α が0.4~0.5の範囲で(8)式の関係が成立すると解釈することが可能



図6 現実の交通条件に近いネットワーク

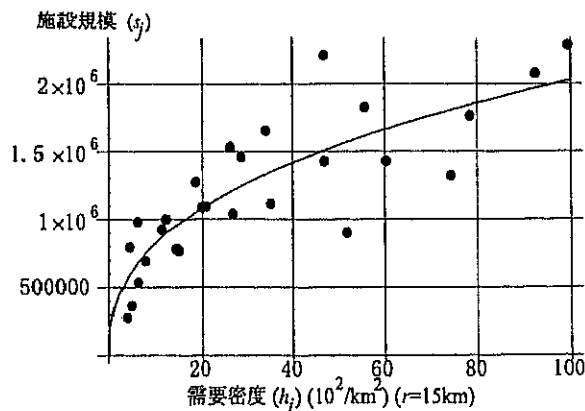


図7 需要密度と施設規模の関係($p=27$) (現実ネットワーク)

表1 施設数 p を変化させたときの推定結果 (Delaunay 網)

P	r (km)	\hat{C}_j	$\hat{\alpha}$	R^2
10	20	338951	0.642	0.94489
19	15	447609	0.375	0.74489
28	15	346168	0.345	0.76098
40	10	249245	0.329	0.66853
56	10	160859	0.365	0.60495
70	10	138109	0.344	0.52008

表2 施設数 p を変化させたときの推定結果 (最小木)

P	r (km)	\hat{C}_j	$\hat{\alpha}$	R^2
10	20	865514	0.451	0.58461
19	15	380288	0.496	0.75266
28	15	342030	0.421	0.64632
40	10	159401	0.507	0.74844
56	10	134673	0.474	0.71685
70	10	146284	0.380	0.55419

表3 現実ネットワークのときの推定結果

P	r (km)	\hat{C}_j	$\hat{\alpha}$	R^2
10	20	563881	0.538	0.95510
27	15	337492	0.389	0.70482
56	10	195678	0.326	0.54128
70	10	136378	0.376	0.59510

であり、最小木の場合の p -メディアン問題の大略解求解にもこの性質を利用する可能性は充分あるものと考えられる。

現実の交通網は、Delaunay網よりも疎、最小木よりも密であり、両者の中間であると考えられる。そこで、より実際に近い交通網での法則の頑健性を確かめるために、多少恣意的にならざるを得ないが、Delaunay網のリンクの中から、現在、鉄道・バスなどの公共交通機関が整備されている隣接市区町村のリンクのみを取り出したネットワークを作成し、同様の検討を行った。図6に対象としたネットワークを示し、(8)式への回帰の結果を0-1解が得られた施設数 p についてのみ表3に示す。また、例として $p=27$ の場合の需要密度と施設規模の関係を図7に示す。

この結果、説明される分散比は小さいものの、現実の交通条件を想定した場合でも α は0.3~0.5の範囲にあると見なして問題ないであろうことが読みとれる。 $p=10$ は例外と見なせば、 α は概ねDelaunay網の場合と最小木の場合の中間の値となることが推測される。このように、現実の交通条件に近いネットワークを与えた場合でも、おおよそ規模密度法則が成立することが確認された。

5. 結論と今後の課題

本論文では、連続空間での minisum 型配置モデルで成り立つ規模密度法則について、 p -メディアン問題での成立性を検討し、以下のような結論を導いた。

- ①大規模な p -メディアン問題について規模密度法則を検証する方法を提示し、東京大都市圏市区町村を例に p -メディアン問題の厳密解を求め、法則の成立性を検証した。
- ②その結果、ネットワークがDelaunay網である場合、施設規模は需要密度のほぼ1/3乗に比例し、規模密度法則がほぼ成立することが明らかになった。
- ③ネットワークが最小木である場合は、べき数の推定値は安定せず、

規模密度法則の成立性はやや崩れるが、施設規模はおおむね需要密度の0.4~0.5乗に比例するといえる。

- ④現実の交通条件に近いネットワークを与えた場合でも、おおよそ施設規模は需要密度の0.3~0.5乗に比例するという関係が見いだされ、Delaunay網の場合と最小木の場合の中間のケースとなるであろうことが確認された。

これらの性質を使えば、対象地域内の需要分布を把握し、そのべき乗に比例する地域区分を行うことによって大略解を得ることができ、厳密解の求解が困難な大規模問題に対する良好な近似解としたり、ヒューリスティクス解法の初期解とすることができるであろう。

規模密度法則を利用した大略解求解の具体的手法の検討、異なる需要分布を持つ他の地域での検討、需要分布の滑らかさと法則の成立性との関係などについては、今後の研究課題としたい。また、施設のはたらきに応じて施設の分布形態は様々な形をとり得る(日本建築学会編, 1995)が、本研究では規則的な分散型配置となるような公共性が高く公平性に重点が置かれる施設を対象とした。Minisum型の評価基準にそぐわない、他の型の施設については、これとは別のアプローチが必要となろう。

筑波大学腰塚武志教授、大澤義明助教授、南山大学鈴木敦夫教授、慶應義塾大学栗田治助教授には貴重なご意見を頂いた。また、筑波大学社会学部研究科の大津晶氏には作業上お世話になった。ここに記して謝意を表します。なお、本論文は平成11年度科学研究費補助金(奨励研究(A):課題番号10780273)による研究成果の一部である。

参考文献

- 1) Daskin, M.S.: *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, 1995.
- 2) Galvão, R.D. and Raggi, L.A.: "A Method for Solving to Optimality Uncapacitated Location Problems," *Annals of Operations Research*, 18, 225-244, 1989.
- 3) Gusein-Zade, S.M.: "Alternative Explanations of the Dependence of the Density of Centers on the Density of Population," *Journal of Regional Science*, 33, 4, 547-558, 1993.
- 4) 建設省国土地理院: 日本の市区町村役所・役場経緯度一覧, 1991.
- 5) 栗田治: 「都市施設の適切な数に関する数理モデル —政令指定都市の区数に関する分析例—」, 日本建築学会計画系論文集, 524, 169-176, 1999.
- 6) Morris, J.G.: "On the Extent to Which Certain Fixed-Charge Depot Location Problems Can be Solved by LP," *Journal of Operational Research Society*, 29, 1, 71-76, 1978.
- 7) 日本建築学会編: 地域施設の計画, 丸善, 1995.
- 8) Okabe, A., Okunuki, K. and Suzuki, T.: "A Computational Method for Optimizing the Hierarchy and Spatial Configuration of Successively Inclusive Facilities on a Continuous Plane," *Location Science*, 5, 4, 255-268, 1997.
- 9) 大澤義明: 「施設配置理論モデル」, 日本建築学会編: 建築・都市計画のためのモデル分析, 136-149, 1992.
- 10) 大澤義明: 「地域施設計画モデルにおける計画施設数と最適配置及び最適距離との関係」, 日本建築学会計画系論文集, 482, 165-174, 1996.
- 11) Palmer, D.S.: "The Placing of Service Points to Minimize Travel," *Operational Research Quarterly*, 24, 121-123, 1973.
- 12) ReVelle, C.S. and Swain, R.W.: "Central Facilities Location," *Geographical Analysis*, 2, 30-42, 1970.
- 13) Rosing, K.E.: "An Optimal Method for Solving the (Generalized)

Multi-Weber Problem," *European Journal of Operational Research*, 58, 414-426, 1992.

- 14) Rosing, K.E., Hillsman, E.L., and Vogelaar, H.: "A Note Comparing Optimal and Heuristic Solutions to the p -Median Problem," *Geographical Analysis*, 11, 1, 86-89, 1979.
- 15) Rosing, K.E., ReVelle, C.S., and Vogelaar, H.: "The p -Median and its Linear Programming Relaxation: An Approach to Large Problems," *Journal of Operational Research Society*, 30, 9, 815-823, 1979.
- 16) 日本統計協会: 統計データファイル 平成2年国勢調査.
- 17) Stephan, G.E.: "International Tests of the Size-Density Hypothesis," *American Sociological Review*, 37, 365-368, 1972.
- 18) Stephan, G.E.: "The Distribution of Service Establishments," *Journal of Regional Science*, 28, 1, 29-40, 1988.
- 19) 鈴木勉: 「移動損失基準による地域施設密度と人口密度の理論的關係に関する研究」, 日本建築学会計画系論文集, 521, 183-187, 1999.

(1999年8月30日原稿受理, 2000年1月28日採用決定)