【65】

氏名（本籍）	須賀伸介（群馬県）
学位の種類	工学博士
学位記番号	博甲第 384 号
学位授与年月日	昭和61年 3 月25日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 1 項該当
審査研究科	工学研究科
学位論文題目	自由境界問題に対する有限要素法の研究

主査	筑波大学教授	工学博士	森　正武
副査	筑波大学教授	工学博士	池邊八洲彦
副査	筑波大学助教授	工学博士	名取　亮

論文の要旨

本論文の目的は，自然界に多く見られる，内部状態の変化に応じて境界自体も変化する，いわゆる自由境界問題に対する効率的数値解法の提案と，その実験的ならびに理論的解析である。境界が内部状態に応じて時間と共に変化するために，その数値解法には独特の難しさが現われ，例えば従来の有限要素法はそのままの形では適用することはできない。また，時間に依存する現象を追跡するために，多大の計算時間が必要になる。したがって，このような問題を処理するための効率の高い新しい数値計算法が要求されることになる。

本論文は，大別して二つの部分に分けられる。第一の部分では，対象とする自由境界問題に対して時間に依存する基底関数に基づく有限要素法を適用して計算スキームを構成し，そのスキームによる実際の数値計算のための新しい方法を提案し，さらに，その効率性の詳細な解析を，実験と理論の両面から行った。第二の部分では，問題を解く基本となるスキームに対して，その安定性を数学的に議論し，それが成立するための条件を定理の形で与えた。

まず，前半の第一の部分では，自由境界問題の典型的な例として 2 次元ステファン問題を取り上げ，時間に依存する基底関数を用いて空間変数に関する離散化を行い，有限要素法の定式化を行った。基本方程式は熱伝導方程式であるが，その時間微分の離散化に関しては後退差分を適用している。また，内部状態の変化に応ずる境界の変化はステファン条件という別の微分方程式によって支配されるが，これについても独立に離散化を行った上で全体的に組み入れている。1 次元のステファン問題に対しては，これまで差分法，有限要素法，ペナルティ法等，各種の数値解法が提案され研

究が進んできているが，２次元の自由境界問題に対して時間に依存する基底関数を採用した有限要素法の本格的な研究は，本研究が最初である。２次元ステファン問題を有限要素法によって定式化すると，非零成分の少ない非対称大次元行列を係数にもつ連立１次方程式が現われ，この連立１次方程式を各時間ステップ毎に多数回解く必要が生じる。本論文では，このような連立１次方程式を解く方法として，前処理付き共役残差法，略してPCR法を採用した。共役残差法はそれ自身では必ずしも効率的な方法とはいえないが，これにしかるべき前処理を施すときわめて効率の高い方法となることが近年明らかにされてきている。本論文では，前処理として，もとの行列の非零成分の所についてだけLU分解を行う，いわゆる不完全LU分解を採用した。そして，実用上有効であるといわれている多数の他の方法と比較して，このPCR法が最も効率的であることを実験的に確認し，また固有値解析を通じてされを理論的にも明らかにした。さらに，１回の前処理の持続性に関して詳細な解析を行い，それが多数回の時間ステップにわたって有効性を持続させることを確かめ，前処理を間欠的に行う効率的な方法を提案した。そして，いくつかの数値実験を通じてその有効性を実証した。

本論文の第二の部分においては，２次元帯状領域におけるステファン問題に対して時間に依存する基底関数に基づく有限要素法を適用し，そこに現われる有限要素スキームの安定性を論じている。すなわち，適切な初期条件と境界条件の下で，有限要素法の三角形分割がつねに鋭角型に保たれる条件を与えることによってそれが最大値原理をみたすことを示し，ここで提案したスキームの安定性を定理の形で表現してその証明を与えた。１次元のステファン問題に対する有限要素スキームに関しては，すでにその安定性と共に収束性は数学的に確立したものとなっているが，２次元のステファン問題については，収束性はもとより安定性についてもその証明は未解決問題として残されていた。したがって，本論文で示した定理は，自由境界問題に対する時間に依存する基底関数に基づく有限要素スキームの収束性を確立するための重要な第一ステップとなるものである。この定理は，安定性の条件を初期条件と境界条件のみで閉じた形で述べたものにはなっていないので，この形に完結することは今後の重要な課題として残されている。

審　査　の　要　旨

本論文で対象としている自由境界問題は，プラズマの安定性の問題等，自然科学や工学のいろいろな分野に現われる問題で，それを解くための効率の高い数値計算法が強く望まれている。本論文では，自由境界問題の典型的かつ重要な例として研究の具体的対象にステファン問題を選び，それに対して時間に依存する有限要素法を適用する方法とその効率的計算法を提案しているが，この方法は同種の問題を解くための現在知られている数値解法としては最も効率の良い方法であると考えられる。２次元の自由境界問題に時間に依存する基底関数に基づく有限要素法を適用し，その詳細な解析を行った研究は他になく，本研究独自のものである。また，非対称行列に対する前処理付き

共役残差法（PCR法）は比較的新しい方法であり，本論文で提案している前処理の間欠的適用法およびその詳細な解析はやはり独自のものである。本論文の後半で示している，２次元ステファン問題の有限要素スキームに対する安定性の定理とその証明は，スキームに関して未解決として残されている収束性の証明のための重要な第一歩をなす成果である。ただし，この定理は，初期条件と境界条件について閉じた形で表現されておらず，これを完結することは今後の課題である。本研究で提案している方法は，原理的に一般の自由境界問題の数値解法として採用できるものであり，その成果がいろいろな分野で利用され，また研究の対象となることが期待される。

よって，著者は工学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。