

粘弾性体における破壊によるパターン形成

1994年3月

吉野 隆

①

## 粘弾性体における破壊によるパターン形成

吉野 隆

## Abstract

A pattern growth of the injection fluid into viscoelastic materials was studied in two dimensional system. Agar gels were used as model materials of viscoelastic materials. A Hele-Shaw cell filled with the agar gel was used in the injection experiments. Air is used as the an injection our experiments. With changing the agar concentration and the injection pressure, systematic pattern formation experiments were carried out under a constant injection pressure. Pattern growth during experiments was measured by CCD video camera. The pattern grows in the condition of outside of equilibrium. Viscous flow and elastic cracking are control mechanisms in this pattern growth. Viscous fingering is a well known phenomena: when a lower viscosity fluid is injected into Hele-Shaw cell filled with more viscous fluid. The growth of viscous fingering is quasi static growth. In the case of elastic solid, the pattern is controlled by fracturing. Hydrofracturing, e.g. crack eruption in volcano, is one of the typical examples. In our system, a new type of pattern growth was observed. This pattern was generated under two competitive mechanisms; cracking and viscous flow. We coined this new pattern as a viscoelastic fingering. Morphological phase diagram was obtained. At the lower injection pressure and lower agar concentration, viscous fingering appear. When we used higher concentration ager gels, a single plane crack growth is observed. At the middle of the range, viscoelastic fingering is appeared. Time dependence of the lengths of the tips was also determined for typical six patterns. They are proportional to  $t$  in the case of viscoelastic fingering and single plane cracking, and to  $t^{\frac{1}{2}}$  in the case of viscous fingering, where  $t$  is time. Comparing the two patterns which are same types and have grown under different injection pressure, the growth rate of the tips are larger than those of smaller injection pressure.

The viscoelastic properties of ager gels are also examined. We obtained the relative strengths and relaxation curves for 0.1, 0.2, and 0.3 wt.% agar gels. According to the results, we concluded the viscoelastic properties of agar gels as follows. By changing agar

concentration of the agar solution, the viscoelastic property of the agar gel changes from one of viscous fluids to one of elastic solids. At the case of lower concentration of agar solution ( lower than 0.1 weight percent), agar gels behave like viscous fluids. The higher agar concentration, the more elastic property agar gels gain. Therefore, we can control viscoelastic property of model materials by changing the agar concentration. Viscoelastic fingering is a new class of pattern formation that includes characters both of viscous flow and of crack propagation.

# 目次

1 序論	1
2 流体の注入によるパターン形成	5
2.1 はじめに	5
2.2 Viscous fingering	6
2.3 Hydrofracturing	9
2.4 ふたつのパターンの違いについて	11
3 寒天のレオロジー	17
3.1 粘弾性体	17
3.2 寒天の性質	20
4 Viscoelastic fingering	33
4.1 はじめに	33
4.2 実験システムの構成	33
4.3 実験系	34
4.4 計測系	38
4.5 実験	41
4.6 結果	42
5 まとめ	78
謝辞	80

<b>A Viscous fingering</b>	<b>81</b>
A.1 Viscous fingering の基礎方程式 . . . . .	81
A.2 円形の境界の安定性 . . . . .	83
<b>B 粘弾性体の基礎方程式</b>	<b>85</b>
B.1 粘弾性物質の数学的な取扱い . . . . .	85
B.2 Maxwell 流体と Kelvin 固体 . . . . .	86

## 目 次

2-1	Schematic representation of the Hele-Shaw cell. . . . .	12
2-2	Saffman-Taylor finger. . . . .	13
2-3	Viscous fingering in the radial Hele-Shaw cell. . . . .	14
2-4	The three modes of loading. . . . .	15
2-5	Photoelastic photograph of an elliptic tube. . . . .	16
3-1	Illustration of the agar solutions. . . . .	27
3-2	Concentration dependence of viscosity of agar solutions. . . . .	28
3-3	Schematic sketch of experiments. . . . .	29
3-4	Illustration of the fracturing experiment. . . . .	30
3-5	Load vs. displacement curve of 0.1, 0.2, and 0.3 wt.% agar. . . . .	31
3-6	Time dependence of the load in the relaxation experiments. . . . .	32
4-1	Schematic sketch of experimental setup. . . . .	51
4-2	Schematic sketch of pressure generating system. . . . .	52
4-3	Time Dependence of Pressure . . . . .	53
4-4	Wiring diagram of pressure sensor and amplifier. . . . .	54
4-5	Fluctuation of the amplifier. . . . .	55
4-6	Frequency dependence of amplifier. . . . .	56
4-7	Calibration curves of the pressure monitoring system. . . . .	57
4-8	Flow chart for sample preparation. . . . .	58
4-9	Video Control System . . . . .	59

4-10	Example of viscous fingering. . . . .	60
4-11	Example of single plane cracking. . . . .	61
4-12	Example of viscoelastic fingering. . . . .	62
4-13	Schematic sketch of the growth sequence of viscous fingering. . . . .	63
4-14	Schematic sketch of the growth sequence of single plane cracking. . . . .	64
4-15	Schematic sketch of the growth sequence of viscoelastic fingering. . . . .	65
4-16	Morphological phase diagram of the experiments . . . . .	66
4-17	Time dependence of the length of the growing tip of viscous fingering (1). . . . .	67
4-18	Time dependence of the length of the growing tip of viscous fingering (2). . . . .	68
4-19	Time dependence of the length of the growing tip of single plane cracking (1). . . . .	69
4-20	Time dependence of the length of the growing tip of single plane cracking (2). . . . .	70
4-21	Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (1). . . . .	71
4-22	Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (2). . . . .	72
4-23	Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (3). . . . .	73
4-24	Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (4). . . . .	74
4-25	Time dependence of injection rate in the case of viscous fingering. . . . .	75
4-26	Time dependence of injection rate in the case of single plane cracking. . . . .	76
4-27	Time dependence of injection rate in the case of viscoelastic fingering. . . . .	77
B-1	Basic elements of viscoelastic materials. . . . .	88
B-2	Simple models of viscoelastic materials. . . . .	89
B-3	Relaxation curve of the Maxwell fluid. . . . .	90



# 表 目 次

2-1 Comparison between viscous fingering and hydrofracturing. . . . .	11
3-1 Relative strength of agar gels. . . . .	24

# Chapter 1

## 序論

本研究は、粘弾性体から得られる新しいタイプのパターン形成 (viscoelastic fingering) の発見とその記述を目的としている。一般的な概念として、パターン形成とは、系が自発的に秩序を形成していく過程である。パターン形成、つまり秩序形成過程は、自然界に多く見られる。熱対流における六角セルパターンやロールパターン、B-Z反応 (振動する化学反応系) におけるスパイラルパターンやターゲットパターン (Cross and Hohenberg [1])、破壊における分岐パターンやネットワークパターン (Herrman and Roux [2]) など、非常に広い分野のさまざまな現象をパターン形成の例として挙げるができる。これらのパターン形成に関して、多くの研究者によって、例えば、散逸構造 (Nicolis and Prigogine [3])、シナジェティクス (Haken [4])、あるいは自己組織化 (Krinsky [5]) という観点から、多くの研究がおこなわれている。

本研究では、多様なパターン形成のなかで、界面の成長によるパターン形成に注目する。このようなパターンの典型的な例として、破壊パターンや viscous fingering パターン (高粘性の流体に低粘性の流体を注入したときに得られるふたつの流体の境界の成長パターン) を挙げるができる。破壊パターンは固体の不連続面の不安定成長、viscous fingering パターンは流体界面の不安定成長の結果として形成される複雑なパターンである。

これらの界面の不安定成長によるパターンは、しばしば、フラクタル構造 (スケール変換不変な構造) をもつ。複雑なパターンをどのように記述するかというのは、パターン形成の研究において、重要な問題であった。しかし、フラクタルの概念は、一見複雑な自己

相似構造をもったパターンを，フラクタル次元というパラメータを用いて定量的に記述することに成功した。

フラクタル・パターンは，viscous fingering パターンの他にも，準静的な破壊成長（dielectric breakdown），リヒテンベルグパターン（放電パターン）などにもみられる。フラクタルパターンを再現する界面の成長モデルとして，DLA（diffusion-limited aggregation—拡散が律速した凝集—）モデルがある。DLA モデルは，viscous fingering や準静的な破壊成長の説明に成功をおさめた。DLA モデルが説明に成功している現象とは，stress corrosion などの準静的な成長現象である。ここで，ダイナミックな（準静的ではない）破壊パターンの形成を考えてみる。脆性材料でのダイナミックな破壊面の成長は，最も荒い近似として，波動方程式で記述できるはずである。なぜなら，脆性破壊は材料にかかっている応力が材料の破壊強度を越えたときに起こり，破壊が起こらない時の応力の伝播は波動方程式によって記述されるからである。実際にダイナミックな破壊面の成長は  $t$  に比例している（ここで， $t$  は時間を表す）。しかし，DLA モデルでのパターンの成長は， $t^{1/2}$  に比例していることが知られており，DLA モデルは，ダイナミックな破壊現象には適応できないことがわかる。本研究でおこなう実験は，このダイナミックな破壊現象も取り扱う。そのために既成のフラクタルモデルだけで扱うことのできない現象もみられる可能性がある。

本研究は，フラクタルという概念にとらわれず，かつ DLA モデルなどの既成のモデルに縛られることなく，新しいクラスのパターン形成の問題に挑戦することを目指している。具体的には，粘弾性体に流体を注入したときに生じる境界のパターン形成の研究をおこなう。

粘弾性体に流体を注入したときのパターン形成はどのようなおもしろさを持っているのだろうか。粘弾性体の一つの極限は弾性体であり，もう一つの極限は粘性流体である。破壊現象の多くがフラクタル・パターンであることが確認されているが，弾性体に流体を注入したときにも，フラクタル・パターンがあらわれるのだろうか。実際には，弾性体に流体を注入したする実験（hydrofracturing）で得られている一般的なパターンは引き裂き破壊による single plane cracking パターン（ひとつの直線や平面で近似できるパターン）である。Hydrofracturing 実験の結果は，破壊の先端面が分岐をおこし，その結果としてフラクタル

構造をもつパターンを生み出すような現象を支持していない。また、前述の Hele-Shaw セルに高粘性流体を充たし低粘性流体を注入したときには、フラクタル・パターンの典型例として良く引用される viscous fingering パターンが得られる。弾性体の場合、流体を注入プロセスでは、破壊が重要なメカニズムであり、また粘性流体の場合、粘性流動が支配的なメカニズムであると考えられる。この結果、粘弾性物質への流体注入をおこなった場合には、破壊と流動という2つの競合するメカニズムの下での新しい種類のパターン形成を期待することができる。粘弾性体へ流体を注入したときに発生するパターンは、今までにない新しいパターンである可能性がある。

ここで、自然界で粘弾性体へ流体が浸入する現象を考えてみる。例えば、火山の割れ目噴火やマントル中の流体（マグマ）移動などがその例である。自然界の多くの物質は、本質的には粘弾性的な性質をもっている。しかし、対象とする現象の時間スケールあるいは空間スケールによって、粘性流体、弾性固体と近似して取り扱うことが多い。例えば、地球を構成しているマントル（岩石）は、地震波の伝播に対しては完全に弾性固体として振る舞い、大陸移動（マントル対流）などの長時間スケールの現象に対しては、粘性流体として振る舞うことが知られている。これらの本来は粘弾性体であるものを弾性固体・粘性流体と近似することは、それぞれの現象に対して良い近似である。しかし、本来の粘弾性体としての性質が、対象とする現象を支配するメカニズムとしてあらわれることがある。それが前述の火山の割れ目噴火・マントル中のマグマ移動の例である。

以上のような問題意識から、粘弾性体を充たした Hele-Shaw セルに流体を注入する実験を行い、注入流体の不安定成長パターンの研究を行った。ここでは Hele-Shaw セルを用いることによって、2次元のパターン形成の問題に限定した。

本論文は以下のように構成されている。Chapter 2 では、ある媒質に流体を注入したときの境界のパターン形成の典型的な例である viscous fingering と hydrofracturing について解説した。本研究以前に行われてきたパターン形成の問題についてまとめることで、本研究の位置づけを行うためである。Chapter 3 では、寒天について、粘弾性体のモデル物質として適切であるかを議論する。本研究で行ったパターン形成の実験では、モデル物質

として寒天を用いている。そのために、この実験はパターン形成の実験の結果を意義あるものとするために非常に重要である。また、粘弾性体のもつ基本的な性質についても述べる。Chapter 4 では、粘弾性体を用いたパターン形成の実験について詳細に述べる。

## Chapter 2

### 流体の注入によるパターン形成

#### 2.1 はじめに

この章では、流体の注入によるパターン形成のメカニズムについて述べる。まず、流体の注入によるパターン形成の基本的なメカニズムについて述べる。次に、流体の注入によるパターン形成の具体的なメカニズムについて述べる。最後に、流体の注入によるパターン形成の応用について述べる。

この章では、流体の注入によるパターン形成のメカニズムについて述べる。まず、流体の注入によるパターン形成の基本的なメカニズムについて述べる。次に、流体の注入によるパターン形成の具体的なメカニズムについて述べる。最後に、流体の注入によるパターン形成の応用について述べる。

## Chapter 2

# 流体の注入によるパターン形成

### 2.1 はじめに

固体や液体に流体（液体あるいは気体）を注入したときに、どのような現象が起こるのかを考える。注入する流体が、媒質となる固体あるいは液体と混ざりあう（miscible）か混ざりあわない（immiscible）か、あるいは化学反応を起こすか起こさないかなど、用いる物質の組み合わせによって様々な現象が発生する。例えば、水に miscible な流体であるアルコールを注入した場合は、混合（mixing）しながら最後には水と注入したアルコールの境界が区別できないように混ざりあってしまう。また、固まったワックスに温度を上げて溶かしたワックスを注入した場合には、溶けたワックスは固まったワックスを割りながら浸入してゆくが、浸入してゆく過程で熱を失い冷え固まり、媒質である固体ワックスと同化してゆく。このように、流体の注入時に見られる境界の振る舞いは、多種多様であり非常に複雑である。

ここでは、境界で見られる過程が、最も単純な場合について議論することにする。それは、混ざりあうこと、媒質との化学反応、流体の相変化などの現象が、流体の注入に伴って起こることがない場合である。この場合、二つの相は、はっきりと確認できる明確な境界を形成する。以下では、このような明確な境界の成長現象について考えてゆくことにする。

境界における複雑な振る舞い（混合や化学反応など）がない、二つの相が明確な境界を形成する場合の、注入パターンの成長の問題でさえ、複雑な現象が見られる。これらのパターン形成は、実験室だけではなく、自然界においても様々な形でみられる。水中の泡や、

地質に見られる火成岩の貫入現象はその顕著な例である。

境界のパターンを決めている要因のひとつは、注入される媒体の力学的な性質である。例えば、注入を受ける物質が弾性体（歪に比例した応力が生じる連続体）の場合には、破壊に伴って先端が鋭いパターンが見られ、粘性流体（歪速度に比例した応力が生じる連続体）の場合には鋭い先端を持たない泡状の成長が見られる。

我々の主な興味の対象である「粘弾性物質への流体注入によるパターン形成」を考える前に、本章では、粘性流体や弾性体という粘弾性体の性質のふたつの極限の場合について考察する。高粘性流体に低粘性流体を注入すると、viscous fingering と呼ばれるパターンが生じる。一方、弾性体に流体を注入すると、hydrofracturing と呼ばれるパターンが見られる。以下において、この二つの異なるパターン形成について簡単なまとめを行う。

## 2.2 Viscous fingering

### 2.2.1 Viscous fingering の概要

Viscous fingering は、粘性の高い流体に、粘性の低い流体を注入するときに見られる境界の成長現象である。この境界のパターンには、樹枝状のものもありフラクタルパターンの典型的な例として注目されて、多くの研究がなされている（例えばVicsek [6]）。自然界においても、viscous fingering は、様々な現象において見ることができる（例えば岩塩ドームなど）。

Viscous fingering を実験室で再現するときには、Hele-Shaw セルと呼ばれる実験装置が用いられる。ここで、Hele-Shaw セルについて簡単に説明する。Hele-shaw セルは、2枚の透明な平行平板に粘性流体を充填し、粘性流体の流れを2次元化して観察する装置である。この実験装置は、前世紀末にHele-Shaw [7]の実験で初めて用いられた。Hele-Shaw セルの模式図を Fig. 2-1 に示す。Hele-Shaw における流れの特徴は、A.1 で述べるように、ポテンシャル流（圧力勾配に比例した速度をもつ流れ）であることである（Feder [8]）。付録 A に viscous fingering まとめた。このセルに高粘性流体を充填した状態で低粘性流体を注入すると、二種類の流体の境界は、時間とともに移動・変形し、指状の突起を形成する。

この実験は、油田における原油の採取の模擬実験として行われた。現在では流体（注入する流体や注入を受ける流体）の種類に関わらず、粘性流体に低粘性流体を注入したときに生じる指状のパターンを *viscous fingering* と呼んでいる。

Hele-Shaw セルを水平に設置した場合と、鉛直に設置した場合では、ポテンシャルの関数形が異なる。水平に設置した場合、ポテンシャルは圧力に比例した量であるが、鉛直に設置した場合には、圧力に加えて重力ポテンシャルが加わる。一般には、ポテンシャルの形を圧力と重力ポテンシャルの和として、与えて議論する。*Viscous fingering* について言えば、現れる結果は水平に設置したセルを用いた場合と、鉛直に設置したセルを用いた場合で、本質的な違いは現れない。

*Viscous fingering* は、Hele-Shaw の実験から約 60 年後に Saffman and Taylor [9] によって詳細に報告された。Saffman and Taylor は、高粘性流体に主にグリセリンを用い、低粘性流体に空気を用いた。Hele-Shaw セルのサイズは  $380 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$  であり、平板の間隔は、 $0.9 \text{ mm}$  である。セルを鉛直に設置し、空気を上方から注入したときの境界の変化を観察した。Figure 2-2 に、Saffman and Taylor が観察した *viscous fingering* のスケッチを示す。空気の注入に従って、境界は a から c へと変化した。

Saffman and Taylor やその後の実験によって確認された長方形の Hele-Shaw セルにおける *viscous fingering* の定性的な振る舞いは、以下のようにまとめられる (Bensimon *et al.* [10], Pelcé [11])。注入の開始前では、境界の形状は平坦である。空気の注入を開始すると、境界は変形し小さな突起が出現する。先に成長した突起ほど大きな圧力勾配を得るために、下方に伸びた突起が選択的に成長してゆく。突起が互いに成長・競争を行う結果、最終的にひとつの突起のみが、一定速度で安定に成長する。注入圧力が高い場合には、突起が横へ広がる現象や、突起の先端が分岐する現象が見られる。セルを水平に設置した場合でも、鉛直に設置した場合でも、見られるパターンに定性的な違いは見られない。

Paterson [12] は、空気の注入源が点である Hele-Shaw セルを用いて実験を行うことによって、長方形のセルとは異なった現象を発見した。Paterson の使用したのは、直径が  $600 \text{ mm}$ 、平板の間隔が  $1.5 \text{ mm}$  の水平に設置した円形の Hele-Shaw セルである。セルの上板



の中心に穴を開けて、グリセリンに空気を注入した。

中心から空気を注入するタイプの Hele-Shaw セルの、長方形の Hele-Shaw セルと最も異なる点は、側面の壁がないことである (Vicsek [6])。長方形のセルのように側面に壁があると、上で述べたように、一つの突起のみが安定成長する。しかし側面の壁がないと、このような定常的な成長はおきない。Paterson が得た実験結果を Fig. 2-3 に示す。このパターンの成長過程は次のようにまとめられる。はじめに同心円状のパターンが成長し、円のサイズがある程度の大きさになると突起が生じる。そして突起の成長に伴って、先端の曲率が小さくなると分岐がみられる。それぞれの突起は更に成長し、また分岐を行う。円形のセルの場合には、長方形セルと異なり、分岐が繰り返され複雑なパターンとなってゆく点の特徴である。

### 2.2.2 先端の成長について

Viscous fingering の先端部分の成長については、長方形の Hele-Shaw セルの場合にも、円形の Hele-Shaw セルの場合にも議論されている。以下にその議論について述べる。

このような議論を行う場合にも、空気の注入速度が一定であると仮定する。実際に、多くの viscous fingering の実験が空気の注入速度を一定にして行われる。長方形の Hele-Shaw セルの場合には、Saffman [13], Scheidegger [14], Gupta *et. al* [15] は、突起の先端の位置 ( $x$ ) を  $t$  が大きいときに

$$x = v[t + k' \ln(1 + k'' e^{t/k'})],$$

と表されると予想している。これは安定なひとつの finger のみが成長することを考えれば容易に考えられることである。円形セルの場合には、Paterson が、 $t$  が大きいときに、

$$r = (q/\pi)^{\frac{1}{2}} [t + k' \ln(1 + k'' e^{t/k'})]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

と予想し、実験結果との対応関係を調べている。実験結果によれば、 $k'' = 0.0040$  と非常に小さい。この結果から、最も荒い近似として、 $r \propto t^{\frac{1}{2}}$  であるといえる。円形セルの場合には、成長が2次元 (成長の方向が放射状) であることから、面積の変化率 (注入速度) が一定の場合には、長さの変化率はその平方根になるためである。以上の結果から、viscous

fingering の先端の成長は、空気の注入が線源であるときと点源であるときで異なることがわかる。

## 2.3 Hydrofracturing

### 2.3.1 線形破壊力学

線形破壊力学について、簡単に説明する。線形破壊力学とは、クラック（材料中に生じた細い割れ目）あるいは鋭い切り欠きをもつ部材や構造物の強度や変形を、線形弾性論から得られた結果を基礎として取り扱う分野である。一般に、クラック（または切り欠き）のある部材に外力が作用するとき、クラックの最大曲率をもつ部分の付近に応力が生じることは、応力集中としてよく知られている。応力集中の程度は、クラックのサイズが大きくなるほど、また、曲率半径  $R$  が小さくなるほど著しくなる。

本研究に直接関係する線形破壊力学を、2次元系に限定して説明する（岡村 [16]）。クラックは、相対変位の仕方によって、モード I、モード II および、モード III、の三つの変形様式に分類されるが、線形破壊力学によれば本研究に関連するのはモード I の破壊である。モード I は、クラック面にたいして垂直な方向への引き裂き応力がかかる結果生じる破壊である。Figure 2-4 にこの破壊様式の模式図を示す。それぞれの様式は、開口形変形、面内せん断変形、そして、面外せん断変形とも呼ばれる。

モード I における、クラック先端付近の応力分布は近似的に次の式で表される。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\cos \frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix},$$

と表せる。ここで用いた座標系は、Fig. 2-4a に示したものである。 $K_I$  をモード I の応力拡大係数と呼ぶ。例えば、長さ  $2a$  の楕円孔が引っ張り応力  $\sigma$  を受ける場合、 $K_I$  は、

$$K_I = \gamma \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (2.2)$$

となる。ここで、 $\gamma$  は、補正係数で、亀裂の形状などによって決まる無次元量である。

### 2.3.2 Hydrofracturing

固体に水を注入した時に発生する亀裂の成長現象を hydrofracturing (水圧破碎) という。Hydrofracturing は、流体によって引き起こされる破壊現象である fluid fracturing の典型例である。本節では、hydrofracturing 現象について考えていく。

弾性体に水(ここでは非圧縮流体として取り扱う)を、外部から注入すると、水の注入による歪が生じ、注入部分の近傍において引き裂き応力が発生する。水と弾性体の境界のうち、曲率の最も大きい部分には、応力集中が発生する。応力の集中が物質の強度を越えると、応力を解放するプロセスとして、引き裂きによる破壊が発生する。引き裂きによる破壊によって生じた亀裂(クラック)の進展現象、およびクラックへの水の進入過程が hydrofracturing である。本研究では、この現象を一般化して、流体を注入することによってクラックの内部の圧力を一定にした状態で起こる破壊現象を hydrofracturing と呼ぶことにする。

Figure 2-5 に、内圧をうけた楕円形の筒における応力の分布状態を光弾性装置を用いて表した写真を示す(西田 [17])。図に現れる縞は、内圧を与えたときの、弾性体内部における等応力線を示している。そのために、この縞が密になっている場所ほど応力が集中していることになる。曲率の最も大きい部分である左右の端に応力が集中していることが、図から確認できる。そのために hydrofracturing の場合には、応力が集中した両端が選択的に成長する現象 (single plane cracking) が見られる。

以下では応力が集中した両端部分の成長について議論する。長さ  $r$  の線状の亀裂を考える(阿部・高橋 [18])。亀裂の内側と外側の差圧を  $\Delta P$  とおくと、応力拡大係数  $K_I$  は式 (2.2) から、

$$K_I = \gamma \Delta P \sqrt{\pi r},$$

となる。流体の注入量を  $Q_e$  とおくと、

$$Q_e = k K_I r^\mu,$$

という関係が成立する。ここで、 $k$  は定数、 $\mu$  は  $\mu \simeq 1$  を満たす定数である。これを亀裂

	Viscous fingering	Hydrofracturing
Injected media	Viscous fluid	Elastic solid
Displacement of the interface	Large	Small
Curvature of tips	Small	Large
Growth of tips	$t^{\frac{1}{2}}$	$t^1$

Table 2-1. Comparison between viscous fingering and hydrofracturing.

の半径について解いて、

$$r = \left( \frac{Q_e}{kK_I} \right)^{1/\mu}, \quad (2.3)$$

となる。すなわち、水圧破碎による円板状の亀裂の成長は、水の注入量と応力拡大係数に依存する。とくに注入速度が一定の場合、 $r \propto t^1$  となる。

## 2.4 ふたつのパターンの違いについて

ここまで説明してきた、二種類のパターン viscous fingering と hydrofracturing について、その違いを Table 2-1 まとめておく。Viscous fingering と hydrofracturing は、注入されるメカニズムが異なるために、流体の注入実験において全く違ったパターンを示す。その結果、中心部分から流体を注入しても、パターンや先端の成長速度なども異なった振る舞いを示す。例えば先端の成長は式 (2.1) と式 (2.3) からわかるように  $t^{\frac{1}{2}}$ 、 $t^1$  に比例した成長となる。

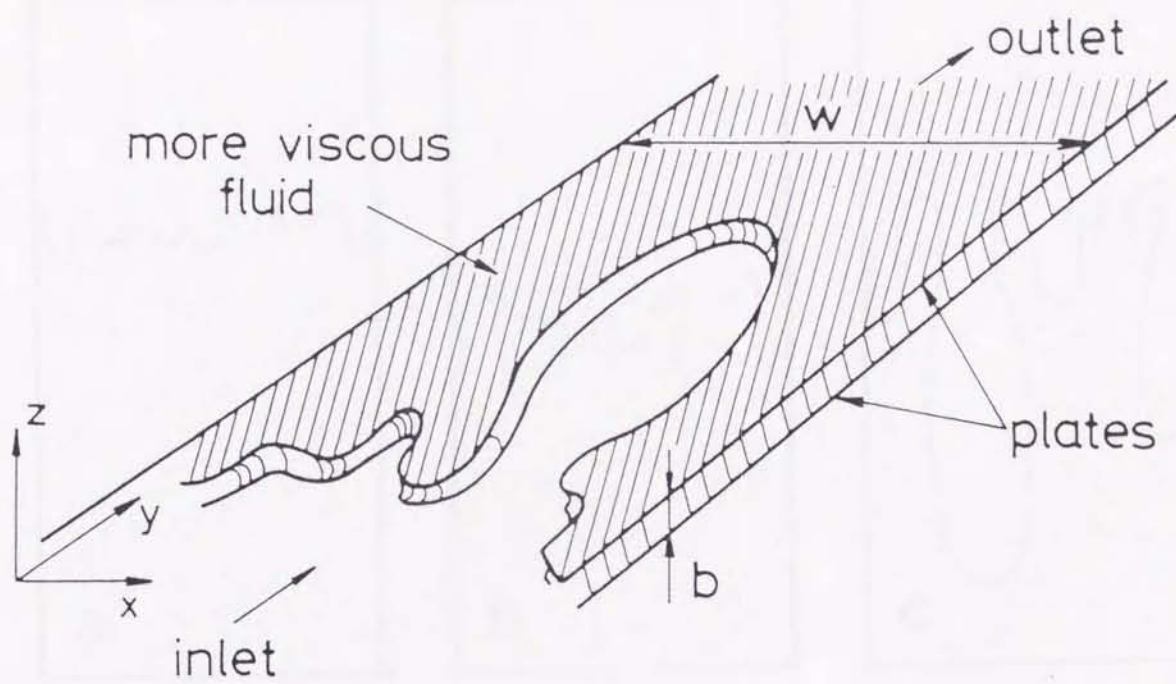


Figure 2-1. Schematic representation of a Hele-Shaw cell (after, Vicsek [6]).

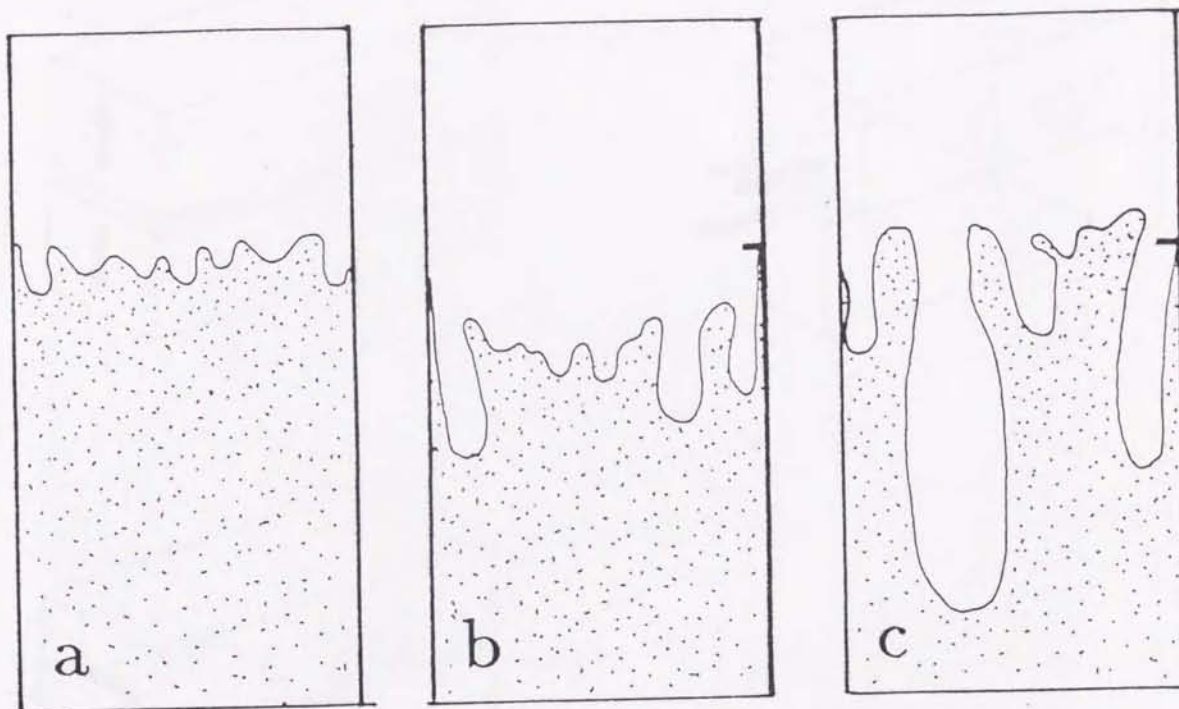
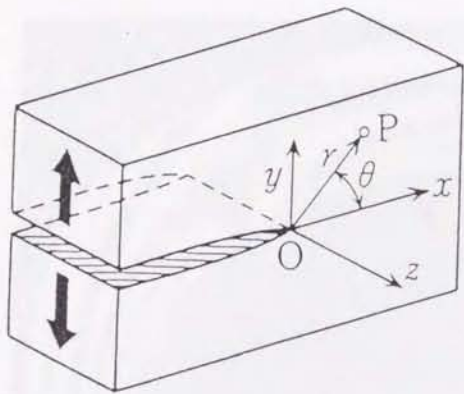
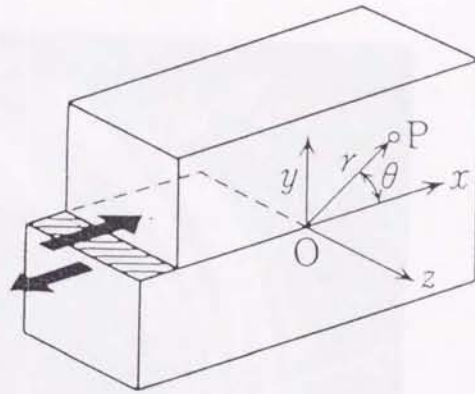


Figure 2-2. Saffman-Taylor finger (after, Feder [8] ). Unstable, finger-like patterns are observed if the less viscous fluid is injected into the more viscous fluid from the upper end. The observed pattern changed from a to c with time.

a)



b)



c)

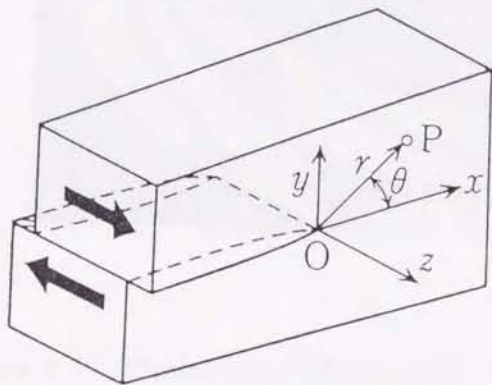


Figure 2-4. The three modes of loading ( after, Okamura [16]). a) Mode I. b) Mode II. c) Mode III.

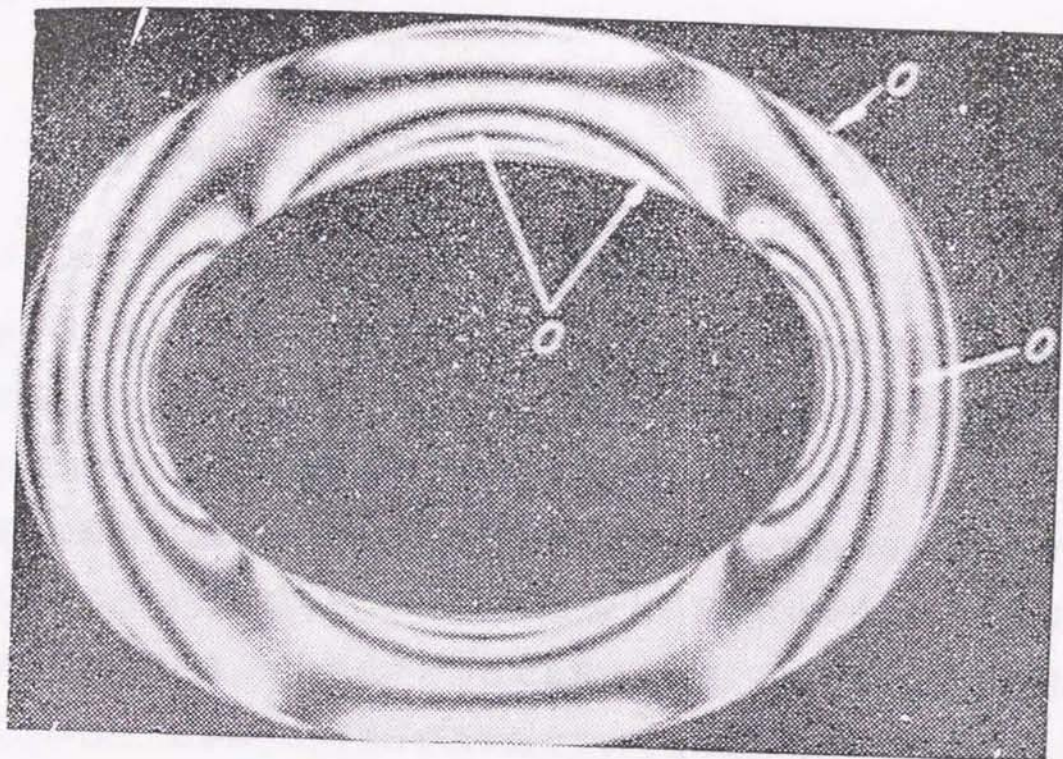


Figure 2-5. Photoelastic photograph of an elliptic tube (after, Nishida [17] ). Excess pressure is applied internal size of the tube.



## Chapter 3

### 寒天のレオロジー

#### 3.1 粘弾性体

##### 3.1.1 はじめに

本章では、粘性と弾性という異なるふたつの性質を合わせもつ物質の振る舞いを考える。前章で示した viscous fingering と hydrofracturing というふたつの異なるパターン形成の本質的な違いは、注入される媒質の力学的な性質の違いにあった。言い換えれば、注入される媒質において支配的なメカニズムの違いである。Viscous fingering において支配的なメカニズムは fluid flow である。Viscous fingering は、粘性流体が持っている無限の変位が可能である（隣りあっていた点がいくらでも離れられる）という性質から、大量の空気の注入を許した。しかも、境界条件が表面張力であるために、先端の曲率の小さいパターンであった。これに対して hydrofracturing において支配的なメカニズムは fracturing である。このとき、媒質は弾性体の性質である有限の（しかも微小の）変位しか許さないため、空気の注入量が少ないパターンになる。また、境界において、曲率の大きな部分に応力が集中することから、先端の曲率が大きなパターンであった。

ここで、新しいパターン形成の問題として、粘性と弾性の両方の性質を合わせもった物質に注目する。この様な性質を持つる物質に流体を注入するとどのようなパターンがみられるのだろうか。粘性と弾性がどのように結びついたパターンが得られるのかという興味はわく。現象が見つかることが予想される。しかし新しいパターン形成について議論するためには、新しい媒質の力学的な性質（支配的なメカニズム）について、議論しておく

なくてはならない。そこで本章では、粘弾性体と呼ばれる物質について議論する。そして、本研究で粘弾性体のモデル物質として選んだ寒天について、その動力学的な性質を調べる実験を行った。この章では、粘弾性体の基本的な性質について述べたあと、寒天の動力学的な性質について調べた実験の結果について述べる。

### 3.1.2 粘弾性体とは

粘弾性体とは、粘性と弾性という二つの相反する性質が共存している物質の総称である(村山 [19])。すべての物質は粘弾性体の性質をもっているが、注目している時間スケールの大きさによって、その一方を無視し、近似的に弾性体あるいは粘性流体として取り扱うことが多い。例えば、金属やセラミックス材料の場合には、弾性のみで変形を記述できる時間スケールが長い。その結果、粘性のみで変形を記述できる時間スケールは更に長く、この場合には粘性を無視して弾性体として取り扱うことが大部分である。逆に高分子材料(繊維、プラスチック、ゴムなど)の場合はこの時間スケールが短い。このとき、粘性を無視することができず、粘弾性体としての取扱いが必要になる。逆の例として、地球内部のマントルが挙げられる。地質学的な時間スケールでその運動を記述する場合、マントルは粘性流体として取り扱われる。アイソスタシーやマントル対流はその例である。しかし、より短い時間スケールにおける変形においては、弾性が無視できなくなり、やはり粘弾性体としての取扱いが必要になる(更に短い時間スケールの現象である地震波の伝播においては、マントルは弾性体として近似される)。このように、粘弾性体は注目する時間スケールによって流体や弾性体に近似されることが多い。

ここでは、粘弾性体として高分子溶液を取り扱う。高分子溶液は、一般に、濃度が低いときには粘性流体として振る舞い、濃度が高いときには弾性体として振る舞う。Figure 3-1に、ミクروسコーピックに見た高分子溶液の構造の模式図を示す。図中の曲線は高分子鎖を表現している。図の一辺は数十 $\mu\text{m}$  から数百 $\mu\text{m}$  の大きさある。低い濃度においては、Fig. 3-1aで示したように高分子のネットワークが十分に発達していないため、高分子間の相互作用が及ぶ範囲は小さい。この時に高分子間で見られるな相互作用は摩擦だけである。そ

のためにマクロスコーピックに見られる性質は粘性に限られる。逆に高濃度の状態では、Fig. 3-1b に示したように、高分子は互いに重なりあい、ネットワークが完成されているため、高分子間の強い相互作用が生じる。この相互作用が弾性である。このような高分子溶液のミクロスコーピックな性質のために、粘弾性体のひとつの例である高分子溶液においては、粘性流体や弾性体としての振る舞いかたが、濃度によって異なる。

Figure 3-1 の模式図からもわかるように、ミクロスコーピック（数十 $\mu\text{m}$  オーダー）で見ると、高分子溶液は決して均質ではなく、密度ゆらぎが存在している。今回の実験で取り扱うのは、cm オーダーのダイナミクスである。このオーダーでの濃度分布を考える場合には、粗視化の結果、局所的な不均質性は無視できる。そのために以下においては、高分子溶液のミクロスコーピックな振る舞いについては議論せず、マクロスコーピックにみられる性質について議論してゆくことにする。

粘弾性体のマクロスコーピックに記述するとき用いられるのが、粘性と弾性の性質を組み合わせられてつくられる粘弾性モデルである。このモデルを用いて粘弾性体の振る舞いを表現する方法を付録 B にまとめた。

マクロスコーピックに見たときの粘弾性体の特徴に、応力緩和 (relaxation) と、クリープ (creep) がある。応力緩和とは、一定の歪を与えたときに徐々に内部応力が小さくなってゆく現象である。付録 B には Maxwell 流体と呼ばれる粘弾性体モデルの応力緩和についてもまとめてある。ここで、粘性流体や弾性体に一定の歪を与え続けることを考える。粘性流体の場合には、歪をかけた瞬間に歪速度が瞬間的に無限大となり、その時間だけ内部応力が発生する。その後には、歪速度は 0 なので流体内部の応力は 0 になる。弾性体の場合には、歪をかけ続ける限り一定の応力が生じ続ける。粘弾性体においてみられる応力の緩和現象は、上で述べた粘性流体と弾性体の性質とは異なるものである。一方、クリープとは一定の応力を与え続けたときに、歪が徐々に増加してゆく現象である。粘性流体の場合には歪が時間に比例して増加し、弾性体の場合には歪は一定である。粘弾性体の場合には、歪が時間に比例しない形で増加してゆく点で異なっている。

## 3.2 寒天の性質

### 3.2.1 モデル物質としての寒天

本研究で用いたモデル物質（粘弾性体としての性質を持っている物質）は寒天である。寒天をモデル物質を選択するにあたって考慮した条件を以下に示す。

最も重要な条件は、実験のタイムスケール（数秒から数十秒のオーダー）において粘弾性体として振る舞うことである。寒天がこの条件を満足している物質であることを、以下の節で行った実験で確認した。

次に、作製時に物性の調整できることが挙げられる。前節で述べたように、高分子溶液は一般に、濃度が低いと粘性流体として振る舞い、濃度が高いと弾性体として振る舞う。条件をなるべく変えないようにして実験を行うためには、実験に用いるモデル物質を一つの物質に限定しておくことが重要である。そして、一つの物質について濃度を変えることによって、粘弾性体としての性質を変えた方がよい。寒天がこの条件を満たしていることも、以下の節で行った実験から確認された。

実験は繰り返し行うので、作製が容易であることと、温度依存性が低いことも重要な条件である。後に示した手順で試料（寒天）を作製するときにかかる時間は、およそ4時間である。この時間は試料を繰り返し作製しなければならないという条件を満たしている。また、本研究で行ったすべての実験は、室温下（25°C）で行われた。実験は一年を通して行われるために、室温を一定に調節したが、季節によって若干の違いが有り得る。そのために試料の温度依存性の低さは重要である。例えば、ゼラチンはこの条件を満たしていない。

### 3.2.2 寒天

寒天の基本的な性質について以下に記す（高分子辞典 [20, 21]）。寒天は、アガロース（ $[C_{12}H_{14}O_5(OH)_4]_n$ ）とアガロペクチンを主構成単位とする多糖類である。紅藻類に属する海藻から得られ、食品や microbiology における寒天培地、高分子を分離するためのクロマトグラフィーなどに用いられる。物理的な性質としては、0.1 wt.% から 0.4 wt.% でゲル化することが挙げられる。また、1 wt.% 以上の寒天の融点は、80 °C から 90 °C、凝固点

は、28 °C から 38 °C である。

以下に述べる実験結果から、寒天は quality control することができる物質であると言える。別の言葉で言えば、寒天は作製手順を一定にしておくことで、濃度によって動力的な性質を制御できる物質である。寒天の粘弾性体としての性質について述べている文献はほとんどない。例えば、柳川 [22] は、寒天について書かれた数少ない文献のひとつであるが、同一種の寒天における、濃度の違いによる粘弾性の違いについては記載されていない。以下に記述した実験は、本研究で用いた寒天の性質を知るために行ったものである。しかし、同時に寒天の動力的性質の濃度依存性を確認したという意味でも重要である。

### 3.2.3 実験の種類

寒天の凝固にかかる時間を測定する実験と、寒天の粘弾性体としての性質を調べる実験を行った。寒天の凝固の様子を観察する手段として、弾性波（音波）速度を用い、寒天試料作製時からの、音波の速度の経時変化を調べた。また、粘弾性体としての性質を調べるために、(1) 粘度、(2) 破壊強度、(3) 応力緩和の3種類の測定を行った。この3つの実験の目的を述べる。(1) まず粘性流体としての振る舞いをみるために、粘度の測定を行った。次に弾性体としての性質も調べた。前述したように高分子溶液は媒質中でネットワークを形成することで弾性体としての性質を有するようになる。そこで、弾性体としての性質を見る手段として、このネットワークの強さを調べた。(2) 具体的には引き裂き破壊に対する相対的強度について調べた。相対的な破壊強度を知ることによって、寒天のネットワークの強さから、相対的な弾性の程度がわかる。(3) そして、粘弾性体がもつ基本的な特徴のひとつである応力緩和の試験を行った。

### 3.2.4 粘度

0 wt.%, 0.05 wt.%, 0.10 wt.%, 0.15 wt.% の寒天溶液について、回転円筒粘度計を使用して粘度を測定した。ここで 0 wt.% の溶液とは寒天を混合しない水である。回転円筒粘度計の精度は±10 % である。粘度の測定方法は、以下の通りである。ビーカーに入った熱湯に寒天を入れ、透明になるまで十分に煮沸した。粘度計の容器に寒天を流し込んだ。最

後に回転円筒を容器に入れた。その後3時間以上冷却した。この時間は寒天が固化するまでに十分な時間である。寒天が固まった後に、粘度の計測を開始した。円筒を回転させてそのトルクを計測して、粘度を求めた。

寒天の濃度に対して、測定した粘度をプロットしたものを、Fig. 3-2 に示す。0 wt.% の測定値は5°Cにおける純水の粘度(1.52 mPa·s)とほぼ一致している(理科年表[23])。このことから粘度計の示す数値は信頼できる。測定の結果、寒天の粘度は、高濃度のものほど大きいことがわかった。特に0.10%の寒天と0.15%の寒天では、粘性が大きく異なることがわかった。

0.2 wt.%以上の寒天の粘度は測定不可能であった。これは、寒天がゲル化して高分子のネットワークが形成されてしまい、ネットワークによる初期的な抵抗(弾性体としての性質)が強いためである。高分子ネットワークによる初期的な抵抗のために、粘度計は寒天が破壊される瞬間に最も高い粘度を示し、徐々に低い粘度を示してゆく。この現象は寒天が粘性とともに弾性体としての性質を持っていることを裏付けるものである。

### 3.2.5 破壊強度

#### 実験方法

ビーカーに入った寒天にガラス棒を挿入して、寒天を破壊する実験を行った。ガラス棒の挿入開始時から、寒天が破壊されるまでの間、ガラス棒を挿入した深さと、寒天にかかる荷重を測定した。破壊現象がみられた荷重を比較することによって、寒天の強度の濃度依存性(相対的な破壊強度)を議論することができる。

破壊試験を行った実験装置の構成をFig. 3-3に示す。ガラス棒の挿入を正確に制御するために、ガラス棒をリニアドモーター(オリエンタルモーター社, UPD566LF3-B)に取り付けた。このリニアドモーターは、モーターの回転運動を直線運動に変換するために、ラック・ピニオンギアをステッピングモーターに組み合わせたものである。5相ステッピングモーターとラック・ピニオン機構により、精度 $\pm 0.02$  mmで、リニアドモーターの直線運動を制御できる。リニアドモーターの制御はすべて、コンピューター(NEC, PC9801)

を通じて行った。鋭い先端における応力の集中をさけるために、球形の先端をもつガラス棒を用いた。ガラス棒の断面の直径は1cmである。ガラス棒の下方に、デジタル式卓上天秤（島津製作所，EB-330S）を設置した。卓上天秤の精度は $\pm 0.01$  gである。卓上天秤の上に寒天の入ったビーカーを設置した。このとき、ガラス棒の真下がビーカーの中心に位置するように設置した。ビーカーは、300cc用（直径，73.40 mm）を用いた。このビーカーに200ccの寒天を作製した。このとき、寒天の深さは、約5 cmになる。実験に用いた寒天は、0.1 wt.%, 0.2 wt.%, 0.3 wt.%の3種類である。それぞれの濃度について、5回の試験を行った。

以下に、破壊実験の手順を示す。実験を開始する直前に、ガラス棒を寒天の表面に接するまで、注意深く下げた。ガラス棒が寒天の表面と接したことは、デジタル式卓上天秤の微小な変化で読み取ることができる。ビデオカメラの録画を開始した後に実験を開始した。ガラス棒を0.2 mm/sの速さで下方に動かした。このときの時刻（挿入の深さに対応）と卓上天秤が示す重量の変化を、ビデオカメラで記録した。

## 実験結果

この実験における寒天の振る舞いを考える。この過程をイラストにして、Fig. 3-4に示す。図に従って、寒天の振る舞いを説明する。Figure 3-4 bに示したように、ガラス棒の挿入によって、寒天の内部に引き裂き応力が生じる。時間の経過とともに、挿入されるガラス棒の深さが大きくなるために、寒天の表面にかかる引き裂き応力が大きくなる。その結果、卓上天秤が示す重量（荷重）は大きくなってゆく。引き裂き応力が、ある大きさ（高分子ネットワークの強さ）に達すると、寒天が引き裂き応力を支えきれなくなる。そして、この応力に伴う歪エネルギーを解放するために引き裂き破壊が生じる（Fig. 3-4 c）。引き裂き破壊が生じた瞬間に、寒天内に生じていた弾性エネルギーが解放され、寒天にかかっていた荷重が急激に減少する。

試験を終えた寒天に引き裂き破壊が生じたことを確認した。そのために、ガラス棒を挿入した部分にインクを流した。インクは、ガラス棒を挿入した部分の真下に、挿入方向と

Concentration, wt.%	Load, g	Displacement, mm
0.1	0.97 (s.d. 0.044)	8.6 (s.d. 0.049)
0.2	2.78 (s.d. 0.14)	6.0 (s.d. 0.012)
0.3	9.49 (s.d. 0.64)	5.1 (s.d. 0.0098)

Table 3-1. Relative strength of agar gels. Standard deviations (s.d) are also shown in the table.

平行な円盤状に寒天を彩色した。円盤の直径は約 2 cm, 厚さは 2 mm である。寒天の固化している部分のインクの移動は拡散が支配的である。数分の間に拡散によってインクが移動できる距離は、非常に小さい。よって、インクによって彩色された円盤状の部分は、寒天のネットワークが破壊された部分であり、その部分を選択的にインクが流動したものと考えられる。よってインクによる円盤状の彩色は、この実験において寒天の破壊現象が起きていることを支持するものである。

挿入したガラス棒の深さに対して、寒天表面にかかった荷重をプロットしたグラフを Fig. 3-5 に示す。グラフは、上から 0.3wt.%, 0.2wt.%, 0.1wt.% の寒天における挿入深さ（変位に対応）と荷重（引き裂き応力に対応）の関係を示している。

Figure 3-5 に示したように、すべての実験において、荷重は増加し続けたあとで急激な減少を示した。荷重の減少は、破壊現象が生じて、寒天の表面にかかっていた引き裂き応力が、解放された結果起こったものである。そこで、実験で得たカーブのピークにおける荷重を、寒天の相対的な破壊強度と定義した。同一の濃度における相対的な破壊強度は 5 回の実験にわたって、ほぼ等しい値を示している。この再現性の良さは寒天の粘弾性体のモデル物質としての優秀さを示している。各濃度における、寒天の相対的な破壊強度の平均値を Table 3-1 に示す。寒天の濃度が高いほど相対的な破壊強度が高いことがわかる。以上の結果、寒天が弾性的な破壊を示すことや、寒天濃度が高いほど破壊強度が大きいことがわかった。



### 3.2.6 応力緩和

#### 実験方法

粘弾性体がもつ性質の一つである応力緩和が、寒天に見られることを確認するために、寒天の変位を一定に保った時の荷重の経時変化を確認する実験を行った。寒天が大きなタイムスケールにおいて、流体的に振る舞うならば、応力の緩和現象が見られる筈である。

破壊試験を行った実験装置を使用して、応力緩和の試験を行った。寒天の作製方法、作製量、ビーカーのサイズは、相対強度の実験と同様である。0.2wt.%, 0.3wt.%のふたつの濃度の寒天について、ガラス棒を寒天に2mm および3mm の深さまで挿入したのちに固定した。このときの荷重の経時変化を調べた。荷重の経時変化をビデオに記録した。すべての実験において、挿入速度は、秒速0.2mmである。これは、挿入速度の違いによって、履歴の違いが現れる可能性をなくすためである。

#### 実験結果

すべての実験において、ガラス棒の固定後から、時間の経過とともに、荷重が減少することを確認した。Figure 3-6 に、荷重の緩和過程のプロットを示す。Figure 3-6a, b は、それぞれ、0.2 wt.%, 0.3wt.% の寒天の応力緩和試験の結果を示している。挿入の開始時刻を時刻 = 0 とした。2mm の挿入を行った場合には10秒、3mm の挿入を行った場合には15秒まで、ガラス棒は挿入を続けている。上の曲線が挿入深さ3mm の場合を示し、下の曲線が挿入深さ2mm の場合を示している。すべての曲線は  $\log t$  に比例した曲線である。これは、Maxwell 流体とは異なる振る舞いである。しかし応力の緩和現象が確認されたことで、数秒から数十秒のタイムスケールにおいて、寒天が粘弾性体として振る舞うことが明らかになった。

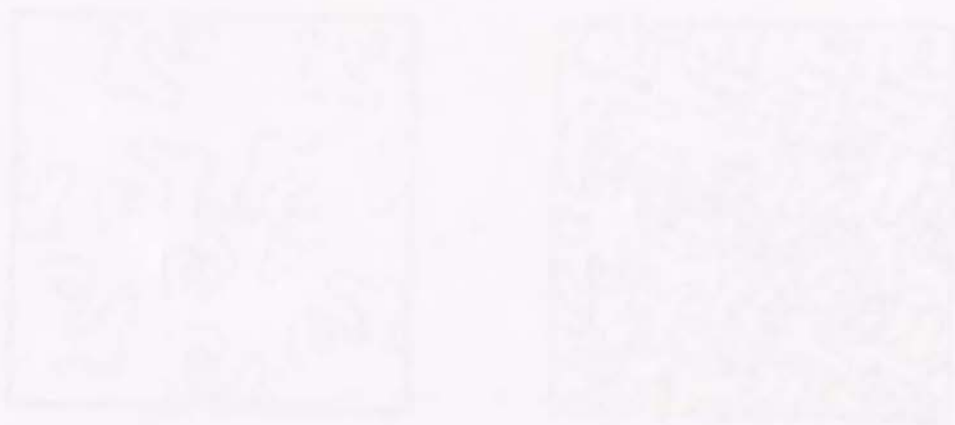
2種類の濃度の寒天(0.2 wt.%, 0.3 wt.%)のどちらが、より弾性としての性質が強いのかを比較するために、0.2 wt.%, 0.3 wt.% の寒天の実験結果から、荷重が1g から0g になるのにかかる時間を求めた。0.2 wt.% は2005 s, 0.3 wt.% は4210 sであった。減少の時間が遅いほど、弾性体の性質が強いことから、0.3 wt.% の寒天の方が弾性体としての性質

が強いことがわかった。

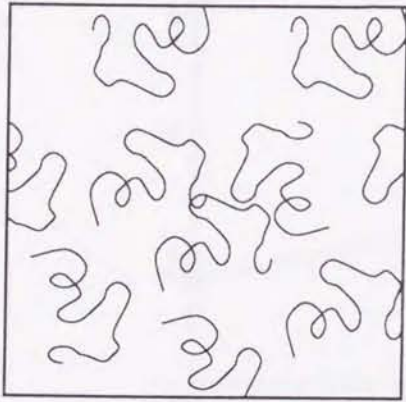
破壊強度の実験と同様に、ガラス棒を挿入した部分にインクを流し込んだ。前の実験とは異なり、円盤状の破壊面は現れなかった。インクは、ガラス棒が挿入された部分だけを彩色した。この結果は、応力緩和の実験においては、破壊現象が見られなかったこととともに、寒天が粘性流動を起こしたことを示している。

### 3.2.7 寒天の音速の経時変化

冷却を開始してから、寒天が定常状態になるまでの時間を確認するために、寒天の音速の経時変化の測定を行った。寒天の音速が一定になるまでには、寒天の作成時から3時間が必要であった。そこで、寒天をアクリル容器に流し込んでから、3時間後に実験を行った。



a)



b)

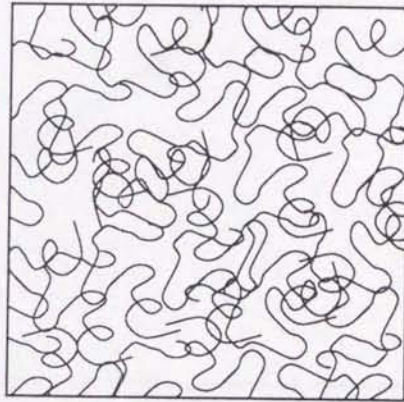


Figure 3-1. Illustration of the agar solutions. a) Lower concentration. b) Higher concentration. The high polymer of agar is shown as the curved lines. Lengths of the sizes of the squares are a few hundred  $\mu\text{m}$ . Agar gels with the lower concentration ( lower than 0.1 wt.% ) behave viscous fluid because there is no network of high polymers due to a rare of polymer's connection. Agar gels with the higher concentration ( higher than 0.3 wt.% ) behave elastic material because network of high polymer is developed.

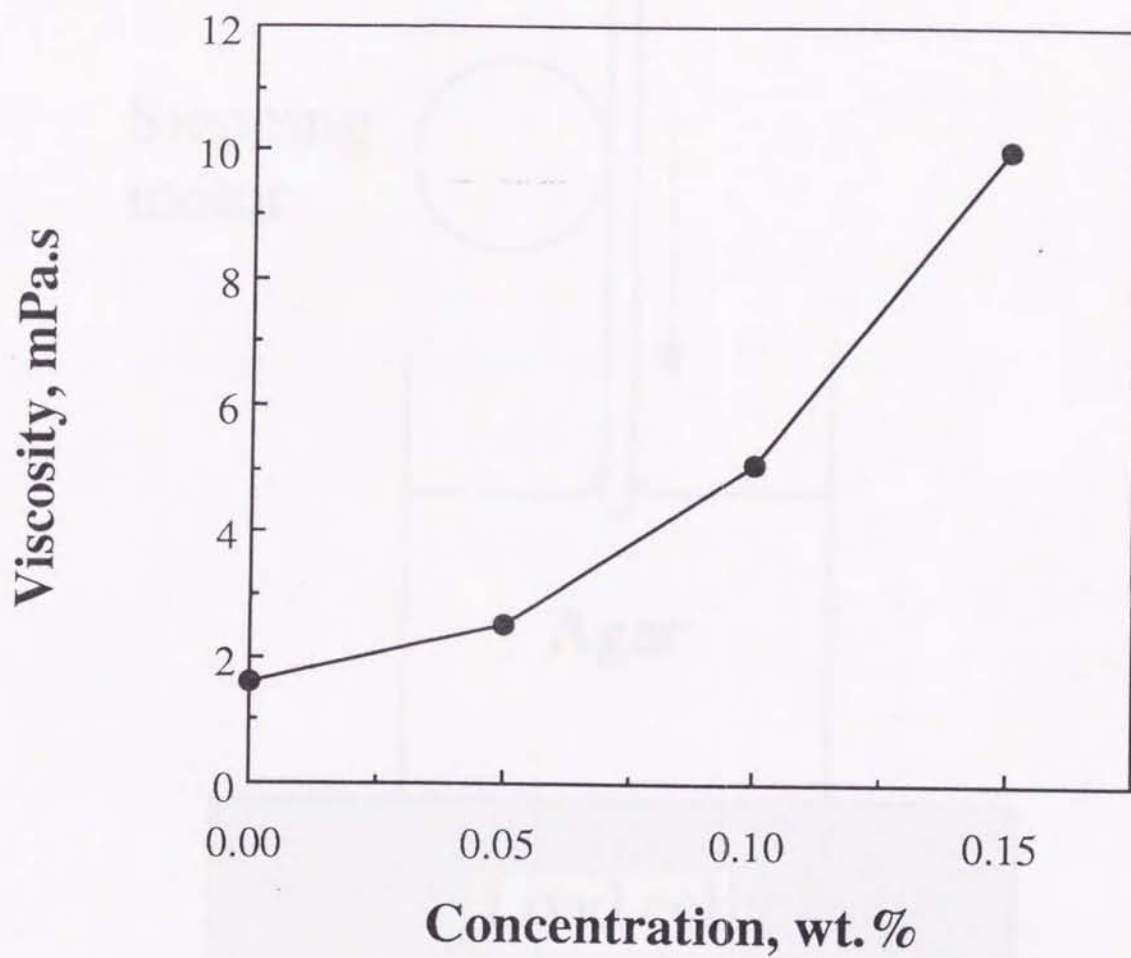


Figure 3-2. Concentration dependence of viscosity of agar solutions. The viscosity of 0.2 wt.% agar solution cannot be measured because of its elastic property. The value of 0.0 wt.% is the viscosity of pure water.

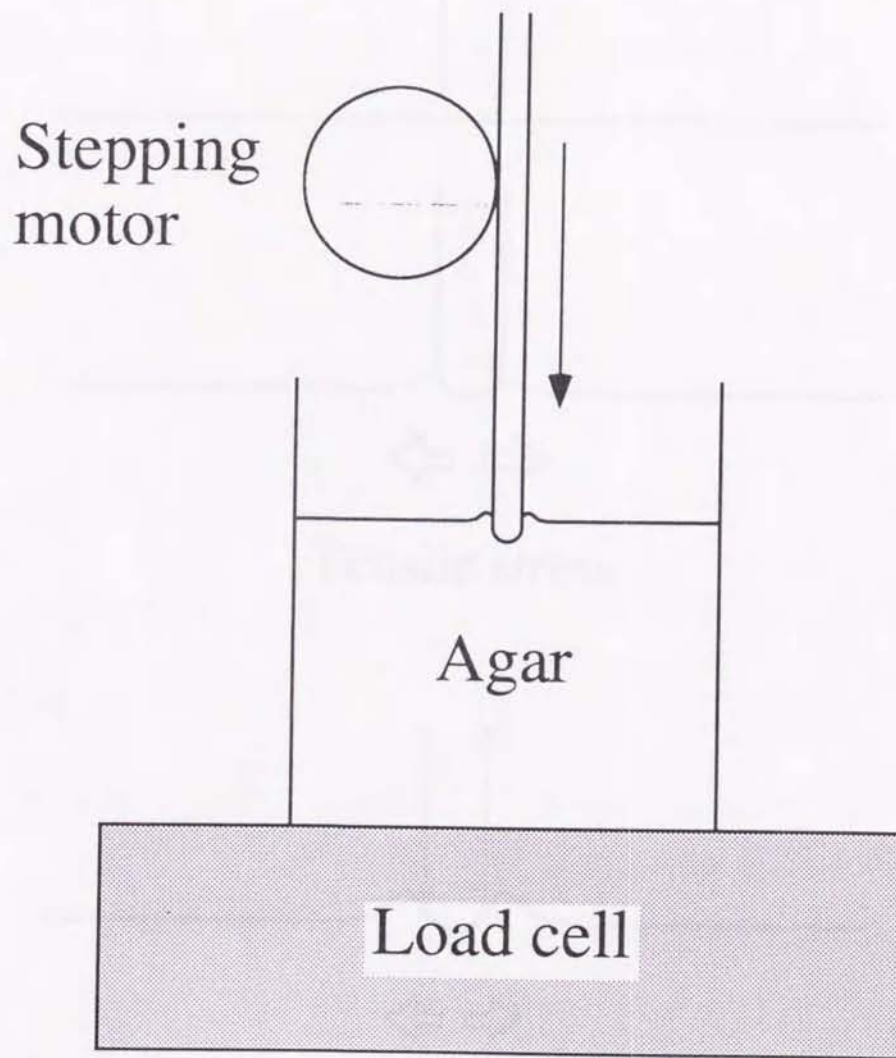


Figure 3-3. Schematic sketch of measurement of relative strength. The relative strength of an agar solution is measured by inserting the glass bar.

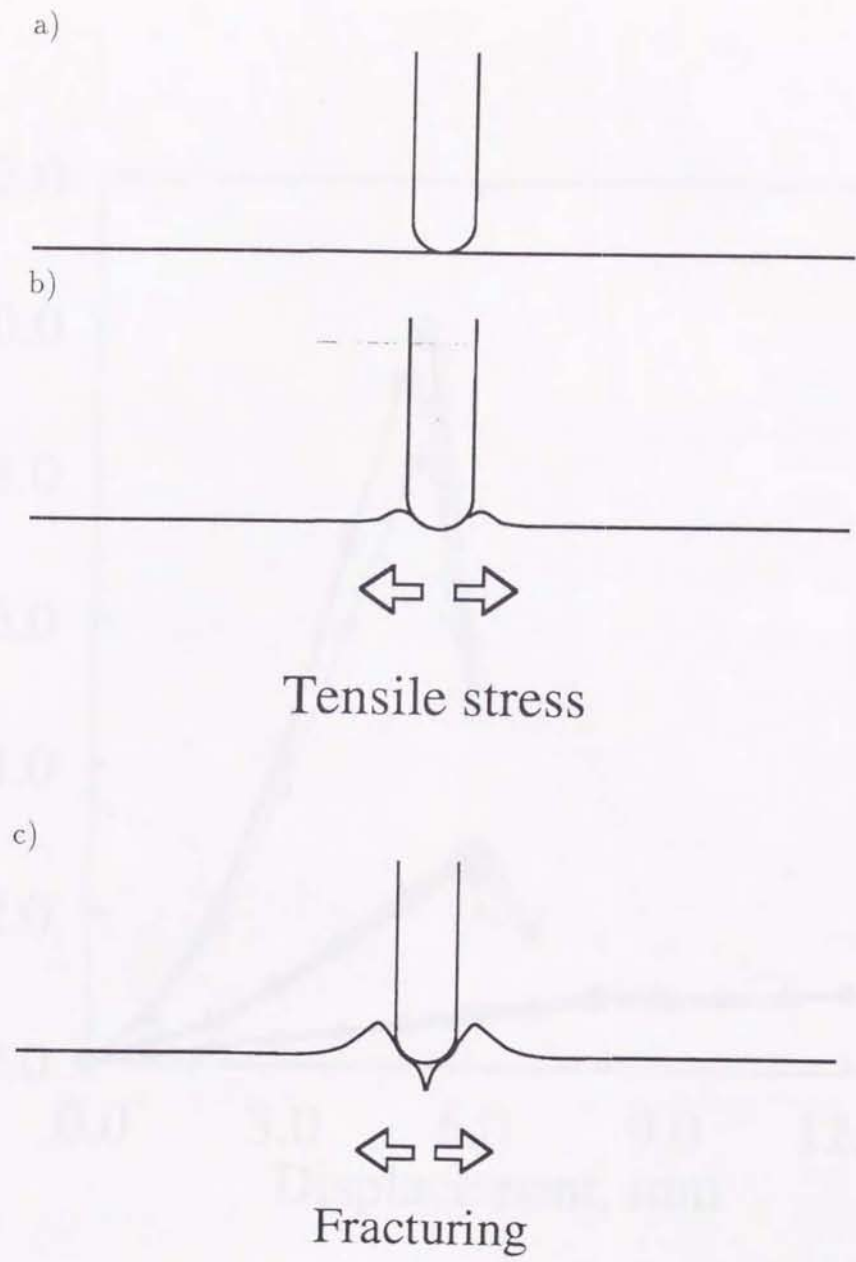


Figure 3-4. Illustration of the fracturing experiment. a) Beginning of the experiment. The glass bar contacts the surface of the agar gel. b) The tensile stress in the agar gel is occurred by inserting the glass bar. c) Fracturing is observed when the load is dropped.

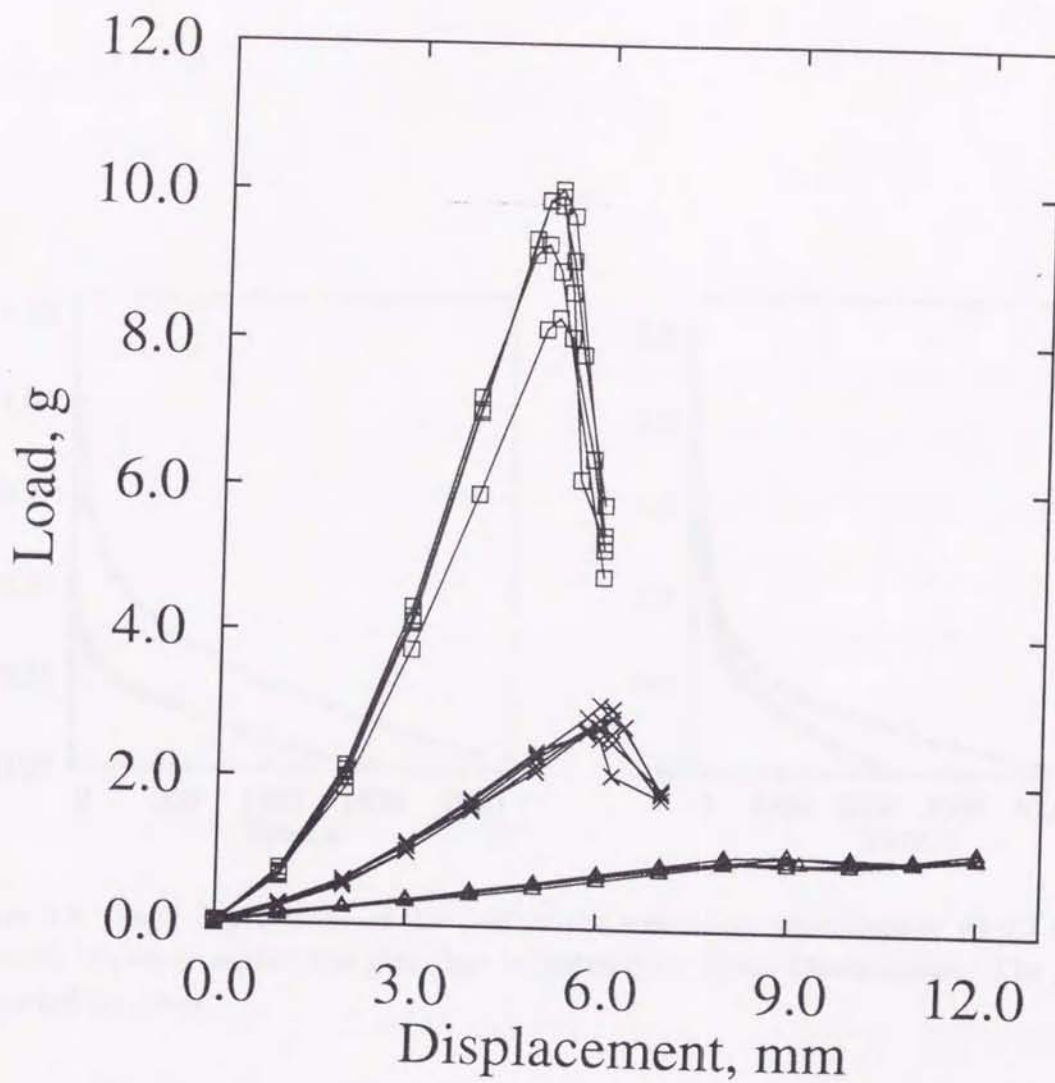


Figure 3-5. Load vs. displacement curve of 0.1, 0.2, and 0.3 wt.% agar gels. Peaks of each curves show the relative strengths of agar gels at given concentrations. Fracturing ( single plane cracking ) is occurred when the load is maximum.

a)

b)

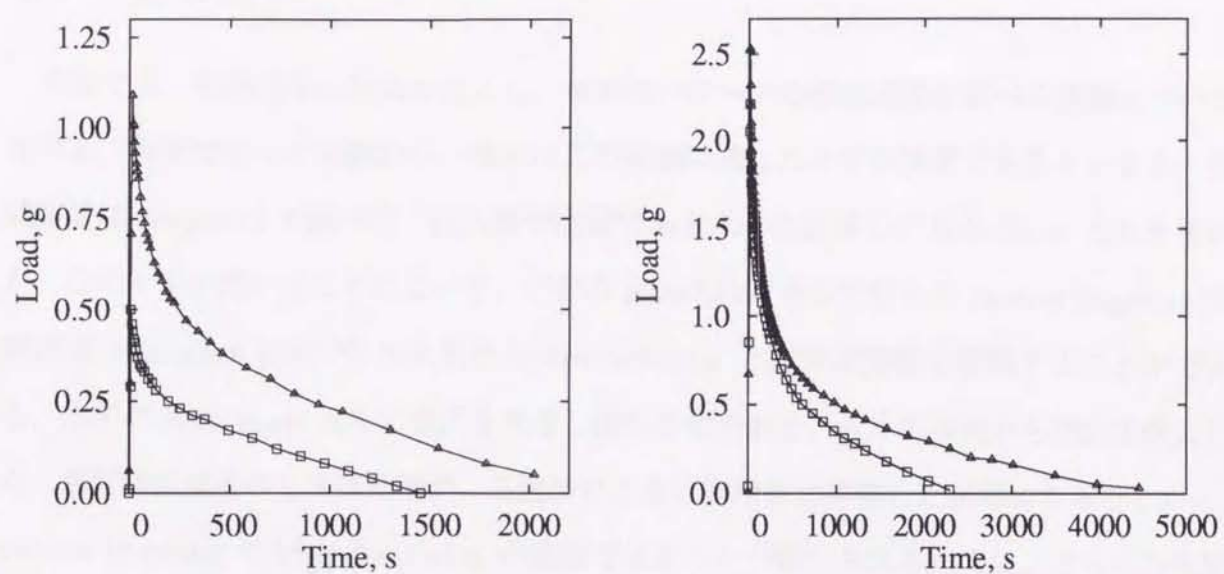


Figure 3-6. Time dependence of the load in the relaxation experiments. a) 0.2 wt.%. b) 0.3 wt.%. Open triangle: The glass bar is inserted by 3mm. Open square: The glass bar is inserted by 2mm.



## Chapter 4

# Viscoelastic fingering

### 4.1 はじめに

本章では、粘弾性体に空気を注入し、境界のパターンの形成過程を調べる実験について述べる。前章で行った実験から、寒天はこの実験に適したモデル物質であるといえる。実験装置は chapter 2 で述べた、注入源が点源である水平に設置した Hele-Shaw セルを用いた。このセルを用いることによって、円形の Hele-Shaw セルで行った viscous fingering 実験結果 (Paterson [12]) や 2次元の hydrofracturing との対応関係を考察することができる。水平の Hele-Shaw セルに寒天を充填し固化させたあと、セルの中央から空気を注入した。寒天は低濃度のときは粘性が、高濃度のときは弾性体が卓越した状態になることから、viscous fingering や hydrofracturing が観察できることが期待される。では、どちらの性質も無視できないような中間の濃度において、どのようなパターンがみられるのだろうか。このことを明らかにするために、寒天濃度や空気の注入圧力を変えて実験を行った。この実験において設定した条件は、空気と寒天の境界における空気の圧力を一定にすることである。以下にその実験の詳細について述べる。

### 4.2 実験システムの構成

実験システムは、実験系と計測系で構成される。ここで実験系とは、寒天に空気を注入して、パターンを形成させるために必要なシステムのことである。実験系は実験装置 (Hele-Shaw セル) と圧力発生システムで構成されている。ここで圧力発生システムとは、任意

の値の空気圧を定常的に発生させる装置をいう。計測系はパターン形成の実験を行うときに必要なデータを得るためにシステムである。これは、空気の注入圧を測定する圧力モニターシステムとパターンの成長を記録するビデオモニターシステムで構成される。Figure 4-1に、システムの全体の構成を示す。

## 4.3 実験系

### 4.3.1 Hele-Shaw セル

正方形の亚克力製の容器と正方形の亚克力板の間にプラスチック製の 2mm のスペーサーをはさんだ Hele-Shaw セルを製作した。セルは水平に設置した。Figure 4-1 に示したように、亚克力容器のサイズは、300 mm × 300 mm × 50 mm (厚さ 5 mm)、亚克力板のサイズは、250 mm × 250 mm (厚さ 5 mm)、スペーサーのサイズは 2 mm × 2 mm × 150 mm である。亚克力容器の四隅に 4 本のスペーサーを置き、その上から亚克力板を重ねて、亚克力容器と亚克力板の間隔を一定 (2mm) にした。スペーサーの両端は 45° に切っており、亚克力容器の側壁に、切り出された面が接するようにした。これによってスペーサーの位置が固定するので、空気の注入によって媒質が移動・変形を行っても、スペーサーが移動することはない。亚克力板の中央に、直径 2.8 mm の穴をあけた。この穴にプラスチックノズルを差し込んで、このノズルから、セルに充填した寒天に空気を注入した。ノズルの大きさは 外径 2.8 mm、内径 2.0 mm、長さ 50 mm である。亚克力板とノズルの機密性は十分であり、この連結部分から空気や寒天がもれることはない。

今回製作した Hele-Shaw セルと、Paterson [12] が viscous fingering の実験を行った円形の Hele-Shaw セルを比較する。円形と正方形という形の違いがあるものの、chapter 2 で議論したように、安定した viscous finger が形成されないセルであるという点が共通している。セルの形が正方形であるために、パターンの成長する方向に異方性が生じる可能性があった。しかし実際の実験結果をみると、セルの形に依存した異方性は見られなかった(この点については、後でまた議論する)。そのため、本研究で製作した Hele-Shaw セルは

円形の Hele-Shaw セルと、ほぼ同じ性質をもつものといえる。

Figure 4-1 に示したように、実験装置は、内径 3 mm（外径 5 mm）のビニールチューブで、圧力発生システムと連結している。チューブの途中に、空気の流れを制御するためにコックを取り付けた。このコックを開けて、圧力発生システムにおいて発生させた空気圧を、実験装置と圧力モニターシステムに送った。チューブの実験装置側の終端にアクリル板に差し込むプラスチックノズルを取り付けた。また、圧力モニターシステム側の終端を、圧力センサー（後述）に連結した。

### 4.3.2 圧力の発生

静水圧を利用し、任意の空気圧を発生させる装置を製作した。この圧力発生システムは、0 から 4.5 kPa までの任意の空気圧を発生させることができる。また、静水圧を利用していることの特徴として、流体の移動が static であるために、実験中の圧力のゆらぎが非常に小さいことがあげられる。Figure 4-2 に、圧力発生装置の模式図を示す。

圧力発生装置は、水を入れた円柱状の容器、この容器よりも小さい円柱状のカップ、カップの底につけたおもり、そして実験装置につなげるためにチューブから構成されている。容器の内径は 65 mm、高さは約 600 mm である。カップの内径は 40 mm、高さは 120 mm である。カップの底部に穴を開け、その穴にチューブを差し込んだ。チューブと穴の連結部分の気密性は、シリコンシーラントで確保した。カップの底にはおもりも取り付けた。おもりの重量は、空気の入ったカップでも水中に沈むように選んだ。

静水圧を利用した圧力の発生方法を以下に示す。カップの底にワイヤーを取り付け、容器の上からカップを吊るした。チューブにつけたコックを閉じたあとで、空気の入ったカップを、カップの口を下にして、水の入ったの容器の中に沈めた。カップの底のおもりによって、カップの中に空気がある状態でもカップは水中に沈む。カップ内の空気にはカップ中の水面における圧力（静水圧）がかかる。コックを開けると、チューブの実験装置側の端に大気圧がかかる。静水圧と大気圧の差圧によってチューブ内に空気の流れが生じる。この流れによって、Hele-Shaw セルに空気が注入される。ワイヤーの長さを調節することで、

カップの深さを自由に変えることができる。カップの深さが変わると、カップ内の空気にかかる静水圧の大きさが変わる。これによって、実験装置に送り出す空気圧の大きさ（差圧）を調整することができる。

この圧力発生システムの問題点は、空気の注入に伴う圧力の減少である。装置の構造上、空気の注入を続けると、空気の減少に伴ってカップの内部の水面が上昇する。その結果、静水圧が減少し、注入圧（差圧）が下がる。そこで、空気の減少による圧力の低下を推定した。空気の注入点（セルの中央）からパターンの先端までの距離が等しいとき、注入面積（注入量）が最も大きくなるのは、パターンが同心円状に成長したときである。この実験において注目したのは、セル中心からの距離がおよそ 60 mm に至るまでのパターン形成である。そこで、半径 60 mm の同心円状パターンが形成されたとき圧力の減少量を推定した。このときの、カップの水位の上昇は、

$$\frac{6 \times 6 \times \pi \times 0.2 \text{ cm}^3}{2 \times 2 \times \pi \text{ cm}^2} = 1.8 \text{ cm},$$

である。よってカップ内の水位の上昇に伴う圧力の変化は最大でも、

$$1.8 \text{ cm} \times 1 \text{ gf/cm}^3 \times 9.8 \text{ N/kgf} = 0.18 \text{ kPa},$$

と評価できる。例えば、注入圧力が 2 kPa のときの減少率は 9.0 % である。

圧力モニターシステムを用いて、実際に行った実験における圧力値の経時変化を測定した。注入圧力の測定方法については次節で詳細に述べる。圧力の測定値の例を Fig. 4-3 に示す。3 種類のグラフは、観察されたパターンの種類に対応している。パターンの種類については後の節で述べる。記録の開始時に記録用のコンピュータから発せられるピープ音を聞いて実験者がコックを開いて注入が開始される。そのために、記録の開始時刻に較べて、注入の開始時刻が若干遅れる。グラフの初期に見られる立ち上がり前の時間は、この遅れ時間に相当している。グラフにみられる圧力の急激な低下は、パターンの先端がアクリル板の端に到達したことを示している。パターン形成の実験として注目するのは、この時点までである。図から読み取れるように、どのパターンについても、パターンの成長時の圧力の変動は微小であった。これは、今回行ったすべての実験においていえることであ

る。グラフをもとにして、空気の注入に伴う圧力の減少率を求めた。その結果、実際の圧力の減少率は、最大のときでも 1% 程度であった。

### 4.3.3 空気の注入量について

単位時間あたりの空気の注入量を決めているのが、空気を注入するノズルを流れることができる空気量ではないことを確かめた。本研究で設定した条件は、寒天と空気の境界における空気の注入圧力が一定であることである。しかしノズルの穴が小さいと、ノズルを通ることができる空気量が十分ではなくなるために、境界における空気圧が一定ではなくなってしまう場合が考えられる。これを確かめるために、ノズル内の空気の流れを Hagen-Poiseuille 流と仮定して、単位時間あたりの空気の流量を求めた。Hagen-Poiseuille 流は円形断面をもつ管を通る粘性流体の流れである。円管の半径を  $a$  とし、円管の向きを  $x$  方向とする。境界条件は円管の壁における流体の速度が 0 である。考えている流れが定常流であるとする。管の断面を単位時間に通過する流量  $Q$  は、

$$Q = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\pi a^4}{8\mu},$$

と表される。ここで、 $P$  は円管内の圧力、 $\mu$  は粘度を示す (異 [24])。円管内の圧力勾配を一定であると仮定すると、

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

となるので、ノズル内の流量が計算できる。ここで、 $\Delta P$  はノズルの両端の圧力差、 $\Delta x$  はノズルの長さを表す。空気の粘度 ( $18.2 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) と前に示したノズルのサイズを用いて、 $\mu = 18.2 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、 $\Delta x = 50 \text{ mm}$ 、 $a = 1.0 \text{ mm}$  を与式に代入する。例えば差圧が、 $\Delta P = 2 \text{ kPa}$  であるとき、空気の注入量は  $Q = 8.68 \times 10^5 \text{ mm}^3/\text{s}$  となる。これは実際に測定された注入速度 (後述) の約 30 倍にあたる。よって、ノズルの大きさによる空気の注入量の制限が、パターンの形成に及ぼす影響はないといえる。

## 4.4 計測系

### 4.4.1 注入圧力の記録

空気と寒天の境界における圧力の時間変動を記録するために、圧力モニターシステムを製作した。このシステムは空気の注入時の圧力が一定であったことを確認するために重要である。圧力モニターシステムは、圧力センサー、定電流回路、増幅回路、ADコンバータ、そして、コンピュータで構成される。圧力センサーには、ゲージ圧（大気圧との差圧）測定用の拡散型半導体圧力トランスデューサ（コパル電子、P3000S-101G）を用いた。圧力センサーは、圧力に比例して抵抗値が変化する。定電流回路と組み合わせることで、圧力値を電圧値として計測するシステムを構成した。この回路の回路図を Fig. 4-4 に示す。センサーのレスポンスは、約 1 kHz である（コパル電子 [25]）。出力電圧は、増幅回路によって約 30 倍に増幅した。これを、12 bit AD 変換器によって、コンピュータにデジタル信号としてとりこんだ。AD 変換器は 0 から 10 V の電圧を 0 から 4095 の整数として出力する。この数値化された電圧データを、実験の継続中に取り込み続け、実験の終了後に圧力値に変換し、ファイルに保存するプログラムを作製した。このプログラムは、実験条件によって、サンプリングレートとサンプル数を変えることができる。パターン形成の実験では、1 ms と 6 ms の 2 種類のサンプリングレートを用いた。圧力の測定精度は、 $\pm 0.01 \text{ kPa}$  であった。

### 4.4.2 圧力モニターシステムの経時変化

圧力モニターシステムが電源を投入してから安定した出力になるまでに、必要な時間を求めた。パターン形成の実験を行うときに、圧力発生システムの経時変化による測定誤差を小さくしなければならない。そのために電源を投入してから一定の時間の後に実験を開始した。この時間を求めるために、以下に述べる圧力モニターシステムの経時変化の実験を行った。電源の投入と同時に出力電圧を計測しはじめ、出力電圧の経時変化を計測した。24 時間の経時変化を計測した。圧力センサーのかわりに、4 個の  $1 \text{ k}\Omega$  の抵抗を組み合わせで作ったホイーストブリッジを用いた。3 分おきに 24 時間計測した結果を Fig. 4-5 に

示す。電源の投入時刻を 0 とした。グラフより、回路は電源の投入から 4 から 5 時間で安定することがわかった。

#### 4.4.3 圧力モニターシステムの周波数依存性

圧力モニターシステムの周波数応答性は、1 kHz である。これは以下のようにして求めた。圧力モニターシステムの周波数特性は、圧力センサーの周波数特性と増幅回路の周波数特性によって決まる。上で述べたように、圧力センサーの応答性は約 1 kHz であった。そこで、増幅回路の周波数特性を調べた。圧力センサーをソケットから外して、function generator が出力する正弦波をソケットから入力した。入力電圧の振幅を一定にして、入力電圧と出力電圧の比 (gain) の周波数依存性を調べた。入力電圧の周波数を変化させたときの gain の変化を Figure 4-6 に示す。図より、増幅回路の gain は 1 kHz あたりから減少することがわかる。この事実から、応答性もおよそ 1 kHz であることがわかった。

#### 4.4.4 空気圧と出力電圧の calibration

パターンの成長過程における、空気の注入圧力を得るために、注入圧力と出力電圧の関係を表す補正曲線を求めた。空気の注入圧力を圧力モニターシステムから得られる電圧 (0 から 10 V) から計算しなければならないためである。この計算を行うために以下に示す方法で、電圧値と空気圧の関係を表す補正曲線を求めた。

圧力センサーと圧力発生システムをチューブで連結した。カップ内の水面と容器の水面の高さの差を 1 mm の精度で読み取った (このために生じる圧力の誤差はおよそ 0.01 kPa である)。この水位差によって生じる圧力を計算した。この圧力は、水位差に水の密度を乗じて求められる。カップの深さを変えたときの出力電圧値を記録した。深さを変えて 30 点の計測を行った。電圧値と圧力のプロットした結果を Fig. 4-7 に示す。出力値と圧力は線形の関係にあることがわかった。最小二乗法を用いて、最適な補正曲線を得た。出力値を  $x$  (12 bits,  $0 \leq x < 4096$ ) 圧力を  $y$  とすると、この補正曲線は、

$$y = 0.97714x - 73.124, \quad (4.1)$$

である。この曲線の相関係数は 1.000 である。水位差を増加させてゆくとき（カップの沈めていくとき）の圧力の変化の仕方と、減少させてゆくとき（カップを引き上げていくとき）の圧力の変化の仕方に、違い（ヒステリシス）は認められなかった。式(4.1)を実験の圧力の測定に用いた。

この実験における圧力値の変化について考察する。カップの深さを変えたときの圧力値の変化は一瞬であった。このことは、空気の供給が十分に早いことを示している。圧力センサーに到達する空気の速度が十分に速いことは、同時にセルに到達する空気の速度が十分に速いことを意味している。よって圧力センサーにおける空気の圧力を Hele-Shaw セル内の空気の圧力と考えてよい。

#### 4.4.5 ビデオモニターシステム

実験で得られる成長パターンを、ビデオモニターシステムを用いて記録した。ビデオカメラ、ビデオコントローラー、そして、パーソナルコンピュータで、ビデオモニターシステムを構成した。

ビデオカメラ（SONY, CCD-V200）を実験装置の上方に設置して、パターンの時間変化を記録した。ビデオカメラは、383 画素の高密度 CCD を使用している。空気を注入する前にビデオカメラの録画を開始し、注入を中止したあとで録画を終了した。

ビデオモニターシステムの重要な特徴は、記録した画像を 1 フレーム単位でコントロールできることにある。ビデオカメラは 1 秒間で 30 フレームの記録を行うので、フレームの間隔は  $1/30$  秒（約 33 ミリ秒）である。ビデオカメラによって記録したパターンを、ビデオコントローラー（SONY, CVI-1000）で制御するために IBM PC-AT 互換機（MICROLANE, 80486DX-SC）を使用した。ビデオコントロールプログラムと画像取り込みプログラムを同時に使用するために Microsoft Windows を OS に使用した。そして、この OS 上で動作するビデオコントロールプログラムを製作した。ビデオコントローラは RS232C 端子をっており、RS232C 経由で入力される VISCA と呼ばれるコマンド体系によって操作することが可能である。本研究において作製したビデオコントロールプログラムは RS232C ポー



トから VISCA のコマンドを出力するプログラムである。ビデオコントロールプログラムの主な特徴を以下に示す。a) 通常の編集機能（再生，停止，早送り，巻き戻し），b) 時刻データの取得，c) 指定したフレームへの移動，d) 1 フレーム単位の送りと戻し。このプログラムによって，任意の時刻におけるパターンをモニター画面上に出力した。

## 4.5 実験

### 4.5.1 実験の概要

Hele-Shaw セルに充填した寒天に空気を注入し，空気と寒天の境界の成長を観察する実験を行った。空気の注入圧は一回の実験を通して一定であり，重要なコントロールパラメータのひとつである。この注入によって形成される，寒天と空気の境界の成長過程を，ビデオモニターシステムを用いて録画した。同時に，空気の注入圧力を，圧力モニターシステムを用いて記録した。寒天を用いることで，新しいタイプのパターン形成が観察されると考えられる。

### 4.5.2 実験の手順

すべての実験は以下に示す手順で行った。実験の手順を一定にしておくことは，データの信頼性を考える上で重要である。はじめに，実験を行う3時間以上前に，圧力モニターシステムに電源を投入した。上で示したように，圧力モニターシステムの出力が安定するまでにおよそ3時間が必要なためである。次に Hele-Shaw セルが水平に設置されるようにセルの位置を微調整した。そして寒天を作製した。ここで寒天の作製とは，寒天の溶解と，その後で溶液をセルに流し込むことをいう。寒天の作製の手順は重要なので後で詳細に述べる。寒天をセルに流し込んだ後で，スペーサーを容器の4つの隅に置いた。このとき，スペーサーの両端がアクリル容器の側壁に密着するようにした。最後にアクリル板をスペーサーの上に置いた。このとき，アクリル板と寒天の間に空気が入らないように注意をした。以上の手順の結果，寒天を充填した Hele-Shaw セルが完成する。寒天を完全に固化した状態にするために，セルを3時間静置した。3時間の静置の後で，チューブ先端のノズルを

アクリル板の中央の穴に差し込んだ。ノズルの先端の深さが、寒天の層の中央（セルの幅の中心）に位置するように調節した。圧力モニターシステムのプログラムを走らせた後に、ビデオの録画を開始した。続いてチューブにとりつけたコックを開けて、実験装置に空気を注入した。

ノズルを差し込む深さの調節に失敗した場合には、空気は寒天とアクリル板の間を選択して注入されてしまう。このような場合の結果は、解析から除外した。

### 4.5.3 試料の作製

実験条件を同一にするために、寒天の作製の手順はすべての実験で同一でなければならない。また、手順を同一にして管理しておかないと、寒天を決まった大きさのセルに流し込まなければならないために、以下のようなことが起こる。寒天の冷却が不十分であると、セルに流し込んだ後で、更なる冷却のために寒天が熱収縮を起こして割れてしまう。また、逆に冷却が過ぎると寒天はセルに流し込む前に固化してしまう。その結果、セルに流し込む際に高分子ネットワークが破壊されてしまい、寒天が均質にならない。このような理由のためにも、試料作製の手順を常に同一にしておくことは重要である。

寒天の作製は、以下の手順で行った。Figure 4-8 にこの手順のフローチャートを示した。寒天粉末と熱湯を計量をした。寒天粉末の計量には、前節の実験で用いたデジタル式卓上天秤を用いた。これらをビーカーの中で混合し、ガラス棒で攪拌しながら加熱して数分間沸騰させた。寒天を構成する分子が均質になって溶液が透明になったのを確認して、沸騰をやめ、室温で冷却した。室温近くまで冷却した後で、固化が始まる前に、アクリル容器に寒天を流し込んだ。

## 4.6 結果

### 4.6.1 典型的なパターン

粘弾性体に特有な新しいタイプのパターン形成を発見した。このパターンを含めて、本研究の実験によって観察されたパターンは、viscous fingering, single plane cracking, viscoelastic

fingering の3種類に分類することが可能である。Viscous fingering は、chapter 2 で説明した、粘性が支配的なメカニズムになっているパターンである。Single plane cracking は fracturing が支配的なパターンで、Chapter 2 で説明した hydrofracturing 現象のことである。Viscoelastic fingering は今回の実験で新たに発見されたパターン形成である。この実験におけるパターンの形成には、後で示すように、ゆらぎが重要な役割を果たしている。そのために、同一の実験条件においても、同一の形態をもつパターンが生じるわけではない。しかし、得られたパターンは、常に、3つのタイプのいずれかの特徴をもっているため、分類は容易である。以下にこの3つのタイプのパターンの定性的な（形態上の）特徴について述べる。

#### 4.6.2 Viscous fingering

粘性流体に空気を注入したときに現れる viscous fingering がこの実験においても再現された。実験で得られた典型的な viscous fingering の例を Fig. 4-10 に示す。図に示したパターンの実験条件は、寒天濃度 0.1 wt.%, 注入圧力 3 kPa である。Chapter 3 で行った寒天の破壊実験からもわかるように、寒天の濃度が 0.1 wt.% である場合、弾性のあらわれかたは微小である。そのために、寒天濃度が低いときに viscous fingering が見られることは容易に理解できる。すなわち viscous fingering が見られるのは、寒天の弾性的な性質が粘性に較べて無視できるほど小さい場合である。

本研究で観察された、寒天に見られる viscous fingering の特徴について以下に記す。Viscous fingering は先端が膨らみ、分岐 (tip splitting) をおこしながら進む二次元的な成長のために、同一のサイズの single plane cracking (後述) に較べると、空気の注入量は極めて多い。これは粘性流体の持つ、無限の変位が可能であるという性質による。粘性流体を用いたときの viscous fingering との違いは、先端が少し鋭くなる場合があることである。これは chapter 3 で行った破壊実験からもわかるように、0.1 wt.% の寒天が微小ながらも弾性体としての性質を持っていることによる。

次に、viscous fingering の成長のシーケンスについて述べる。Figure 4-13 に、この成

長過程のスケッチを示す。Figure 4-13a のように、注入を開始するとすぐに、円形の境界が成長する。円形の境界がある程度の大きさまで成長すると、境界は突起を形成する。その様子を Fig. 4-13b に示した。突起を形成すると、突起の部分のみが選択的に成長してゆく (Fig. 4-13c)。成長とともに、突起の先端の曲率は小さくなる。先端の曲率が、あるしきい値に達するまで成長が続いた後で、突起は Fig. 4-13d のような先端の分岐を起こす。分岐した後も、突起は更に成長を続け、新たなしきい値となる曲率に達すると、また分岐を起こす。

Viscous fingering の突起の本数や現れる方向は、実験によって異なる。これは、viscous fingering の突起の成長が、セルの形が正方形であるために生じる異方性によるのではないことを示している。

### 4.6.3 Single plane cracking

Single plane cracking は、引き裂きによって線状に成長するパターンである。Figure 4-11 に、このパターンの典型的な例を示す。実験条件は、寒天の濃度が 0.2 wt.%, 空気の注入圧力が 1.5 kPa である。

Figure 4-14 に single plane cracking の成長のシーケンスの模式図を示す。寒天が等方等質でありセルに異方性がないことから、空気の注入の瞬間における境界の形は円の筈である。そのために、境界における応力の分布には異方性が存在しない。しかし、Fig. 4-14a に示したように、ゆらぎによって曲率の大きい部分ができるとその部分応力が集中する。その結果、Fig. 4-14a に示したように、応力が集中したクラックの両端部分のみが選択的に成長してゆき、他の部分が成長しない。これは chapter 2 で示した hydrofracturing である。Single plane cracking の先端が成長する方向は、実験によって異なる。これは、single plane cracking の特徴である、ひとつの方向への選択的な成長が、パターンを形成する場 (正方形の Hele-Shaw セル) の異方性のために起こるのではなく、注入初期の境界のゆらぎによって起こることを示唆している。このパターンの空気の置換量は、おなじサイズの viscous fingering と較べると非常に少ない。また viscous fingering と異なり、空気を注入し

てからパターンが確認できるまでに数十秒かかるときがある。この時間と寒天の濃度や空気の注入圧力との関連性は認められなかった。しかも同一の実験条件の場合でも、パターンを確認するまでの時間は実験によって異なった。この原因について議論することは出来ないが、single plane cracking が起こる場合、成長の初期における微小なクラックが成長するためにかかる時間が非常に長いことは、特筆すべきことである。

#### 4.6.4 Viscoelastic fingering

Viscoelastic fingering は、今回の実験ではじめて発見された、新しいタイプのパターンである。このパターンは、single plane cracking と viscous fingering の性質を合わせ持っており、このふたつのパターンよりも複雑な形態を示している。典型的な viscoelastic fingering のパターンを Fig. 4-12 に示す。このパターンは、寒天の濃度が 0.2 wt.%, 空気の注入圧力が 3.0 kPa である。

Viscoelastic fingering の形態的な特徴は以下に示す 3 点である。a) 突起の先端の部分の曲率が大きく細長い。b) 空気の注入量が多い、2 次元的な成長である。c) 先端において分岐を起こしながら成長を行う。a) が single plane cracking と類似した性質であるのに対して、b), c) は、viscous fingering に類似した性質である。このため、viscoelastic fingering は、viscous fingering にも single plane cracking にも属さない粘弾性体に特有な新しいタイプのパターン形成であると考えられる。

Viscoelastic fingering の成長の初期段階の特徴は、空気を注入してからパターンがビデオ画面において確認できる大きさになるまでに、数十秒かかることがあることが挙げられる。この性質は single plane cracking の場合にもみられたものである。Viscoelastic fingering の場合にも、寒天の濃度や空気の注入圧力と、成長時間の関連は認められなかった。同一のコントロールパラメータを用いても、実験毎に異なる。

Figure 4-15 に viscoelastic fingering の成長の模式図を示す。この模式図をもとにして、viscoelastic fingering の成長のシーケンスについて説明する。Viscoelastic fingering の成長は、細長く鋭い先端をもつパターン (single plane cracking) から始まる。このパターン

を Fig. 4-15a に示す。Viscoelastic fingering の最も初期におけるパターンは、single plane cracking と区別できない。次に、この細長い部分（特に先端部分）が膨らむ。この様子を Fig. 4-15b に示す。応力集中によって先端が成長する single plane cracking には、このような膨らむという現象は見られない。これは viscous fingering にもみられる現象である。その後で、Fig. 4-15c に示したような、先端が二つに分かれる分岐現象が起こる。分岐は瞬間的に生じる。分岐によって生じるふたつの枝（branch）のなす角度は鈍角であり、viscous fingering の枝（finger）がなす角度よりも大きい。

以上に示したように、viscoelastic fingering は、viscous fingering と single plane cracking の特徴をあわせもったパターン形成である。

#### 4.6.5 相図

ふたつのコントロールパラメータである、寒天濃度と空気の注入圧力と得られたパターンの関係を調べるために、相図を作成した。これを Fig. 4-16 に示す。新しいパターンである viscoelastic fingering が極めて限られた領域でしか見られない現象なのか、広範囲の時間スケールにおいて重要な現象なのかを確かめるためにも相図の作成は重要である。

コントロールパラメータは、空気の注入圧力と寒天の濃度である。寒天の濃度は、0.1 wt.%, 0.2 wt.%, そして 0.3 wt.% の 3 種類について調べた。圧力は、0.5 kPa から 4.5 kPa まで、0.5 kPa おきに調べた。図の一点を得るのに 3 回から 10 回の実験を行った。これは、データの信頼性を高めるためである。

空気の注入圧力が同一のときの、パターンの濃度の依存性について見る。パターンは、濃度の増加と共に、viscous fingering, viscoelastic fingering, そして single plane cracking へと遷移してゆく場合と、viscous fingering から single plane cracking へと遷移してゆく場合があった。注入圧力が低い場合には viscoelastic fingering は見られなかった。前述したように、寒天の濃度が低いときには、粘性流動が支配的なメカニズムになるために、viscous fingering が見られる。濃度が高いときには、弾性の影響が強くなり single plane cracking が見られる。その中間の濃度（0.2 wt.%）で viscoelastic fingering が見られる。注入圧力

が小さく、破壊強度に達していないときにはパターン形成はみられなかった。

同一の濃度条件下においては、パターンは、0.1 wt.% の場合を除いて、圧力の増加と共に single plane cracking から viscoelastic fingering へと遷移してゆく。また、0.1 wt.% では、どの圧力においても、viscous fingering が生じた。これは、粘性が支配的な時には注入圧によらず viscous fingering が現れることを示している。Viscous fingering は chapter 2 で示したように、注入する流体と注入される流体の粘性の違いだけが問題であって、注入圧力は問題ではない。

#### 4.6.6 先端の軌跡の時間発展

実験で得られた数多くのパターンのうち、特に典型的なパターンについて、そのパターンの時間発展を一定のフレーム間隔で調べた。特に finger の先端の軌跡に注目して、その長さの時間発展を求めた。Viscous fingering, single plane cracking, viscoelastic fingering のそれぞれの代表的な 2 パターンを選んだ。ビデオコントロールプログラムを用いて、等フレーム間隔でパターンを再現した。テレビ画面上で finger の先端の位置を OHP シートにトレースした。これによって、先端の軌跡を得た。この軌跡の長さを時間に対してプロットしたものを Fig. 4-17 から Fig. 4-24 に示す。後に詳細に述べるが、viscoelastic fingering の結果は一つの実験でも先端によって異なる振る舞いをする。そこで、ここに示したすべてのパターンは、ひとつの先端に注目してその変化をプロットしている。

ビデオ画像において、境界の認識が可能となった時刻を、 $t=0$ 、長さ = 0 とおいた。この原点の取り方を採用したのは、画像データの処理のしやすさのためである。しかし、上に述べたように、viscous fingering については、成長は空気の注入と同時に始まるので、注入時刻と  $t=0$  とした時刻の差は微小である。Single plane cracking と viscoelastic fingering の場合には、空気の注入から、パターンの形成が始まるまでの時間は、およそ数十秒と非常に長い。しかも、その時間のばらつきが大きい。そのために、異なるパターンのデータを比較する場合には、注入時刻のかわりにパターンを確認できた時刻を原点としても、データの意味を失うことはない。

## Viscous fingering

Viscous fingering の軌跡の成長は、時間の経過とともに鈍ることを確認した。本研究や Paterson [12] の研究のような、境界のない viscous fingering の場合、軌跡の方程式は式 (2.1) で表される。この式から観察された viscous fingering の先端の軌跡の長さは、ほぼ  $t^{1/2}$  に比例すると考えられる。Figure 4-17, 4-18 に、時間に対する先端の軌跡の長さの変化をプロットしたものを示す。Figure 4-17 の実験条件は、寒天の濃度が 0.1 wt.%, 空気の注入圧が 1.5 kPa である。Figure 4-18 の実験条件は、寒天の濃度が 0.1 wt.%, 空気の注入圧が 3.0 kPa である。これは Fig. 4-10 に示したパターンについての結果である。それぞれの図は a に normal scale plot, b に log scale plot を示した。Normal scale plot からわかるように軌跡は上に凸な、時間の経過とともに成長が鈍ってゆくことが確認できた。更に得られた曲線が式 (2.1) で表せるようなべき乗則となっているのかを log scale plot から確認した。先端の成長はほぼ  $t^{1/2}$  の成長であることがわかった。実際のデータについて log をとって最小二乗法を用いて  $t$  の指数を求めると  $0.5 \pm 0.1$  以内にすべてのデータが収まった。この時の相関係数は 0.94 以上であった。

二つのパターンを比較すると、圧力によって  $t^{1/2}$  の係数が異なることがわかる。注入圧力が大きい方 (3.0 kPa) が係数は大きい。これは注入圧力が大きいほど、速い成長であることを意味している。

ここで、Paterson [12] が行った実験と本研究とでは、空気の注入の条件が異なることに注意しておく。Paterson の実験は注入速度が一定という条件であった。空気の注入圧力が一定であるという条件と注入速度が一定であるという条件の関係については、次節で議論する。

## Single plane cracking

Single plane cracking の先端の軌跡の長さは時間に比例していることを確認した。Figure 4-19, 4-20 に、時間に対する先端の軌跡の長さの変化をプロットしたものを示す。Figure 4-19 の実験条件は、寒天の濃度が 0.2 wt.%, 空気の注入圧力が 2.0 kPa である。Figure



4-20の実験条件は、寒天の濃度が0.2 wt.%，空気の注入圧力が1.5 kPaである。最小二乗法の結果、先端の成長速度がほぼ一定になる $t$ に比例した成長であることがわかった。

式(2.3)によれば、hydrofracturingの先端の成長は、ほぼ注入速度に比例する。言い換えれば注入速度に依存した成長である。先端の速度が一定であることは注入速度が一定であることを意味している。実際にこの実験のsingle plane crackngで見られた注入速度については、後で議論する。

### Viscoelastic fingering

Viscoelastic fingeringの先端の軌跡は他の2種類のパターンとは異なり、ふたつの異なる枝の成長過程がひとつのパターンでみられる。ひとつはsingle plane crackingと同様に時間に比例した長さをもつタイプの成長である。もうひとつの成長は長さの急激な増加を示すタイプの成長である。そのためviscoelastic fingeringの先端の成長は、このような瞬間的な先端の成長があった先端と、なかった先端に分類できる。この急激な成長は、viscoelastic fingeringの成長のシークエンスの説明で述べた分岐現象に相当している。すなわち、更なる分岐があった先端については、分岐の瞬間の急激な成長のために、長さの急激な増加が見られる。Figure 4-21 から Fig. 4-24 に、時間に対する先端の軌跡の長さの変化をプロットしたものを示す。Figure 4-21 と Fig. 4-22 は同じパターンの異なる先端の軌跡を示している。Figure 4-21 は分岐が起こらなかった先端の成長である。逆に、Fig. 4-22 は分岐が見られた先端の成長である。実験条件は、寒天濃度が0.2 wt.%，空気の注入圧力が3.0 kPaである。Figure 4-23 と Fig. 4-24 も同一のパターンの異なる先端の軌跡の長さを示す。実験条件は、寒天濃度が0.2 wt.%，空気の注入圧力が2.5 kPaである。Figure 4-23 は分岐が見られなかった先端、Fig. 4-24 は分岐が見られた先端についてのプロットである。

#### 4.6.7 空気の注入速度

得られた画像データをもとにして Fig. 4-10 から Fig. 4-12 に示した代表的なパターンについて、空気の注入速度の推定を行った。本研究の実験条件は空気と寒天の境界における圧力が一定であるというもので、注入量については制限をつけていない。そこでおのおの

のパターンにおける注入量の比較には意味がある。その手順を以下に示す。等フレーム間隔で、画面から OHP シートに境界線をトレースした。前のフレームに対して増加した領域を  $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$  の方眼紙で box counting した。Box counting した結果を、縮尺（およそ  $4/5$ ）をもとにして、実際の面積になおした。フレーム間隔を用いて、等フレームごとの注入量として表されていたデータを単位時間（1 秒）あたりの注入量（注入速度）に変換した。時刻 0 は、やはりパターンを認識した時刻にとった。理由は前述のとおりである。Viscous fingering と viscoelastic fingering は 2 フレーム（ $1/15$  秒）毎、single plane cracking は 4 フレーム（ $2/15$  秒）毎に box counting を行った。以下にその結果を述べる。

### Viscous fingering

Figure 4-25 に、viscous fingering に見られた空気の注入量の時間変化を示す。注入量は時間とともに増加しているが、最終的に一定に到達するものと考えられる。注入速度が一定に到達することと、先端の長さが  $t^{1/2}$  に比例するような成長があらわれることは、式 (2.1) から明らかなように矛盾していない。

### Single plane cracking

Figure 4-26 に、single plane cracking にみられた空気の注入量の時間変化を示す。注入の初期において急激な注入速度の増加がみられたあと、注入速度は一定に到達するものと考えられる。Single plane cracking の場合、先端の速度は注入量に比例しているため、注入速度が一定になることと、先端の速度が一定であることは矛盾しない。

### Viscoelastic fingering

Figure 4-27 に、viscoelastic fingering の空気の注入量の時間変化を示す。全体として注入速度は増加傾向にある。先端の分岐による急激な面積の増加が、何度か認められる。そのため、分岐を起こしたときと起こさなかったときの注入速度が異なる。

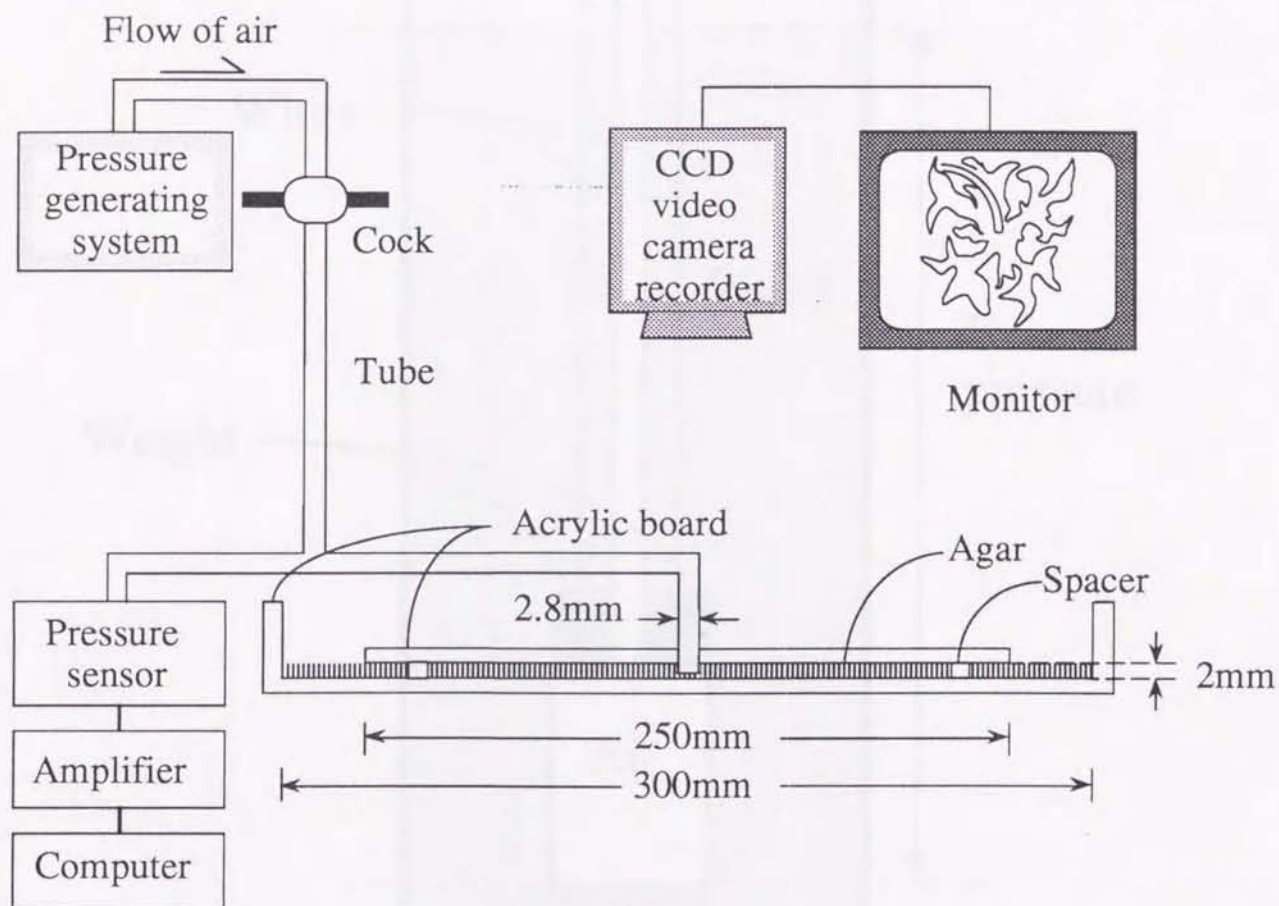


Figure 4-1. Schematic diagram of experimental system. An rectangular Hele-Shaw cell (250 mm  $\times$  250 mm) is placed under the CCD video camera/recorder that records a growing pattern. A diffusion type semiconductor pressure sensor is used to measure the injection air pressure. Time evolution of the pressure is recorded in a computer via 12 bits AD converter.

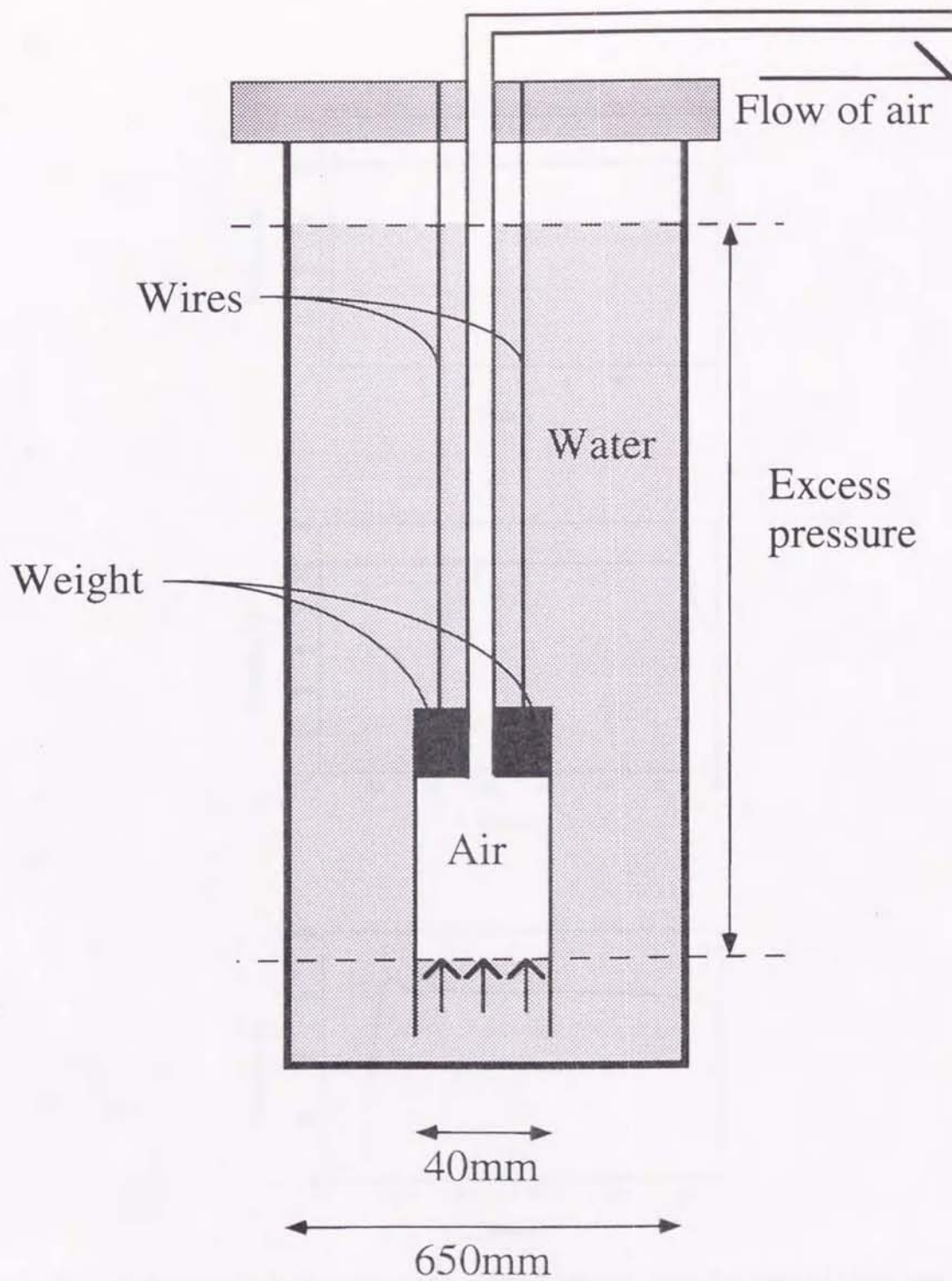
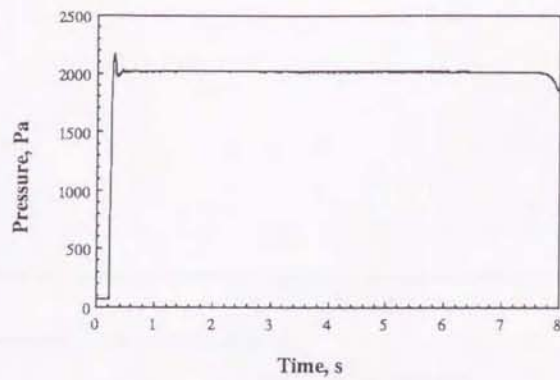
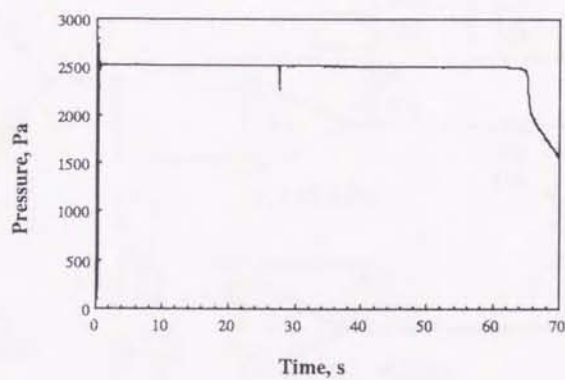


Figure 4-2. Schematic sketch of the pressure generating system. The air in the cup is applied by excess pressure. The pressure is controlled by changing the depth of the cup.

a)



b)



c)

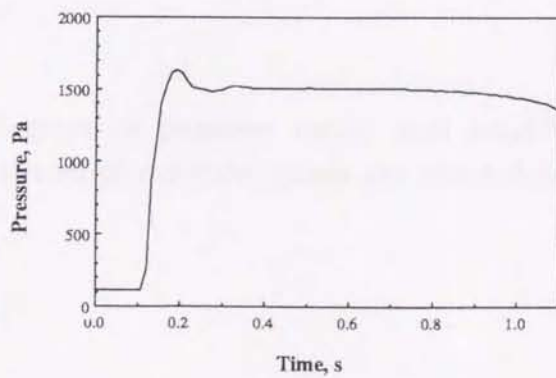


Figure 4-3. The pressure of injecting air is plotted against time for typical three patterns. a) Single plane cracking. b) Viscoelastic fingering. c) Viscous fingering. The detail of the difference of the patterns is in Chapter 4.

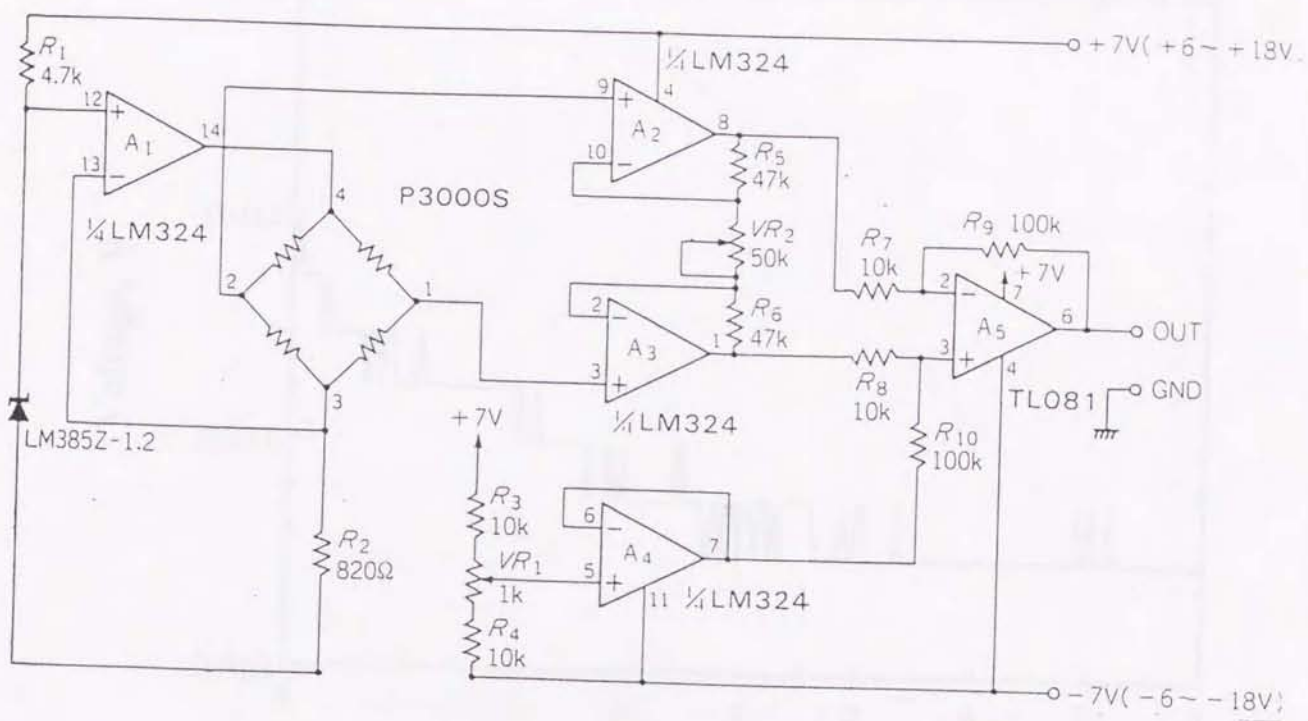


Figure 4-4. Wiring diagram of pressure sensor and amplifier (after, Onodera and Tagano [26]). The resistances of common values are selected to be same with an accuracy of the order of 1  $\Omega$ .

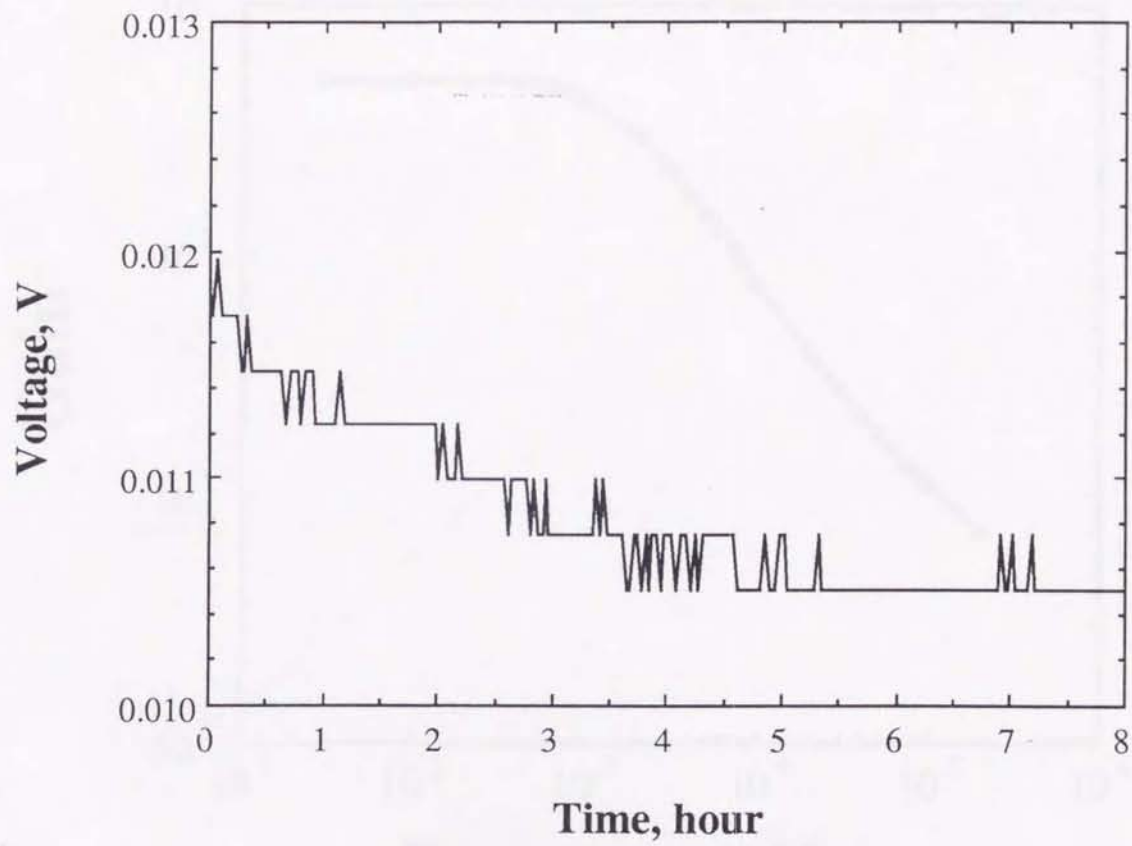


Figure 4-5. Fluctuation of the amplifier. The electric circuit reaches the stable condition after three hours.

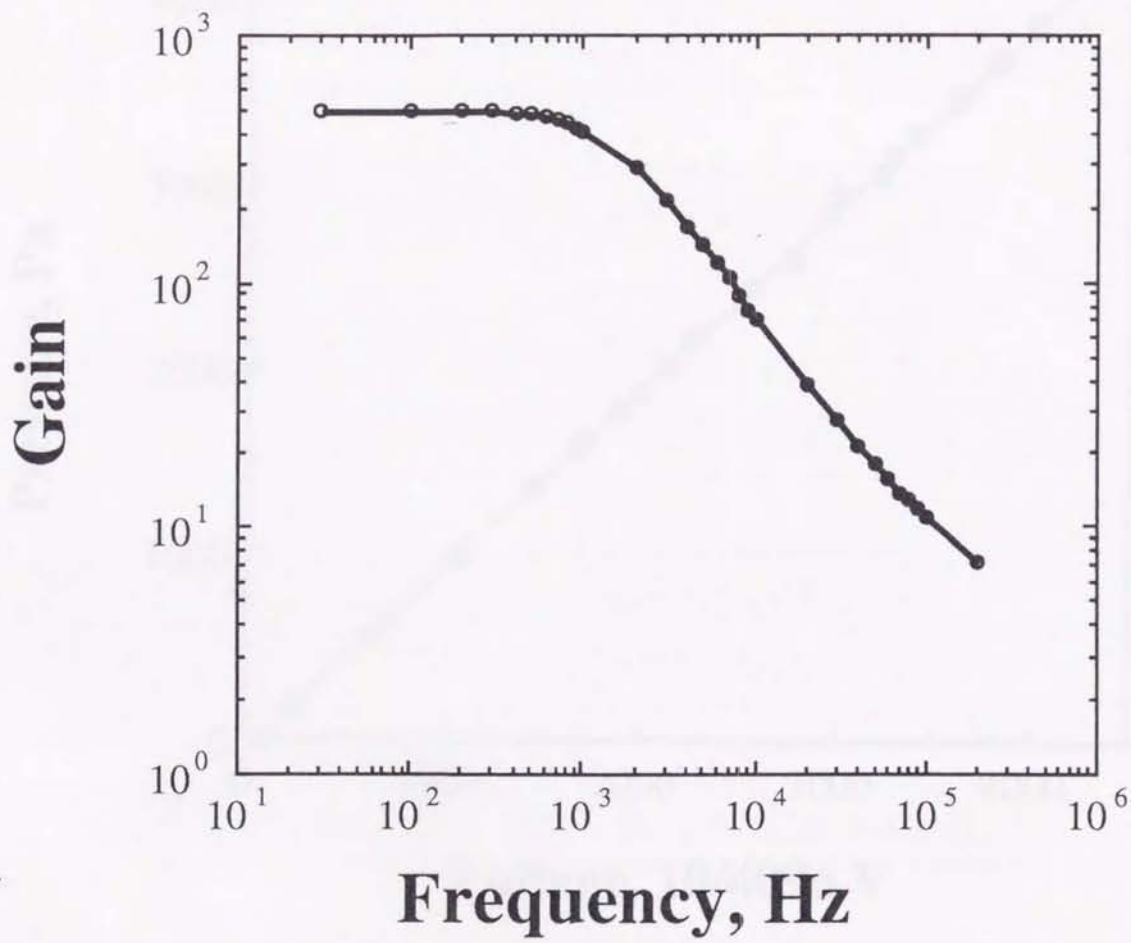


Figure 4-6. Frequency dependence of amplifier.



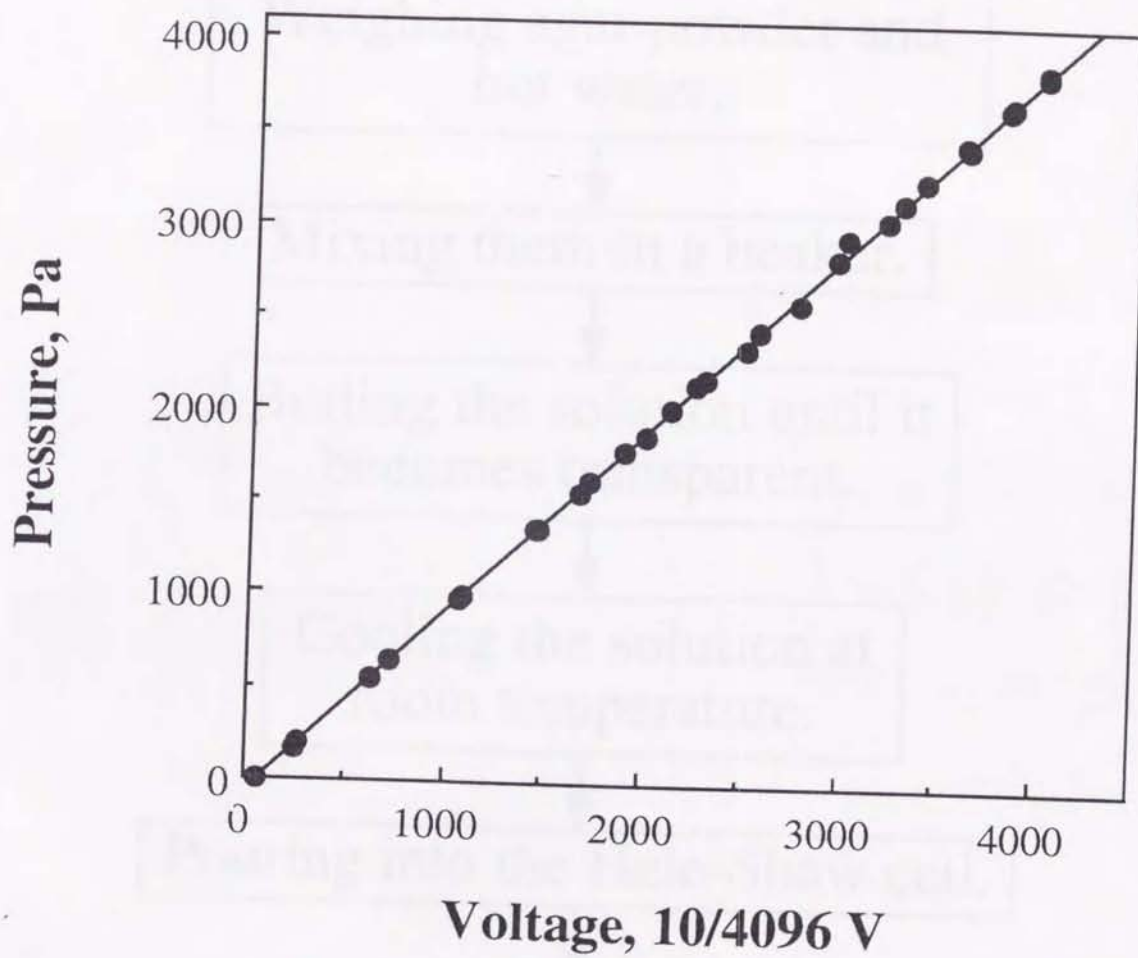


Figure 4-7. Calibration curves of the pressure monitoring system. Small pressure range. The regression curve  $Y = 0.97714X - 73.124$  is determined using the least square method. Its correlation coefficient is 1.000.

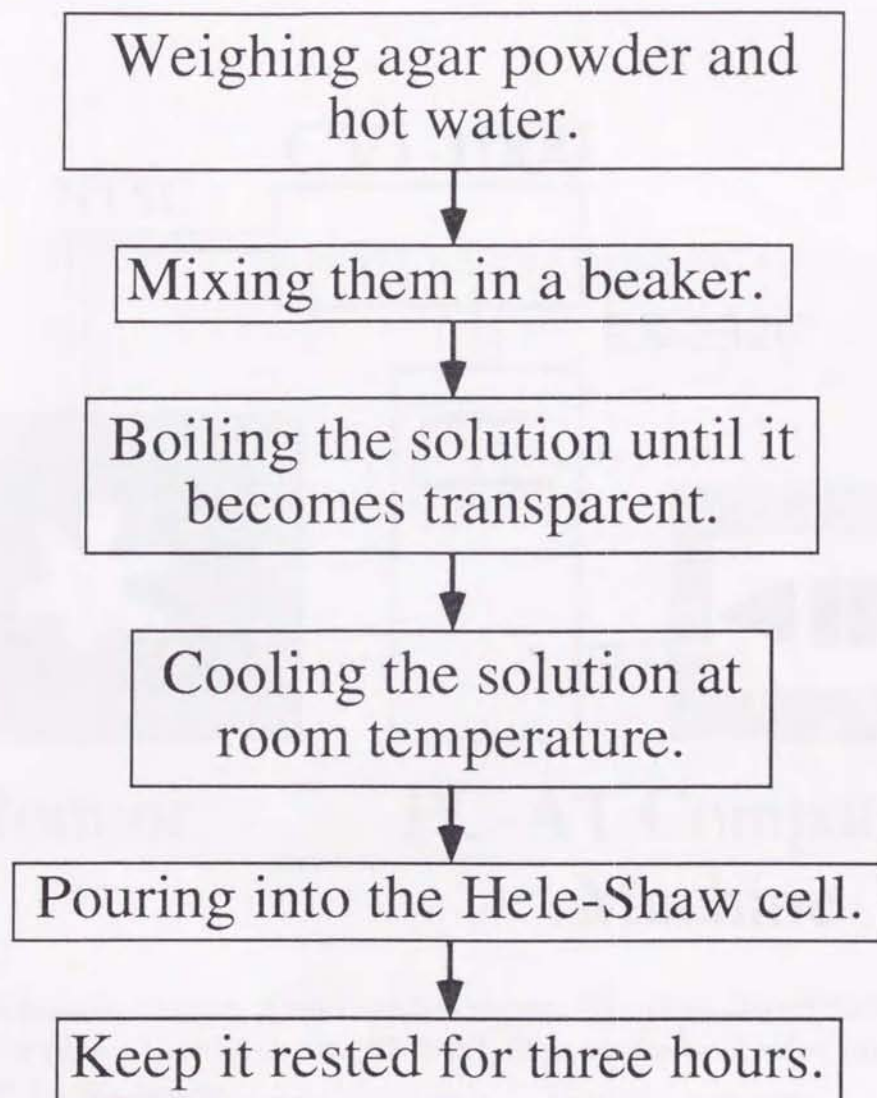


Figure 4-8. Flow chart for sample preparation.

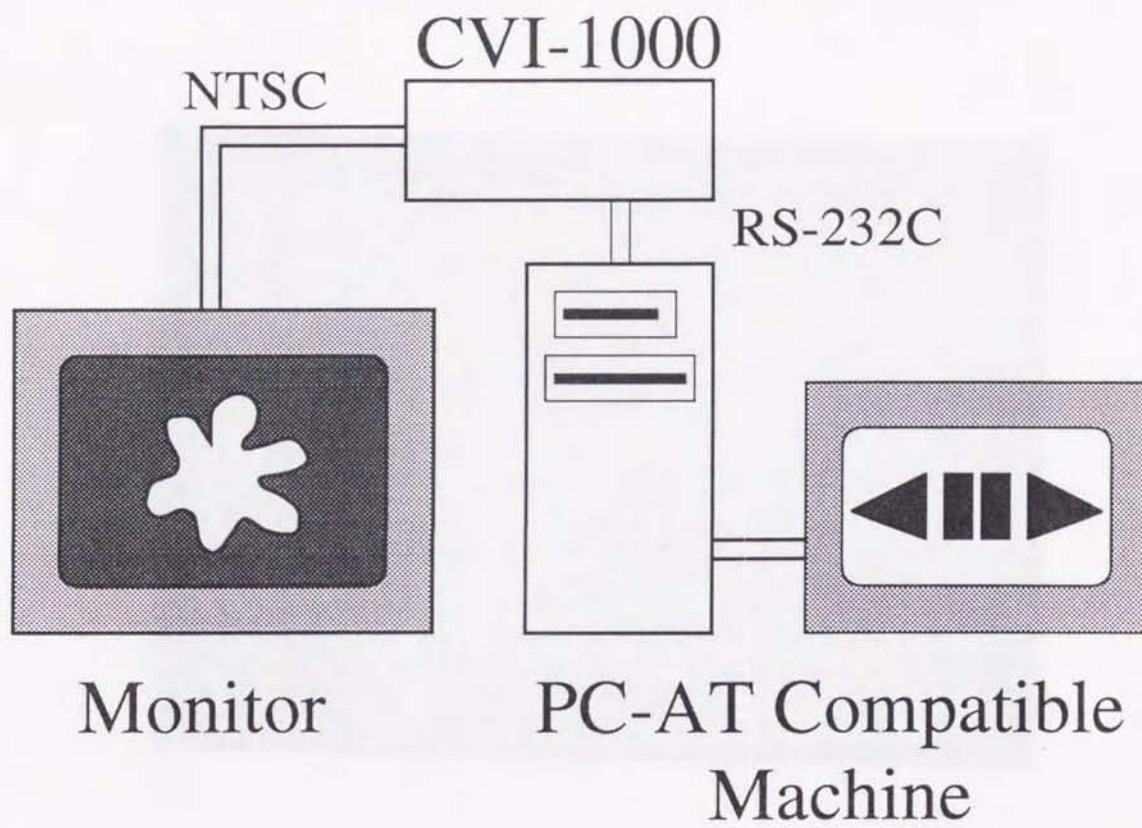


Figure 4-9. Schematic diagram of video control system. The video player (SONY CVI-1000) is controlled by IBM AT computer via. RS-232C. Even one frame of video image (1/30sec.) is controllable by this system.

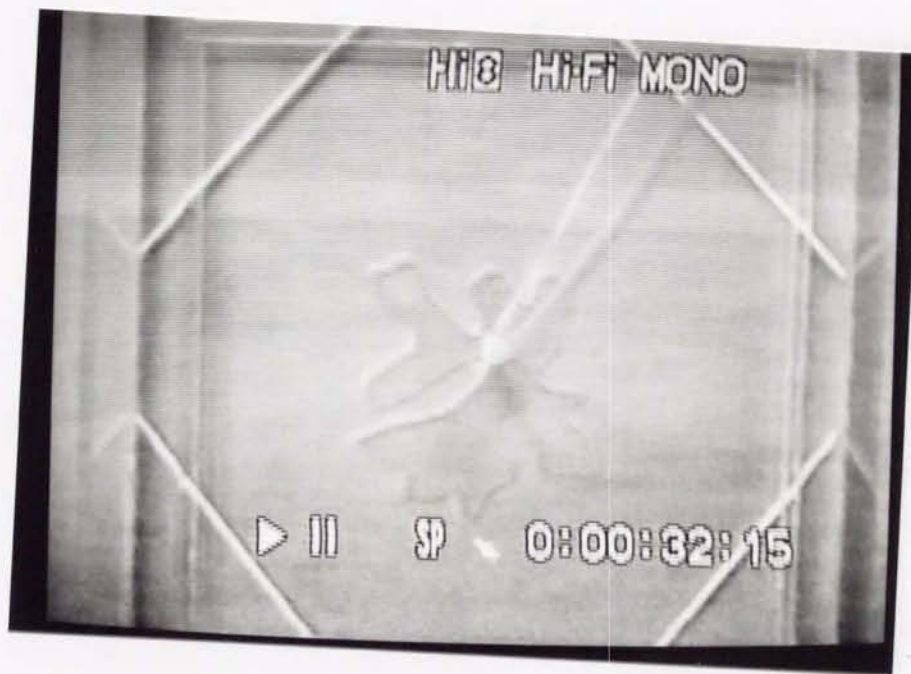


Figure 4-10. Example of viscous fingering. The experiment is carried out under the condition of 0.1 wt.% agar concentration and 2.0 kPa injection pressure. agar concentration and

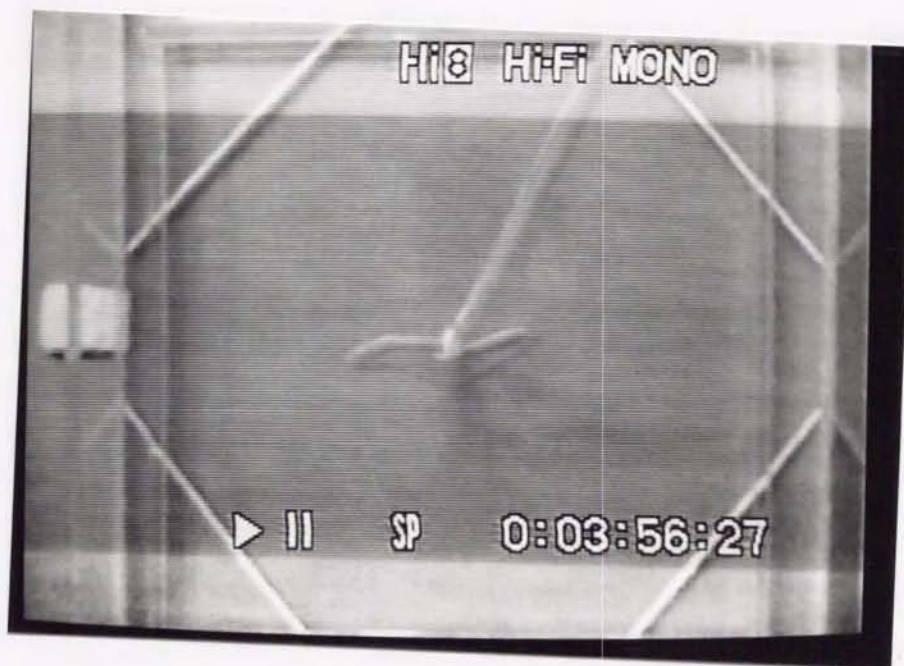
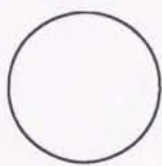


Figure 4-11. Example of single plane cracking. The experiment is carried out under the condition of 0.2 wt.% agar concentration and 1.5 kPa injection pressure.

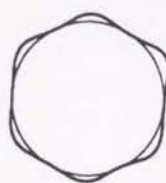


Figure 4-12. Example of viscoelastic fingering. The experiment is carried out under the condition of 0.2 wt.% agar concentration and 3.0 kPa injection pressure.

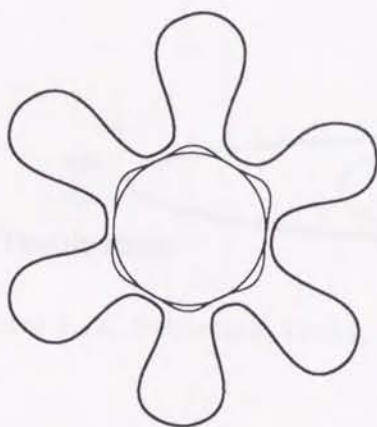
a)



b)



c)



d)

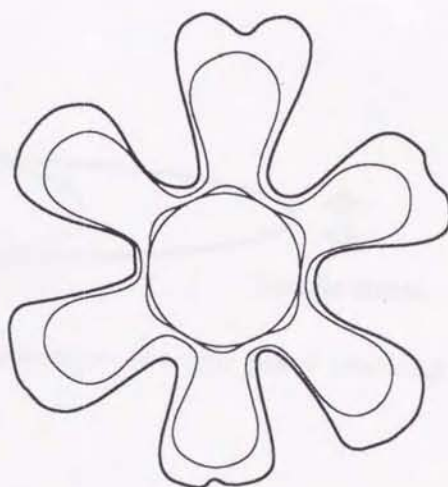
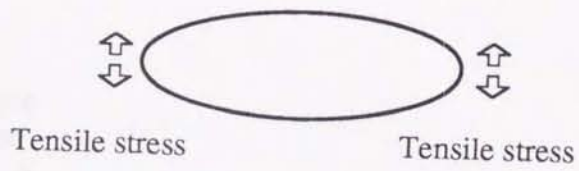


Figure 4-13. Schematic sketch of the growth sequence of viscous fingering.

a)



b)

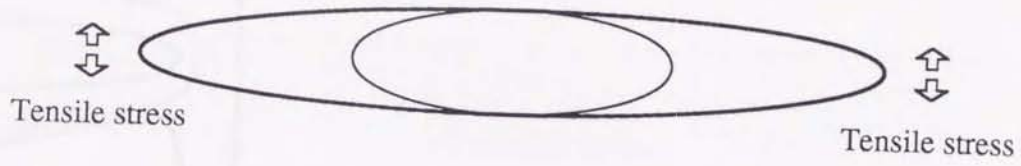


Figure 4-14. Schematic sketch of the growth sequence of single plane cracking.



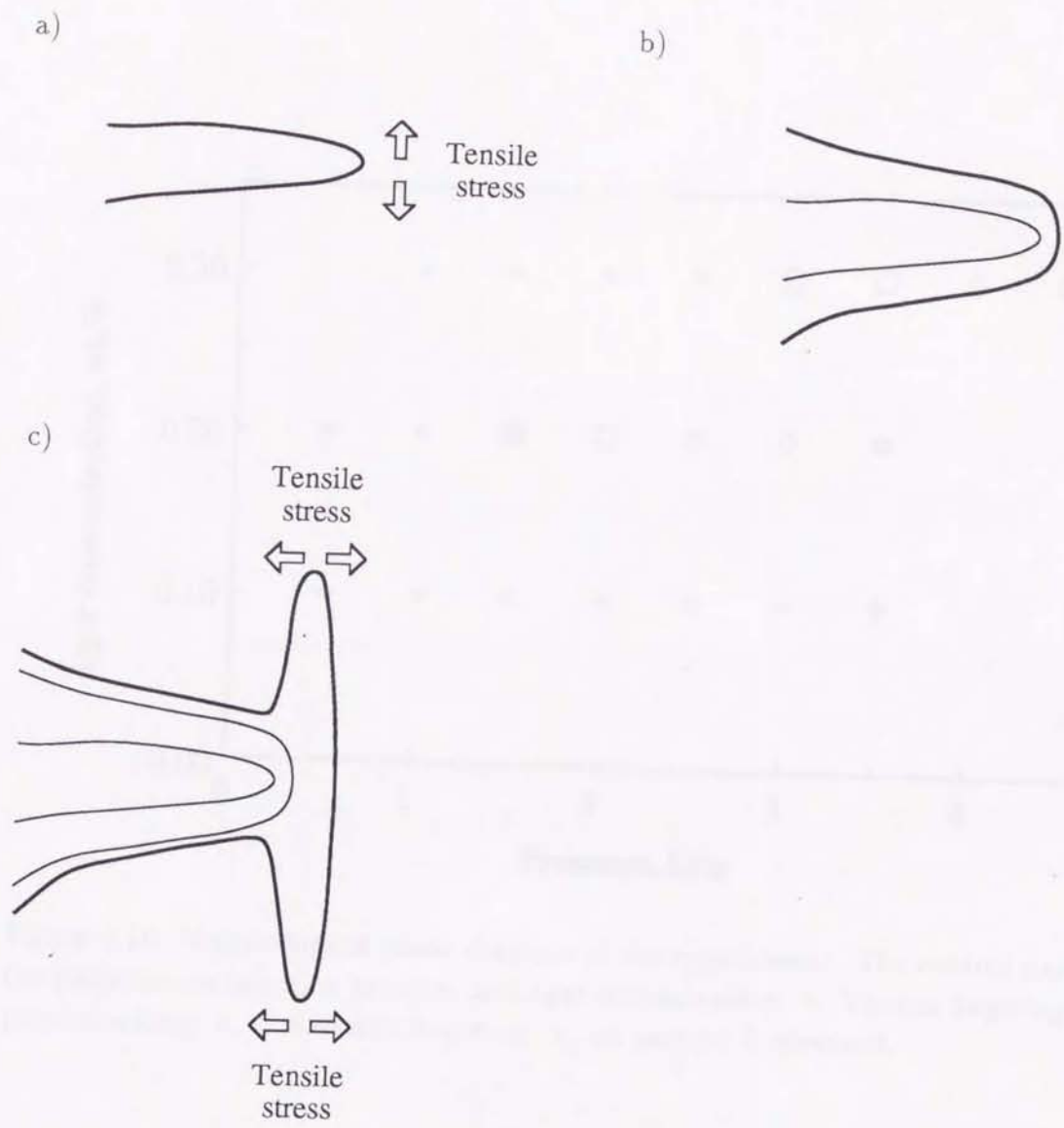


Figure 4-15. Schematic sketch of the growth sequence of viscoelastic fingering.

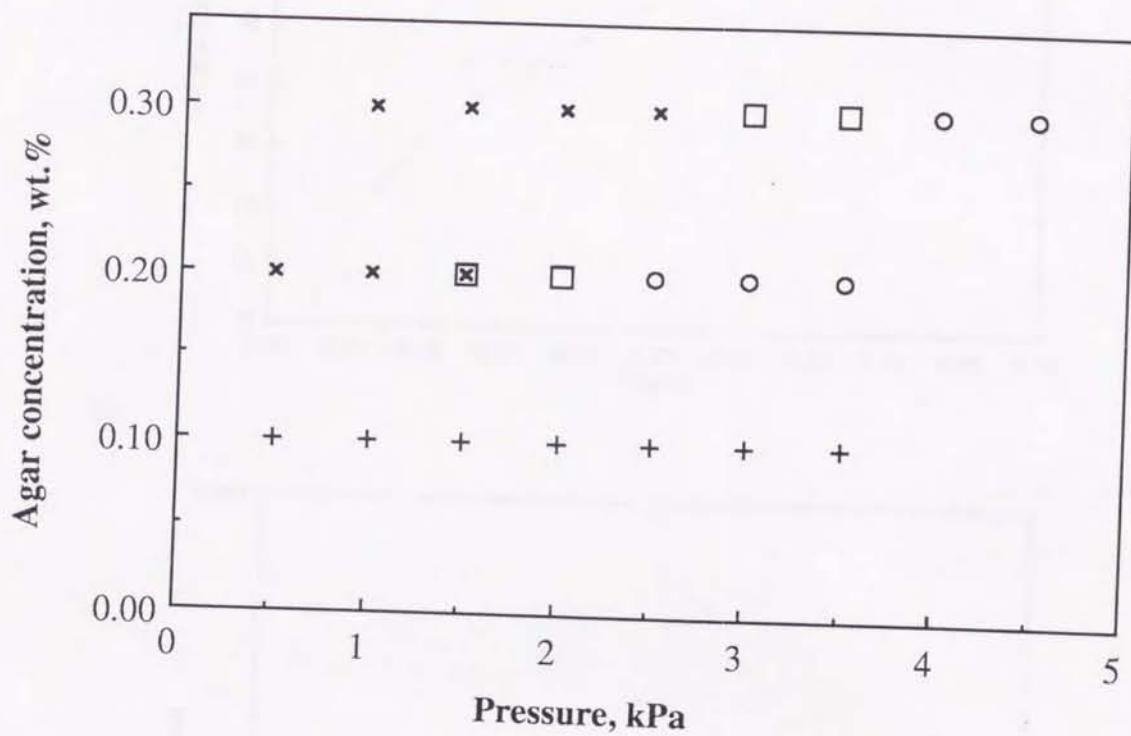
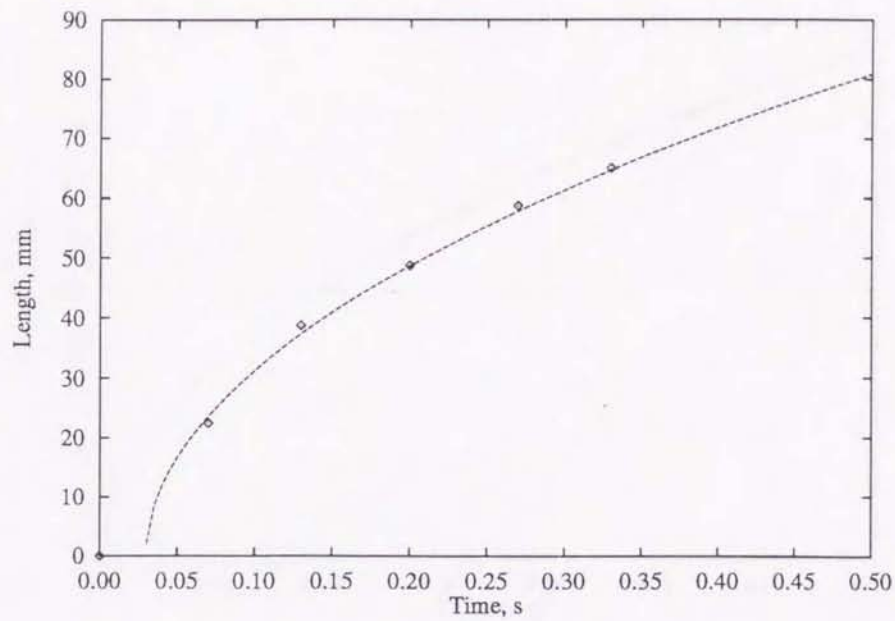


Figure 4-16. Morphological phase diagram of the experiments. The control parameters of the patterns are injection pressure and agar concentration. +, Viscous fingering: □, single plane cracking: ○, viscoelastic fingering: x, no pattern is observed.

a)



b)

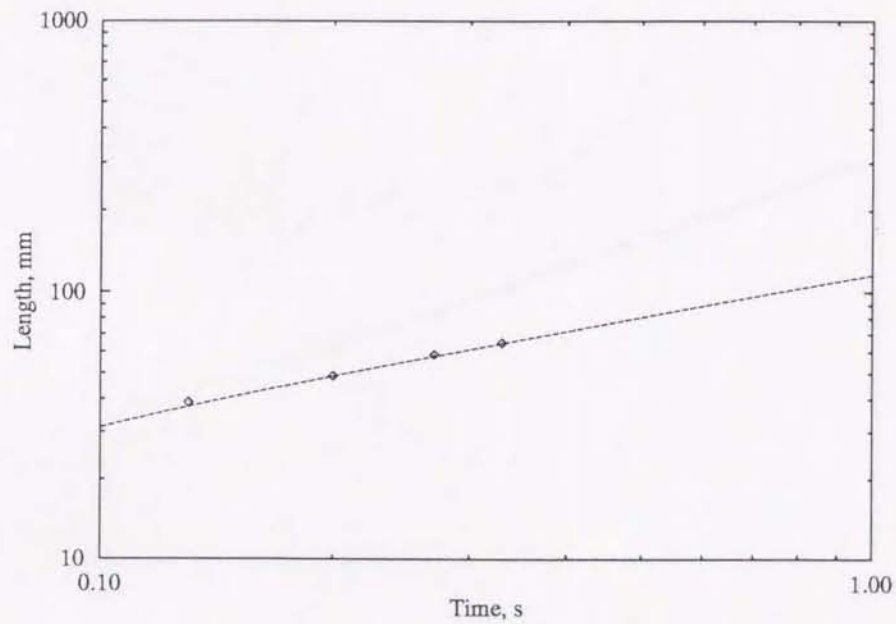
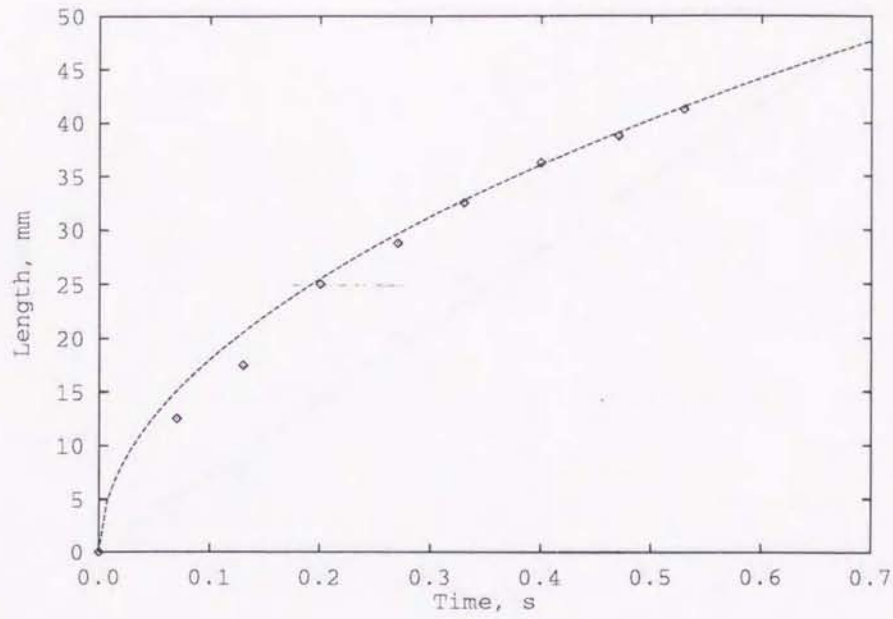


Figure 4-17. Time dependence of the length of the growing tip of viscous fingering (1). a) Normal scale plot. b) Log scale plot.

a)



b)

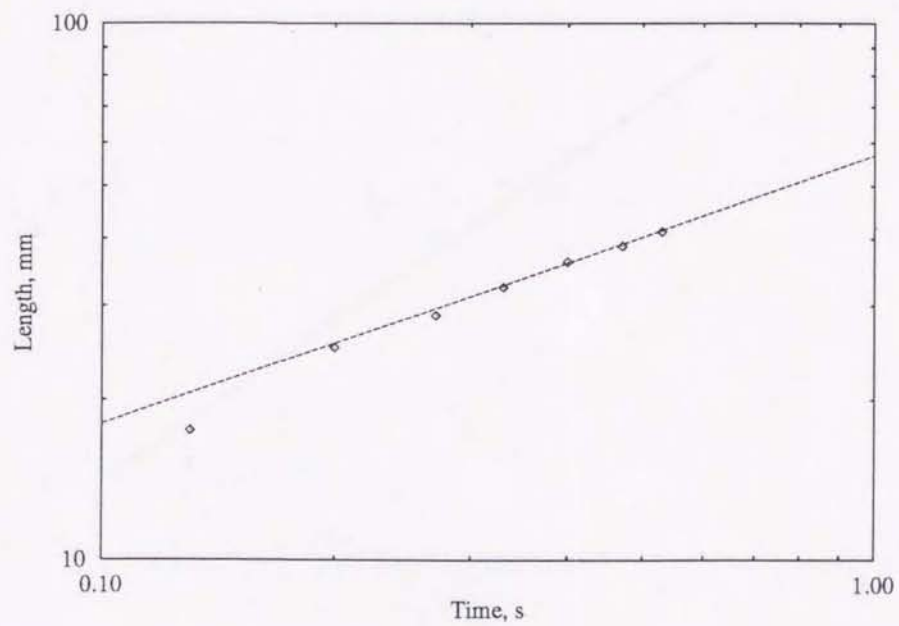
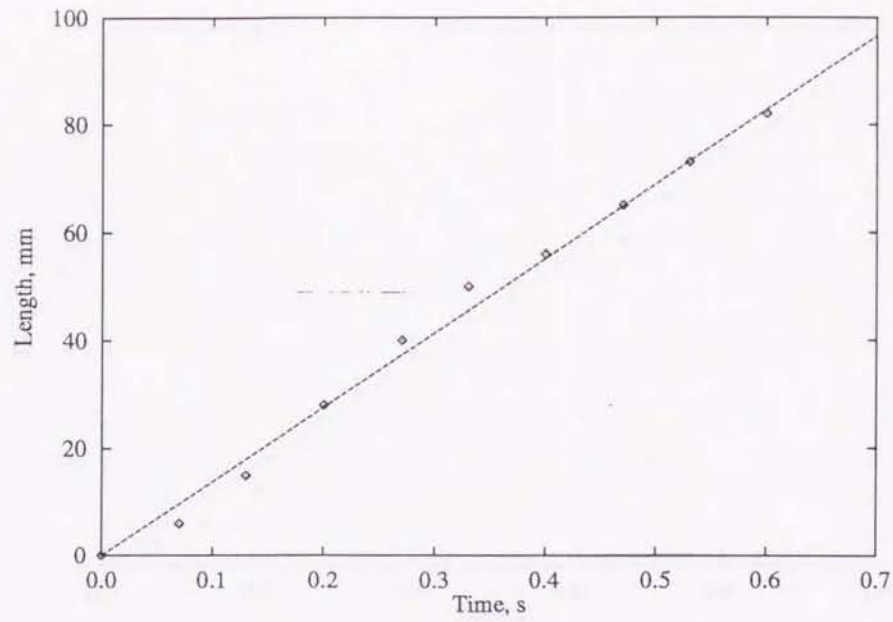


Figure 4-18. Time dependence of the length of the growing tip of viscous fingering (2). a) Normal scale plot. b) Log scale plot.

a)



b)

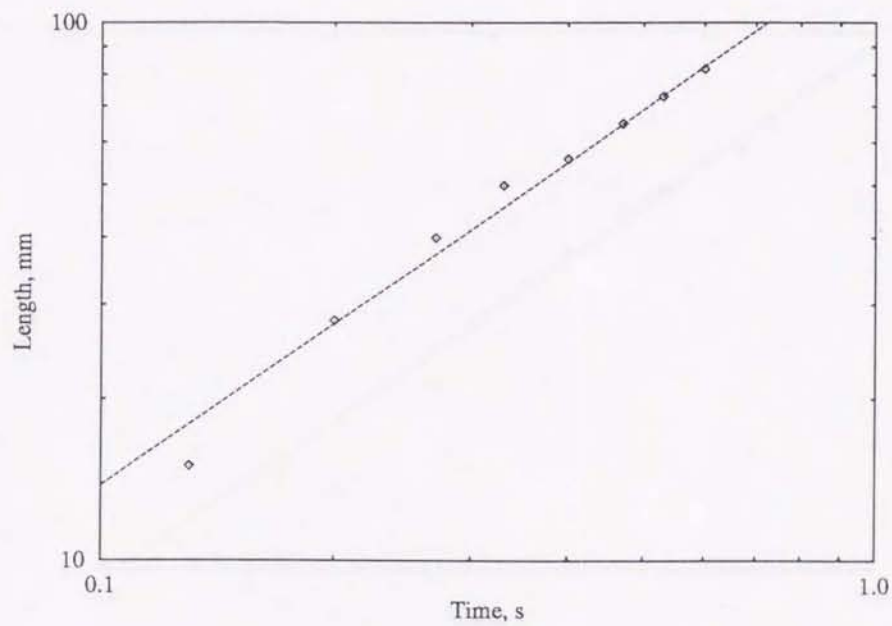
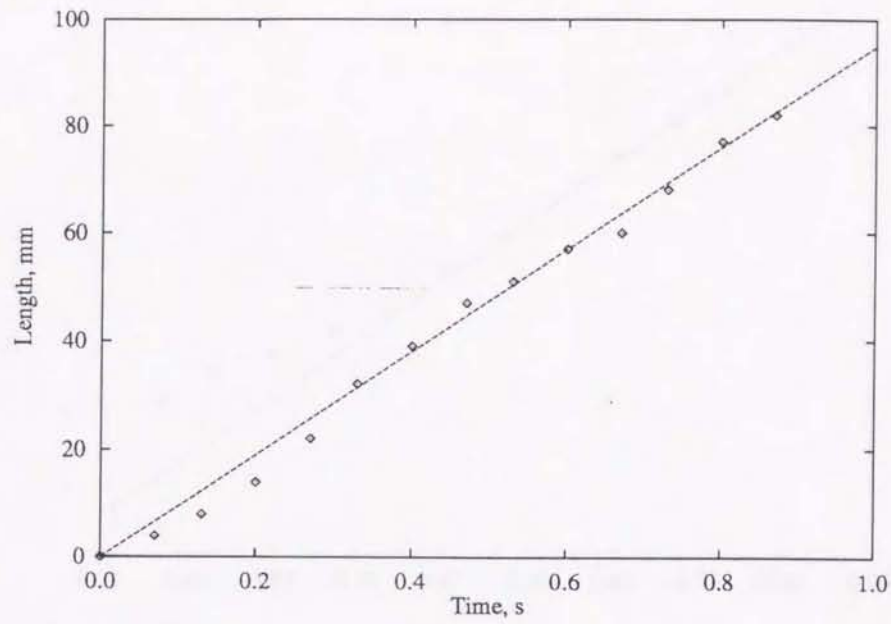


Figure 4-19. Time dependence of the length of the growing tip of single plane cracking (1).  
a) Normal scale plot. b) Log scale plot. The growth rate (velocity of crack tip) is constant.

a)



b)

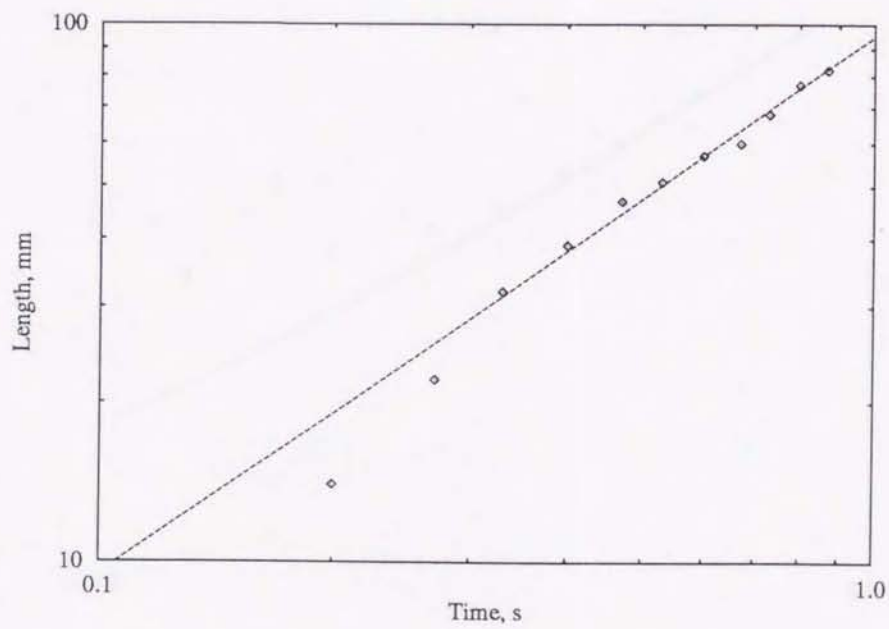
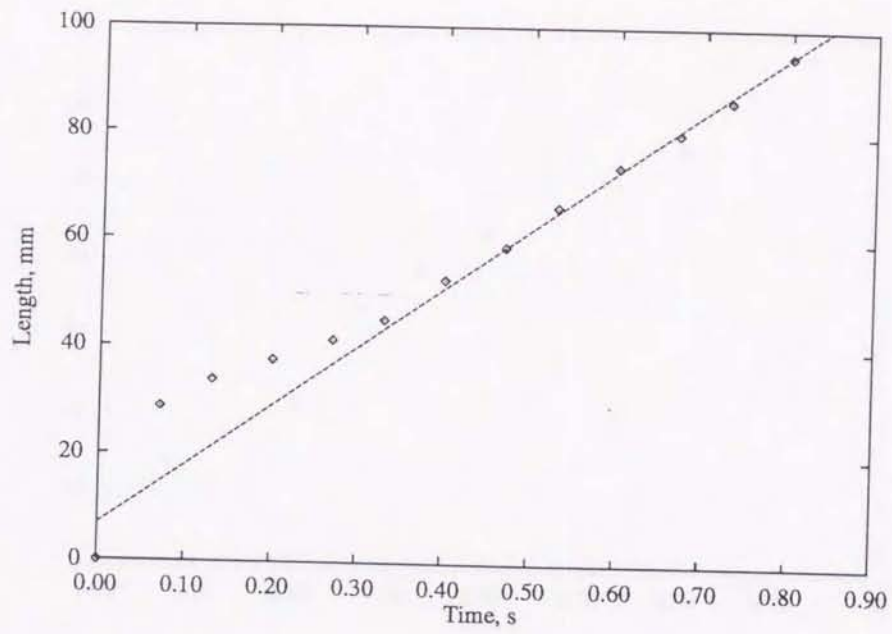


Figure 4-20. Time dependence of the length of the growing tip of single plane cracking (2).  
a) Normal scale plot. b) Log scale plot. The growth rate (velocity of crack tip) is constant.

a)



b)

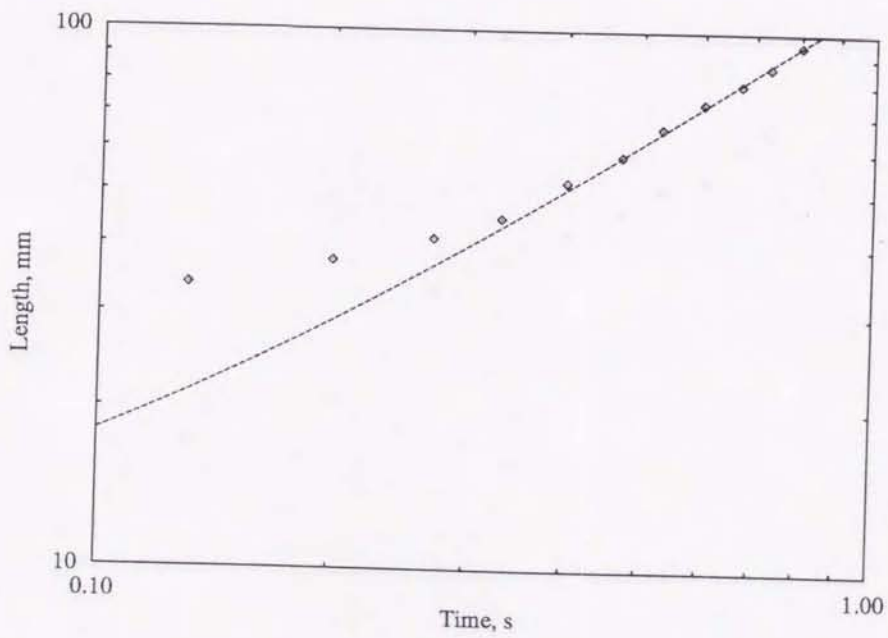
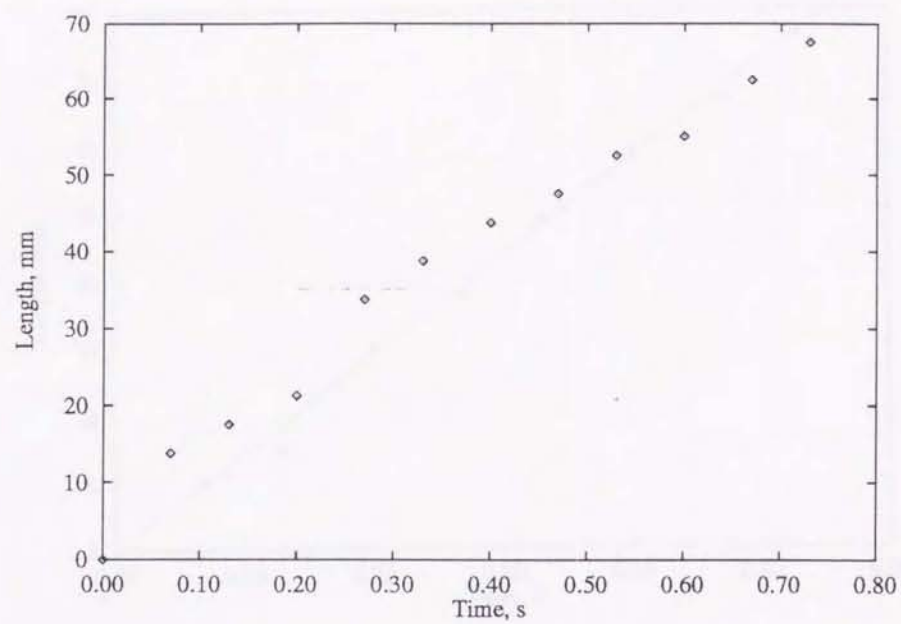


Figure 4-21. Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (1).  
a) Normal scale plot. b) Log scale plot.

a)



b)

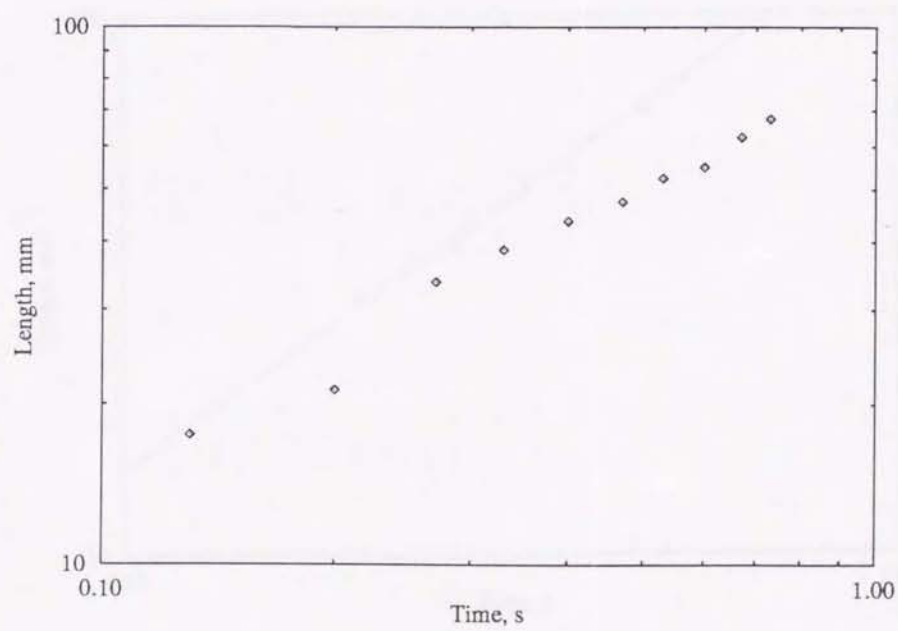
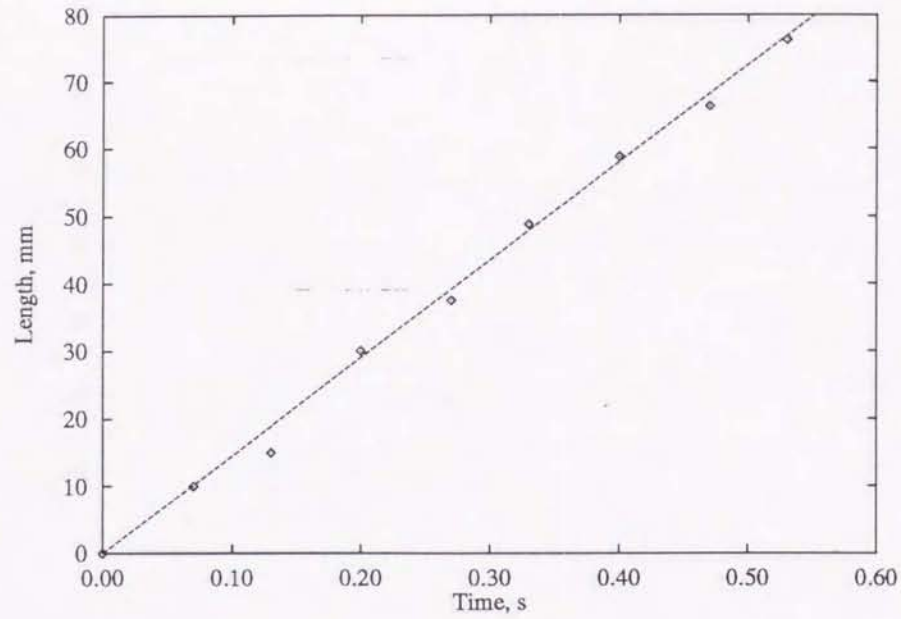


Figure 4-22. Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (2).  
a) Normal scale plot. b) Log scale plot.



a)



b)

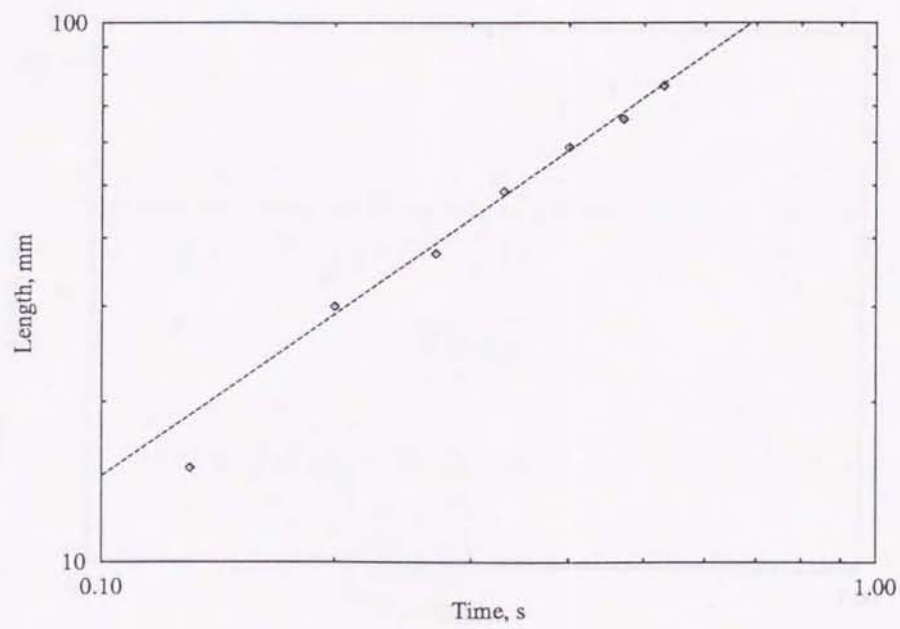
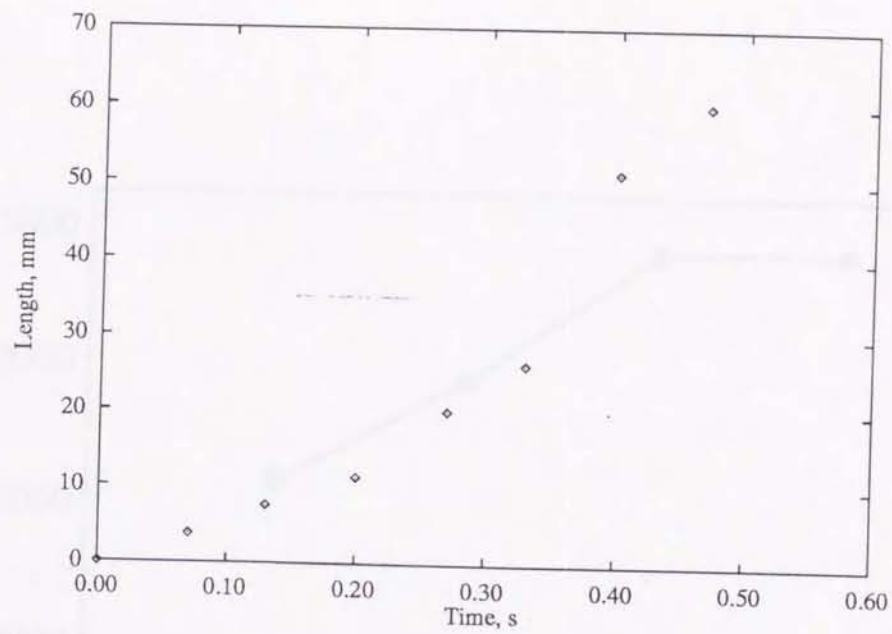


Figure 4-23. Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (3).  
a) Normal scale plot. b) Log scale plot.

a)



b)

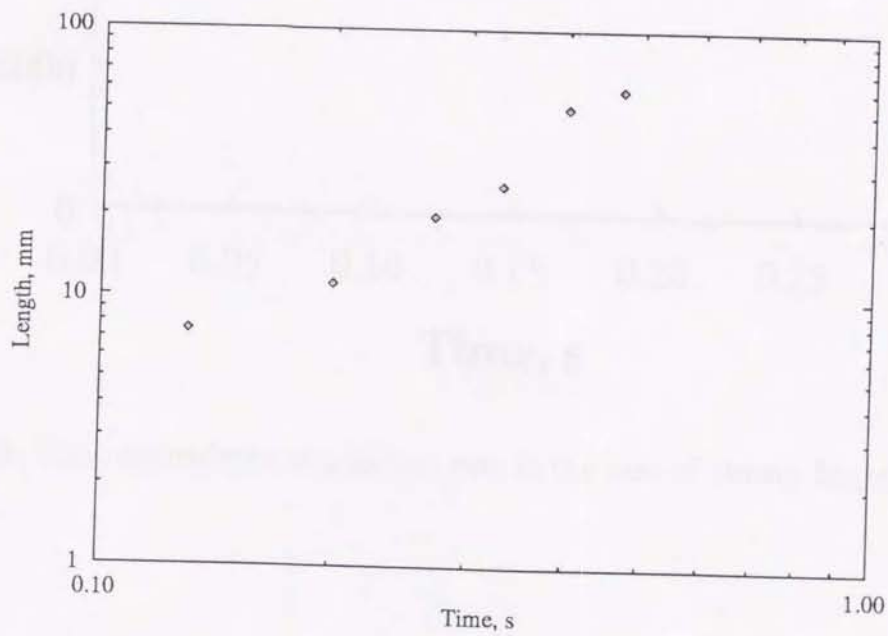


Figure 4-24. Time dependence of the length of the growing tip of viscoelastic fingering (4).  
a) Normal scale plot. b) Log scale plot.

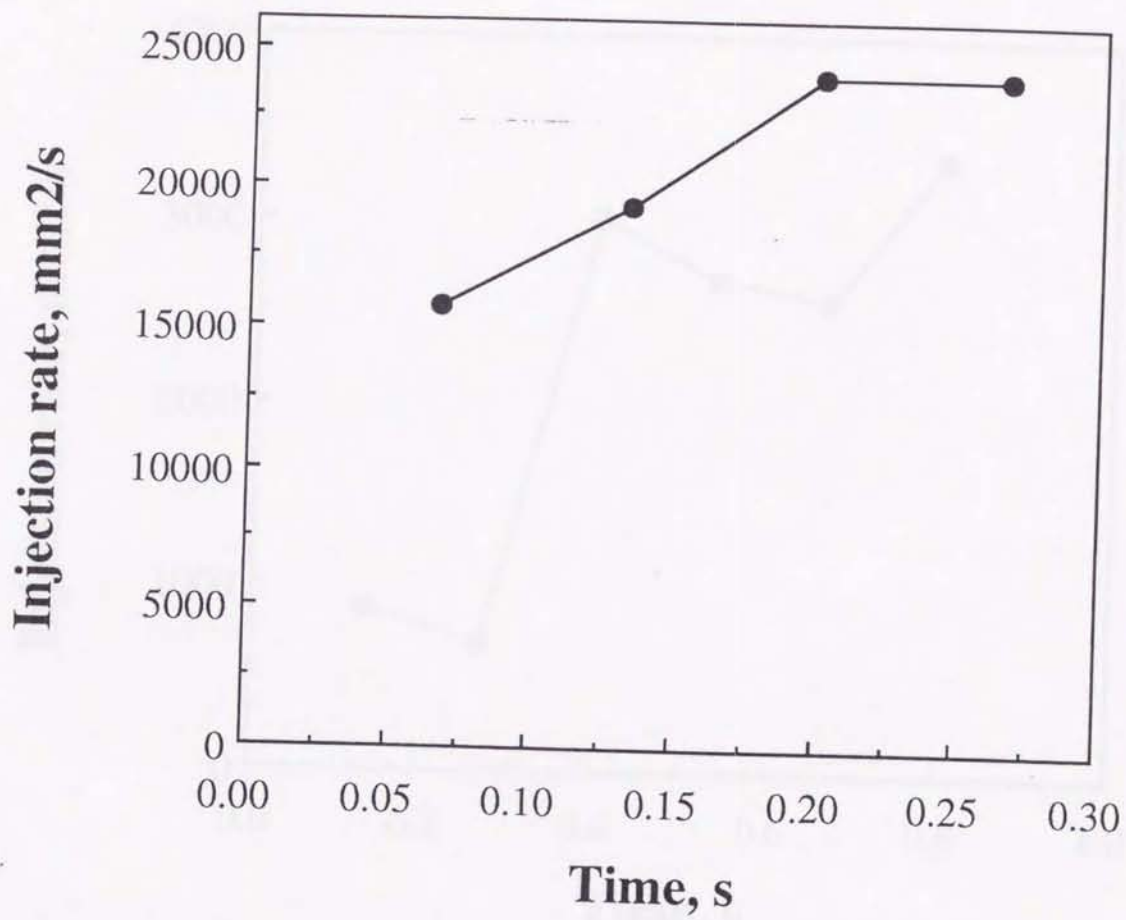


Figure 4-25. Time dependence of injection rate in the case of viscous fingering.

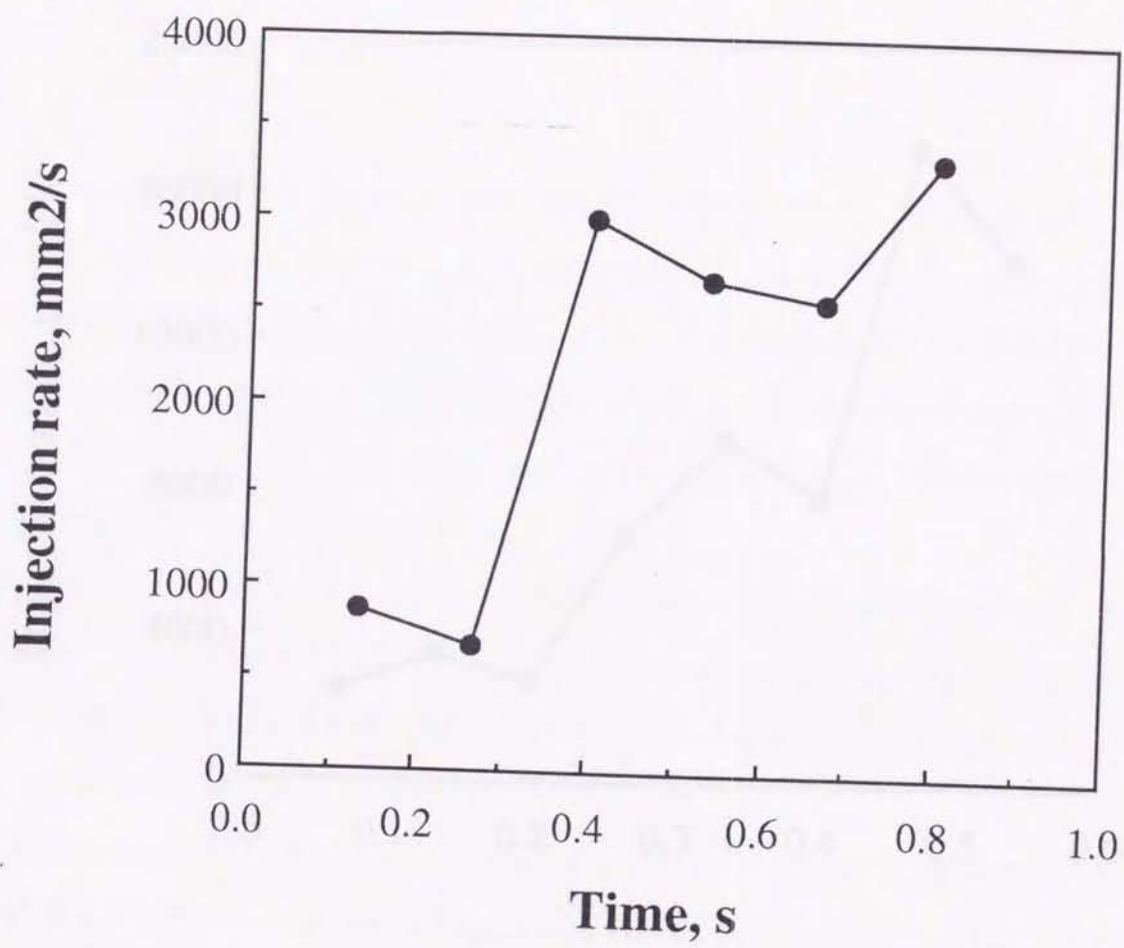


Figure 4-26. Time dependence of injection rate in the case of single plane cracking.

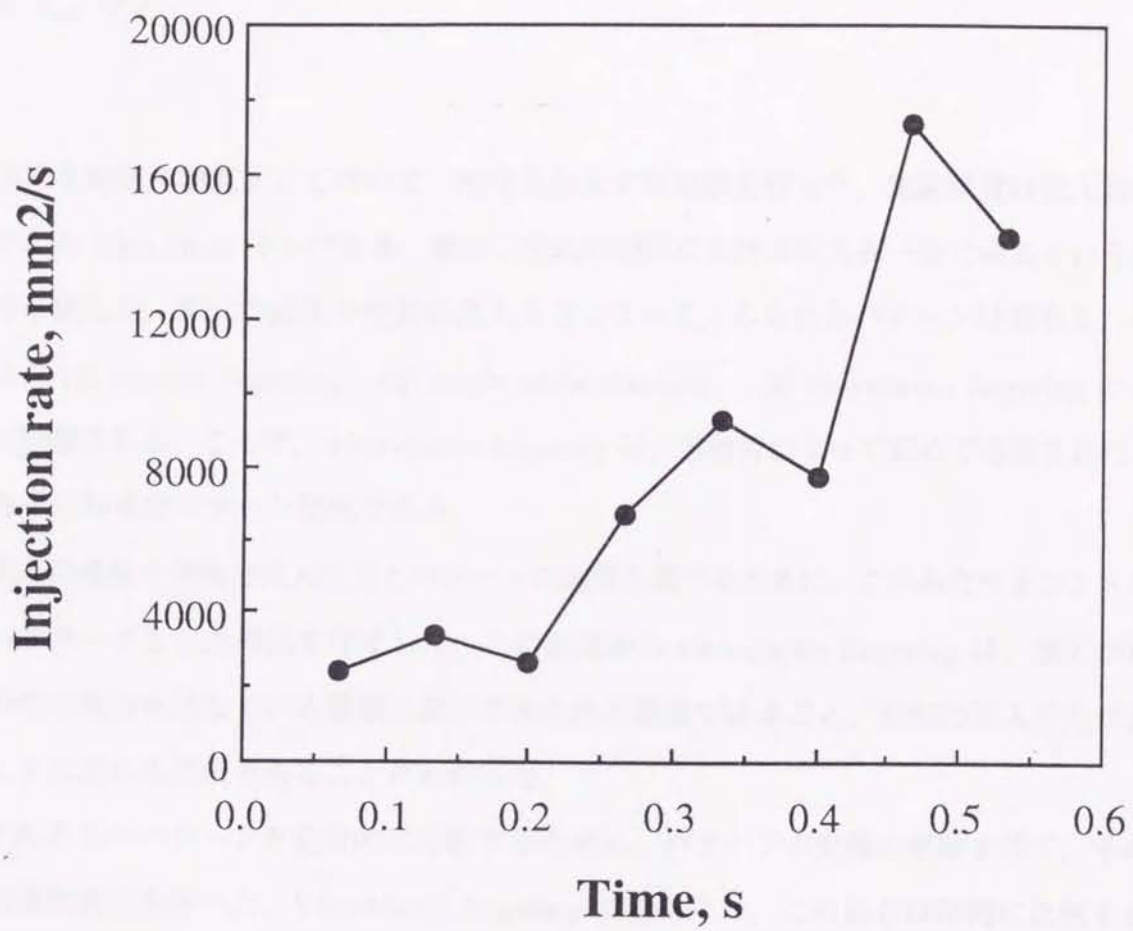


Figure 4-27. Time dependence of injection rate in the case of viscoelastic fingering.

## Chapter 5

### まとめ

寒天を粘弾性物質として用いて、流体を注入する実験を行った。実験装置は注入源が点源である Hele-Shaw セルである。寒天と空気の境界における圧力が一定であるという境界条件を課した。寒天の濃度や空気の注入圧力によって、みられるパターンは異なる。それらは、(1) viscous fingering, (2) single plane cracking, (3) viscoelastic fingering の3種類に分類される。ここで、viscoelastic fingering は、本研究によって初めて確認された、粘弾性体に特有なパターン形成である。

寒天の濃度や空気の注入圧力とパターンの関係を調べるために、このふたつをコントロールパラメータとした相図を作成した。この結果から viscoelastic fingering は、寒天が粘性と弾性の両方を示している領域においてみられる現象であること、空気の注入圧力が大きいときに現れる現象であることがわかった。

それぞれのパターンを定量的に比較するために、パターンの先端の軌跡を得て、その長さの時間変化を調べた。Viscoelastic fingering の場合には、この長さは時間に比例する形で表される。ただし、先端における分岐が起こる場合には、この長さは急激な増加を示す。

Viscoelastic fingering は、粘弾性物質におこる流動と破壊という両方の性質を反映したパターン形成である。自然界において、粘弾性物質に流体が侵入する現象は多い。しかし、パターン形成を含めこの現象に関する解析・理論および実験は進んでいない。本研究で得られたデータ (viscoelastic fingering, viscous fingering, single plane cracking) は、現在のところ、この「粘弾性体に流体を注入したときにみられる現象」について解明を進める

ための唯一の資料である。

## 謝辞

本研究を終始ご指導して頂いた、筑波大学物理工学系・小川泰教授に感謝致します。実験を行ったことのない私に対して一から手ほどきをされ、私の疑問点に対して的確なアドバイスを頂いた、筑波大学物理工学系・平田隆幸博士に感謝致します。私の不注意な点を指摘して頂いた、筑波大学物理工学系・鈴木哲郎教授、筑波大学物理工学系・寺島浩助教授、筑波大学地球科学系・中野孝教助教授に感謝致します。本研究を行うにあたって、たくさんのお言葉を頂き手伝いもして頂いた、筑波大学物理工学系・中島善人氏に感謝致します。研究内容について数々のコメントを頂いた、筑波大学工学研究科・姫野学氏、渡辺慶規氏、筑波大学理工学研究科・手嶋吉法氏に感謝致します。また、論文執筆中に生じた問題の解決に協力して頂いた、筑波大学工学研究科・清水大志氏、筑波大学理工学研究科・本村義和氏、石井要氏に感謝致します。

私の3年間の研究をゆるし、励ましてくれた妻・吉野多美枝、いつも笑顔で勇気づけてくれた長女・創子、私達家族の生活を支えてくれた鈴木治子、吉野実枝子に感謝致します。彼女達全員の理解がなければ、この研究を行うことは不可能でした。



## Appendix A

### Viscous fingering

#### A.1 Viscous fingering の基礎方程式

Hele-Shaw セル内の流体の運動は、圧力の Laplace 方程式で表される ( Bensimon *et al.* [10]). 以下に、Hele-Shaw セル内の流体の運動が、圧力の Laplace 方程式でいかにして記述されるかをみてゆく。座標系は Fig. 2-1 で定義された直交座標系を用いる。Figure 2-1 では、平行平板に平行な面に  $x$ - $y$  座標をとり、垂直な方向に  $z$  座標をとった。

流体が非圧縮であると仮定する。質量保存の式 (連続の式) は、速度ベクトルを  $\mathbf{v}$  とおくと、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.1})$$

である。考えている流れが、慣性を無視できるような粘性の効果が卓越した現象であり、定常流であると仮定すると、運動方程式 (Navier-Stokes 方程式) は、Stokes 方程式に近似でき、

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{v},$$

と表される。ここで、 $\rho$  は流体の密度、 $P$  は圧力、 $\mu$  は流体の粘性係数を表す。この仮定は viscous fingering の成長速度から考えても妥当なものである。また、平板と流体の境界 ( $z = \pm b/2$ ) における境界条件は、

$$\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

である。これは、固体境界層と呼ばれる流体力学では、しばしば用いられる仮定である。

物理的には、粘性流体が平板に接している部分において、固定されていることを意味している。

さらに流体が非圧縮流体であり、考えている流れが  $x$ - $y$  平面における一方向流であると仮定する。上に示した境界条件（固体境界層）と運動方程式から、このときの Hele-Shaw セルにおける  $z$  方向の速度分布は 2 次元 Poiseuille 流となる。仮定より、速度分布は  $z$  方向のみに依存し、

$$v(z) = V_0 \left\{ 1 - \frac{z^2}{d^2} \right\},$$

である（例えば、Landau and Lifshitz [27]）。ここで、 $V_0$  は、

$$V_0 = \frac{\nabla P d^2}{2\mu},$$

である。

このとき、もとの運動方程式は  $z$  方向の平均速度  $\bar{v}$  を用いて、

$$\bar{v}_i(x, y) = -K_i \nabla P_i(x, y), \quad (\text{A.2})$$

と表せる（Darcy 則）。ここで、 $i = 1, 2$  という指標は、異なる二種類の流体を表す。指標 1 は、注入する流体、2 は注入を受ける流体である。定数  $K_i$  は、流体の粘度と平行平板の間隔  $b$  をもちいて、

$$K_i = \frac{b^2}{12\mu_i},$$

と表される。Darcy 則（式 (A.2)）の両辺に  $\nabla$  をとり、質量保存則（式 (A.1)）を用いると、

$$\nabla^2 P_i(x, y) = 0, \quad (\text{A.3})$$

が導かれる。すなわち、viscous fingering において、圧力 ( $P_i$ ) は 2 次元座標 ( $x, y$ ) についての調和関数である。

二種類の流体の境界条件は、

$$v_n = -K_1(\nabla P_1)_n = -K_2(\nabla P_2)_n,$$

である。ここで、 $v_n \equiv v \cdot n$  で、 $n$  は、境界の単位法線ベクトルである。これは境界が連続であるために、それぞれのベクトルの法線方向の成分が等しくなければならないことを示している。また、二つの流体の境界における圧力差は表面張力に等しく、

$$P_1 - P_2 = \frac{\kappa}{R}, \quad (\text{A.4})$$

と表せる。ここで、 $R$  は境界の曲率、 $\kappa$  は表面張力の程度を表す定数である。

## A.2 円形の境界の安定性

後で述べるように、本研究で行った実験は、側面に壁が存在しないという条件下で行っている。これは、Saffman and Taylor の実験よりも、Paterson の実験の方に対応している。そこで以下に円形の Hele-Shaw セルにおける境界の安定性について議論する。基本的には、長方形の Hele-shaw セルにおける境界の安定性も同じ議論が行える。

円形の境界の安定性は Paterson [12] によって、議論されている。まず、圧力の Laplace 方程式 (式 A.3) の極座標表示による表現は、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 0, \quad (\text{A.5})$$

である。ここで、 $r$  は動径を  $\theta$  は角度を示す。

空気の注入開始時刻を 0 とし、時刻を  $t$  における円の半径を  $R(t)$  と置く。Flow rate を一定 ( $Qb$ ) と仮定すると、

$$R(t) = (Qt/\pi)^{\frac{1}{2}},$$

である。この時、流体の圧力は、

$$P_i = P_i^0 \equiv -\frac{Q}{2\pi K_i} \left[ \ln \frac{r}{R} + \frac{K_i}{K_2} \right],$$

と表せる。二相の境界に生じるゆらぎ  $a$  (初期振幅  $A$ , 波数  $n$ ) を、

$$a = Af(t) \exp(in\theta), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

と表す。ここで  $f(t)$  は振幅の時間依存性を表し、 $f(0) = 1$  である。このときの圧力の Laplace 方程式の解は、

$$P_i = P_i^0 + (-1)^i \beta \left( \frac{r^n}{R^n} \right)^{(-1)^{i-1}} \exp(in\theta),$$

である。ここで、 $\beta$  は、

$$\beta = \frac{A}{n} \left( \frac{Qf}{2\pi R} + R \frac{df}{dr} \right),$$

である。Laplace 方程式を境界における圧力差の式と連立させ、 $K_1 \gg K_2$  を仮定すると、 $df/dt$  は、

$$\frac{df}{dt} = \frac{n-1}{R^2} \left( \frac{Q}{2\pi} - \frac{n(n+1)\kappa K_2}{R} \right) f,$$

と表せる。 $df/dt > 0$  となる最小の波数を  $n_c$  とおくと、

$$n_c = \left[ \frac{QR}{2\pi K_2 \kappa} + \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2},$$

$df/dt$  が最大となる波数を  $n_m$  とおく。 $n_m$  は、

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{df}{dt} \right) = 0,$$

を解いて、

$$n_m = \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{QR}{2\pi K_2 \kappa} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

と求められる。 $n = 2\pi R/\lambda$  を用いて、突起が成長する最小波長 ( $\lambda_c$ ) と、突起の成長率が最大となる波長 ( $\lambda_m$ ) は、

$$\lambda_c = 2\pi \frac{R}{\left\{ \left( \frac{QR}{2\pi K_2 \kappa} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right\}},$$

$$\lambda_m = 2\sqrt{3}\pi \frac{R}{\left( \frac{QR}{2\pi K_2 \kappa} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

である。以上の解析は、viscous fingering において、同心円上の成長から、突起の成長に移る瞬間の突起の数は、注入を受ける流体の粘性、注入速度、そして表面張力によって決まることを意味する。実験の結果によると、不安定性発生の初期に生じる突起の波長は、ほぼ  $\lambda_m$  と等しいことがわかっている。

## Appendix B

### 粘弾性体の基礎方程式

#### B.1 粘弾性物質の数学的な取扱い

粘弾性体のマクロスコーピックな振る舞いを記述するときには、数学モデルが使われる (Flügge [28])。基本要素と呼ばれる構成単位を組み合わせて、粘弾性体に歪 (および歪速度) を与えたときの、応力の発生の仕方を記述することで、粘弾性体の振る舞いを表現する。基本要素は spring と dashpot の 2 種類である。Figure B-1 に、ふたつの基本要素を表現した記号を示す。

Dashpot (Fig. B-1a) は粘性を表す基本要素である。Dashpot が表現する応力と歪の関係を以下に示す。ここで、 $\sigma_{ij}$  と  $\epsilon_{ij}$  を、それぞれ応力と歪とする。指標  $ij$  は、直交座標系における  $i$  軸に垂直な面に生じる  $j$  軸に垂直な方向の応力 (歪) であることを示す。このとき、dashpot の振る舞いを記述する方程式は、

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (\text{B.1})$$

ここで、和の規約を用いた ( $k, l$  については、全成分の和を取っている)。また、 $\dot{\epsilon}$  は歪速度を示す。 $D_{ijkl}$  は粘性係数を示すテンソルである。一次元では特に、

$$\sigma = D \dot{\epsilon},$$

と表される。

Spring (Fig. B-1b) は、弾性を表す基本要素である。Spring の振る舞いを記述する方

程式は dashpot と同様にして,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (\text{B.2})$$

と表すことができる. ここで  $C_{ijkl}$  は弾性係数を示すテンソルである. 特に, 一次元では,

$$\sigma = C\epsilon,$$

となる. このふたつの基本要素 (粘性と弾性) を組み合わせて粘弾性は表現される.

基本要素の連結方法には直列と並列の2種類がある. 直列と並列を組み合わせて, 粘弾性体の複雑な振る舞いを表現する. 要素を直列に連結した場合, 連結したおのおのの要素に生じる応力と, 直列に連結した部分全体に生じる応力に等しくなる. 一方, 並列に連結したすべての要素には, 連結した要素全体の歪と等しい歪が生じている. 以上のように, 粘弾性体モデルの振る舞いは, 2種類の要素 (dashpot と spring) と, 連結の仕方 (直列と並列) によって決められる.

## B.2 Maxwell 流体と Kelvin 固体

最も簡単な粘弾性体モデルの例として Maxwell 流体と Kelvin 固体を考える. Figure B-2 に, ふたつのモデルを表現する記号を示す. 図に示したように, これらのモデルは, 粘弾性体を記述するために最小限に必要である dashpot と spring がひとつずつ使用された, 最も単純な粘弾性モデルであることがわかる.

Kelvin 固体 (Fig. B-2a) は, dashpot と spring を並列に連結させたモデルである. 言い換えれば, dashpot と spring の双方に全体の歪が生じるモデルである. このとき, dashpot と spring に生じる応力の和が全体にかかる応力に等しくなっている. よって, 1次元 Kelvin 固体を表す構成方程式は,

$$\sigma = C\epsilon + D\dot{\epsilon},$$

である. 3次元では,

$$\sigma_{kl} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} + D_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl},$$

となる.

Maxwell 流体 (Fig. B-2b) は, dashpot と spring を直列に連結させたモデルである. 言い換えれば, dashpot と spring に生じる応力が等しいモデルである. このとき, dashpot と spring にかかる歪の和は全体の歪と等しくなっている. 1次元 Maxwell 流体の構成方程式は, spring についての式を時間で微分して,

$$\dot{\epsilon} = C^{-1}\dot{\sigma} + D^{-1}\sigma, \quad (\text{B.3})$$

である. ここで  $\dot{\sigma}$  は, 応力の時間についての微分を示す. 3次元 Maxwell 流体では,

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl}^{-1}\dot{\sigma}_{kl} + D_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl},$$

と表せる. ここで,  $C_{ijkl}^{-1}$ ,  $D_{ijkl}^{-1}$  は, 式 (B.2) と式 (B.1) を  $\epsilon_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  について解いたときに  $\sigma_{kl}$  にかかるテンソルを示す.

このふたつのモデルに, 粘弾性体の特徴である応力緩和の試験を行うことを考える. 応力緩和試験を行うと, Kelvin 固体は有限の歪に到達する. これは固体的な性質である. 一方, Maxwell 流体は, 応力緩和試験を行うと歪が増加し続ける. これは流体的な性質である. Figure B-3 に, 時刻 0 において, 応力  $\sigma_0$  をかけたときの, Maxwell 流体の応力の緩和過程を示す. 1次元 Maxwell 流体の応力緩和時の振る舞いは, このモデルの構成方程式である式 (B.3) から,  $\dot{\epsilon} = 0$  を用いて,

$$\sigma = \sigma_0 \exp [-(t - t_0)/p_1],$$

となることがわかる. ここで,  $\sigma_0$  は, 歪をかけた時刻 ( $t_0$ ) における応力を示す. また  $p_1 \equiv D/C$  は, 特性時間と呼ばれる. 特性時間が大きいほど応力の減衰が速い. すなわち Maxwell 流体は特性時間が短いほど粘性流体に近い.

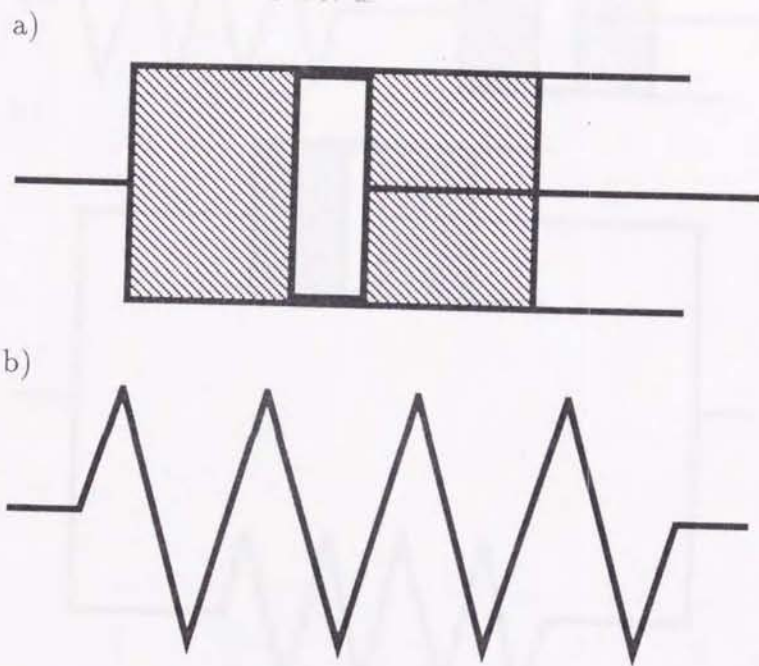


Figure B-1. Basic elements of viscoelastic materials. a) Dashpot ( $\sigma = D\dot{\epsilon}$ ) represents the viscous property. b) Spring ( $\sigma = C\epsilon$ ) represents the elastic property.



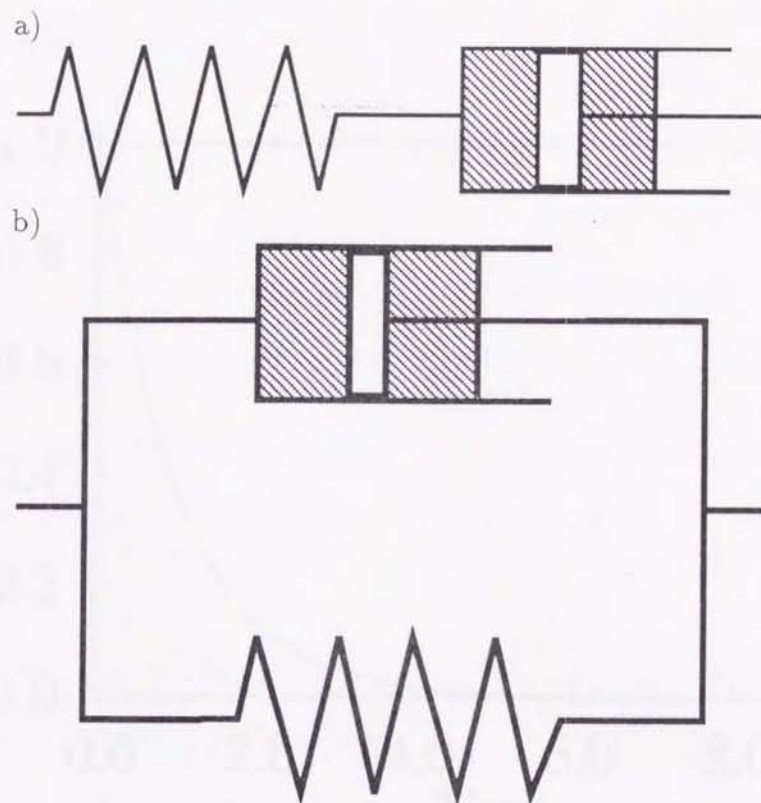


Figure B-2. Simple models of viscoelastic materials. a) The Maxwell fluid. One spring and one dashpot are in the series. b) The Kelvin solid. One spring and one dashpot are parallel.

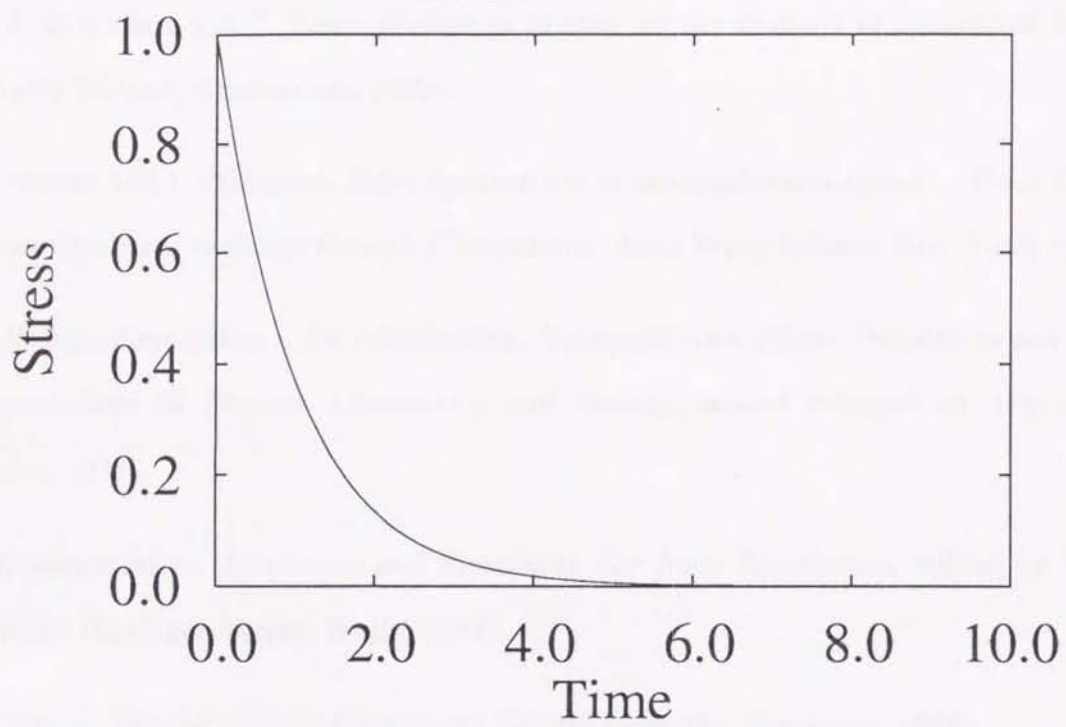
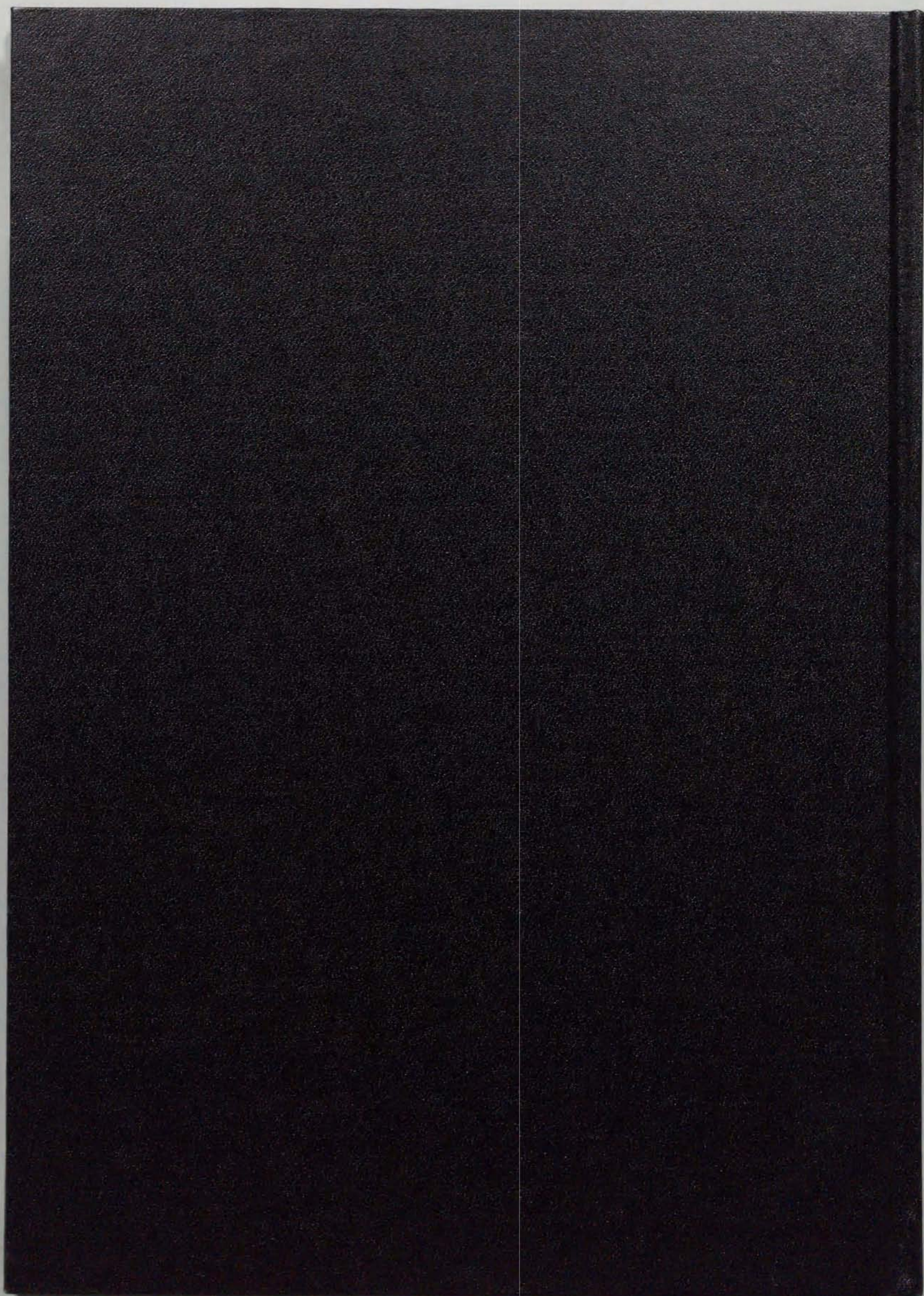


Figure B-3. Relaxation curve of the Maxwell fluid. Stress and time are normalized by  $\sigma_0$  and  $p_1$ , respectively. Stress decreases exponentially with time.

## 参考文献

- [1] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [2] H. J. Herrmann and S. Roux, *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media* (North-Holland, Amsterdam, 1990).
- [3] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in nonequilibrium system – From Dissipative Structure to Order through Fluctuations* (John Wiley & Sons, New York, 1977).
- [4] H. Haken, *Synergetics – An introduction, Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology*, second enlarged ed. (Springer, Berlin, 1978).
- [5] *Self-Organization Autowaves and Structures Far from Equilibrium*, edited by V. I. Krinsky (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [6] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [7] H. J. S. Hele-Shaw, *Nature* **58**, 34 (1898).
- [8] J. Feder, *Fractals* (Plenum Press, New York, 1988).
- [9] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc.* **A245**, 312 (1958).
- [10] D. Bensimon *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 977 (1986).
- [11] P. Pelcé, *Dynamics of Curved Fronts* (Academic Press, London, 1988).

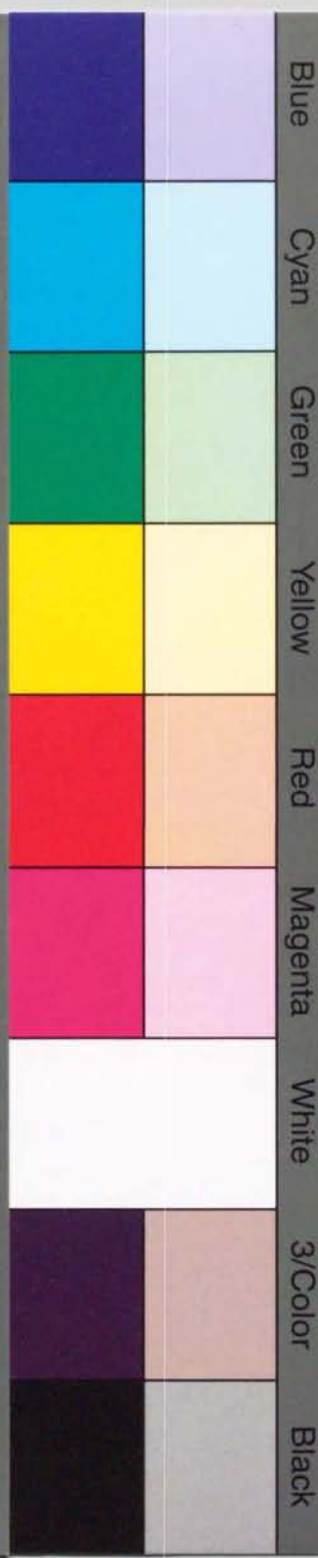
- [12] L. Paterson, *Jour. Fluid Mech.* **113**, 513 (1981).
- [13] P. G. Saffman, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **12**, 146 (1959).
- [14] A. E. Scheidegger, *Phys. Fluids* **3**, 94 (1960).
- [15] S. P. Gupta, J. E. Varnon, and P. van der Poel, *Water Resour Res.* **9**, 1039 (1973).
- [16] 岡村弘之, 線形破壊力学入門 (培風館, 東京, 1976).
- [17] 西田正孝, 応力集中 (森北出版, 東京, 1973).
- [18] 阿部博之 and 高橋秀明, in 岩石破壊力学とその応用, edited by 日本機械学会 (コロナ社, 東京, 1989), p. 7.
- [19] 村山謙吉, レオロジー基礎論 (産業図書, 東京, 1991).
- [20] 高分子辞典, edited by 高分子学会 (朝倉書店, 東京, 1971).
- [21] *Polymer Science Dictionary*, edited by M. S. M. Alger (Elsevier, Essex, 1989).
- [22] 柳川鐵之助, 寒天 (産業図書, 東京, 1942).
- [23] 理科年表, edited by 東京天文台 (丸善, 東京, 1993).
- [24] 巽友正, 流体力学 (培風館, 東京, 1982).
- [25] 半導体圧力センサ, コパル電子株式会社.
- [26] 小野寺正一 and 互野恭治, in 物理計測システム実用設計, edited by 物理教育研究会 (CQ 出版, 東京, 1989), p. 35.
- [27] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd ed. (Pergamon Press, New York, 1987).
- [28] W. Flügge, *Viscoelasticity*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1975).



Inches 1 2 3 4 5 6 7 8  
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM; Kodak



# Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM; Kodak

**A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

