

氏名(本籍)	お <sup>が</sup> わ <sup>たく</sup> <sup>ま</sup> 小 川 琢 磨 (埼玉県)		
学位の種類	博 士 (数 学)		
学位記番号	博 甲 第 3895 号		
学位授与年月日	平成 18 年 3 月 24 日		
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当		
審査研究科	数理解物質科学研究科		
学位論文題目	<b>Analogies between circular functions and lemniscate functions from a viewpoint of number theory</b> (整数論の観点から見た三角関数とレムニスケート関数の類似点)		
主 査	筑波大学教授	理学博士	平 良 和 昭
副 査	筑波大学教授	理学博士	渡 邊 公 夫
副 査	筑波大学教授	理学博士	竹 内 光 弘
副 査	筑波大学助教授	博士(理学)	寛 知 之

### 論 文 の 内 容 の 要 旨

本論文の目的は、整数論の観点から見た「三角関数とレムニスケート関数の固有の性質と役割」について研究することである。特に、類似の性質として捉えることが出来るものについて焦点を当てている。三角関数とレムニスケート関数の類似性は、アイゼンシュタインによる相互法則（平方剰余の相互法則と 4 次剰余相互法則）の証明やアーベル拡大体の記述（クロネッカー、ウェーバーの定理と、高木貞治の学位論文）に見ることができる。因みに、アイゼンシュタインによる相互法則の証明の再現は、1996 年、渡邊・宮川・樋口等によってなされている。

アイゼンシュタインによる相互法則の証明のプロセスの中にあっては、平方剰余の相互法則の場合、奇素数  $q$  と三角関数によって定まる多項式  $P_q(x)$  が本質的な役割を演じており、巡回方程式  $P_q(x)=0$  が証明の鍵を握っている。4 次剰余相互法則の場合も同様であり、準素数  $s$  とレムニスケート関数によって定まる有理関数  $R_s(x)$  が重要な役割を担い、「巡回方程式  $R_s(x)$  の分子 = 0」が証明の本質を物語っている。このようにアイゼンシュタインによる相互法則の証明を通じて、「相互法則、アーベル方程式、アーベル拡大体の記述」を三位一体として捉えることが可能となる。このような視点としては、2000 年のレマーメイヤーの著書や、1994 年、2000 年に発表された高瀬正仁の論説等がある。

以上のような事柄を背景として、本論文では、三角関数の場合には 2 つの多項式  $P_{s,m}(x)$  と  $P_{c,m}(x)$  の考察を、レムニスケート関数の場合には 2 つの有理関数  $R_{s,m}(x)$  と  $R_{c,m}(x)$  の考察を行っている。いずれの場合にも漸化式を構成し、それらの多項式や有理関数の存在のみならず、具体例も列挙している。特に、その具体例からはレムニスケート関数によって定まる有理関数の「零点と極の対称性」が具体的に見て取れる。この零点と極の対称性にさらなる考察を加えることにより、2 つの有理関数  $R_{s,m}(x)$  と  $R_{c,m}(x)$  を結ぶ関数等式を与え、さらには同様の手法を用いて、2 つの多項式  $P_{s,m}(x)$  と  $P_{c,m}(x)$  を結ぶ関数等式をも与えている。これらの結果は、対称性としての三角関数とレムニスケート関数の類似の性質を関数等式という形で与えることができることを意味している。

以上のような三角関数とレムニスケート関数の数々の類似性を受けて、改めて三角関数とレムニスケート

関数の構成法の類似性に焦点をあてた結果、円やレムニスケートを含む曲線族を抽出し、それらの曲線族の弧長が全てベータ関数によって表示されることをも明らかにしている。本論文の中では、その曲線族の抽出方法（具体的な構成法）も与えられている。

### 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は、アイゼンシュタインの視点である三角関数とレムニスケート関数の整数論的視点からの類似性について、詳しく考察したものである。膨大な具体例を計算し、零点と極の対称性を確かめ、証明に至ったことは非常に高く評価できる。さらに、円やレムニスケートを含む曲線族を抽出し、それらの曲線族の弧長を考察し、それら曲線族の弧長を求めることに成功している。以上は、レムニスケート関数の構造論において大きな貢献をしたものといえる。

惜しむらくは、楕円関数における虚数乗法論の視点からの考察が欠けていることであるが、これは、今後の研究にさらなる発展を期待したい。

よって、著者は博士（数学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。