

氏名(本籍)	井川治 (埼玉県)
学位の種類	博士(数学)
学位記番号	博乙第1,388号
学位授与年月日	平成10年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
審査研究科	数学研究科
学位論文題目	Variational Problems on Compact Riemannian Homogeneous Spaces (コンパクトリーマン等質空間上の変分問題)
主査	筑波大学教授 理学博士 伊藤光弘
副査	筑波大学教授 理学博士 保科隆雄
副査	筑波大学教授 理学博士 本橋信義
副査	筑波大学教授 理学博士 若林誠一郎

### 論文の内容の要旨

微分幾何学にあらわれる重要な問題には変分問題に由来するものが多い。調和写像、極小挿入、ヤン・ミルズ接続はそのよい例である。

著者は、本論文において、これらの問題をコンパクトリーマン等質空間の上で考察を行った。

まず、コンパクトリーマン等質空間からグラスマン多様体への調和写像と極小挿入を構成した。構成の第一の方法は等質空間  $M$  をリー群  $G$  とその部分群  $K$  を用いて  $M=G/K$  とあらわし、対応するグラスマン多様体  $G_n(V)$  に対して、 $G$  のベクトル空間  $V$  上への表現  $\rho$  によって自然に定まる群同変写像  $F: M \rightarrow G_n(V)$  を考察の対象とし、次の定理をえた。

ある消滅条件をみたす表現  $\rho$  については、 $F$  は非定値調和写像になり、さらに  $\rho$  の既約性のもとに  $F$  は極小挿入にもなる。

リーマン対称対  $(G, K)$  をとる。その非自明実球表現  $(\rho, V)$  を第二の構成法として考察した。ベクトル空間  $V$  の  $K$  不変部分空間直和を手がかりとして、等質空間  $M=G/K$  から  $V$  上のグラスマン多様体への同変的調和写像を構成した。特別な部分空間の選択のもとでは、写像はさらに全測地的写像となることも判明した。

次に著者は、リー群上のヤン・ミルズ接続の不安定性に関する小林らによる問題を考察した。問題は、コンパクト単連結単純リー群はヤン・ミルズ不安定かというものである。そのために著者は、コンパクト連結単純リー群上の群同変的主束をとりだし、その上のヤン・ミルズ不変接続に対してこの問題を考察した。不変接続全体のなす集合の特徴づけを利用して、不変接続がヤン・ミルズになる条件を求め、正則元存在の仮定のもとに、非平坦ヤン・ミルズ接続が不安定になることを示した。

以上、著者はこれらの群同変変分問題をリー代数の言葉でとらえなおし、半単純リー代数のルート理論、リー代数表現論等を援用して、上記の結論に到達した。

### 審査の結果の要旨

多様体上の調和写像と極小等長挿入について、著者はコンパクトリーマン等質空間からグラスマン多様体への調和写像と極小挿入の存在をリー群論的考察のもとに保証した。著者が扱った空間は  $n$  次元球面、射影空間やグ

ラスマン多様体を含むかなり一般的なリーマン多様体の重要な例を与えているので、コンパクトリーマン等質空間からの調和写像を二通りの構成法で与えたことは意義あることである。

コンパクトリー群上のヤン・ミルズ接続の不安定性問題が本論文の後半で扱われている。ヤン・ミルズ接続の不安定性が、コンパクト単純リー群を除くコンパクトタイプの対称空間について成立することが小林らによって示されたが、のこされた単純リー群の場合について、著者が正則元の存在という付加的条件のもととはいえ、不安定になることを証明できたことは問題の解決への前進であり、ヤン・ミルズ幾何学理論への大きな貢献として高く評価される。

よって、著者は博士（数学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。