

【56】

氏 名（本籍）	かわぐち しんじ 川 口 慎 二（岐 阜 県）		
学 位 の 種 類	博 士（理 学）		
学 位 記 番 号	博 甲 第 3888 号		
学位授与年月日	平成 18 年 3 月 24 日		
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当		
審 査 研 究 科	数理解物質科学研究科		
学 位 論 文 題 目	<b>A study of absolute embeddings on relative topological properties</b> (相対位相的性質に関する絶対埋蔵性の研究)		
主 査	筑波大学教授	理学博士	保 科 隆 雄
副 査	筑波大学教授	理学博士	加 藤 久 男
副 査	筑波大学教授	理学博士	本 橋 信 義
副 査	筑波大学助教授	理学博士	酒 井 克 郎

## 論 文 の 内 容 の 要 旨

本論文は、位相空間論において今日主要な研究対象の一つである相対位相的性質に関して、特にその絶対埋蔵性について論じたもので、5 章からなる。

1996 年 Arhangel'skiĭ は、「位相空間  $X$  の部分空間  $Y$  は、いかにして全空間  $X$  と関連付けられた位置づけがなされるか？」という考え方の下、所謂相対位相的性質の研究を提唱した。以下、説明のため  $Y$  を位相空間  $X$  の部分空間であるとする。このとき、 $X$  は  $Y$  より大きい空間とも言う。一般に、位相的性質  $P$  に対して、その相対的な概念は“ $Y$  は、 $X$  において  $P$  を満たす”という形で与えられる。例えば、最も基本的である正規性に対しても相対正規性が考えられるが、互いに素な 2 つの閉集合とこれを分離する 2 つの開集合が、いかに  $Y$  と関連付けて与えられるかによって、“ $Y$  is normal in  $X$ ”, “ $Y$  is strongly normal in  $X$ ” 等の種々の定義が与えられ、これらの総称が相対正規性である。また、paracompact 性についても、被覆、細分、局所有限性を  $Y$  との関連で捉えることにより、1-あるいは 2-paracompact 性等の相対 paracompact 性の概念が知られている。これらの相対的性質は、この方面の研究では中心的な概念である。一方、 $Y$  上の連続関数の  $X$  への拡張概念として  $C^*$ - 或いは  $C$ -埋蔵性の概念が古くからある。Doss, Hewitt, Smirnov は、Tychonoff 空間の範疇において、 $Y$  が、これより大きい任意の空間  $X$  において常に  $C^*$ - 或いは  $C$ -埋蔵されるのは、 $Y$  が almost compact に限る、という所謂  $C^*$ - 或いは  $C$ -埋蔵の絶対埋蔵性の定理を証明した。これに呼応して、Tychonoff 空間の範疇において、Bella-Yaschenko は、空間  $Y$  が、より大きい任意の空間  $X$  に対して常に normal in  $X$  或いは strong normal in  $X$  となる  $Y$  の特徴付けを与えた。この定理を基本として、本論文では、相対 paracompact 性に関連するいくつかの相対位相的性質を導入し、従来の種々の性質との関係を明解にすると同時に、特にそれらの絶対埋蔵性について優れた成果を挙げた。

以下、本論文の内容を述べると、第 1 章では、基本事項の準備の後、本論文に関する幾つかの基本的事実を述べている。

空間の paracompact 性と正規性とは、密接に関連する性質であるといわれる。 $Y$  の  $X$  における 2-paracompact 性は、 $Y$  が “normal in  $X$ ” を満たすことと強く関連する。さらに、関連する関数の拡張性

質として、弱  $C$ -埋蔵性の概念がある。Bella-Yaschenko は、弱  $C$ -埋蔵性に対して絶対埋蔵性の定理を証明し、上記の定理を導くと同時に、Arhangel'skiĭ による 2-paracompact 性に対する絶対埋蔵性の定理をも導いた。しかし、1-paracompact 性については、単純な類推が困難な概念であるため、このような状況は全く把握されずにあった。著者はこの点に着目し、第 2 章において、新しく  $Y$  の  $X$  における 1-normal 性の概念を設定し、1-paracompact 性との関連を精察した。さらに著者は、弱  $C$ -埋蔵性に呼応して準  $C$ -埋蔵性の概念を定め、まずこの概念の絶対埋蔵性の定理を導出し、これを下に、1-paracompact 性及び 1-normal 性についても絶対埋蔵性の定理を証明し、1-paracompact 性について不明であった部分を完全に解明した。また、Qu-Yasui が提起した相対 subparacompact 性に関する問題を、肯定的に解決している。

1-paracompact 性の一般概念として、空間の可算 paracompact 性の相対版である、1-可算 paracompact 性の概念があり、Matveev はこの概念に対する絶対埋蔵性の定理を導いた。他方、可算 paracompact 性は可算な局所有限閉集合族の拡張性と同等であり、拡張可能 (expandable) 空間と関連している。著者はこれに着目し、第 3 章においては、新たに相対概念として 1-expandable 性を設定し、同時にその絶対埋蔵性の定理を証明した。この定理の証明は、著者が最も力を注いだもので、ある種の反例を、著者独自の手法によって構成する部分は見るべきものがある。

第 4 章は、Arhangel'skiĭ-Tartir が考案したある種の埋蔵性をテーマとしている。Bella-Yaschenko は、この埋蔵性について Tychonoff 空間の範疇で絶対埋蔵性の定理を証明したが、著者は、Hausdorff 空間の範疇で同種の定理を導き、状況を鮮明にした。

第 5 章では、Arhangel'skiĭ-Genedi により提起された potential 擬 compact 性に関する問題に対して、否定解を与えた García-Ferreira と Just よる反例に着目している。彼らの反例の構成は、難解な集合論的手法を含み難解なものであったが、著者は通常用いられる空間例を下に、彼らのものとは全く異なる極めて簡明な反例を構成し、著者の卓抜な能力を示した。

## 審 査 の 結 果 の 要 旨

相対位相的性質に対する絶対埋蔵性の定理を得る場合は、結論として予想する性質を否定して、仮定の相対的性質に反するような例を見出す、いわば反例の構成を証明の主眼とする場合が殆どである。そのため様々な空間の具体例を構成し、観察するという能力が必須である。本研究において著者は十二分にその能力を発揮し、様々な絶対埋蔵性の定理を証明し、優れた研究成果を構築した。本論文は、成果およびその手法を通して、相対位相の研究の今後の発展に大いに寄与したものと考えられる。

よって、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。