

氏名(本籍)	か	も	しず	お	夫(静岡県)
学位の種類	理	学	博	士	
学位記番号	博	乙	第	85	号
学位授与年月日	昭	和	57	年	1月31日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当				
審査研究科	数学研究科				
学位論文題目	Nonstandard Real Number Systems (非標準実数)				
主査	筑波大学教授	理学博士	西	村	敏 男
副査	筑波大学教授	理学博士	松	村	睦 豪
副査	筑波大学教授	理学博士	太	刀	川 弘 幸
副査	筑波大学助教授	理学博士	本	橋	信 義

論 文 の 要 旨

非標準数学は、解析学の基礎にある無限小の概念を具体的な数学的対象として扱う方法として、A. Robinsonによって1965年前後から始められた。E. Zakonは1969年に、非標準実数系 V_R の一般的な性質を与えると共に、未解決の5つの問題を提起した。本論文は、これらの問題を解くことあら出発して、 V_R に関するいくつかの重要な結果を与えている。これらは次の3種類に分類される。

(1) 順序集合に関するもの。非標準自然数系 V_N は $\omega + (\omega^* + \omega)\theta_V$ の型の順序型を持つことが知られている。本論文はこの θ_V に関して次の重要な結果を与えている。

「 λ, k は無有限正則基数で $k > \omega$ とすると、 $\text{cof}(\theta_V) = k$, $\text{coin}(\theta_V) = \lambda$ となる θ_V が V が存在する」
「 X を θ_V の開区間とするとき、 $\text{cof}(X) = \text{coin}(X) = \text{coin}(\theta_V)$ 」

また V_R については、

「 V_R が正則ギャップをもつような V が存在する」これらは「 $\text{cof}(\theta_V) = \text{coin}(\theta_V)$?」というZakonの問題を拡張して、それに対する解決を与えたものである。

(2) 位相構造に関するもの。正の非標準実数 a に対して、 $\frac{a}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)の型の実数全体を $S(a)$, na ($n \in \mathbb{N}$)の型のどの実数よりも大きい非標準実数全体を $T(a)$ とする。 V_R 上で $S(a)$, $T(a)$ によって得られる距離をもつ一様位相空間をそれぞれ $\langle V_R, E(S(a)) \rangle$, $\langle V_R, E(T(a)) \rangle$ とする。本論文では、つぎの重要な結果を与えている。

「正の非標準実数 a について、つねに $\langle V_R, E(S(a)) \rangle \cong \langle V_R, E(S(1)) \rangle$, $\langle V_R, E(T(a)) \rangle \cong \langle$

$V_R, E(T(1)) >$], 「 $\langle V_R, E(T(1)) \rangle$ が完備にならない V が存在する」。この結果と, Zakonによる「 $\langle V_R, E(S(1)) \rangle$ は完備である」という結果により, 2つの位相空間の違いが明瞭になる。

(3)モナドに関するもの。各非標準実数 a に対して, a との差が無限小になる実数全体を a のモナドといい, $M(a)$ で表わす。 $M(a)$ は V_R の開凸集合になる。 R の開凸集合は R 全体と順序同型になるが, Zakon は, V_R と $M(a)$ が順序同型になるかどうかという問題を提起した。これに対し本論文では, つぎの5つの条件がすべて同値であるという重要な結果を与えている。(i) すべての a に対して $V_R \cong M(a)$, (ii) $V_R \cong M(0)$, (iii) $\text{cof}(V_R) = \text{cof}(M(0))$, (iv) $\text{cof}(V_R) = \text{coin}(\theta_0)$, (v) $\text{cof}(\theta_V) = \text{coin}(\theta_V)$ 。これによって, Zakonの問題は $\theta_V, \text{cof}(V_R)$ によって異なってくるのがわかる。

審 査 の 要 旨

非標準数学は, 解析学に対する新しい基礎づけを与える理論として注目されてきた。Zakonの提起した問題は, この理論を展開する上で, 基礎的で重要なものである。著者が本論文で与えた, (1)順序集合の構造, (2)位相構造, (3)モナドに関する諸結果は, Zakonによる問題の多くを解決したに止まらず, 更に一步進んだ結果を含んでおり, 今後この方面の研究に寄与する所が大きい。また, 問題解決に当ってはモデル理論により, 方法論的にも新らしい点を多く含んでおり, 優れた業績として国際的にも高く評価されている。

よって, 著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。