

氏名(本籍)	横井勝弥(静岡県)		
学位の種類	博士(理学)		
学位記番号	博乙第1,267号		
学位授与年月日	平成9年3月24日		
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当		
審査研究科	数学研究科		
学位論文題目	HOMOTOPICAL APPROACHES TO DIMENSION THEORY (ホモトピー的方法による次元論の研究)		
主査	筑波大学教授	理学博士	保科隆雄
副査	筑波大学教授	理学博士	加藤久男
副査	筑波大学教授	理学博士	木村達雄
副査	筑波大学教授	理学博士	佐々木建昭

論文の内容の要旨

本論文は、幾何学位相空間論の主要な研究対象の一つであるコホモロジー次元論を背景にして、主にホモトピー論による空間の次元の近似について論じたもので、4章からなる。

位相空間の次元については、1941年の Hurewicz と Wallman による次元論が今日の次元論の端緒とされているが、そこではそれまでの研究がまとめられ、同時に幾つかの空間の次元の概念が与えられている。これらの次元のうち、特に Lebesgue の舗石定理に由来する被覆次元 \dim は、最も広範に研究され、次元と言えれば通常この被覆次元と意味される。 \dim の初期の段階の特徴付けの中で、特に、空間の閉集合から n 次元球面 S^n への連続写像の連続拡張の存在による特徴付けがある。これに示唆されて、1932年 Alexandroff は空間のコホモロジー群を用いて空間に新しく次元概念を考案し、 \dim との関連を考察した。この概念は、後にコホモロジー次元(記号で $c\text{-dim}_G$)と呼ばれ、係数群 G のあり方によってそれぞれ代数的な手法で、多くの興味ある研究がなされている。特に、Alexandroff は、空間 X が有限次元の場合に整係数群 Z に対して等式 $\dim X = c\text{-dim}_Z X$ を証明し、また、Bockstein は、近似定理 $c\text{-dim}_Z X = \sup \{c\text{-dim}_{(p)} X \mid p \text{ は素数}\}$ を証明した。では空間 X が無限次元の場合に初めの等式が成立するか、これは Alexandroff の問題として50数年間未解決であったが、Dranishnikov, Dydak-Walsh 等により否定的に解決された。この事実、次元 \dim がコホモロジー次元では完全には近似的表現ができないことを示している。本論文はこの点に着目し、コホモロジー次元論の手法を背景にして、ホモトピー論を用いた新しい次元概念を定義し、 \dim を近似表現することに成功した。

以下、章ごとに内容を述べると、第1章は、本論文の準備で、コホモロジー次元に関する基本性質を定理の形で幾つか述べている。

第2章は、本論文の中核をなすものである。コホモロジー次元は、上記の \dim の特徴付けにおいて S^n を Eilenberg-MacLane 複体 $K(G, n)$ に置き換えた形で特徴付けられる。この章では、ホモトピー論で有用な素数全体の部分集合 P に対する P -局所化 n 次元球面 S^n_P を考え、上記の \dim の特徴付けで S^n を S^n_P に置き換えて新しく次元の概念 \dim_P を定義した。これにより目標とする近似定理として、任意の素数全体の分割 P_1, \dots, P_s に対して、 $\dim X = \max \{\dim_{P_i} X \mid i = 1, \dots, s\}$ を証明した。証明は Sullivan によるホモトピー論の局所化理論を駆使したもので、極めて高度な議論が展開されている。また、一般係数のコホモロジー次元に対しても上記の Bockstein の定理と同様な近似定理をこの章で証明している。

第3章では、上記の Alexandroff の問題が次元を保存する胞体的写像の存在問題と深く関連することから、適度の条件の下で胞体的写像の次元保存性について、ホモトピー理論の一般化であるシェイプ理論を用いて特徴付けを与えている。

第4章では、従来コンパクト距離空間に対して論じられていたコホモロジー次元論を、コンパクトを仮定しない一般の距離空間に対して展開している。ここではコンパクトの場合に有用な普遍係数定理が成立しない状況を克服して、完備化定理、積定理等非コンパクトな距離空間に対して基本定理を与えた。

審 査 の 結 果 の 要 旨

上記の Alexandroff の問題の否定的解決は、コホモロジー次元論が被覆次元に寄与できる一つの限界を示したものである。この限界を越えるべく、その後多くの研究者達が努力したが成功には至らなかった。本論文におけるホモトピー論を採用した近似定理は、証明に見られる手法も含めて著者独自の着想に富み、またこの限界を初めて越えたものとして極めて注目される成果である。本論文は、成果及びその手法を通して、この方面の今後の発展に大いに寄与したものと考えられる。

よって、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。