

|               |  |
|---------------|--|
| 氏 名 (本 籍)     | 白 井 吉 希 男 (埼玉県)  |
| 学 位 の 種 類     | 理 学 博 士  |
| 学 位 記 番 号     | 博 乙 第 6 号  |
| 学 位 授 与 年 月 日 | 昭 和 54 年 1 月 25 日  |
| 学 位 授 与 の 要 件 | 学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当  |
| 審 査 研 究 科     | 数 学 研 究 科  |
| 学 位 論 文 題 目   | A relation between transfinite induction and mathematical induction<br>in elementary number theory<br>(初等自然数論における超限帰納法と数学的帰納法とのある関係について) |
| 主 査           | 筑波大学教授 理学博士 前 原 昭 二  |
| 副 査           | 筑波大学教授 理学博士 西 村 敏 男  |
| 副 査           | 筑波大学教授 理学博士 太 刀 川 弘 幸  |
| 副 査           | 筑波大学教授 理学博士 高 橋 恒 郎  |

### 論 文 の 要 旨

著者が初等自然数論とよぶのは、集合概念を利用しない自然の理論のことである。自然数の理論とはいっても、超限順序数の理論の一部をその中に形式化することはできる。このことに関連して、次の結果がすでに知られている (1943年, ゲンツェン)。すなわち、ある順序数までの超限帰納法が数学的帰納法を用いて初等自然数論の中で証明されるためには、その順序数が最初のエプシロン数より小さいことが必要にして十分である。

ゲンツェンは、上記の結果を発表した論文中、最初のエプシロン数より小さい1つの順序数までの超限帰納法の証明に現われる数学的帰納法に着目し、それらの数学的帰納法にかけられている命題に含まれる論理記号の最大個数をもとに、その順序数の上界の1つを与えている。

著者は、ゲンツェンのこの結果を精密化し、次の結果を得た。すなわち、高々  $n$  個の限定作用素をもつ命題についての数学的帰納法のみを用いて、ある順序数までの超帰納法が初等自然数論の中で証明されるためには、その順序数が  $\omega_{n+2}$  より小さいことが必要にして十分である。ここで、 $\omega_0 = 0$ 、 $\omega_1 = 1$ 、 $\omega_2 = \omega$ 、 $\omega_3 = \omega^\omega$  であり、一般に  $\omega_{n+1} = \omega^{\omega^n}$  とする。

著者は、まず、ゲンツェンに従って、TJ デリベーション-初等自然数論における超限帰納法の証明の一般形式-の概念を与え、 $\omega_{n+2}$  より小さい任意の順序数に対して、その順序数に到る TJ デリベーションで、しかも高々  $n$  個の限定作用素をもつ命題に関する数学的帰納法のみを含むもの-

$n$ デリベーション-が実際に存在することを示す。これは、本論文の主要結果のうちの十分性の証明になっている。

必要性の証明は、 $n=0$ の場合と $n \geq 1$ の場合の2つにわけて示される。とくに $n \geq 1$ の場合は、各TJデリベーションにそのTJデリベーションの値とよばれる順序数を対応させる規則を述べ、 $n$ デリベーションの値が $\omega_{n+2}$ より小さいことを示す。ついで、ある順序数に到るTJデリベーションがあれば、その順序数は必ずそのTJデリベーションの値より小さいことを示し、 $n \geq 1$ の場合の証明が終る。 $n=0$ の場合は、その特殊性によって、別に扱わなければならない。

## 審、査 の 要 旨

著者が本論文で取り上げた超限帰納法と数学的帰納法との関係は、1936年にゲンツェンが最初のエプシロン数までの超限帰納法を用いて初等自然数論の無矛盾性証明に成功して以来、数学基礎論研究者の注目を集め、証明論における重要な研究課題の1つとなった。1973年には、本論文の結果と類似し、しかも本質的には同等な結果がミンツによって提示され、同時に、その証明の方針の概要も示された。しかし、その証明は、それを現実に実行するには余りにも労力を要し過ぎるものであったが、著者はTJデリベーションの構造の本質を精細に見極め、簡潔な表現とともに、その直接証明を得た。この証明によって、初等自然数論の範囲における超限帰納法と数学的帰納法との関係は完全に明らかにされ、これによって、この方面の研究は一応完結されたものと考えられる。

以上のごとく、この論文の最大の価値は、初等自然数論における超限帰納法と数学的帰納法との関係についての最終的な結果を与えた点にあるが、ここで新しく導入された証明法が、さらに一般的な超限帰納法の研究にも十分に応用され得るものであるという点においても、この論文を高く評価することができる。

よって、著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認められる。