

【46】

氏名（本籍）	はな	ざわ	まさ	ずみ	純（東京都）
学位の種類	理	学	博	士	
学位記番号	博	乙	第	12	号
学位授与年月日	昭和54年5月2日				
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当				
審査研究科	数学研究科				
学位論文題目	On the theories of ordinal numbers with Ackermann-type reflection schema (アッケルマン型の反映シェーマを持つ順序数の理論について)				
主査	筑波大学教授	理学博士	前	原	昭二
副査	筑波大学教授	理学博士	西	村	敏男
副査	筑波大学教授	理学博士	尾	野	功
副査	筑波大学教授	理学博士	中	川	良祐

論 文 の 要 旨

超限順序数の概念は集合概念を用いて定義されるのが通例であり、現在でも、最も普通には、順序数の理論は集合論の内部で展開される。しかし、1939年ゲーデルが選択公理と一般連続体仮説の無矛盾性を証明する目的のもとに順序数を用いて集合論のモデルを作ることに成功し、それによって順序数の理論と集合論とが或る意味において等価であることがわかったのを契機として、集合論とは独立に順序数の理論を構成するという新しい問題が生じた。本論文は、この問題に1つの解答を与えたものである。

著者は、まず、順序数の存在を保証する1つの生成原理と、順序数とはこの生成原理によって作り出されるもののみであるということの意味する制約原理を提示する。この順序数の生成原理は、1956年にアッケルマンが公理的集合論の1つの体系を与えた際に使用した集合の生成原理と類似した形式をもつものである。その上で、基礎とする論理体系として第1階の述語論理ならびに第2階の述語論理を採用したそれぞれの場合に得られる順序数の理論が、どの程度の大きさの順序数までを包含しているかを調べるのが本論文の目的である。

本論文の第I部においては、上記の生成原理と制約原理を基礎に第1階の述語論理内で展開される順序数の理論OAが、ベキ集合の公理を除いたツェルメロ・フレンケルの集合論に公理 $V=L$ を加えた体系ZFL-Pと同等である、ということが示されている。その証明は、まずZFL-Pの1つの保存拡大の中にOAが翻訳され得ること、ならびに、OAの順序数からゲーデルの方法によって作ら

れる集合論のモデルが ZFL-P になっていることを示すことによって行なわれる。

ついで第 II 部においては、OA と同じ生成原理と制約原理をもとにした第 2 階の順序数論 OA^+ が考察される。第 I 部の結果からもわかるように、順序数論 OA のツェルメロ・フレンケルの集合論に対する相対的無矛盾性は明らかであるが、 OA^+ については、そのことはけっして自明ではないので、まず OA^+ のツェルメロ・フレンケルの集合論に対する相対的無矛盾性を証明し、最後に、順序数論 OA^+ が OA よりも真に強力であることを示して、本論文は終る。

OA^+ が OA より強力であることの証明は、 OA^+ の 1 つの保存拡大を作り、その保存拡大の中で OA の無矛盾性証明が実行できることを示すことによって行なわれる。このことが示されれば、ゲーデルの第 2 不完全性定理によって、 OA^+ が OA よりも真に強力であることがわかる。

審 査 の 要 旨

著者が本論文で取り上げた、集合概念を使用せずに超限順序数の理論を構成することは、思いのほか困難な問題であった。そして、その困難性の中心は、すべて順序数の生成原理をいかに記述するかという、その難しさにある。1954 年から 1965 年にかけて、竹内外史教授は二三の体系を与えておられるけれども、そこではすべて、無限順序数の存在公理あるいは特殊な関数の存在公理を別途に用意しなければならなかった。著者が本論文において提示した順序数の生成原理は、このような補助的な存在公理をなんら必要とすることなく、十分に大きな順序数までの存在を保証することができるものである。この点に、本論文の大局的価値が存在する。

さらに細部に立入れば、第 I 部の後半において、OA の順序数から作られる集合論のモデルが ZFL-P になっていることの証明は、OA の生成原理が単純なものであるだけに、ゲーデルの場合とは異なる難しさがあったのであり、そのために新しく導入された証明技巧は、1970 年にラインハルトがツェルメロ・フレンケルの集合論とアッケルマンの集合論の関係について得た結果の直接証明をも含むことになった。この方法は、今後、この種の研究にひろく利用されるものと思われる。

よって、著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。