【130】

氏名（本籍）	鎌田保雄（かまたやすお）（埼玉県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第 2838 号
学位授与年月日	平成14年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数学研究科
学位論文題目	The Algorithm to Calculate the Period Matrix of the Curve $x^m+y^n=1$ （曲線 $x^m+y^n=1$ の周期行列を計算するアルゴリズム）

主査	筑波大学教授	理学博士	平良和昭
副査	筑波大学教授	理学博士	若林誠一郎
副査	筑波大学教授	理学博士	竹内光弘
副査	筑波大学講師	博士（数理）	竹内潔

論文の内容の要旨

代数曲線に対して，その周期行列の標準型を具体的に求めることは，通常易しいことではない。困難な点は，正則1次型式を求めることよりも，R上の標準ホモロジー基底を求めることにある。一般に，$y^n=f(x)$ （$f(x)$ は多項式）で定義されるリーマン面は第1成分への射影とみなすことで，$\mathbb{C}\cup\{\infty\}\,\mathbb{P}^1$，即ちリーマン球面の$n$重分岐被覆としてとらえることができる。$n=2$のときは超楕円曲線とよばれ，このリーマン面は$\mathbb{P}^1$の2重被覆として位相的に作ることができるので，その位相モデル上で標準ホモロジー基底となる1サイクルを選ぶことは難しくない。しかし，次元$n\geq3$のときはほとんどの場合，標準コホモロジー基底が明確に分かるという位相モデルを作ることができず，広義複素数平面$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$上で1サイクルを試行錯誤して選ぶしか方法はなかった。

本論文では方程式$y^n=1-x^m$ $(n,\ m\in\mathbb{N}$，種数は1以上）で定義されるリーマン面Rに適用できる周期行列の体系的な計算方法が述べられている。Rは$\mathbb{C}^2$内では非特異であるが$\mathbb{P}^2$内で考えたとき，無限遠直線との交点が特異点になる可能性があるので，交点のタイプによって3つの場合に分けて論じられている。

ケース1：$m=n$の場合，Rはいわゆるフェルマー曲線であり，$\mathbb{P}^2$内で考えても非特異曲線である。n個のリーマン球面$\mathbb{P}^1$のコピーの各々について隣り合った分岐点を結ぶ線分で切り開いた図を用意する。本論文では，閉曲線の最小単位とも言える最小ループというものが導入されており，全部で$n(n-1)$個ある。目標は，ホモロジー群$H_1(R,\mathbb{Z})$の基底になるR上の閉曲線を最小ループの和として構成することである。今の場合は各$\mathbb{P}^1$のコピー上で1点にホモトピックになる最小ループの和を考えてn個の最小ループを取り除くことができ，続いて，同じ分岐を往復する最小ループn個の和はゼロになるので$n-2$個の最小ループが取り除ける。ゆえに残った最小ループの個数は$n(n-1)-n-(n-2)=(n-1)(n-2)=2g$となり，$H_1(R,\mathbb{Z})$の階数に一致する。この残った最小ループを$H_1(R,\mathbb{Z})$の基底として選べることが分かる。最小ループの交点数には，規則性があり，直ちに交点行列を求めることができる。その交点行列は，ガウスの消去法を利用した行列計算で標準基底の交点行列に直すことができる。

ケース2：$n\geq m+1$かつ$(n,\ m)=1$の場合は無限遠直線との交点は1点のみであるが，$n>m+1$のときはその点は特異点である。この点で爆裂を何回か施し，特異点解消をおこなう。こうして得られた非特異曲線をRとすると，その特異点は非特異な1点に置き換えられる。この無限遠点が分岐点集合に加わること以外は$m=n$の場合と同様である。

ケース３：$n > m+1$ かつ $(n,\ m) > 1$ の場合は無限遠直線との交点は１点だが，この点は必ず特異点になっていて，爆裂を施して特異点解消を行うと $(n,\ m)$ 個の点に分列する。そのため非特異曲線 R 上には無限遠点が $(n,\ m)$ 個存在する。すると，その点たちを通る最小ループはもはや R 上の閉曲線ではなくなってしまう。これを克服するため，無限遠点を通る最小ループたちを同一視した位相モデルの上で考え，ホモロジー基底を得ている。

審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文では，$x^m + y^n = 1$ という限られたタイプの代数曲線ではあるが，それらの周期行列を具体的に書き下したものである。その計算方法は体系的であり，効率的でもある。従来の具体例が，超楕円曲線と数個の例に限られていたことを考慮するなら，大きな進展であり，極めて高く評価できる結果である。ちなみに，この方法は $y^n = \Pi^{m}_{j=1} (x - aj)^{ej}$，$aj \in \mathrm{C}$，$(n,\ ej) = 1$ で定義される曲線にも同様に適用できる。（例えばクライン曲線 $y^7 = x(x-1)^2$）。従来の例を包括した対象に適用できる方法を開発した本研究は，リーマン面の複素構造を制御するモジュラー関数の研究等に多大な貢献をするものと強く期待される。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。