

氏名(本籍)	やま 山	うち 内	ひろし 博(千葉県)
学位の種類	博士(理学)		
学位記番号	博甲第3373号		
学位授与年月日	平成16年3月25日		
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当		
審査研究科	数学研究科		
学位論文題目	<b>A Theory of Simple Current Extensions of Vertex Operator Algebras and Applications to the Moonshine Vertex Operator Algebra</b> (頂点作用素代数の単純カレント拡大の理論とムーンシャイン頂点作用素代数への応用)		
主査	筑波大学教授	理学博士	宮本雅彦
副査	筑波大学教授	理学博士	竹内光弘
副査	筑波大学教授	理学博士	本橋信義
副査	筑波大学助教授	博士(理学)	内藤聡

### 論文の内容の要旨

物体がどのような対称性を持つかを考える場合、その物体の形を変えない変換(対称変換)全体は群と呼ばれる数学的構造を持つことに着目する。それ故、群の考察は物体の対称性を決定する。一般に群は単純群の積み重ねによって構成されているので、単純群の考察が主要な目的となる。有限個の要素を持つ単純群の中で、散在型有限単純群と呼ばれる26個の群は他の無限系列に属している単純群とは異なり、特別な振る舞いをする。要素の個数で並べると、最大のものがモンスター単純群と呼ばれ、2番目の群はベビーモンスター単純群と呼ばれている。モンスター単純群は群論的な意味以外にも、保型形式とも密接な関係があることが知られ、注目されている群である。しかしながら、その構造を調べようとしても、モンスター単純群の要素の数は54桁にも達する。また、この単純群をある物体の対称変換の集まりとして実現しようとしても、その物体を少なくとも196883次元空間の中で構成しなければならず、各々の変換に対して196883行196883列の行列が必要となるなど、計算機を利用しても全く不可能ほどの大きさを持っている。その為、直接構造を調べる方法では、条件付きの部分群に対してしかその構造が分かっていない。

ところが、この群の表現空間の次元と基本的楕円型保型関数であるJ-関数のフーリエ展開の係数との一致からムーンシャイン予想と呼ばれる予想が1970年代に提案され、それに対する解答として、フレンケル達によるある種の無限次元空間の構成とポーチャーズによる新しい概念(頂点作用素代数)の導入が結びつき、ムーンシャイン頂点作用素代数と呼ばれるものが1988年に構成された。頂点作用素代数の公理は共形場理論のカイラル代数に対する公理を与えるものと現在では理解されている。しかも後に宮本によってこのムーンシャイン頂点作用素代数の小さな内部構造から自然にモンスター単純群の要素(対称変換)が構成されることも示され、モンスター単純群とムーンシャイン頂点作用素代数の密接な関係が認識された。しかしながら、このムーンシャイン頂点作用素代数自体の構造も単純ではなく、初期の構成と宮本による別構成が与えられているにすぎない。本研究では、最初の構成が位数2の自己同型を利用したカレント拡大であること、後者の構成法が2ベキの位数を持つカレント拡大を2重に繰り返した方法であることを見抜き、一般的

なカレント拡大の構造解析を行った。ここでカレント拡大とはカレント加群という性質のよい加群を利用した頂点作用素代数の拡大のことである。この一般的な設定のもとで、

- (1) カレント拡大された頂点作用素代数の既約加群がすべて決定できること、
- (2) 2つの既約加群に対する融合積と呼ばれる重要でかつ計算の難しいものが拡大前の頂点作用素代数と拡大に使われるカレント加群達の性質から決定出来ること、
- (3) カレント拡大された頂点作用素代数の完全可約性などは、拡大前の完全可約性から導かれることなどを示した。

さらに、これらの結果を応用してムーンシャイン頂点作用素代数やいくつかの重要な頂点作用素代数の内部構造に関してかなりの情報を与えた。特に、ホーンによって構成されていたベビーモンスター頂点作用素超代数を、ムーンシャイン頂点作用素代数の一部からカレント拡大によって簡単に構成できることを示した。この構成方法の利点は、全自己同型群が簡単に決定でき、かつ既約加群が完全に求まることである。この結果の簡単な帰結として、ムーンシャイン頂点作用素代数の2A-軌道体構成が元の頂点作用素代数と同型であることが分かる。

### 審 査 の 結 果 の 要 旨

本研究は、これまでの頂点作用素代数の重要な拡大の大半がカレント拡大であったという点に注目し、一般的な設定での表現論を決定するとともにカレント拡大に対して統一的な考察を与えた。そして、それらの結果を利用してムーンシャイン頂点作用素代数やベビーモンスター単純群に関する頂点作用素超代数の表現論の新しい考察を行った。これらは有限群を自己同型群として持つ頂点作用素代数の研究に対する大きな貢献であり、高く評価される。

よって、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。