

氏名(本籍)	後藤達生(埼玉県)				
学位の種類	博士(理学)				
学位記番号	博乙第800号				
学位授与年月日	平成4年7月31日				
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当				
審査研究科	数学研究科				
学位論文題目	Metric-dependent dimension functions (距離に依存する次元関数)				
主査	筑波大学教授	理学博士	中川良祐		
副査	筑波大学教授	理学博士	内山三郎		
副査	筑波大学教授	理学博士	梶谷邦彦		
副査	筑波大学助教授	理学博士	保科隆雄		

### 論文の要旨

トポロジーの立場で空間の次元を論ずるとき、対象が距離空間であっても、その位相を用いて位相不変量として定義するのが普通である。次元については、その定義と性質及びトポロジーにおける役割に関し、古くからさまざまな形で研究されている。いわゆる被覆次元  $\dim$  は、はじめ可分距離空間について定義されたが、こんにち普通、正規な位相空間で考えられている。しかし、距離空間に対してその位相ではなく、あえて距離に依存した次元関数を定義するのも自然な成り行きで、既に1930年頃 P. S. アレクサンドロフによって次元  $\mu\dim$  が定義されると共に、可分距離空間に対し  $\dim$  と  $\mu\dim$  が一致するかという問題が提起された。その後、距離に依存する次元関数も各種考えられ、研究されてきた。この論文は、これらの次元関数に関する諸問題の解決とその発展を計ったものである。

論文は2章よりなる。第1章は上のアレクサンドロフの問題に係わる。この問題自体は1953年 K. ジトニコフによって解決された。本論文ではその結果が精密化され、 $n$ 次元ユークリッド空間  $R^n$  の部分空間  $S$  で  $0 \leq m \leq n-1$ ,  $m \leq k \leq \min\{2m, n-1\}$  を満たす任意の整数  $m, k, n$  に対し  $\mu\dim S = m$ ,  $\dim S = k$  となるものが構成されている。著者はまず、3次元のユークリッド空間におけるジトニコフの着想をもとに、一般次元のユークリッド空間において  $\mu\dim S_0 = m$ ,  $\dim S_0 = \min\{2m, n-1\}$  となる空間  $S_0$  を作り、これとネーベリングの空間との関係を解明することにより上記の  $S$  を構成した。一般に  $\mu\dim X \leq \dim X \leq 2\mu\dim X$  が成立するから、 $m, k, n$  に対する上の制限は当然のものである。次にこの  $S$  と  $S_0$  を用いて  $n$ 次元ユークリッド空間の有界部分空間  $X$  に対する  $\mu\dim X$  の特徴付けが  $X$  から  $R^n$  への  $\varepsilon$ -変位の存在性によって与えられている。いわゆるチョゴシビリの定理(1938

年) は, この結果に非常に近いが, 実は成立しないものであることが例をもって示される。

第2章では, 永見-ロバーツによって定義されたいくつかの距離依存次元関数の性質が解明されたのち, その一つ  $d_2$  に関する実現問題が肯定的に解決されている。即ち  $d_2(X, \rho) < \dim X$  のとき,  $d_2(X, \rho) \leq k \leq \dim X$  なる任意の整数  $k$  に対し,  $d_2(X, \rho k) = k$  となる距離  $\rho k$  で  $\rho$  と位相同値なもの存在が示される。 $\mu \dim$  をはじめ他の距離依存次元関数の実現問題は既に解決済みではあるが, これらについての別証明が与えられている。最後に2つの距離依存次元関数  $\mu \dim$  と  $d_3$  の一致性についての永見-ロバーツの結果が拡張されている。

## 審 査 の 要 旨

次元関数  $\mu \dim$  が位相不変量ではないことは, ジトニコフの結果で得られたが, ユークリッド空間の部分空間について  $\dim$  と異なるどんな次元も有り得ると言うこの論文の結論は,  $\mu \dim$  の距離依存性の深さを示す興味ある結果である。チョゴシビリの定理の証明に難点のあることは早くから指摘されていたところであるが, 反例の構成及びその正しい形での提示は意義深い。距離依存次元関数の実現性について, 最後まで残されていた  $d_2$  についての解決は, まことに喜ばしい。距離依存次元の理論は, 次元論をはじめ, 位相空間論全体の発展に係わり, その展開は極めて重要である。本論文は以上のようにその理論確立への貢献が大きく, この点で高く評価できる。

よって, 著者は博士 (理学) の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。