

氏 名 (本 籍)	まし 間	も 下	かつ 克	や 哉	(埼玉県)
学 位 の 種 類	理	学	博	士	
学 位 記 番 号	博	乙	第	280	号
学 位 授 与 年 月 日	昭	和	60	年	10
学 位 授 与 の 要 件	学	位	規	則	第
審 査 研 究 科	数	学	研	究	科
学 位 論 文 題 目	<b>Homogeneous Minimal Submanifolds in Spheres</b> (球面内の等質極小部分多様体)				
主 査	筑波大学教授	理学博士	高	橋	恒
副 査	筑波大学教授	理学博士	児	玉	之
副 査	筑波大学教授	理学博士	太	刀	川
副 査	筑波大学教授	理学博士	中	川	久

## 論 文 の 要 旨

リーマン多様体の極小部分多様体は、微分幾何学における主要な研究対象の一つで、最近の解析学、位相幾何学、リー群等の研究が深まるにつれて、極小部分多様体に関する研究も活発になって来ている。本論文においては、等質リーマン多様体、特に球面のより高い次元の球面内への極小はめこみについての一意性と、その余次元の研究を目的としている。

一般に $n$ 次元リーマン多様体 $M$ の $N$ 次元球面( $N \leq n$ )への極小はめこみは $M$ のラプラス作用素のある固有値の固有関数を用いて表わすことが出来る。逆に、 $M$ が等質リーマン多様体で、その線型等方群が既約に働いているとき、 $M$ のラプラス作用素の各固有値に対して、一定の方法で $M$ の球面内への極小はめこみを構成することが出来る。第 $k$ 番目の固有値に対するこの極小はめこみを $M$ の第 $k$ 標準はめこみという。

本論文は二つの章からなり、第1章においては、3次元球面への $N$ 次元球面( $N \leq 3$ )への極小はめこみを調べている。3次元球面が2次の特殊ユニタリ群 $SU(2)$ であることに注目し、 $SU(2)$ の既約表現の軌道として得られる球面内の極小部分多様体を研究することにより $k$ が4以上のとき、3次元球面のラプラス作用素の第 $k$ 番目の固有値に対応する極小はめこみとして、 $2k+1$ 次元の球面内への極小はめこみが存在することを示した。第 $k$ 標準はめこみは $k^2+2k$ 次元の球面への極小はめこみである。さらに $k$ が6以上である場合には $k$ 番目の固有値に対する極小はめこみとして、 $k$ 次元の球面内への極小はめこみが存在することが示された。

第2章においては、6次元の球面内の等質極小部分多様体の分類が試みられている。6次元の球面は概複素構造をもっているが、それに関して全実的な3次元部分多様体は極小部分多様体であることが知られている。そこで、概複素構造を保つ6次元球面の等長変換群はコンパクト例外群 $G_2$ であることに着目し、 $G_2$ の部分群の軌道として得られる全実部分多様体を分類し、それらが5種類あることを示した。

## 審 査 の 要 旨

〔批 評〕

3次元球面の第 $k$ 標準はめこみの余次元は $k^2 + 2k - 3$ である。do CarmoとWallachの研究によると、3次元球面の標準はめこみは、同じ固有値に対応する極小はめこみの中では最大の余次元をもつもので、 $k \geq 4$ ならば、より小さい余次元の極小はめこみが存在し、 $k \leq 3$ ならば、標準はめこみが唯一つの極小はめこみである。そこで $k \geq 4$ の場合には極小はめこみの余次元がどのくらい小さくなり得るのが問題になる。これに関して、たとえばChernは、「3次元球面の7次元球面への極小はめこみは全測地的なものに限るのではないか？」という予想を出したが、江尻により反例がみつき、この予想は否定的に解決された。極小部分多様体は、楕円型の2階の偏微分方程式により定義されるので、それを一般的に解くことは困難である。このことから極小部分多様体の具体的な例を作ることは非常にむづかしい。著者は3次元球面が $SU(2)$ であることに注目して、 $SU(2)$ の既的表現の軌道を微分幾何学的に調べることにより余次元が $2k - 2$ 極小はめこみの存在を示し、更に $k$ が6以上の偶数である場合には余次元が $k - 3$ まで下げられることを示した。又同じように $G_2$ の部分群の軌道を調べることにより6次元球面内の等質極小部分多様体の分類に成功した。これらの結果はリ一群の表現論が微分幾何学の研究に有効であることを具体的に示しただけでなく、極小部分多様体の例を与えることにより、今後の極小部分多様体の研究に多大の貢献をなすものである。

よって、著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。