

氏名(本籍) 田崎博之(岡山県)

学位の種類 理学博士

学位記番号 博甲第277号

学位授与年月日 昭和60年3月25日

学位授与の要件 学位規則第5条第1項該当

審査研究科 数学研究科 数学専攻

学位論文題目 Minimal submanifolds in compact symmetric spaces
(コンパクト対称空間の極小部分多様体)

主査 筑波大学教授 理学博士 高橋恒郎

副査 筑波大学教授 理学博士 阿部英一

副査 筑波大学教授 理学博士 児玉之宏

副査 筑波大学教授 理学博士 中川久雄

論文の要旨

本論文はコンパクト対称空間における種々の極小部分多様体の研究を目的としている。

第1章においては、酒井・竹内によって明らかにされたコンパクト対称空間の第1共役軌跡の構造定理に基づき、対称空間と、半単純リー群の根を用いることにより、第1共役軌跡に開かつ稠密に含まれる部分多様体の第2基本形式を計算し、それらが極小部分多様体になることと、又対称空間の階数が2以上の場合にはそれらの第2基本形式が0にならないことを示した。対称空間の階数が1の場合には全測地的であることが良く知られている。

第2章においては、Calabiによりケーラー多様体に導入された diastasis なる量と最小軌跡との間に次の関係があることを示す。ケーラー多様体 M の diastasis とは $M \times M$ の対角集合の近傍で定義される関数であるが、「 M がコンパクト型エルミート対称空間の場合、 M の diastasis を D とするとき、 M の点 p に対して $D(p, q)$ が定義できない点 q の集合は p の最小軌跡 $C_p(M)$ に一致する」。更に、この結果の系として、「 N をコンパクト型エルミート対称空間 M のケーラー部分多様体とするとき、 N の点 p の N における最小軌跡 $C_p(N)$ は点 p の M における最小軌跡 $C_p(M)$ と N との交わりに一致する」がわかる。この性質は、これまで特別な部分多様体について成り立つことが知られていたが、このように一般の形で成り立つことが示されたことは興味深いことである。

第3章では Harvey と Lawson により導入された calibration をいくつかの対称リーマン多様体において具体的に計算し、部分多様体の体積最小性の証明に応用する。まず、コンパクト単純リー群 G を両側不変なリーマン計量により、リーマン多様体とみなしたとき、3次の calibration が構成

され、それにより G のある種のコンパクト部分群がそのホモロジー類の中で体積最小であることを示す。更に G の第 1 共役軌跡が安定な極小部分多様体であることが示される。次に四元数ケーラー多様体 M においては、 M の基本 4 次形式の冪が calibration になることを示し、これより M のコンパクト四元数ケーラー部分多様体とそのホモロジー類の中で体積最小になること、特に四元数射影空間においては、その第 1 共役軌跡が安定な極小部分多様体になることが示される。

審 査 の 要 旨

著者は本論文において、対称リーマン空間内のある種の部分多様体が極小部分多様体であることを証明している。第一章においてはコンパクト対称リーマン空間の第 1 共役軌跡に関わらず稠密に含まれる部分多様体の第 2 基本形式を計算することにより、それらが極小部分多様体になっていることを示した。更に階数が 2 以上の対称リーマン空間においてはそれらの部分多様体が決して全測地的にならないことを示した。これは、全測地的になることが既にわかっている階数 1 の場合と全く事情が異なることを示した点で重要な結果である。又第 1 共役軌跡の形状を調べることは、多様体の大域的研究にとって大切なことであり著者の研究はこの面でも重要な貢献をなしたものと見える。

第 2 章における diastasis を用いたエルミート対称空間のケーラー部分多様体の最小軌跡の研究は Calabi 以後初めての diastasis の応用として大変興味深いものである。又その結果もエルミート対称空間の重要な性質と思われ、今後の発展が期待される。

第 3 章の結果は、四元数ケーラー多様体の基本形式から一連の calibration が得られることを示し、それによってケーラー多様体の場合と類似のことが四元数ケーラー多様体の場合にも成り立つことを示したものである。四元数ケーラー多様体はその定義からみても、ケーラー多様体よりはるかに取り扱いのむずかしいもので、これまでも四元数ケーラー多様体についての研究は余りなされておらず、その点からも著者の研究は画期的なものである。

極小部分多様体の研究は微分幾何学において極めて重要な一部門をなしているが、それにもかかわらず、具体的な極小部分多様体の例はあまり多くなかった。著者の研究により極小部分多様体の豊富な例つけ加えられたことは今後の極小部分多様体の研究にとり極めて重要なことと見える。

よって、著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものとみとめる。