【25】

| | |
|---|---|
| 氏　名（本　籍） | 新　井　敏　康（和歌山県） |
| 学位の種類 | 理　学　博　士 |
| 学位記番号 | 博甲第428号 |
| 学位授与年月日 | 昭和62年3月25日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第1項該当 |
| 審査研究科 | 数学研究科 |
| 学位論文題目 | **Proof-Theoretic Investigations of iterated hyperjumps by Takeui's reduction method**<br>**（竹内の還元法による繰り返されたハイパージャンプの証明論的研究）** |
| 主　査 | 筑波大学教授　理学博士　本　橋　信　義 |
| 副　査 | 筑波大学教授　理学博士　西　村　敏　男 |
| 副　査 | 筑波大学教授　理学博士　太刀川　弘　幸 |
| 副　査 | 筑波大学教授　理学博士　宮　下　庸　一 |

## 論　文　の　要　旨

本論文において新井氏は，帰納的整列順序数$\xi$の各々に対して，いわゆるHyperjumpsと呼ばれる操作を高々$\xi$回繰り返し許すことを表す第二階の形式的な公理を含んだ自然数論の拡張体系$A^{-}\xi$を定義し，この体系とS. Fefermanによる$\xi$回までの帰納的定義を繰り返し許す自然数論の拡張体系ID $\xi$および竹内外史氏による順序図の体系O（$\xi+1$，1）に関する次の諸結果を得た。

定理A　順序図O（$\xi+1$，1）の中の各順序図についての到達可能性は形式的体系ID $\xi$の中で証明できる。

定理B　形式的体系ID $\xi$は形式的体系$A^{-}\xi$の中に翻訳可能である。

定理C　形式的体系$A^{-}\xi$の無矛盾性の証明を順序図O（$\xi+1$，1）に関する還元法で証明できる。

これらの結果から

系　二つの形式的な体系$A^{-}\xi$，ID $\xi$の証明論的な強さは順序図O（$\xi+1$，1）で表せる順序数になる。

が得られる。特に$\xi$を最小の超限順序数$\omega$とすれば，この結果は竹内外史氏による$\Pi^{1}_{1}$-実数論

の無矛盾性証明の最善の改良になっている。

更に，形式的体系 ID $\xi$ の証明論的な強さを表す順序数の通常の表現は知られているので，この系から竹内氏の順序図O（$\xi+1$，1）の通常の表現が得られることになる。

## 審　査　の　要　旨

集合論の逆理の発見による数学の危機を乗り越える一つの方策として，ヒルベルトは記号の体系として形式化された形式的数学の中で矛盾を表す記号列が証明できないこと，すなわちその体系が無矛盾であることを有限の立場で証明するという，いわゆるヒルベルトのプログラムを提唱した。この方法はゲーデルの不完全性定理による影響をうけ修正されたヒルベルトのプログラムとして現在も研究が行われている。

形式的な理論Tの無矛盾性証明に必要な超限帰納法の大きさを表す最小の順序数を形式的な理論Tの順序数という。すると修正されたヒルベルトのプログラムにかんする重要な結果は

ゲンツェンの定理　初等自然数論の順序数は最初の $\varepsilon$ 数 $\varepsilon_0$ である。

竹内の定理　$\Pi^1_{1-}$ 解析学の順序数は順序図O（$\omega+1$，$\omega_3$）で表される順序数以下である。

の二つである。ところで最近，形式的体系ＩＤ$\xi$の順序数がS. Feferman やその弟子達によって求められたが，そこで求められた順序数の表現と竹内の順序図との関係が分からなかった。

新井氏の結果はこの両者の関係をはっきり与えている。彼の結果のおかげで竹内流の証明論とアメリカやドイツの証明論は共通の物差しを得たことになる。更に，この物差しによってこの二つの証明論の一方で得られた結果と他方で得られた結果を結び付け重要な新しい結果が得られる。その中でも

竹内－新井の定理 $\Pi^1_{1-}$ 解析学の順序数は順序図O（$\omega+1$，1）で表される順序数である。

は際だった結果である。

また，新井氏の導入した新しい形式的体系 $A^-\xi$ は竹内氏の還元法を用いるのに都合の良い体系であり，彼が用いた還元法の改良と共に今後証明論の発展に大きく貢献できるものと期待できる。

よって，著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。