筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第39集　2000年2月

中高6カ年における数学的能力等の発達変容分析
（5年計画の3年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
駒野　　誠・井上　正允・熊倉　啓之
更科　元子・鈴木　清夫・深瀬　幹雄
牧下　英世

中高6カ年における数学的能力等の発達変容分析
（5年計画の3年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
駒野　誠・井上　正允・熊倉　啓之
更科　元子・鈴木　清夫・深瀬　幹雄
牧下　英世

1．はじめに

2002年から実施される新しい学習指導要領が決定した。本校では移行措置も考慮しつつ，完全5日制のカリキュラム編成を検討中である。新教育課程には「総合的な学習の時間」，「情報科」が新たに加わり，数学科の単位数は現在より増加することはない。指導要領改訂のたびに「数学科」の必修時間数は減少の一途である。大学生の「数学の学力」の低下が叫ばれ，日本は科学技術によってこれまで国力を支えてきたが，そのよりどころが危うくなっている。「数学を知らなくたって社会で生きていける」というような発言が堂々と一人歩きしている。教育はロングスパン・グローバルな視点で考えることが肝要であるが，残念ながらそのような発言は少ない。教育の多様化・個性化・自由化が叫ばれ，学力差はますます拡大していきそうである。経済・社会正義などについての価値の多様化とともに，子供の生育環境は悪化傾向にある。我々教師に課せられた課題はあまりにも大きい。

青年期前期・後期の子どもたちを育成するためには，その発達・成長を意識しながら連続的な教育内容を考える視点が大切である。本校は，受験にわずらわされずに試行錯誤を重ねながら「自分探し，自分つくり」をする時間・空間を生徒に提供する学校でありたいと考える。そこで，学校のカリキュラムを学校で経験するすべてのものと定義し，教科だけでない，諸活動をも含めた「中高一貫のカリキュラム編成に関する基礎的研究」を立ち上げた。本校1995年度入学の49期生を対象に6年間にわたる追跡調査を行っている。心身共に成長著しい中高6年間の変化にいかなる要因が働いているのか，またカリキュラムがいかに作用しているのかを調査・研究することで，成長期の生徒にとっての学校の果たす機能を，表のカリキュラムである教科，影のカリキュラムである学校行事や学年やクラスの活動・クラブ活動・生徒会活動など多方面から検証している。これにより今後のカリキュラム改革への指針を得ることを目的としている。数学科もこれに連動させながら，本研究をスタートした。

2．研究のねらい

本研究は，49期生が入学から卒業までの6カ年で「生徒の数学観はどのように変容するのか」「問題解決にあたって，個人の思考や技能，方法などの広がりや深化はいかなるプロセスをたどるのか，またどのような違いが見られるのか」「本校の数学カリキュラムや授業は子どもたちにどのように受け入れられているのか」などをねらいとして次の（1），（2），（3）の調査を行い分析を進めている。

（1）作文調査（中1 1995，中3 1997，高2 1999で実施済み）

「算数・数学と私」という題で，生徒個々が持っている数学に対するイメージ，数学への興味や関心，数学を学んで感じたこと，数学と日常生活の関わり，今までに読んだ数学の本で印象に残っているものなどについて，各自それぞれの数学観を自由に書かせる。2年ごとに49期生全員に書かせ，本校全体で追跡している特定な何人かについて，数学観やものの考え方にどのような変化が見られるかを追跡調査している。 ....第3集（1998.3)

（2）意識調査（中1 1995，高1 1998で実施済み，高3 2000で実施予定)

数学の好き嫌い，数学を学習する意味，数学がどのような点で役に立つと思うか，数学に対するイメージなどについてアンケート形式により調査する。2年ごとに行うアンケート調査において，数字がどのように変わるか，どの項目で大きく数字の変化が見られのか，どの項目で数字の変化があまりないのかに注目し，生徒の成長過程にともなう数学についての意識・数学観の変容を調査する。 ....第1集（1996.3），第4集（1999.3)

（3）解答調査（調査問題A，B：中2 1996，高2（4月初め）1999で実施済み）

（調査問題C，D：中3 1997で実施済み，高2 1999で実施予定)

同じ問題を異なる学年で解答させ，解き方の変化を調査する。A～Dの4つの問題について中学の時と高校の時とで解き方にどれだけの違いが見られるかを全体と個人の両面から調査する。なお調査にあたっては，中学3年生と高校2年生で予備調査をし，本調査に臨んだ。

.............第2集（1997.3)

.............第3集（1998.3)

3．本年度の調査・研究

（1）作文調査：中1，中3，高2（本年度） ……これまでの3回の調査の総括

（2）解答調査A，B：中2，高2（本年度4月初め)

解答調査Aは幾何の問題

解答調査Bは作図問題 ……前回調査との比較分析

「作文調査の分析」

【ねらい】

「算数・数学と私」という題で，生徒個々がもっている数学に対するイメージ，数学への興味や関心，数学を学んで感じたこと，数学と日常生活の関わり，今までに読んだ数学の本で印象に残っているものなどについて，各自それぞれの数学観を自由に書かせた。中学１年の時点では全生徒を調査対象として作文を書かせ，中学３年次には特定の生徒（A～I君）の数学観やものの考え方にどのような変化が見られるかを追跡調査した。

中学１年，中学３年，高校２年となるにつれ，それぞれの生徒がどのように変容したのかを分析した。作文の分析方法はこれまでと同様，次の４つの観点についてこれまでの研究に追加する形で行った。

【実施した分析の観点】

数学に対する

・好感度　　・成績

・意欲　　・有用感

いずれの項目も４段階（大きくなれば＋）で評価し，それを座標軸の上に四角形で表した。

（中学１年次……………，中学３年次―・―・―，高校２年次――――――）

【考察】

全体を通して，いくつか気がついた点を以下に列挙する。

①E君に見られるように，中学生から高校生になり数学的な知識の拡がりを持ちながら，有用感の面では逆に，学習した数学の内容が具体的にどのような形で社会で役に立つのかが見えなくなり，有用感が－（マイナス）になった生徒がいる。

一方，H君に見られるように，高校２年になってから学んだ物理の学習内容との関連で有用感が＋（プラス）に変化した生徒もいる。

有用感については我々も明確な定義をせずに本研究に取り組んできたという経過があるが，発達年齢によって有用感の捉え方が様々であると考えられる。

②F君やH君に見られるように，中学１年から高校２年までの発達の過程で中学３年の段階で好感度や意欲が－（マイナス）に転じるも，高校２年になり再び＋（プラス）に変化した生徒もいた。

これは中高一貫校の特徴として，中学３年の段階がいわゆる「中だるみ現象」となっていること

とと関連しているものと考えられる。他教科，日常生活との関係についても今後検討していきたい。

③C君に見られるように，中学1年→中学2年→高校2年と好感度や意欲が－（マイナス）に変化している生徒がいる。C君のような生徒は追跡調査した生徒以外にも多数いるものと考えられる。

一方，D君に見られるように，成績は中学3年，高校2年と優秀であるにもかかわらず，好感度と意欲の面で高校生になって－（マイナス）に変化した生徒がいた。

一般には，好感度・意欲・成績の間には相関があると考えられるが，D君はそうでない一例である。D君のような生徒は他には必ずしも多いとはいえないが，好感度・意欲を増すようなカリキュラムのあり方を検討することは重要である。

【備考】

A，G君は，高校2年次の作文を未提出である。

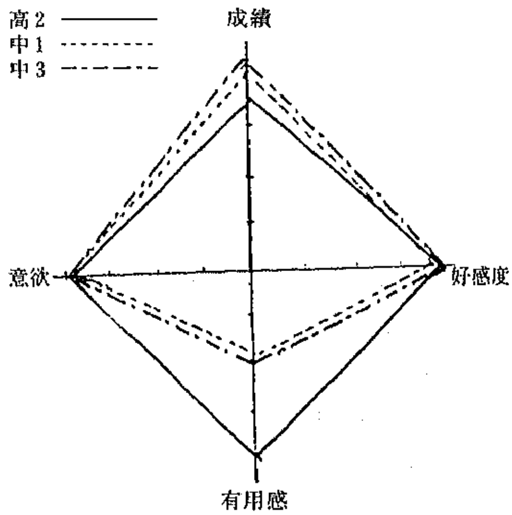
B君

中１：私立小出身。小さい頃から「算数」でなく「数学」に親しんできたという。算数オリンピックに出場したり，円周率の計算をパソコンで１万桁まで求めたり，独学で微積もかじったし，カオスとフラクタルにも興味をもつ。解けたときの気持ちの良さは何ともいえず，数学は私にとって気分転換のものであり，好きなものである。

中３：日本の「学校数学」は「発想力」を問うものではなく，「機械的求解」になっており，解いたときの達成感，解く過程の華麗さといった「面白さ」とは無縁なものだ。だから，数学は大好きだが授業は嫌いだ。授業でやる内容は受験にしか役立たない。生活に必要なのは算数ぐらいなもの。「家計簿をつけるのに２次方程式を使う人がいますか」とのたまう。好きな分野は，フラクタル，円周率の計算，整数・組合せ論などで，わたしは「達成感」「発想力」を求めて止まない数学オタクである。

高２：「学校数学」に対する批判は，さらにヒートアップしている。「現在の数学教育は実用偏重主義である」といい，「数学の意義は抽象化にある」と考える。「幾何がゆとり教育で削除されようとしている」とも。「数学は学問の論理によって整理されたすべての学問の基礎となり，継ぎ手となっている」という。論理的思考力を持たない群衆を社会に送り出し，日本の世界への競争力は失われつつある」と日本の将来をも憂えている。個人的な数学オタクから，数学教育批判・日本の将来へと考えが発展している。

分析：中３までは数学オタクである。数学の本をかなり読んでいるし，その問題解決に当たってコンピュータも自在に駆使する。発想力が大事であるといい，解く過程の華麗さを求め，達成感に浸る。学年内でも際だった存在。高２になって，数学教育への批判が強まる。中学までと異なり，個人的な内容について記述していない。



C君

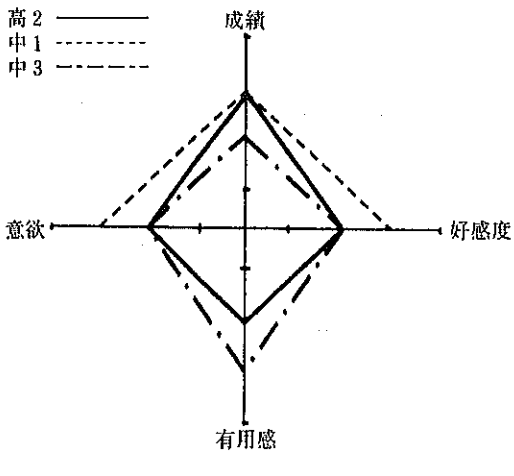
中１：算数はおもしろくて，好きだった。
算数は表面的な計算や考えだが，数学は数や計算の実質的な所を考えていると思う。
数学が，僕に新たな感動や喜び，疑問を与えていく。数学はとても不思議で面白い。
数学を，不思議だと思う気持ちを持ち続けて，勉強していきたいと思う。

中３：数学が嫌いというわけではないが，苦手科目になってしまった。
数学は面白い。数学は考えて自分で解くことが主体である。数学は謎解きである。
数学は様々な学問に役立つ。
数学は複雑でよくわからないものを扱う。数学に力を入れて勉強しなければいけないとは思うが，それでもややずさんになっている。

高２：数学に対するイメージは，難しいが理知的で面白い。
難しい数学は好きになれないが，パズル的なものには興味がある。
数学を学んで，奥深い学問であると思う。
数学と日常生活との関わりは，四則計算を除いてほとんどない。

分析：小学校では，算数が好きだったが，中１でも，算数との違いに多少の不安を感じながらも，数学に対してよい印象を抱いている。中３での「数学は複雑でよくわからないものを扱う」や，高２での「奥深い学問である」という記述に見られるように，数学に対して，ある一定の評価を持ち続けている。

しかし中３になると，数学に対して苦手意識が表れ，数学の学習に対して不安を感じるようになる。また，中３では「様々な学問に役立つ」のように数学の有用性についてプラスの評価をしていたが，高２になると「日常生活には役立たない」のように，マイナスの評価に変化している。数学に対する苦手意識が表われるとともに，数学に対するマイナスイメージが膨らんできた様子がわかる。



D君

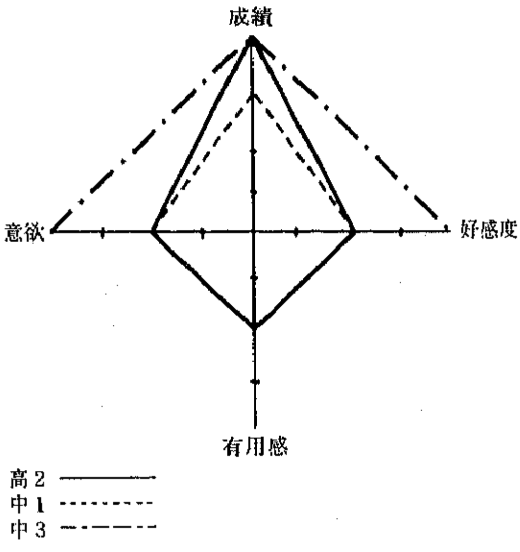
中１：算数は簡単だったが，数学は難しい。代数はとてもややこしい。幾何はものすごい頭を使う。解けたときの喜びは格別である。数学がわからなくなったら算数を思い出してみよう。数学を難しいと思わずに，解いていこうと思う。

中３：代数は，問題を解くのが機械的で，学習する喜びがなくなった。
幾何は考えることが多いので楽しくなった。テーマ学習は，２時間考えてもわからなかったりするが，班で話し合って答えを出せるので，感動することもある。
数学はやる気があるかないかで楽しさが違うと思う。数学はおしつけられるのが一番だめだと思う。数学は，考えて，発見して，感動することが一番大切だと思う。

高２：学校で習っている数学に対するイメージは，最終的な答えを手段・道具でしかない。数学への興味関心はあまりない。
数学を学んで感じることは「人間は本当に頭がよくパワフルな生き物」ということ。数学は，自然現象を分析するためにできたもので，現在社会のいろいろな所で役立っている。しかし，自分の現在の生活の中では，まったく必要ない。

分析：中１の段階では，数学に対して不安を抱いているが，中３になると，その不安は完全に消えたようである。成績も中３になって上昇し，高２になっても成績は維持されている。また，成績の向上に伴って，中３の段階では，数学に対する印象もよくなり，興味関心も増したと考えられる。ところが，高２になると，成績の良さにもかかわらず，数学に対しては，マイナスの評価に変化した。数学の有用性を認めつつも今の自分に関係ないものと考えており，興味関心もなくなったようである。

中１→中３→高２と，数学観が大きく変化したことが読み取れる。



E君

中１：算数はあまり得意でなかった。規則性の勉強することを通じて算数がおもしろく感じるようになった。それで難しい問題もあきらめないで解くようになった。難しい問題を解いた満足感からますます算数が好きになった。数学は算数より奥が深く，満足感も大きいと思っている。だから，満足感を得られる問題にさらに取り組みたい。

中３：小学校のころ算数は子供，数学は大人がやるいイメージがあったが，方程式を学習して数学のイメージが変わった。$0.\dot{3}=1/3$を授業でよく分からなかったので，早く微分積分を勉強したい。昔は算数レベルで十分で数学は無駄であると思っていた。数学がなければほとんどのものが作れない。生産者には必須である。

むりやりやらせても将来役立てることができないから高校以後の数学はやりたい人のみすれば良い。

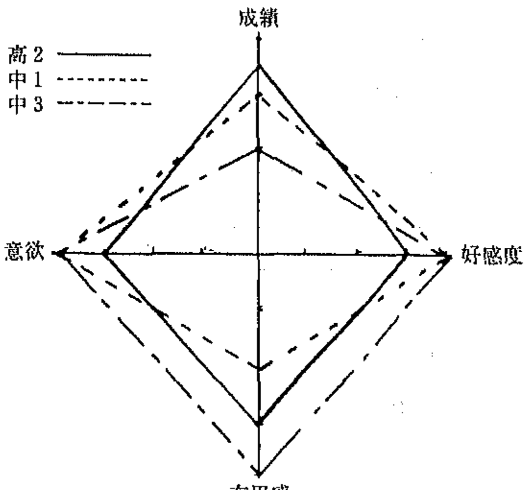
高２：数学は得意，不得意の差が大きい教科と考えているが，その違いは発想や考えの鋭さの違いであると考えている。数学には関心を持っており，日常生活と関わりのある分野などに興味がある。確かに常用対数を用いて，2^{100}の20桁目が分かっても日常生活には関係ないが，役に立つ項目も沢山ある。数学が得意でないが，数学は嫌いではない。数学の原点は人間の好奇心と自己満足なのだから，せっかく数学を学ぶのならそれらを感じながら取り組みたい。

分析：小学校以来一貫して，算数・数学が得意であると思っていないが，数学に対して興味と関心を持っている。

数学の有用感については，中学では具体的に挙げるのではなく，一般論として数学がものを生産するのに必要といってすませている。

高校になると，具体的にどのような面で有用であるかを考えようとしているが，まだ分からないようである。

数学はむりやりやらせても将来役立つことができないから高校以後の数学はやりたい人がやればよいという中学で持っていた姿勢が消えている。



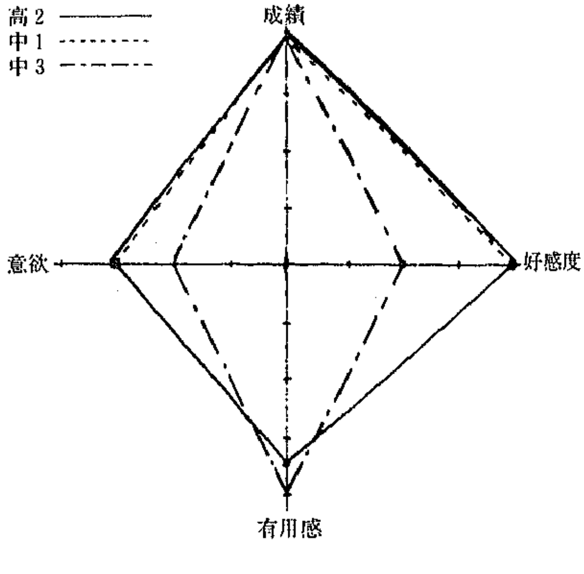
F君

中１：算数は図形を中心として好きだったが，時間に追われて解くのは嫌だ。今，数学の本を読んでいるし授業も好きだが，努力不足。これから，毎日は無理と思うが，ぼちぼち努力していきたい。

中３：数学の源は「数字を適当にいじくって遊んでいた」こと。自然科学は人類の至福のための手段であり，それを発見する手段が数学。数学を日常生活に関連づけることは難しいと思う。将来理系に進む者はともかく，文学や演劇などに進む者にとって，退屈で理解しがたい無意味な数学の授業を受ける必要があるのか。画一的でなく，我々にも自己責任の下で，授業を選択する権利が欲しい。

高２：「基本的には苦手」「自分にはセンスがない」と言いながら，「高校数学は教養の範疇」であり，「論理的思考のトレーニングになるはず」「数学の恩恵をうけて，毎日の暮らしが成立しているのは間違いない」と語る。数学への親近感は薄く，数学を将来的に自分が活用できるとは思わないが，学校の数学は嫌いではないし，物理との関連で数学を眺めてみると，数学の有用感は増すし，数学なくして人類の発展はありえないと思う。数学なしでも生活力はつくが，数学を知ることのよって，より自分の生活に対する意識が高くなるのではないか。

分析：中１時は好きであり，中１らしい素直さで，取り組みへの努力を考えていた。中３になると，数学の有用性を認めつつも，画一的である授業については意義を認めていない。精神的な成長にともなって，数学に対する印象が大きく変化している。
高２では，中３で見られた迷いが消え，「数学の客観的な役割」や「数学と自分との関係・距離」を冷静に分析・評価する。トータルな知的・精神的成長がみてとれる。



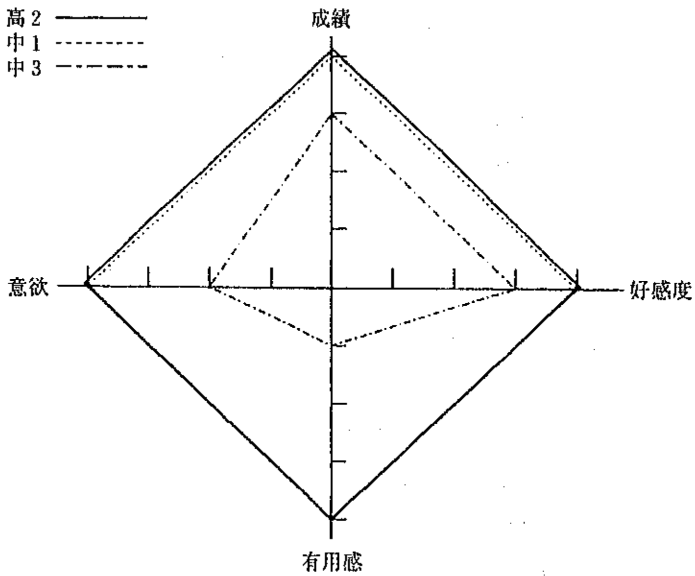
H君

中１：数学が１番好きな教科。入試の勉強をしている時は，解くのが大変で苦労した。場合の数や規則性の問題は面倒で苦手，速さなどは方程式が使えるので簡単で楽。中学で文字を使うようになり楽になった。数学が得意科目になるように努力したい。

中３：数学・理科は得意で，国語がだめなので，将来は理系に進みそう。
数学は長い時間かけても解けた時の充実感がある。代数は計算が面倒なので，幾何の方が好き。数学者・科学者にならない限り数学は不必要。しかし，大学入試があるので諦めて勉強する。

高２：好きな教科のひとつ。何時間も難問に取り組むこともある。考えるのが好き。高２になり，物理を学んでベクトルや微積分の重要性を知り，更に意欲が出てきている。

分析：中の時は１番好きな教科であり，文字の使用により小学校の算数より楽になったと感じている。しかし中３ではぐっとトーンが下がり，得意で理系志望ながらも，代数は面倒で，「数学者・科学者以外には数学は不必要」と言い切る。幾何が好きであっても，「大学入試があるので諦めて」というくらい有用感は低い。それが高２になり，物理との関連で有用感がプラスに変化している。一貫して好きな教科ではあるが，意欲・有用感の変化が印象的である。



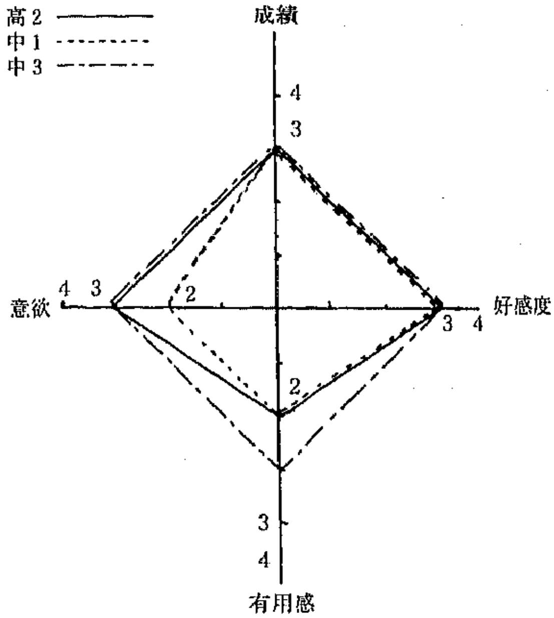
I君

中 1 ：僕の生活で一番身近な算数・数学は「計算」である。
そろばんを習ったが，そろばんは便利でおもしろく，楽しかった。
暗算を習い，頭と指だけ計算することがすごいと思った。暗算能力は残った。
買い物の合計金額や消費税まで暗算でき，自分には大切な能力である。これからもなくさないように使っていきたい。

中 3 ：そろばんの影響で，数学というと「計算」をイメージすることが多い。
計算が得意だが，文章題などの複雑なものが苦手だった。
中学の授業を通して，答えにたどり着くまでにいろいろな方法があるという点で数学が好きだ。
自分の持っている知識を使って，解けた時の喜びは格別なものだ。

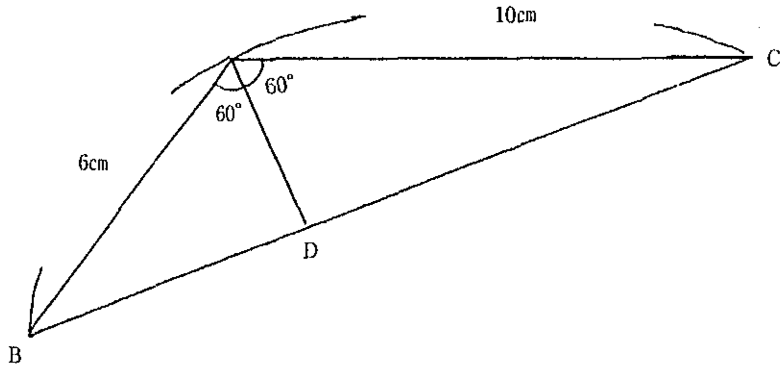
高 2 ：「数学が苦手」ということから，「複雑，利用目的がわからない」といったマイナスイメージが大きいが，反面，数学の応用問題をこれまでの自分の知識をいろいろ使って解いたときの喜びが大きいことを挙げている。
「問題を解いていて，いきづまったときに，どう考えていくか，それが人生の中にも同じ状況として表れる。」という意見に対して，「数学の問題を解く能力でなく，解くための定理や公式を導き出した人たちの「考え方」や「発想」が大切である」と考えている。すなわち，その定理が「どのように」，「なぜ」考えられたのかという見方のほうが有用であると考えている。

分析：中学までは，「計算」と「算数数学」を同一視していたが，高校の作文では「考え方」や「発想」が大切であるという見方に変容している。



「調査問題Ａの分析」

調査問題Ａ　下図のように，ＡＢ＝６cm，ＡＣ＝10cm，∠ＢＡＣ＝120°の△ＡＢＣで∠Ａの２等分線とＢＣの交点をＤとする。ＡＤの長さを求めよ。
また，別の求め方があればそれも答えよ。



出題のねらい　この問題では相似の平行線と比，三平方の定理，60度・30度の直角三角形の三辺比，面積の利用，解析幾何（座標軸の設定），三角比，余弦定理，ベクトルの利用などさまざまな解法が考えられる。

生徒が今までに学んだ数学の知識や技能をどのように用いて解答しているか，中学と高校では解法の広がり・深化にどのような違いがあるのかを調べる。

調査学年　・中学２年生
・高校２年生（４月初め）

解答分類　（数字は解答数）

○中学（調査数121名）

分　類	A	B	C	D	E	その他	合計
相　似　比	63	3	17		15	17	115
三角形の性質				1			1
三平方の定理				1			1
合　　計	63	3	17	2	15	17	117

○高校（調査数160名）

分　類	A	B	C	D	E	なし	その他	合計
相似比	69	33	25	4	23		2	156
三平方の定理		1	2	7			1	11
面積比	3	3	1	9	1	7	1	25
三角比	1	1		1	1	1	2	7
余弦定理	5	2	1	17		46	2	73
直線の方程式						2	4	6
ベクトル						3		3
複素数						5		5
面積公式						2		2
円の性質							2	2
合　計	78	40	29	38	25	66	14	290

1．上の表のA～E，その他は補助線の引き方を表している。

2．三角比とは，三角形の面積をsinを用いて表現したもの。

3．直線の方程式とは，座標を導入して，直線の方程式を利用したもの。

［考察］1．生徒一人あたりの解答数については，中学では１個（117／121＝1.0），高校では1.8個（290／160＝1.8）と約２倍である。

2．生徒一人あたりの解答の方法については，中学では"相似比の利用"だけ，高校では"相似比の利用＋その他の解法"となる。

3．中学では図形を幾何的な扱い（補助線は平行線を引くこと）でしか解を求める方法が分からない。

高校では，中３で学習した三平方の定理（直角三角形の三辺の長さの比）を用いる解答（補助線として垂線を引く）が多くなる。

4．高校では，数学の知識や技能が増えた結果，いろいろな解法が見られる。特に，高１で学習した三角比の知識・技能を利用したものが目立つ。

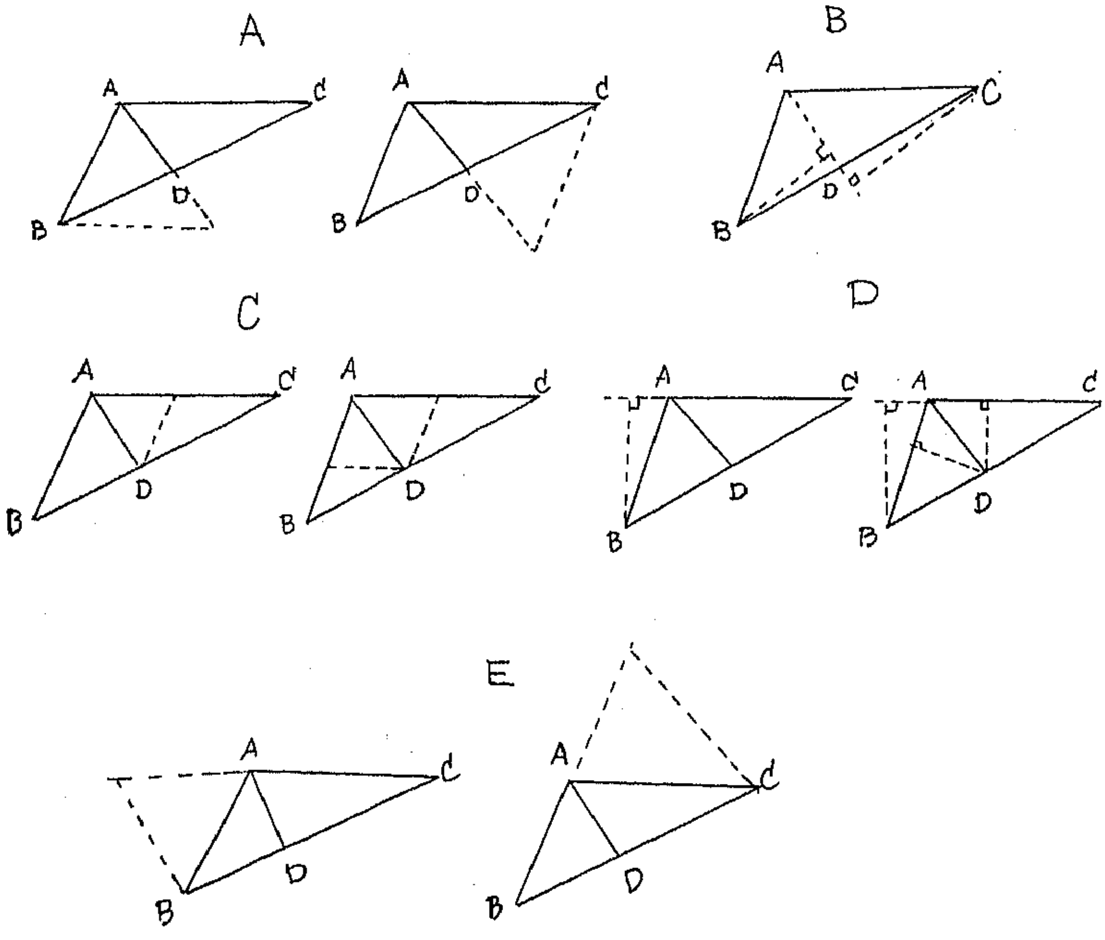
5．補助線を引かない解答数が示すように，高校では，三角比を学習した結果元の図形のままで辺や角の量的な関係をとらえた解答が多くなる。

6．図形の量的な関係（３辺の長さの関係や辺と角の量的な関係など）を学習することにより，代数的な処理で解を求めようとする。

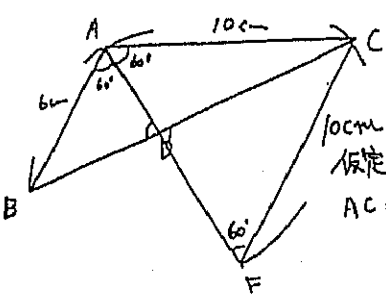
7．高校では，図形の辺を直線の一部であるという見方ができ，座標を入れることにより問題を処理できるようになる。

8．多様な解法が見られることは，中２から高１にかけて学んだ数学の方法や知識によって，図形を多面的にとらえることができるようになっていると考えられる。

補助線の引き方



（1）



点Cを通るABに平行な線をひき、その線とADをのばした線の交点をFとする。

仮定：AB//CF．AB＝6cm．
AC＝10cm．∠BAD＝∠CAD＝60°

証明：△ADBと△FDCにおいて、

仮定よりAB//CFなので錯角により∠BAD＝∠CFD …①

同様にして∠ABD＝∠FCD …②

①，②より二角相等で△ADB∽△FDC …③

△ACFにおいて

①より，∠CFD＝60° …④　仮定より∠CAD＝60° …⑤

④⑤より∠FCA＝60°　よって△ACFは正三角形 …⑥

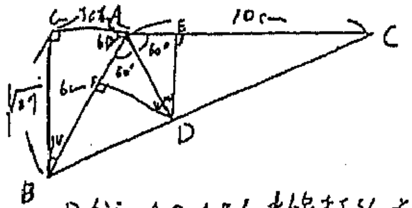
⑥より，AC＝CF＝FA＝10cm …⑦　仮定よりAB＝6cm …⑧

⑦，⑧より△ADBと△FDCの相似比は3：5

よってAD：DF＝3：5　⑦よりAFは10cmだから

$AD = \cancel{10}^{5} \times \frac{3}{\cancel{8}_{4}} = \frac{15}{4}$　　$AD = \frac{15}{4}$ cm

(2)



Dから AC、ABに垂線を下ろし、交点を E、F とする。

また、ACの延長にBから垂線を下ろし、交点をGとする。

△ABGは内角が30°、60°、90°の直角三角形であるため、

AG = 3cm

三平方の定理より、

BG = $\sqrt{27}$ cm

よって△ABCの面積は、$5\sqrt{27}$ cm²

△AFD ≡ △AED なので

FD = ED

△ABCを△ABDと△ACDに分けて、

FD = ED = $\dfrac{5\sqrt{27}}{8}$ cm

AE = x cm とすると、

△AEDは内角が30°、60°、90°の直角三角形であるため、

AD = $2x$ cm

三平方の定理より

$$\left(\frac{5\sqrt{27}}{8}\right)^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\frac{675}{64} = 3x^2$$

$$\frac{225}{64} = x^2$$

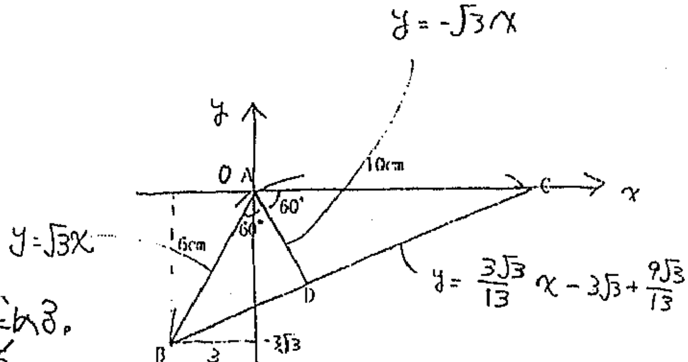
$$\frac{15}{8} = x$$

AD = $2x$ cm なので、

AD = $\dfrac{15}{4}$ cm

高校の解答例

（1）



図のように座標をおく

l:ADとm:BCの交点を求める。

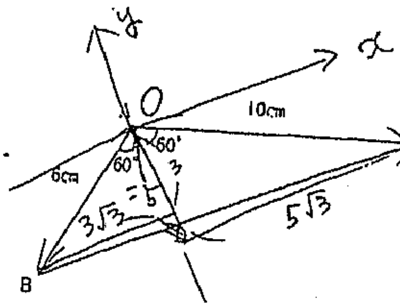
$$-\cancel{\sqrt{3}}x = \frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{13}x - 3\cancel{\sqrt{3}} + \frac{9}{13}\cancel{\sqrt{3}}$$

$$x = -\frac{3}{13}x + \cancel{3 - \frac{9}{13}} + \frac{30}{13}$$

$$13x = -3x + 30$$

$$x = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} \quad , \quad y = -\frac{15}{8}\sqrt{3}$$

よって $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + \left(\frac{15}{8}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{225+675}{64}} = \frac{30}{8} = \underline{\frac{15}{4}}$



右図のようにxy軸及び原点をとる。

$|\overrightarrow{AD}|$を求めたい

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{AB} = -3\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \times \frac{3}{8}$$

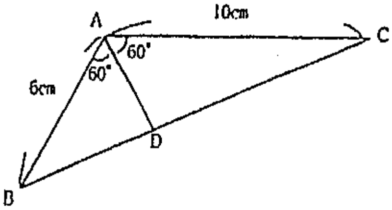
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$= 5\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$

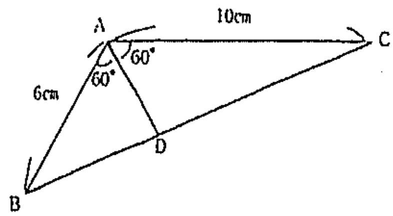
$$\begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} \times \frac{3}{8} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AD}| = \underline{\frac{15}{4}}$$

(2)

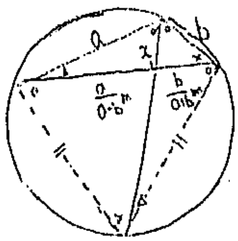


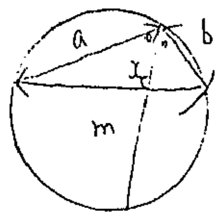
Aを原点とし、ACを実軸として
複素数平面上で考える。
点B, C, Dの表す複素数をb, c, dとすると　$c=10$
bは原点にcを$\frac{3}{5}$倍して$-120°$回転した点なので
$$b=\frac{3}{5}\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\cdot c$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot 10=-3-3\sqrt{3}i$$
ここでDはBCを3:5に内分した点なので、
$$d=\frac{15}{8}-\frac{15}{8}\sqrt{3}i$$
よって　$AD=\frac{15}{4}$



三角形の面積公式を利用。
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 10\times \sin 120°$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=15\sqrt{3}$$
$$\triangle ABD=15\sqrt{3}\times\frac{6}{6+10}=\frac{45\sqrt{3}}{8}$$
$AD=x$ とおくと、
$$\frac{1}{2}\times 6\times x\times\sin 60°=\frac{45\sqrt{3}}{8}$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}x=\frac{45\sqrt{3}}{8}$$
$$12\sqrt{3}x=45\sqrt{3}$$
$$x=\frac{45}{12}=\frac{15}{4}$$
答. $\frac{15}{4}$

(3)





$x.\quad \left(\frac{ab}{x}-x\right)\cdot x = \frac{ab}{(a+b)^2}m^2$

$$ab - x^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}m^2$$

$$x^2 = ab - \frac{ab}{(a+b)^2}m^2$$

上図において

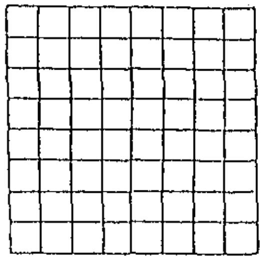
$$x^2 = ab - \frac{ab}{(a+b)^2}m^2$$

$$\therefore\ x^2 = 60 - \frac{\cancel{60}^{15}}{\cancel{256}_{\cancel{64}\,16}}\cdot\cancel{196}^{49}$$

$$= \frac{225}{16}$$

$$\therefore\ x = \frac{15}{4}$$ //

「調査問題Ｂの分析」



調査問題Ｂ調査問題Ｂ

（１）右の図の中に正方形は大小合せて全部で何個あるか。

（２）右の図を用いた「問題」を作り，その解答を書け。
（１つでなく，できるだけ作れ。）

出題のねらい （２）の作問により，作る問題に中学と高校でいかなる違いがあるのかを調べる。生徒の発達段階によって生活経験，社会的関心，数学的知識などが当然異なるので，それらが作問の中にどう活かされているかを見たい。また，本問の（１）にどれだけ引きずられるかも注目される。

調査学年 中学２年
高校２年（四月初め）

解答結果

★（１）について

	中　学	高　校
生徒数	121名	160名
正答数	109名（正答率90%）	148名（正答率93%）

［考察］

１．誤答の多くは単純な計算間違いであるが，高校では正方形だけでなく長方形の総数（高校作問例①参照）と勘違いしてCombinationを用いて求めた者が多数いた。この方が高校生らしい問題（単なる数え上げで求められないもの）であり，高校１年で学ぶ順列組合せの応用として印象的な解法なのであろう。

２．高校でΣk^2の公式を利用している者は55名（正答者の37%）であったが，求めるものが$1^2+2^2+\cdots+8^2$であり，この公式の定着度は判断できない。

★（２）について

	中　学	高　校
生徒数	121名	160名
白紙	19名	8名
作問総数	136問（１人　1.12問）	362問（１人　2.26問）

分野		中学	高校
①平面図形	A　図形の個数	46 (34%)	161 (44%)
	B　経路	34 (25%)	118 (33%)
	C　線の本数	1 (1%)	1 (0%)
	D　しきつめ	11 (8%)	8 (2%)
	E　反射	4 (3%)	0 (0%)
	F　面積	7 (5%)	21 (6%)
	G　長さ	2 (1%)	1 (0%)
	H　角度	1 (1%)	1 (0%)
	I　点の個数	2 (1%)	3 (1%)
	J　出会い・追跡	4 (3%)	2 (1%)
	K　さいころを動かす	1 (1%)	2 (1%)
	L　重心	1 (1%)	3 (1%)
	M　その他	4 (4%)	18 (5%)

分野		中学	高校
②空間図形	A　展開図	4 (3%)	2 (1%)
	B　立体の個数	4 (3%)	3 (1%)
	C　体積	2 (1%)	1 (0%)
	D　投影図	4 (3%)	1 (0%)
③関数	A　時間・速さ	2 (1%)	0 (0%)
	B　グラフをかく	1 (1%)	1 (0%)
④確統	A　確率	1 (1%)	8 (2%)
	B　統計	0 (0%)	0 (0%)
⑤その他		0 (0%)	7 (25)

注：数字は　問題数であり，
（　）内は作問総数に対する%。

［考察］

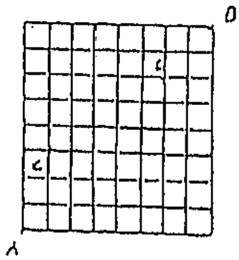
1．作問数が中学の一人平均1.1問から高校の2.3問と倍増した。しかしその多くは平面図形の個数・経路に関するものであり，経験した事があるもの（典型的な数学の問題？，（1）に引きずられたもの（高校作問例①，②参照））をまず1問作ったと考えられる。

2．出題のねらいとしていた「作る問題に中学と高校でいかなる違いがあるのか，生徒の生活経験・社会的関心・数学的知識などが作問の中にどう活かされているか」については，中学時に見られたファミコンのゲームの様なストーリー性のあるものが消えたこと，高校での問題の多くは数学的事項の追求になっていることが挙げられる。中2から高1と精神的に成長し，作問についての認識が常識的になったということであろう。なお同じ個数や経路の問題であっても，高校の解答方法は数え上げではなく順列組合せなどを活用している。

また，生活経験・社会的関心・数学的知識などが活かされているものも複数あった（高校作問例参照）が，全体的な傾向として抽出できるものはないようだ。

3．（1）に引きずられて離散的な問題を作ろうとすること，また離散的な問題の経験が定型的なものしかなく作問に広がりが出にくいことなど，出題のねらいに対してこの調査問題が適当であったのかについてさらに検討したい。

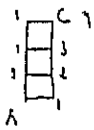
①



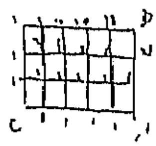
Aは城野くんの家です。
Cは花屋さんの家です
Dは彼女の家です
Bは病院です。

城野先生が花屋で花束を買い、
彼女に届けてから 学校へ行くには何通りの
行き方があるでしょう。
ただし、遅刻しないように遠回りは禁止です。

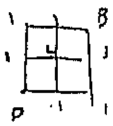
（解答）



A→C
4通り



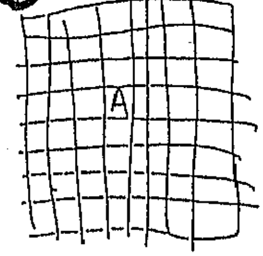
C→D
56通り



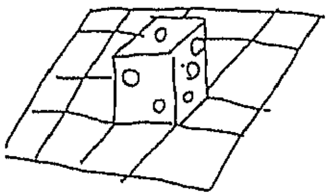
D→B
6通り

4×56×6＝1344
答 1344通り

②

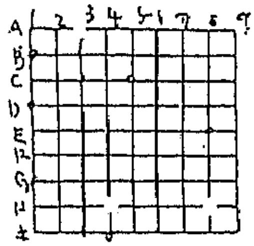


Aの部分にサイコロをおき、ずらさずに
たてか横にころがしていく。
その時、面についている数字を通ったマスに記入する
だから、Aの部分は6となる。
それを続ける 同じところは通ってはダメ。
そして、どこにも行けなくなったら終わりです。
さて、それが終わった後マスの中に書かれている
数字の合計は? 最高と最低?

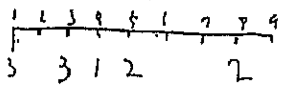


③

このような ほうがん紙に同じ重さの石を
1B、3B、3C、5C、1D、8D、1G、5G、8E
3I、4I に置く。紙の重さを
考えないと重心はどこになるか。

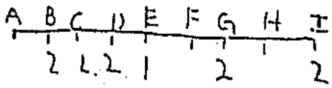


横を見ると



なので重心は 4

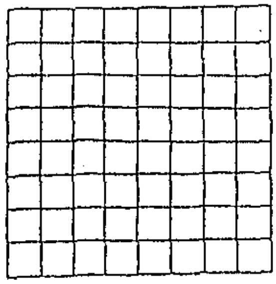
縦を見ると



なので重心は E

よって 4E

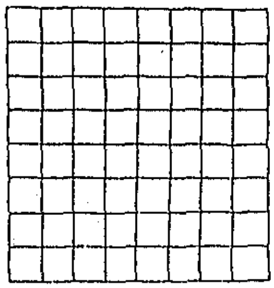
①



長方形はいくつか

$${}_9C_2 \times {}_9C_2 = \left(\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}\right)^2$$
$$= 36^2$$
$$= 1296$$

②



全ての正方形の面積の和

$$8^2\cdot 1^2 + 7^2\cdot 2^2 + \cdots + 1^2\cdot 8^2$$

$$2\sum_{k=1}^{4} k^2(9-k)^2$$

$$=2\sum_{k=1}^{4}(k^4-18k^3+81k^2)$$

$$=2\left(\frac{1}{30}\cdot 4\cdot 5\cdot 9\cdot 59-\frac{18}{4}\cdot 4^2\cdot 5^2+\frac{81}{6}\cdot 4\cdot 5\cdot 9\right)$$

$$=2(177-1800+2430)$$

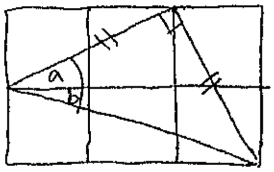
$$=2(807)$$

$$=1614$$

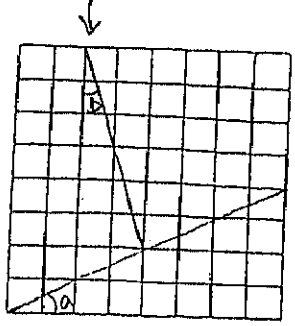
③

$a+b=45°$ を示せ。

(解)



格子点を通るように工夫した



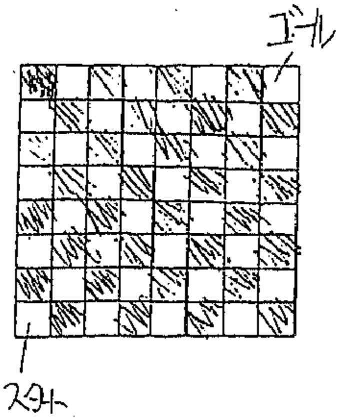
図より明らか。

他にも tangent や complex number を使っても O.K

④

サイコロをふって
1~3なら右
4~6なら上

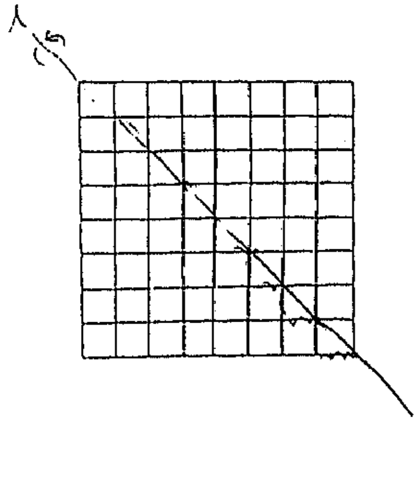
スタートからゴールまでに
黒いマスを何マス踏むか
期待値を求めよ。
(枠からはみ出ない。はみ出る場合は動かない。)



答え 7マス

⑤

Lを中心に1回転させた
緑の線が通る部分の
表面積の和を求めよ



⑥

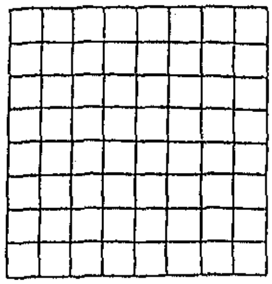
n×mのマス目に次のルールのもとに白黒の石を置いていく。（置かないマスがあっても構わない。

・黒石の隣に黒石は置けない。

・白石は必ず隣りに一つ以上白石がある。

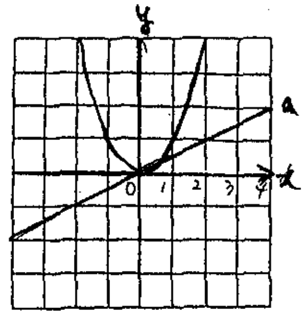
注「隣」とは上下左右の1マスをさす。

この時、黒石と白石の個数の積が最大となるような置き方を決定せよ。



⑦

図の1目盛りを1とするとき
直線aと放物線bの交点を求めよ
（座標で）



$a \cdots \quad y = \frac{1}{2}x$

$b \cdots \quad y = x^2$

$\frac{1}{2}x = x^2$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x$ より

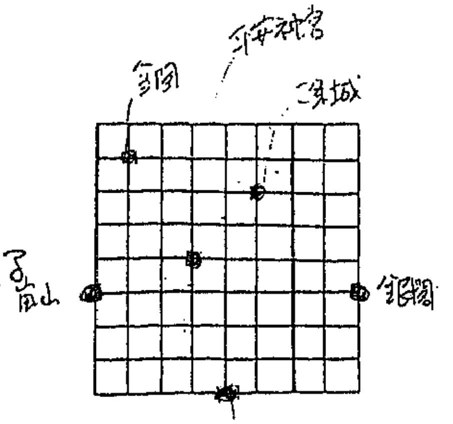
$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ //

$(x, y) = (0, 0)$ //

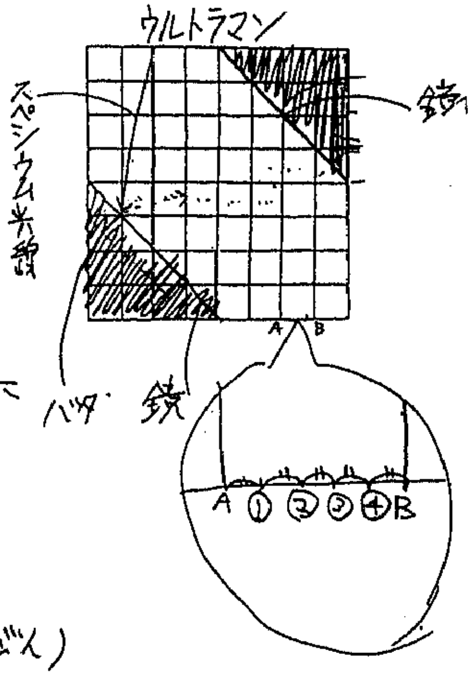
⑧



京都駅をでて５つのスポットを
最短でまわって京都駅に帰ってくる
方法は何通りあるでしょう。
但し、昼食を嵐山でとるので、
嵐山は３つ目にいかなければなりません。京都駅
さもないと腹が減って
行き倒れになります。

（場所ずれてたらゴメンナサイ

⑨



ウルトラマンが、バルタン星人に
スペシウム光線をうちました。
でも、バルタン星人は、透明
だったので、鏡に当たって、
はね返ってしまいました。
さて、スペシウム光線はどこに
いってしまうのでしょう。
番号で答えなさい。

答え ④（たぶん）