筑波大学体育科学系紀要 Bull. Health & Sport Sciences, Univ. of Tsukuba 13：187—194，1990．

べき級数型非線形モデルによる粘弾性特性の同定

小 林 一 敏・湯 川 治 敏*・井 上 伸 一**

Parameter identiffication technique for a nonlinear viscoelastic property with power series type Voigt model

Kazutoshi KOBAYASHI, Harutoshi YUKAWA and Shinichi INOUE

The shock absorbing materials used in sport surfaces and sport shoes show the dynamic property of viscoelastisity. Kobayashi proposed a parameter identification technique for a nonlinear Voigt model constructed nonlinear viscous element and nonlinear elastic element in parallel. Nonlinear Voigt model is very useful for estimation of dynamic property of sport surfaces, sport shoes and muscle. But this model was not found applicable to materials that have more complex structure, for example lawn and softball.

The purpose of this study is to propose a parameter identification technique for a nonlinear Voigt model represented by a power series type nonlinear elastic element and a power series type viscous element in parallel. The equation of this model is represented as follows;

$$f=\sum_{i=1}^{s} k_i x^i + \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\sum_{j=1}^{r} c_j |\dot{x}^j|$$

where f is measured force, x is displacement, k_i are parameters of power series of elastic element, c_i are parameters of power series of viscous element.

In this proposed identification technique, parameters are calculated by using the method of multiple regression analysis with measured force as a dependent variable, and displacement and velocity as independent variables. In the case of lawn and softball, sufficient accuracies were given by using parameters included in 5-degree power series for elastic element and 6-degree power series for viscous element.

Key words： nonlinear viscoelastic model, parameter identification technique, power series type Voigt model, multiple regression analysis

1．はじめに

スポーツサーフェースやシューズのソールなどの粘弾性特性を力学的モデルによって同定することは，衝撃に対する応答やその他の動的な特性などを理論的に検討するうえで非常に有効な手段である。また，生体の筋の粘弾性特性等，生体組織を力学的立場からとらえる研究も盛んに行なわれている。この場合の同定法として通常は正弦波による振動応答試験法が用いられることが多い。この方法は線形粘弾性理論を基礎としており，微小変形領域に適用が制限される。しかし，スポーツサーフェースや運動用具の場合には衝撃による大変形が生じることが多いので，衝撃試験法による

＊筑波大学大学院体育科学研究科
＊＊筑波大学研究生

粘弾性特性の同定法が有効な場合が多い。

小林[5),6)]は，スポーツサーフェースやシューズのソール，生体の筋などは非線形の粘性要素と弾性要素を並列に持つ実数型非線形 Voigt モデルで良い近似が得られるとし，そのパラメーターを一段階衝撃試験および多段階衝撃試験によって同定する方法を示している。

しかし，芝生や軟式野球ボールを小林の方法[5)]を用いてモデル化を試みたところ，十分な精度が得られず，これらに対しては実数型非線形 Voigt モデルは適用できないことが判明した。これは，芝生は物性がかなり異なる土の部分，根の部分，草の部分の 3 層構造になっていること，また，軟式野球ボールの場合は内部が中空構造になっており，シューズなどに比べて複雑な構造になっているためと考えられる。従って，これらのより複雑な構造にも適用可能なモデルが必要である。

佐藤ら[9)]は，弾性要素を 3 次までのべき級数に展開し，粘性要素は線形を仮定することにより，弾性特性に非線形性を含む構造物をモデル化し，そのパラメータ同定法を示している。しかし，芝生や軟式野球ボールは粘性にも非線形性が存在すると考えられるため，このモデルも適当ではない。

本研究では，弾性要素，粘性要素ともにべき級数で展開することにより，小林の実数型非線形 Voigt モデルでは高い精度の近似が困難であるような複雑な構造を有する物質に対しても高い精度の近似が可能なべき級数型非線形 Voigt モデルを提案し，線形 Voigt モデル，実数型非線形 Voigt モデルとの比較を行ない，その有効性を検討するものである。

2．べき級数型非線形 Voigt モデルについて

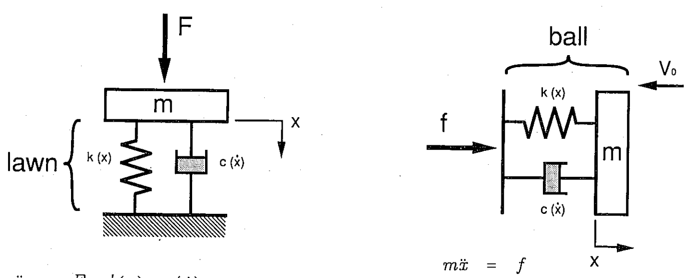
Voigt モデルは弾性要素と粘性要素が並列に結合された形を持っており，外力が作用して物体に変形が生じたとき，変形変位に対して生じる弾性要素による抵抗力 F_k と粘性要素による変形速度に対して生じる抵抗力 F_c のそれぞれの和が全抵抗力になっていることを意味している。

F_k が変位 x に比例し，F_c が速度 $\dot{x}$ に比例すると考えるのが基本的 Voigt モデルである。弾性要素と粘性要素の非線形性が $F_k=kx^a$，$F_c=c\dot{x}^b$ により表されると考えるのが実数型非線形 Voigt モデルである。実数型よりも表現の自由度を大きくするために

$$F_k=k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\cdots,$$

$$F_c=c_1|\dot{x}|+c_2|\dot{x}^2|+c_3|\dot{x}^3|+\cdots$$

の形で表そうとするのが本論文におけるべき級数型 Voigt モデルである。ここでは，k_1，k_2，… c_1，c_2，…の各係数の個々に物理的な意味を持たせ，各次数の要素の抵抗力の和により F_k，F_c を表そうとするのではなく，x のべき級数全体で x と F_k の関数関係を表し，$\dot{x}$ のべき級数全体で $\dot{x}$ と F_c の関係関数を表そうとするものである。このこと



$$m\ddot{x} = F - k(x) - c(\dot{x}) = F - \sum_{i=1}^{s} k_i x^i - \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\sum_{j=1}^{r} c_j|\dot{x}^j|$$

F : force applied on the test foot
m : mass of test foot
x : displacement
k_i : parameter of nonlimear elastic element
c_j : parameter of nonlinear viscostic element

(a) lawn

$$m\ddot{x} = f = -k(x) - c(\dot{x}) = -\sum_{i=1}^{s} k_i x^i - \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\sum_{j=1}^{r} c_j|\dot{x}^j|$$

f : force applied on the softball
m : mass of the softball
x : displacement of the C.G. of the softball
V_0 : initial velocity of the softball
k_i : parameter of nonlimear elastic element
c_j : parameter of nonlinear viscostic element

(B) softball

Fig. 1 Voigt model of visco-elasticity of the lawn and the softball.

から，個々の係数の中には負の値になるものがあっても，モデル全体の物理的な意味としては何等差しつかえないと考えられる。

Fig. 1(a)に示すように，芝生のべき級数型非線形 Voigt モデルは次式で表される。

$$m\ddot{x}=F-\sum_{i=1}^{s}k_i x^i-\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\sum_{j=1}^{r}c_j\,|\dot{x}^j| \qquad (1)$$

ただし，F は荷重変換器の検出端から test foot（圧力伝達板）に加えられた衝撃力，m は test foot (圧力伝達板) の質量，k_iは試験材料の非線形弾性に関する係数，c_jは非線形粘性に関する係数，x は変位，$\ddot{x}$ は圧縮加速度，$\dot{x}$ は圧縮速度であり，s，r は必要な近似精度に応じて決めるものとする。

軟式野球ボールについても Fig. 1(b)に示すような次式で表されるモデルを導入する。

$$m\ddot{x}=f$$

$$=-\sum_{i=1}^{s}k_i x^i-\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\sum_{j=1}^{r}c_j\,|\dot{x}^j| \qquad (2)$$

ただし，f はフォースプレートにより測定した衝撃力，m はボールの質量，k_iは非線形弾性に関する係数，c_jは非線形粘性に関する係数，x はボールの重心における変位，$\dot{x}$ は速度とする。

芝生のモデルと同様に，s，r は必要な近似精度に応じて決めるものとする。

3．実験装置および実験方法

小林によって提案された[5]非線形粘性要素と非線形弾性要素を並列に持つ実数型非線形 Voigt モデル（以下，実数型モデルと呼ぶ）では高い近似度が得られなかった例として，芝生および軟式野球ボールについて実験を行なった。

芝生の実験については Fig. 2に，軟式野球ボールについては Fig. 3にそれぞれの実験装置および実験構成図を示す。

芝生の実験は，Fig. 2に示した衝撃試験器を植生している芝上に設置し，測定を行なった。芝生上における衝撃試験では芝生の構造により衝撃面積を規定する圧力伝達板（test foot）の面積が13 ㎠以下であると，データに再現性がないことが事前の実験で明らかになっている。これは，芝生の根が網状構造になっていること，また，芝生表面は完全な平面ではなく凹凸があることなどにより，測定面積が小さいと構造的な最小単位を測定できないためであると考えられる。従って，今回の測定では最小単位面積と考えられる面積よりもやや大きな16㎠の衝撃面積の圧力伝達板を用い，衝撃力の最大値が 272.8N, 421.4N, 875.4N の 3 種類の強さの異なる衝撃試験を行なった。それぞれの試験を light，medium，heavy とする。衝撃試験によって圧力伝達板に加わる衝撃力，圧縮加速度を測定し，圧縮加速度を積分することにより圧縮速度を求め，さらに積分することにより圧縮変位を求めた。

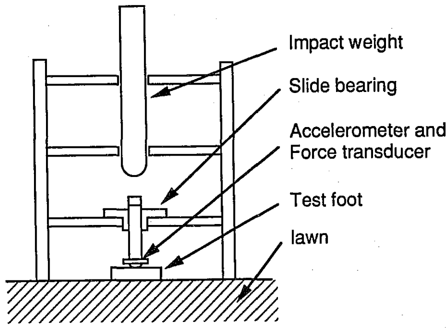


Fig. 2 Structure of testing device for the lawn field.

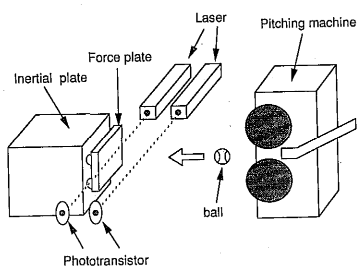


Fig. 3 Schematic diagram of experimental system for the softball.

軟式野球ボールの実験は，Fig. 3に示すように，水平方向の力が測定できるようフォースプレートの測定面が鉛直になるように設置し，側方からピッチングマシンによってボールを衝突させた。ボールの入射速度は光学的に測定され，衝撃力，入射速度，ボールの質量によって，ボールの重心における，速度，変位を算出した，ボールの入射速度が 4.35m/s, 9.72m/s, 16.75m/s の 3 試技を行ない，それぞれの試験の最大衝撃力は 362.9N, 848.8N，1716.3N であった。それぞれの試験を light，medium，heavy とする。

4．べき級数型非線形 Voigt モデルのパラメータ同定法について

芝生の粘弾性の試験において，ある時間 h の衝撃力を F_h，圧力伝達板の質量を m，圧縮加速度を $\ddot{x}_h$とすれば，芝生表面に直接加わる力 f_hは

$$f_h = F_h - m\ddot{x}_h \tag{3}$$

となり，(1)は

$$f_h = \sum_{i=1}^{s} k_i x_h^i + \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\sum_{j=1}^{r} c_j\,|\dot{x}_h^j| \tag{4}$$

となる。

軟式野球ボールにおいては，弾性要素と粘性要素によって生じる抵抗力がフォースプレートで測定されるので，芝生と同様(4)が成り立つ。

べき級数型非線形 Voigt モデルのパラメータ同定は，各時間 h における衝撃力 f_hを h における弾性要素による抗力

$$\sum_{i=1}^{s} k_i x_h^i$$

と h における粘性要素による抗力

$$\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\sum_{j=1}^{r} c_j\,|\dot{x}_h^j|$$

によって推定したときの推定誤差が最小になるように，s，r 及びパラメータ k_i, c_jを決定することであり，衝撃力 f_hを従属変数，x_h^iと $\dot{x}_h^j$を独立変数と考えたときの，重回帰係数として求めることが可能である。

5．べき級数の次数とパラメータの同定精度

衝撃試験により芝生と軟式野球ボールのべき級数型非線形 Voigt モデルのパラメータを同定する際，弾性要素と粘性要素のべき級数展開の次数を決めなければならない。佐藤ら[9]はべき級数形非線形弾性要素を含む構造物のパラメータ同定法の中で，非線形弾性要素は3次までのべき級数で展開しているが，粘性項は線形要素を用いている。これは，パラメータ同定を行なう構造物が粘性の非線形性は明らかに小さいと仮定できるためであると考えられる。しかし，本研究でパラメータ同定を試みようとする芝生および軟式野球ボールは粘性項の影響も大きいと考えられるため，粘性項についても非線形要素を加えるのが妥当であると考えられる。従って，弾性要素および粘性要素のべき級数の次数を適当に変化させ，同定精度が高くなる次数を求めればよい。また，何次までのパラメータを用いれば適当であるかは対象物によって異なると考えられる。

一般に，べき級数で展開する次数を上げれば同定の精度は高まる可能性があるが，データのフィルタリングのためには適当な次数で打ち切った方が良い場合がある。また次数を上げると同定方法が複雑になるという問題点がある。

同定精度は最小二乗回帰あるいは曲線の当ては

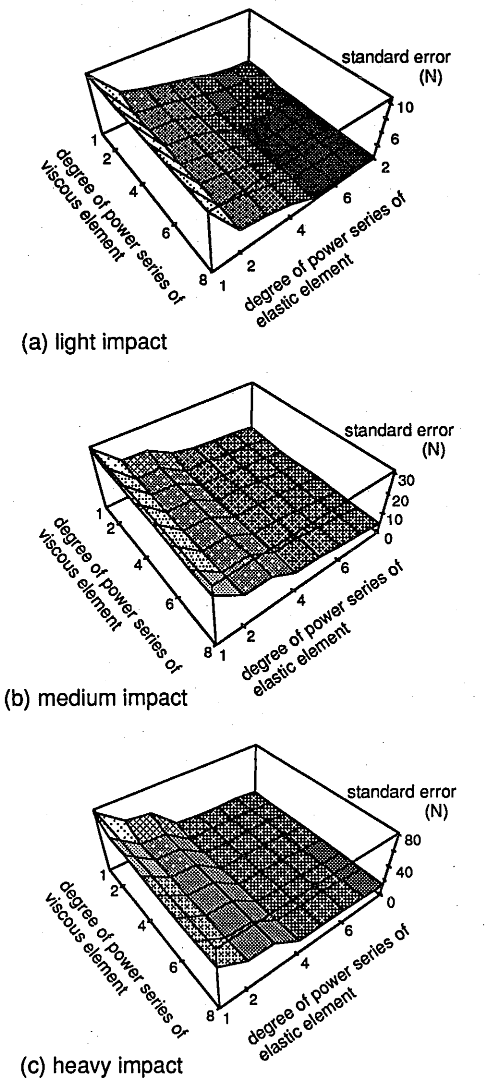


Fig. 4 Standard errors between the measured force and the estimated force by using various pair of viscous power series and elastic power series, when the three shock load tests are applied to the lawn. Viscous power series and elastic power series are varied from 1-degree to 8-degree.

めの推定標準誤差によって検討される。Fig. 4(a)～(c)に，芝生の各試験において，弾性要素と粘性要素の各展開次数の組み合わせの違いによる実測値と推定値との標準誤差の変化を示す。図中，弾性要素の次数が3次，粘性要素の次数が4次とは，弾性要素は3次までのべき級数で展開し，粘性要素は4次までのべき級数で展開していることを示している。

芝生における推定では各試験とも粘性項の次数よりも，弾性要素の次数を上げる方が標準誤差を減少させるためには効果的であり，弾性要素を6次，粘性要素を5次以上に次数を上げても標準誤差の改善は見られない。弾性要素群が5次，粘性要素群が4次までのべき級数展開による推定の標準誤差は light, medium, heavy の強度の落下衝撃のそれぞれで，2.44N，9.20N，17.07N であり，測定値の最大値に対する標準誤差の比は，0.90%，2.23%，1.95%であり，また，それぞれの強度における測定値の最大値付近についてのランダム誤差は 17.99N, 32.87N, 58.72N 相対ランダム誤差は 6.20%，8.74%，7.04%であった。

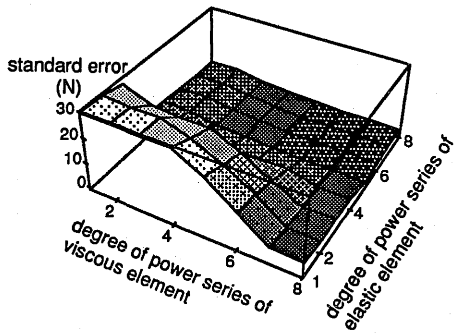
軟式ボールの各試験において，弾性要素と粘性要素の各展開次数の組み合わせの違いによる実測値と推定値との標準誤差の変化を Fig. 5(a)～(c)に示す。Fig. 5からわかるように軟式野球ボールは芝生とは対象的に，粘性要素の次数を上げることによって標準誤差を効果的に減少させることがてきると考えられる。

軟式野球ボールにおける推定では各試験共に弾性要素が5次まで，粘性要素が6次までのべき級数展開による近似によって，測定値の最大値と最小値の差に対する標準誤差の比が0.95%，1.42%，1.78%となり，また，それぞれの強度における測定値の最大値付近についてのランダム誤差は 46.48N，47.68N，28.91N，相対ランダム誤差は 11.74%，6.00%，1.66%であった。

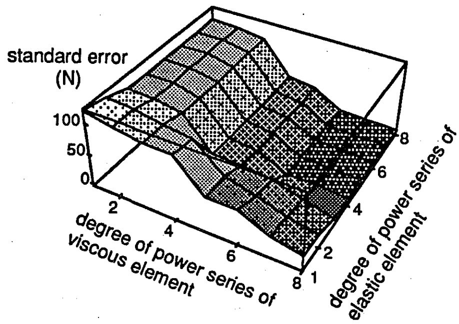
それぞれの試験によって求められたパラメータを Table 1に示す。

6．べき級数型と従来のモデルとの同定精度の比較

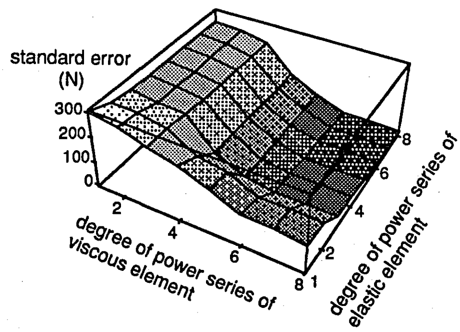
べき級数型非線形 Voigt モデル（以下べき級数型と呼ぶ）の有効性を検討するために，実数型非線形 Voigt モデル（以下実数型と呼ぶ），整数型 Voigt モデル（以下整数型と呼ぶ）との精度の比較



(a) light impact



(b) medium impact



(c) heavy impact

Fig. 5 Standad errors between the measured force and the estimated force by using various pair of viscous power series and elastic power series, when three collision tests using the softball against the force plate. Viscous power series and elastic power series are varied from 1-degree to 8-degree.

Table 1　Parameters of viscous and elastic power series of each test.

lawn	parameters of elastic element				
	k1	k2	k3	k4	k5
light	-8.67×10^{3}	-6.48×10^{7}	-4.56×10^{8}	1.87×10^{9}	-2.39×10^{15}
medium	4.11×10^{4}	-1.21×10^{8}	-1.39×10^{9}	2.30×10^{8}	1.33×10^{14}
heavy	3.96×10^{4}	-1.79×10^{8}	9.37×10^{8}	1.82×10^{9}	1.50×10^{14}

lawn	parameters of viscous element			
	c1	c2	c3	c4
light	9.83×10^{1}	-2.78×10^{2}	8.48×10^{2}	-3.92×10^{2}
medium	5.58×10^{1}	-1.97×10^{1}	6.89×10^{1}	-1.31×10^{1}
heavy	8.84×10^{1}	3.45×10^{0}	4.20×10^{0}	4.51×10^{0}

softball	parameters of elastic element				
	k1	k2	k3	k4	k5
light	6.13×10^{4}	-3.85×10^{7}	7.50×10^{7}	7.75×10^{8}	8.10×10^{12}
medium	2.78×10^{5}	-3.48×10^{7}	-7.95×10^{8}	8.58×10^{8}	-8.74×10^{13}
heavy	6.01×10^{5}	-7.22×10^{7}	-1.32×10^{9}	-1.52×10^{9}	-1.52×10^{14}

softball	parameters of viscous element					
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
light	1.76×10^{1}	-1.16×10^{1}	1.38×10^{1}	-8.04×10^{0}	2.44×10^{1}	-2.77×10^{-1}
medium	-5.72×10^{1}	-2.07×10^{1}	1.55×10^{1}	-5.36×10^{-1}	-3.00×10^{-1}	2.26×10^{-2}
heavy	-1.71×10^{2}	5.50×10^{1}	-1.05×10^{1}	2.10×10^{0}	-1.82×10^{-1}	5.08×10^{-3}

を行なった。

Fig. 6に芝生の heavy の試験における各モデルによる推定を示す。べき級数型の推定は弾性要素群が5次まで，粘性要素群が4次までのパラメータを用いている。実測値に対するそれぞれの推定値の標準誤差は実数型が84.55N，整数型が79.65N，べき級数型が17.07Nであり，実測値の最大値に対する標準誤差の比はそれぞれ，9.66%，9.10%，1.95%であった。従って，べき級数型の推定精度は他のモデルと比較して非常に高く，芝生のモデル化には適当であると考えられる。

芝生と同様に，軟式野球ボールの heavy の試験における各モデルによる推定を Fig. 7に示す。べき級数型は弾性要素群が5次まで，粘性要素群が6次までのパラメータを用いて推定を行なった。軟式野球ボールの場合もべき級数型の推定精度は他のモデルと比較して非常に高く，軟式野球ボールのモデル化にも適当であると考えられる。

芝生および軟式野球ボールの heavy の試験における各モデルの実測値と推定値の標準誤差を Table. 2に示す。

また，芝生，軟式野球ボールについての衝撃強度の異なる他の試験についても，芝生は弾性要素群が5次まで，粘性要素群が4次までのパラメータを用いて精度の高い推定が可能であり，軟式野球ボールでは弾性要素群が5次まで，粘性要素群が6次までのパラメータを用いて精度の高い推定が可能である。

7．ま と め

芝生や軟式野球ボールなどは，従来の線形 Voigt モデル，あるいは小林によって提案された実数型非線形 Voigt モデルでは高い精度の同定が不可能であった。本研究では，複雑な構造を有する対象に対しても適用できるような，べき級数型非線形 Voigt モデルおよびそのパラメータ同定法を提案する。

変形変位 x の関数として表される弾性的抵抗力 F_k を x のべき級数により近似し，同様に変形速度 $\dot{x}$ の関数として表される粘性的抵抗力 F_c を $\dot{x}$ のべき級数で近似し，外力に対する全抵抗が F_k+F_c により表されると考える粘弾性モデルがべき級数

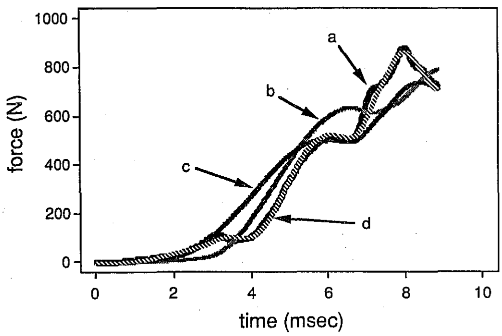


Fig. 6　Comparison of the measured curve (a) with the estimated curves (b,c,d) when the heavy load test is applied on the lawn.
a: measured curve.
b: estimated curve of the heavy load test by using the model parameters identified supposing that the lawn is linear Voigt model.
c: estimated curve of the heavy load test by using the model parameters identified supposing that the lawn is nonlinear Voigt model.
d: estimated curve of the heavy load test by using the model parameters identified supposing that the lawn is nonlinear Voigt model represented as a pair of viscous power series and elastic power series.

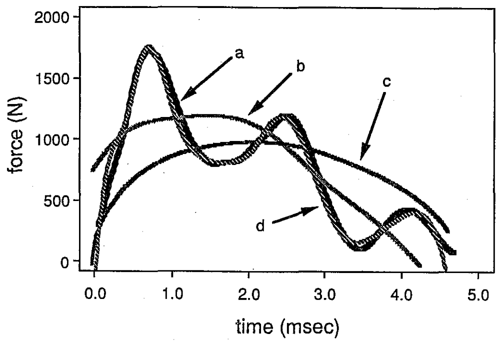


Fig. 7　Comparison of the measured curve (a) with the estimated curves (b,c,d) when the heavy collision test is applied on the softball.
a: measured curve.
b: estimated curve of the heavy collision test by using the model parameters identified supposing that the softball is linear Voigt model.
c: estimated curve of the heavy collision test by using the model parameters identified supposing that the softball is nonlinear Voigt model.
d: estimated curve of the heavy collision test by using the model parameters identified supposing that the softball is nonlinear Voigt model represented as a pair of viscous power series and elastic power series.

Table 2　Standard errors and error ratios of each model of the lawn and the softball.

type of model	lawn		softball	
	standard error(N)	error ratio(%)	standard error(N)	error ratio(%)
linear Voigt model	79.65	9.10	302.25	17.61
nonlinear Voight model	84.55	9.66	430.88	25.10
power series Voigt model	17.07	1.95	30.63	1.78

error ratio is ratio of standard error against the maximum force of each test.

型非線形 Voigt モデルである。

べき級数型非線形 Voigt モデルの特徴を以下に示す。

(1)各パラメータは物体の変形変位，変形速度のべき級数を独立変数と考え，重回帰分析の手法を応用することにより容易に同定することができる。

(2)一般に弾性要素群，粘性要素群共にべき級数展開の次数を上げるほど実験値と推定値との標準誤差は小さくなるが雑音に対するフィルタリング効果や計算の困難さなどを考慮して適当な次数で打ち切ることが必要である。芝生，軟式野球ボール等，非線形性の強い物体でも 4 ～ 6 次以内で十分な同定精度が得られた。

本研究の要旨は日本体育学会第40回大会において発表したものであり，平成元年度筑波大学学内プロジェクト助成研究費による研究の一部である。

Refernces

1）土居陽治郎，小林一敏：筋肉の硬さ測定に関する研究，筑波大学体育科学系紀要，第11巻，265—274，1988.

2）Bibby,Duane：LATEX-A Document Perparation System, Addison-Wesley Publishing Company, 41—54, 1986.

3）小林一敏：衝撃加速度から変位の算出，J.J. Sports Sci., Vol. 6, No. 3, 185—190, 1987.

4）小林一敏：筋の粘弾性装置の試作，日本体育学会第38回大会号，706, 1987.

5）小林一敏：衝撃試験法による緩衝材および筋の非線形粘弾性特性の測定法，筑波大学体育科学系紀要，第11巻，205—211, 1988.

6）小林一敏，湯川治敏：多段階衝撃試験法による緩衝材および筋の非線形粘弾性モデルのパラメータ同定法，筑波大学体育科学系紀要，第12巻，145—151, 1989.

7）高分子学会レオロジー委員会編：レオロジー測定法，共立出版，198—211, 1965.

8）Becker, Richard A., Chambers, John M. and Wilks, Allan R.: The New S Language, Wadsworht & Brooks/Cole Computer Sceince Series, 151—211, 1988.

9）佐藤秀紀，岩田佳雄，内潟敏明：一自由度非線形系のパラメータ同定法，日本機械学会論文集（C編)，第54巻497号，87—92, 1988.

10) Masri, S.F. and Caughey, T.K.: A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Dynamic Problems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, June, 1979.

11) Wolfram, Stephen: Mathematica, Addison-Wesley Publishing Company, 120—140, 1988.

12) Yang, Yongxin and Ibrahim,S.R.: A Nonparametric Identification Technique for a Variety of Discrete Nonlinear Vibrating Systems, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, January, 60—66, 1985.