

2階微分フィルターによる加速度の算出法

宮 地 力

A Method to Calculate the Acceleration Using Second Order Differential Filter

Chikara MIYAJI

In the field of biomechanics, there are many methods to calculate acceleration using the second order derivative from position information. This study examines these methods from the viewpoint of transfer function and describes the characteristics of an optimum filter. Then this study explains a new method of designing such filters.

The results of this study are summarized as follows:

- 1) Existing methods of calculating acceleration do not always produce correct results.
- 2) Viewing the second derivative computation as a filter, the transfer function can be obtained. From that transfer function, the frequency response and the phase response of the computation method can be examined.
- 3) From the viewpoint of frequency response, the existing method produces results which are very close to the mathematical values at lower frequency. Above an angular frequency of approximately 0.2π the results are increasingly less than the mathematical values.
- 4) The most suitable filter to use to get the acceleration for film analysis is one that gives the true value from zero to some suitable frequency, and then produces a zero gain from this point to maximum frequency.
- 5) The filter with these characteristics achieves a wider range of accuracy than the existing methods and obtains better cutoff at high frequencies. This method also has the advantage of shorter computation time and space requirements, since cascaded filters are not needed.

1. 緒 言

身体におよぼされる力や、その時の加速度は、身体運動の解析における主要なパラメータの一つである。身体にかかる力は、その運動を規定する。この力は、直接的にフォースプレートや加速度計などにより求められる場合もあるが、直接的に測定できない場合も多い。例えば、フォースプレートでは、身体外部から働く力しか測定できず、身体内部での関節間トルクなどの値を求めることはできない。また、加速度計では、装着に関し、その部位の運動方向が変化せず、回転の影響を受けないことや、装着部位の皮膚などに余分な振動が生じないこと等の条件が必要とされている^{10) 12)}。また、運動によっては、装着困難な場合もある。現在まで、力や加速度の測定には、前述の方法を用いる他に、16mm, 8 mm, ビデオなどの画像や、ポジションセンサーを使って変位を求め、そ

こから、微分演算をほどこして力や加速度を求める方法が良く用いられている。これは、身体にとりつけるものがないため、運動を制限することがなく、力や加速度を求める以外にも、多くの運動解析に用いられている手法である。

しかし、画像から2階微分演算により加速度を求める場合、加速度データが原データに含まれているノイズの影響を受けて、真の値を求めることが難しいといわれる¹⁷⁾。そこで、微分演算に関しては、ノイズを何らかの方法により除去してから演算を行うことが一般的である。

現在まで、画像分析における各種のノイズに関して、いくつかの研究がなされてきている。レンズとそのゆがみに関してTeraud²³⁾や石島³⁾らによるものがある。カメラの振動、回転むら、人間の読みとり誤差等から生ずるノイズに関し、小林^{5) 6) 7) 8)}、大島¹⁶⁾の研究がある。また、得られた

画像データからノイズ成分をフィルタリングする手法についても、種々の方法が提案されている。Winter²⁵⁾やPezzack¹⁸⁾は、デジタルフィルターを設計した。スプライン関数を用いたものに、McLaulin¹³⁾, Zernike²⁶⁾, 斉藤²¹⁾がある。また、チェビシェフ多項式を用いたPlagenhoef¹⁹⁾の方法や、往復反復型フィルターを設計した小林¹⁷⁾, 微分フィルターを設計した宮地¹⁵⁾がある。

加速度を求める演算は、前述のフィルターと、微分演算をカスケード的に結合して求めることが多い。例えば、原データを平滑したのち微分し、再度微分を行う場合や、その微分の間に平滑を2回ほどこすなど、数々の組合せがある。そして、このような組合せた処理過程が、適切な方法であるか、演算的にいかなる意味をもつか、という点に関しては、Lanshammar¹¹⁾による研究の他は、現在まで、あまりなされていない。

本研究では、画像データから加速度を求める2階微分演算に関し、その演算の特性を、伝達関数の観点から明らかにし、現在まで用いられている方法について、周波数特性の面から検討を加えた。また、その演算を、一つのフィルターとしてとらえることにより、2階微分フィルターを設計し、その方法が、加速度を求める際、現在までの方法より、ノイズの影響を受けにくく、演算量も少ない計算方法であることを示した。

2. 加速度算出上の問題点

現在まで、広く用いられている数値微分の公式は、洪川²²⁾, Winter²⁴⁾, やMiller¹⁴⁾らの与えている

$$V(n) = \frac{X(n+\Delta h) - X(n-\Delta h)}{2\Delta h} \quad \text{--- 1.1}$$

$X(n)$: 入力

$V(n)$: 微分値

である。ここで、 Δh は、きざみ幅であり、 $\Delta h=1$ としても一般性を失わない。そこで、1.1式は

$$V(n) = \frac{X(n+1) - X(n-1)}{2} \quad \text{--- 1.2}$$

と書ける。加速度は、1.2式を用いて微分し、その値を再度微分することにより、求められる。

そこで、原波形を

$$X(n) = \sin(0.3\pi n) \quad \text{--- 1.3}$$

で与えた場合、1.2式を用いて数値的に2階微分を求めることができる。また、数学的に1.3式を、2階微分すると、

$$\frac{d^2}{dn^2} X(n) = -0.09\pi^2 \sin(0.3\pi n) \quad \text{--- 1.4}$$

の式が得られる。数値的2階微分の値を図-1に示す。数値的微分と数学的微分は、位相は同じであるが、数値微分の振幅が、数学的微分より、減

○ : Mathematical second derivative

▲ : Numerical second derivative

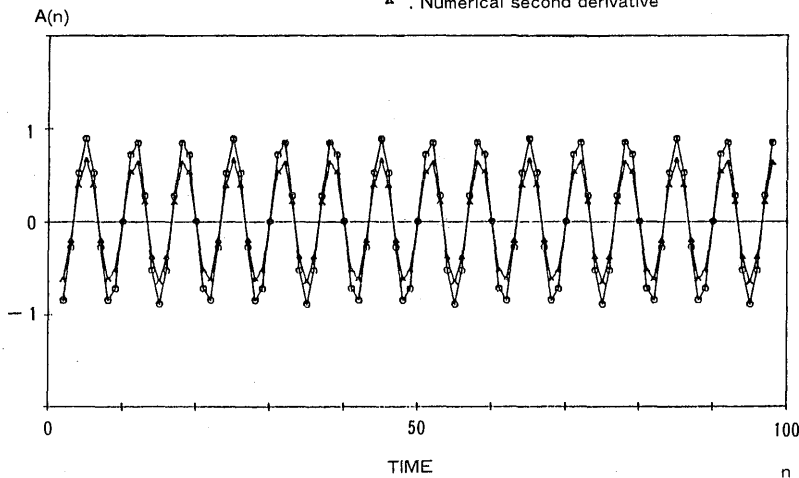


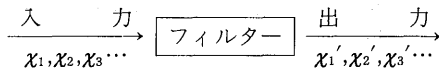
Fig. 1. Mathematical second derivative of $\sin(0.3\pi n)$, and Numerical second derivative using Center Differential Method

少していることがわかる。

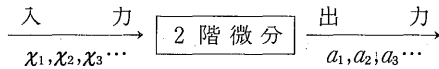
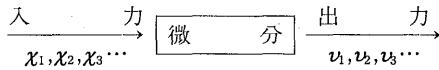
このことから、式から得られる誤差のない値の微分であっても、数値微分が正確な値とはならないことを示している。

3. 伝達関数としての2階微分

フィルタリングとは、ハイパスフィルターやローパスフィルターなどのように、ある信号から、ノイズ成分を取り除く時に、広く用いられている方法である。



フィルターをある入力に対し、何らかの操作をほどこし、出力を与える関数としてとらえた場合、ノイズをカットするフィルターのみならず、微分、2階微分もフィルターとして、とらえることができる。



フィルターとして、2階微分をとらえた場合、その特性も、他のハイパスフィルターなどと同様に、周波数特性と位相特性の2つから、示すことができる。このことは、2階微分の伝達関数を求めることに他ならない。

伝達関数 $H(\omega)$ は、入力信号 $X(n)$ に Phasar²⁰⁾ を用いて、

$$X(n) = e^{i\omega n} \quad \text{3.1}$$

$\left\{ \begin{array}{l} i : \text{虚数} \\ \omega : \text{角周波数} \\ n : \text{時間} \end{array} \right.$

とし、出力が $Y(n)$ である時、

$$H(\omega) = \frac{Y(n)}{X(n)} \quad \text{3.2}$$

として求めることができる。

微分演算の伝達関数は、

$$Y(n) = \frac{d}{dn} e^{i\omega n} = i\omega e^{i\omega n} \quad \text{3.3}$$

から、

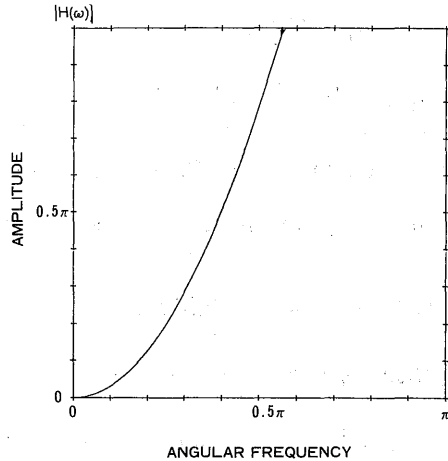


Fig. 2. Frequency response of second derivative

$$H(\omega) = i\omega \quad \text{3.4}$$

と求められる。

2階微分の伝達関数は、同様に

$$Y(n) = \frac{d^2}{dn^2} X(n) = \frac{d^2}{dn^2} e^{i\omega n} = -\omega^2 e^{i\omega n} \quad \text{3.5}$$

であるから、

$$H(\omega) = -\omega^2 \quad \text{3.6}$$

である。

この伝達関数の周波数特性 $|H(\omega)|$ を、図-2に示す。この周波数特性から、2階微分においては、周波数の2乗に比例して、その振幅が増幅されることがわかる。このことが、加速度の算出にあたり、高周波のノイズが大きく増幅されて信号波形に重畳してくる理由である。また位相は、全周波数にわたり、 π 進んでいる。

4. 現在までの加速度算出法の伝達関数

現在まで広く用いられている加速度の演算法に対する伝達関数を求めた。

4.1 平均差分による方法

前述の1.2の式を2度用いて2階微分を求める方法は、

$$V(n+1) = \frac{X(n+2) - X(n)}{2} \quad \text{4.1}$$

$$V(n-1) = \frac{X(n) - X(n-2)}{2} \quad \text{4.2}$$

$$A(n) = \frac{V(n+1) - V(n-1)}{2} \quad \text{4.3}$$

において、4.3に4.1, 4.2式を代入することにより、

$$A(n) = \frac{1}{4} (-2X(n) + X(n+2) + X(n-2)) \quad \text{4.4}$$

と変形できる。4.4式の伝達関数は、

$$H(\omega) = \frac{1}{4} (-2 + 2 \cos 2\omega) \quad \text{4.5}$$

$$= \frac{1}{2} (-1 + \cos 2\omega) \quad \text{4.6}$$

$$= \sin^2 \omega \quad \text{4.7}$$

となる。

この伝達関数の周波数特性を、図-3に示す。低周波においては、図-2の理論値に近く、高周波になるに従い、振幅が減少していきることがわかる。例えば0.3πの角周波数での2階微分の振幅は、理論値よりも低い。これは、図-1に示される数値微分値の振幅が、理論値より小さいことを、周波数軸上から示したものである。

4.2 5点移動2次式近似による方法

X(n-2), …… X(n+2)までの5点が与えられれば、その5点を図-4に示すように2次曲線近似

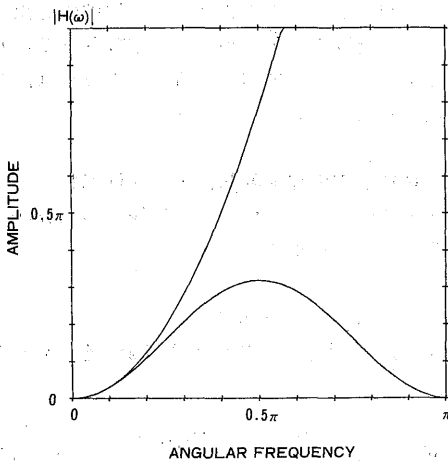


Fig. 3. Frequency response of Center Difference Method

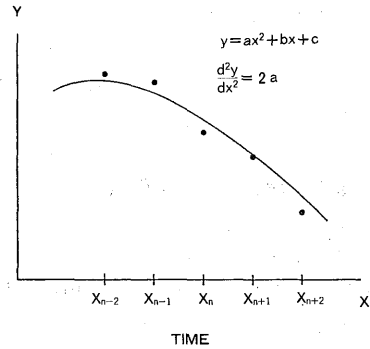


Fig. 4. Diagram of Five Points Moving Average Method

することができる。

その2次曲線を

$$Y = ax^2 + bx + c \quad \text{4.8}$$

とした時、

$$a = \frac{1}{14} [2X(n-2) - X(n-1) - 2X(n) - X(n+1) + 2X(n+2)] \quad \text{4.9}$$

$$b = \frac{1}{10} [-2X(n-2) - X(n-1) + X(n+1) + 2X(n+2)] \quad \text{4.10}$$

$$c = \frac{1}{70} [-6X(n-2) + 24X(n-1) + 34X(n) + 24X(n+1) - 6X(n+2)] \quad \text{4.11}$$

となる。

この曲線の2階微分は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \quad \text{4.12}$$

である。そこでX(n)点での2階微分値を4.9と4.12を用いて、

$$A(n) = \frac{2}{14} [2X(n-2) - X(n-1) - 2X(n) - X(n+1) + 2X(n+2)] \quad \text{4.13}$$

とあらわせる。この5点を順次移動させていくことにより、各点での2階微分値を求めることができる。

4.3式の伝達関数は

$$H(\omega) = -\frac{2}{7} (1 + \cos \theta - 2 \cos 2\theta) \quad \text{4.14}$$

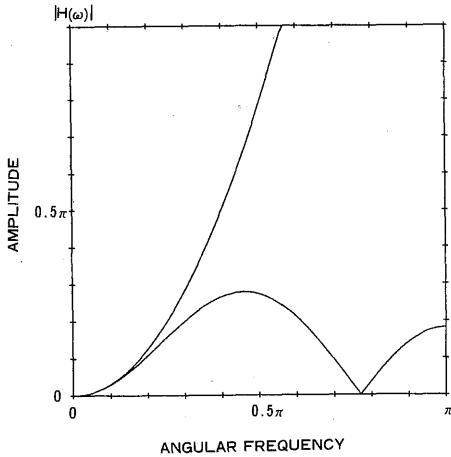
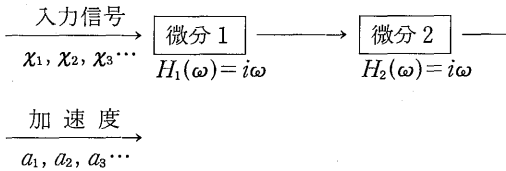


Fig. 5. Frequency response of Five Points Moving Average Method

となる。4.14式の周波数特性を、図-5に示す。平均差分によるものと同様の周波数特性を示すが、 $0.4\pi \sim 0.8\pi$ の角周波数では、増幅率が平均差分より小さく、 $0.8\pi \sim \pi$ では、逆に大きくなっている。

5. フィルターのカスケード接続

加速度は、直接計算する代りに、2回の微分演算を行うことによっても求められる。



1回目の微分の結果を X' とすれば、

$$X'(n) = H_1(\omega) X(n) \quad \text{—————} \quad 5.1$$

$$A(n) = H_2(\omega) X'(n) \quad \text{—————} \quad 5.2$$

となることから、5.1, 5.2式より

$$A(n) = H_1(\omega) H_2(\omega) X(n) \quad \text{—————} \quad 5.3$$

と変形できる。当然のことながら、

$$i\omega \cdot i\omega = -\omega^2 \quad \text{—————} \quad 5.4$$

となり、微分1と微分2をまとめた伝達関数は、2階微分の伝達関数となる。

$$H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) \quad \text{—————} \quad 5.5$$

このことから、フィルター処理のカスケード接続は、伝達関数の積となることがわかる。

例えば、図-6に示されるフィルターの接続の伝達関数は、

$$A(n) = H_1(\omega) H_2(\omega) H_3(\omega) H_4(\omega) X(n) \quad \text{—————} \quad 5.6$$

であり、それは、

$$A(n) = H(\omega) X(n) \quad \text{—————} \quad 5.7$$

とまとめることができる。

ここで得られる $H(\omega)$ の特性とは、低周波において2階微分の周波数特性をもち、ある周波数を境として、それ以上の周波数を遮断してしまう、図-7の特性が、最も望ましい特性と言えよう。図-3, 図-5に示される現在までの2階微分の周波数特性は、低周波において、真の特性に近いものの、高周波の減衰が不足していることがわかる。このことが、2階微分演算を行う前にデータの高周波フィルタリングを行う理由となっている。高周波フィルタリングの操作は、5.7式の $H(\omega)$ に、積として含むことができることから、図-7の特性をもつ2階微分フィルターが、求められれば、多重フィルターのカスケード接続を必要とせず、加速度を求めることができる。このことは、また演算の量、計算スペースも減らし、計算時間も短縮することとなる。

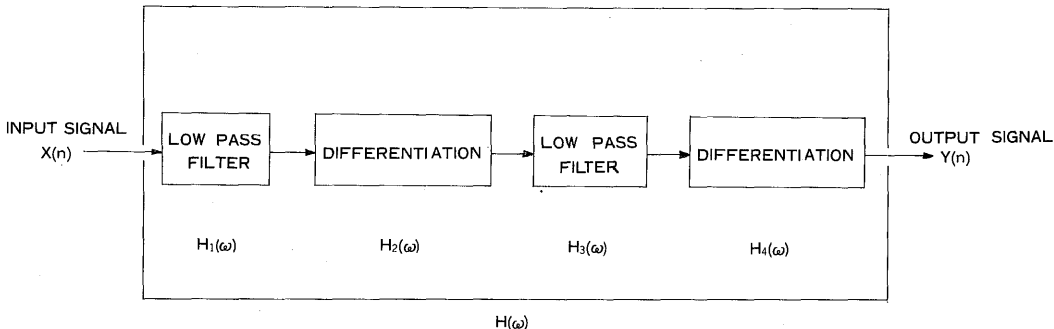


Fig. 6. A sample of cascade connection of filter

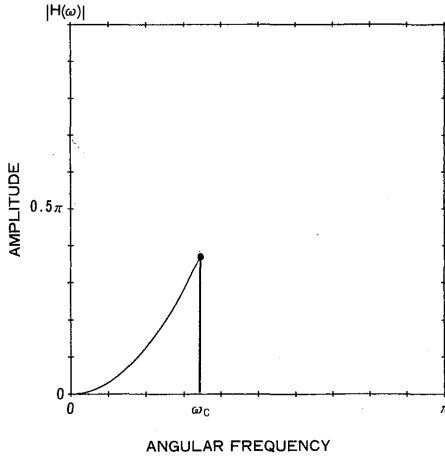


Fig. 7. Optimal frequency response of Second Order Differential Filter

6. 2階微分フィルターの設計

図-7に示された2階微分フィルターの特性は、以下にまとめられる。

$$H(\omega) = \begin{cases} -\omega^2 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad 6.1$$

$H(\omega)$ は偶関数であることから、そのフーリエ展開は、

$$H(\omega) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \cos k\omega \quad 6.2$$

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H(\omega) \cos k\omega \, d\omega \quad 6.3$$

とあらわされる。ここで、6.1を用いて6.3を変形すると、

$$C_k = \int_0^{\omega_c} -\omega^2 \cos k\omega \, d\omega \quad 6.4$$

なる。6.4式の右辺の積分を、筑波大学学術情報処理センターの数式処理システムREDUCE³⁾を用いて求めた。その結果を図-8に示す。

そこで、

$$C_k = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\omega_c^2 \sin k\omega_c}{k} + \frac{2\omega_c \cos k\omega_c}{k^2} - \frac{2\sin k\omega_c}{k^3} \right) \quad 6.5$$

となる。

また、 C_0 は $\omega=0$ において $H(\omega)=0$ となることか

REDUCE
SLISP : 4100712 BYTES

```

REDUCE 3.1, 15-Apr-84...
1 :
INT(W**2*COS(W*K),W);
(SIN(K*W) *K**2*W**2 - 2 *SIN(K*W) + 2 *COS(K*W) *K*W)/K**3
2 :
BYE;
*** END OF RUN
READY
    
```

Fig. 8. REDUCE output

ら、

$$H(0) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k = 0 \quad 6.6$$

$$C_0 = -2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \quad 6.7$$

として求めた。

フィルターを、伝達関数が偶関数となるよう係数を対称に選ぶならば、

$$A(n) = b_k(X(n+k) + X(n-k)) + b_{k-1}(X(n+k-1) + X(n-k+1)) + \dots + b_1(X(n+1) + X(n-1)) + b_0X(n) \quad 6.8$$

となる。ここで、 b_k はフィルターの係数、 $A(n)$ は、求める2階微分関数である。

6.8式の伝達関数は、

$$H(\omega) = b_0 + \sum_{k=1}^n 2b_k \cos k\omega \quad 6.9$$

となる。6.2式と6.9式を対応づけるならば、

$$b_0 = \frac{1}{2} C_0 \quad 6.10$$

$$2 \cdot b_k = C_k \quad 6.11$$

となる。そこで、 b_k の各係数は、

$$b_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} C_k \quad 6.12$$

$$b_k = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_c^2 \sin k\omega_c}{k} + \frac{2\omega_c \cos k\omega_c}{k^2} - \frac{2\sin k\omega_c}{k^3} \right) \quad 6.13$$

となる。しかし、 b_k は、フィルターの係数であり、その次数は有限であるため、有限で打切ると、ギ

ブスの現象¹⁾から、周波数特性が乱れる。そのため、6.12式にランチョス窓のシグマ因子²⁾を乗じた。そこで、

$$b_k = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\omega_c^2 \operatorname{sinc} \omega_c}{k} + \frac{2\omega_c \operatorname{cos} k \omega_c}{k^2} - \frac{2\operatorname{sinc} k \omega_c}{k^3} \right] \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi k}{n+1} \right)}{\left(\frac{\pi k}{n+1} \right)} \quad 6.14$$

n : フィルターの次数

$$b_0 = -\sum_{k=1}^n C_k \quad 6.15$$

となる。6.14と6.15を用いて、2階微分フィルターの係数を求めることができる。

この2階微分フィルターの周波数特性を、 $N=20$ 、 $\omega_c=0.2\pi$ 、 0.3π 、 0.4π の場合について図-9、10、11に示した。どの条件においても低周波で理論値によく一致し、また、遮断周波数以上の帯域では、振幅がほとんどないことがわかる。

2階微分フィルターと、式4.4による平均差分による方法を比較した。

入力波形は、図-12に示される

$$X(n) = \sin 0.1\pi n + 0.3 \cos 0.6\pi n \quad 6.16$$

である。サインの項の2階微分を、求める値とし、コサインの項は、高周波のノイズ成分とした。そこで、数学的2階微分は、サイン項を微分することにより

$$A(n) = -0.01\pi^2 \sin 0.1\pi n \quad 6.17$$

である。

6.17式と数値微分による値とを、図-13、14に示す。図-13の平均差分による方法では、高い周波数のノイズ成分が重畳しているが、2階微分フィルターを用いた図-14では、ノイズ成分がほとんど除去され、真の値と良く一致している。

このことから、適切に2階微分フィルターの次数、遮断周波数を選ぶことによって、ノイズ成分を除去した微分値が、多重の演算、フィルタリングの過程を必要とせずに、得られることがわかる。

7. まとめ

現在まで、バイオメカニクス分野において、フィルムなどの位置情報を2階微分して加速度を

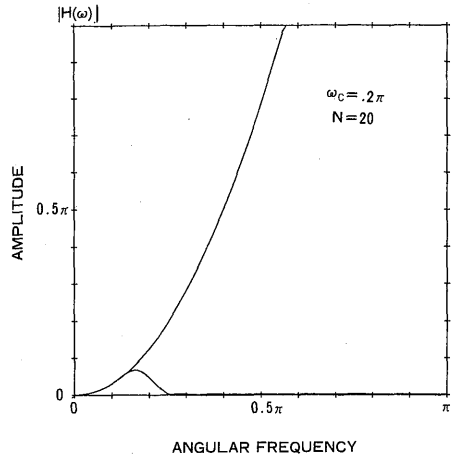


Fig. 9. Frequency response of Second Order Differential Filter

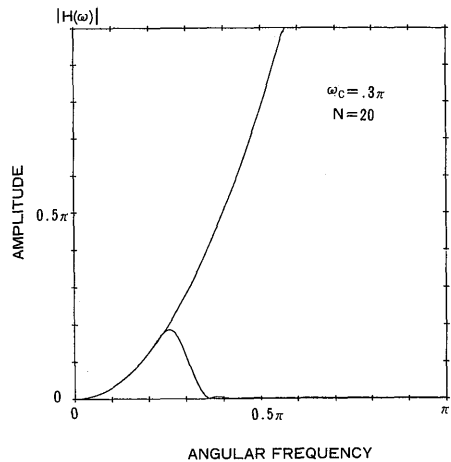


Fig. 10. Frequency response of Second Order Differential Filter

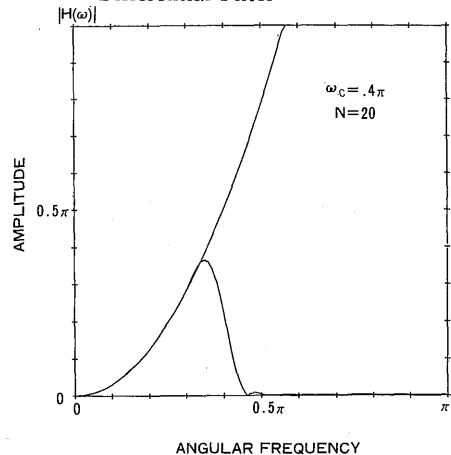


Fig. 11. Frequency response of Second Order Differential Filter

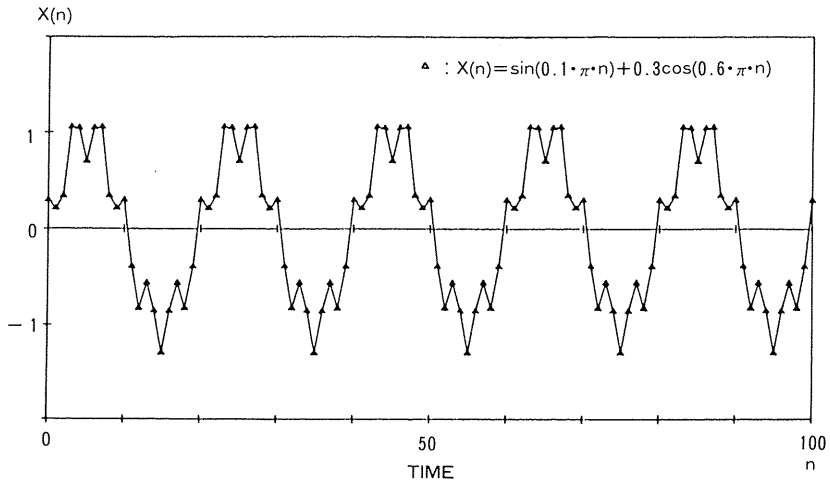


Fig. 12. Input signal

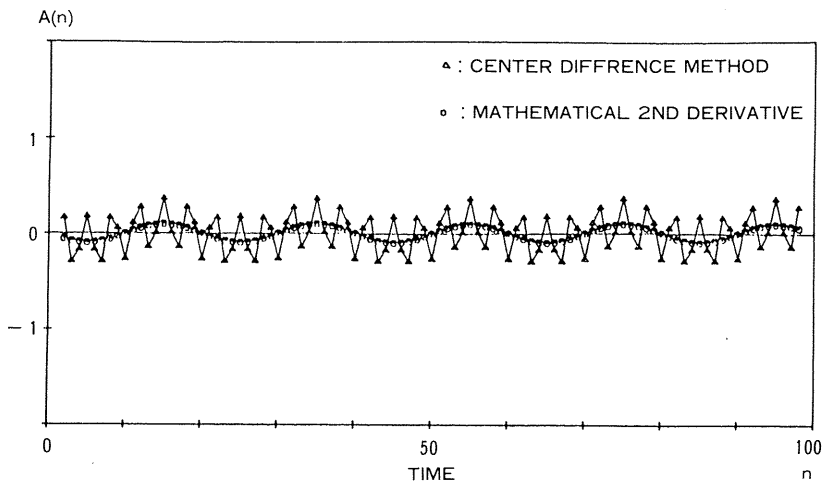


Fig. 13. Second Derivative using Center Difference Method and Mathematical second derivative

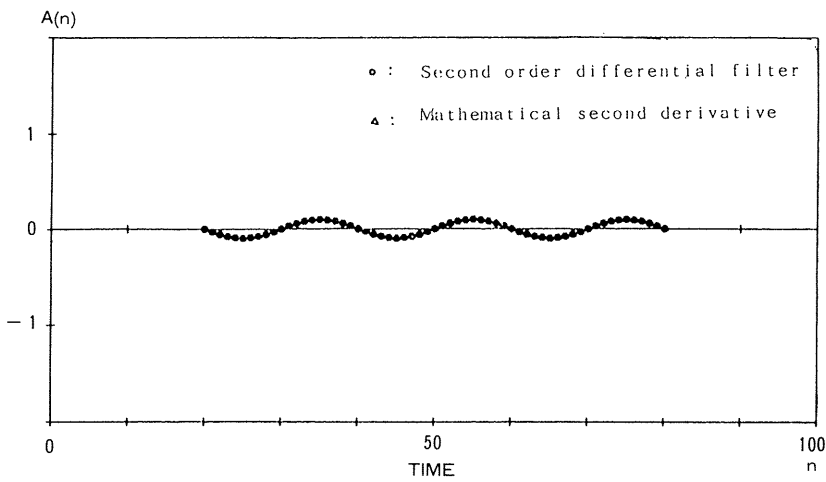


Fig. 14. Second Order Differential Filter output and mathematical second derivative (exactly corresponding)

求める方法は、いくつかある。本研究は、それらの2階微分の演算方法を、伝達関数の面からとらえ、その特性を明らかにした。また、最適な2階微分フィルターの特性を求め、そのフィルターの設計方法を示した。そして、2階微分フィルターが、現在までの方法に比べ、多重の演算、フィルタリングの過程を必要とせず、精度の高い加速度を求められることを示した。

結果は以下のようにまとめられる。

- 1) 現在まで用いられている加速度の算出法は、必ずしも真の値を与えていない。
- 2) 加速度を求める2階微分の演算を、フィルターとしてとらえることで、その伝達関数を求められる。その伝達関数から、演算の周波数特性と位相特性を検討することが可能になる。
- 3) 現在までの加速度の算出法は、周波数特性からみた場合、低い周波数において真の値に近いが、 0.2π の角周波数附近より、減衰が多くなり、なおかつ、高周波での減衰が不足しており、最適な方法とはいえない。
- 4) フィルム分析などにおいての加速度を求める演算は、必要とされる周波数域で真の値をとり、それ以上の遮断周波数からは、ゲインが0となるフィルターが適当である。
- 5) (4)の特性をもつ2階微分フィルターは、現在までの方法に比べ、真の値に等しい範囲が広く、また、高周波の遮断もすぐれている。この方法は、フィルターのカスケード接続を必要とせず、単一のフィルターで充分であることから、計算の時間、演算のスペースにおいても有利な方法であると考えられた。

参 考 文 献

- 1) ゴールドスタイン, R.H. 末包良太, 米口肇, 太伏茂之訳: 計算機の歴史, 共立出版社, 1979, PP.58-66
- 2) ハミング, R.H. 宮川 洋, 今井秀樹訳: デジタルフィルタ, 科学技術出版社, 1980, PP.104-106.
- 3) Hearn, A.C.: REDUCE user's Manual ver.3, Rand Publication, Santa Monica, 1983, PP.29-30.
- 4) 石島 繁, 渋谷侃二, 斎藤慎一: 16mmカメラにおけるレンズの影響について, 身体運動の科学IV, 杏林書院, 1983, PP.336-345.
- 5) 小林一敏: 画像雑音のfiltering (バイオメカニクス専門分科会シンポジウム), 日本体育学会第32回大会号, 1981, P.87.
- 6) 小林一敏, 中田 了: 射影変換による画像ノイズの除去, 日本体育学会第32回大会号, 1981, P.401.
- 7) 小林一敏, 中田 了: 往復反復型指数フィルターによる平滑化, 日本体育学会第34回大会号, 1983, P.362.
- 8) 小林一敏: 映像解析における諸問題, Jap.J.of Sports Sci, 2-3, 160-162, 1983.
- 9) 小林一敏, 大島義晴: 映像解析におけるフィルタリング, Jap. J. of Sports Sci, 2-3, 172-181, 1983.
- 10) 小林一敏, 前田 寛, 中田 了, 飯本雄二: 加速度計を用いた身体加速度の測定法に関する研究, 筑波大学体育科学系紀要 6, 147-153, 1983.
- 11) Lanshammar, H.: On practical Evaluation of differentiation techniques for human gait analysis, J. of Biomechanics, 15-2: 99-105, 1982.
- 12) 前田 寛, 小林一敏: 加速度計の測定法に関する一考察, 日本体育学会第33回大会号, 1982, P.395.
- 13) McLaughlin, T.M., C.J.Dillman, and T.J. Lardner: biomechanical analysis with cubic spline function, Res. Quart., 48: 569-582, 1977.
- 14) Miller, D.J. and R.C.Nelson: Biomechanics of sport. Lea & Febiger, Philadelphia, 1973, pp. 245-246.
- 15) 宮地 力, 小林一敏: 画像分析による速さの測定, Jap. J. of Sports Science, 3-9, 666-674.
- 16) 大島義晴, 小林一敏, 中田 了: 映画分析におけるノイズの周波数の特性, 日本体育学会第32回大会号, 1981, P.399.
- 17) 大道 等: 写真解析の読み取り誤差と微分演算, Jap. J. of Sports Science, 2-3, 1983.
- 18) Pezzack, J.C., R.W.Norman, and D.A.Winter: An assesment of derivative determining techniques used for motion analysis, J. of Biomechanics, 10: 377-382, 1977.
- 19) Plagenhoef, S.C.: Patterns of Human motion, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971, pp. 175-186.
- 20) Stieglitz, K.: An introduction to discrete System, John Wiley & Sons, New York, 1974, pp. 40-44.
- 21) 斎藤慎一, 横井孝志: スプラインとデジタルフィルターによるデータスムージングのためのbasicプログラム, 筑波大学体育科学系紀要 5: 201-203, 1982.
- 22) 渋谷侃二ほか編: 体育学実験・演習概説, 大修館, 1982, pp.201-203.
- 23) Terauds, J. (ed.): Science in biomechanics cinematography, Academic Publishers, Del Mar, Calif. 1979, pp.183-184.

- 24) Winter, D.A.: Biomechanics of human movement, John Willey & Sons, New York, 1979, pp. 43-44.
- 25) Winter D.A., H.G.Sidwall and D.A.Hobson: Measurement and reduction of noise in Kinematics of Locomotion, J. Biomechanics, 7: 157-159, 1974.
- 26) Zernike, R.F., G.Caldwall, and E.M. Roberts: Fitting biomechanical data with cubic spline function; Res. Quart.47: 9-18, 1976.